Quadrangulations de surfaces

Matěj Stehlík

17/11/2020

22e Journées Graphes et Algorithmes

Introduction

Surfaces

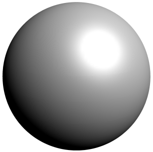
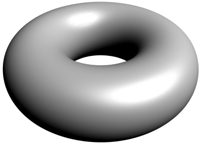
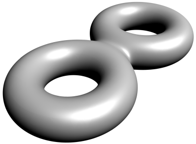
Définition

Une surface (fermée) est un espace topologique où le voisinage de tout point ressemble au plan.

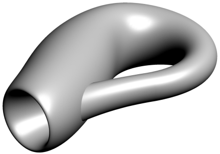
- Deux types de surfaces : orientable et non orientables.
- Toute surface orientable peut être construite à partir de la sphère en ajoutant des “anses”.
- Le nombre des anses : le genre de la surface.
- Toute surface non orientable peut être construite à partir de la sphère en ajoutant des “cross-caps”.
- Le nombre des cross-caps : le genre de la surface.

Quelques exemples de surfaces

- Surfaces orientables :

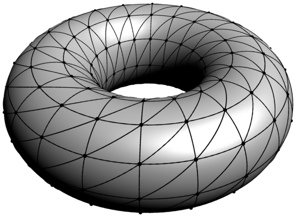




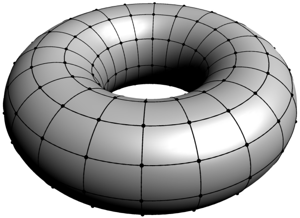
- Surfaces non orientables :

Triangulations et quadrangulations

- Graphe G plongé dans une surface : dessin de G dans la surface de sorte que ses arêtes s'intersectent uniquement en leurs extrémités
- Triangulation : faces bordées par 3 arêtes
- Quadrangulation : faces bordées par 4 arêtes





Le plan projectif réel

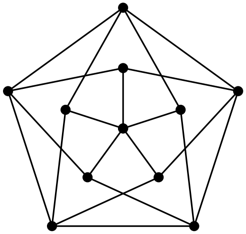
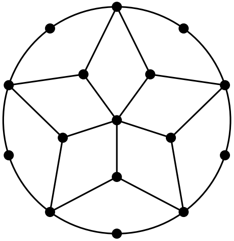
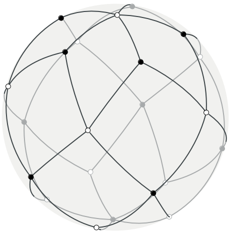
- Surface non orientable de genre 1.
- Pas réalisable en 3 dimensions, mais plusieurs modèles:
  1. Recoller un ruban de Möbius et un disque le long de leur bord

  2. Un disque où l'on a identifié les points antipodaux de la circonférence
  3. Une sphère où l'on a identifié les points antipodaux

Quadrangulations du plan projectif

Deux représentations utiles des quadrangulations projectives :

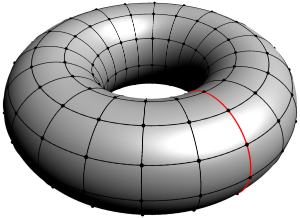
- quadrangulation du disque symétrique sur le bord où l'on identifie les sommets et les arêtes antipodaux sur le bord.
- quadrangulation symétrique de la sphère où l'on identifie les sommets et les arêtes antipodaux.

Graphes localement planaires

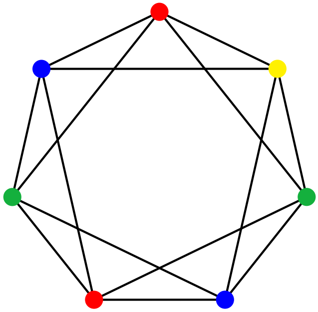
Définition

- Soit G un graphe plongé dans une surface autre que la sphère.
- La largeur en arêtes $\mathrm{ew}(G)$ est longueur minimale d'un cycle non contractile dans G.



Coloration

Coloration et nombre chromatique



$\chi(G) = 4$

- k-coloration: attribution de k couleurs aux sommets t.q. sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes.
- Nombre chromatique $\chi(G)$: entier k minimum t.q. il existe une k-coloration de G.

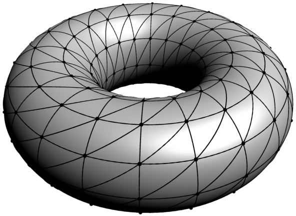
Coloration de triangulations

Théorème (Thomassen 1997)

Soit S une surface autre que la sphère. Toute triangulation de S de largeur en arêtes suffisamment grande est 5-coloriable.

Théorème (Fisk 1978)

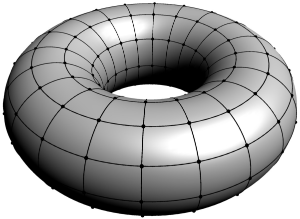
Soit S une surface autre que la sphère. Il existe des triangulations de S de largeur en arêtes arbitrairement grande qui ne sont pas 4-coloriables.



Coloration de quadrangulations des surface orientables

Théorème (Hutchinson 1995)

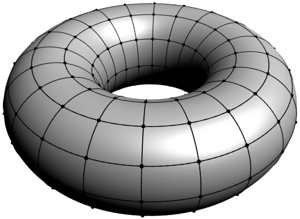
Soit S une surface orientable autre que la sphère. Toute quadrangulation de S de largeur en arêtes suffisamment grande est 3-coloriable.



Coloration de quadrangulations des surface orientables

Théorème (Hutchinson 1995)

Soit S une surface orientable autre que la sphère. Toute quadrangulation de S de largeur en arêtes suffisamment grande est 3-coloriable.

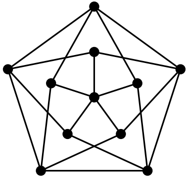


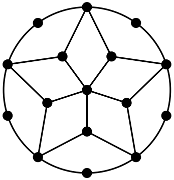
Théorème (Youngs 1996)

Toute quadrangulation du plan projectif est soit bipartie, soit 4-chromatique.

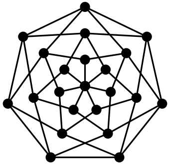
Exemples de quadrangulations du plan projectif

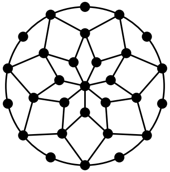
graphe de Grötzsch



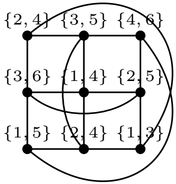


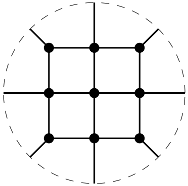
graphe de Mycielski généralisé





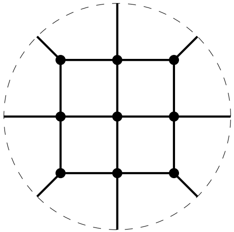
sous-graphe du graphe de Kneser $\mathrm{KG}(6,2)$

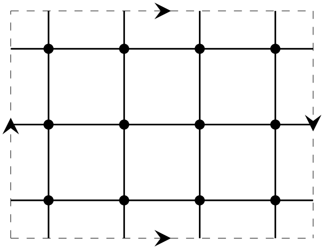




Coloration de quadrangulations des surface non orientables

Théorème (Archdeacon et al. 2001 ; Mohar & Seymour 2002)
Soit G une quadrangulation d'une surface non orientable ayant un cycle impair C tel que si l'on découpe la surface selon C, on obtient une surface orientable. Alors, $\chi(G) \geq 4$.

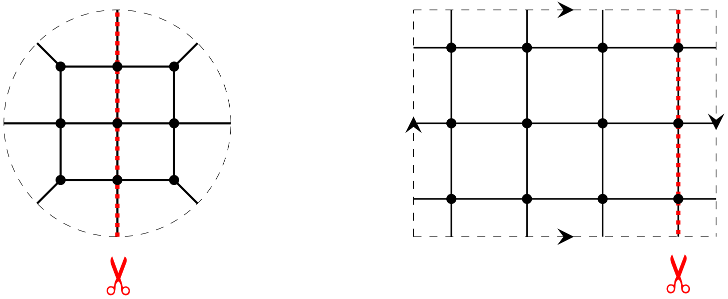




Coloration de quadrangulations des surface non orientables

Théorème (Archdeacon et al. 2001 ; Mohar & Seymour 2002)

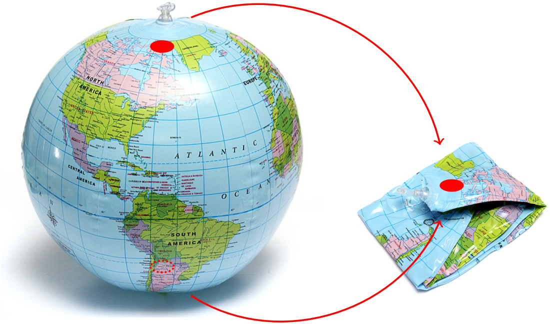
Soit G une quadrangulation d'une surface non orientable ayant un cycle impair C tel que si l'on découpe la surface selon C, on obtient une surface orientable. Alors, $\chi(G) \geq 4$.



Le théorème de Youngs : manifestation du théorème de Borsuk–Ulam

Théorème de Borsuk–Ulam (Borsuk 1933)

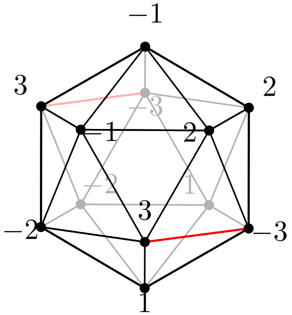
Pour toute fonction f continue d'une sphère dans le plan euclidien, il existe deux points antipodaux ayant même image par f.



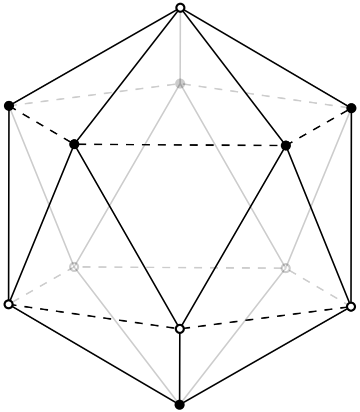
Une version discrète de Borsuk–Ulam

Lemme de Fan

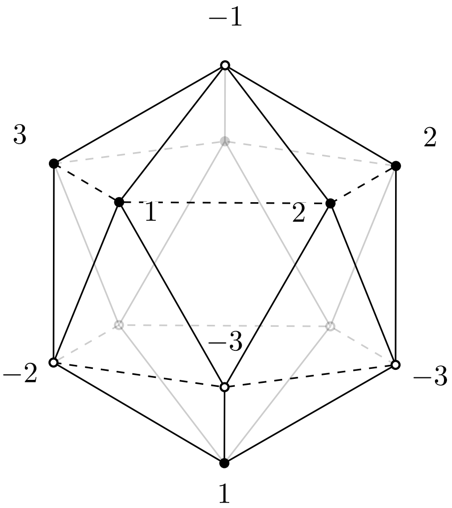
- Soit K une triangulation symétrique de la sphère.
- Soit $\lambda : V(K) \to \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ un étiquetage où $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ pour tout $v \in V(K)$ et toute face est incidente à des sommets positifs et négatifs.
- Alors, il existe une arête $uv \in K$ t.q. $\lambda(u) + \lambda(v) = 0$.



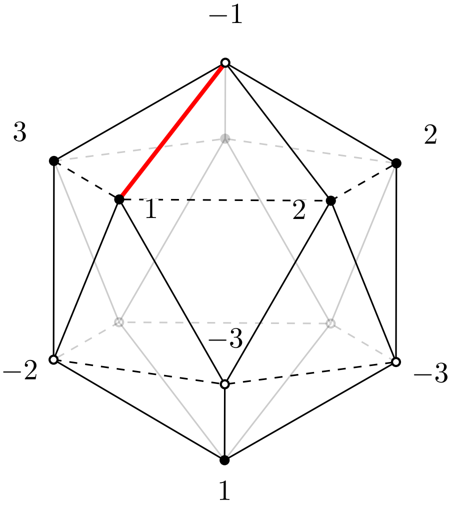
Démonstration du théorème de Youngs



Démonstration du théorème de Youngs



Démonstration du théorème de Youngs



Généralisation à une dimension supérieure

- D'autres preuves du théoreme de Youngs plus élémentaires sont connues.
- Notre preuve montre que Youngs est équivalent à Borsuk–Ulam (2-dimensionnel).
- La preuve se généralise facilement aux dimensions supérieures.

Théorème (Tomáš Kaiser & MS 2015)

Soit G une quadrangulation de l'espace projectif de dimension d. Alors, $\chi(G) \geq d+2$, sauf si G est biparti.

Application aux graphes de Kneser

Théorème (Tomáš Kaiser & MS 2017)

Le graphe de Kneser $\mathrm{KG}(n, k)$ contient une quadrangulation non bipartie de l'espace projectif de dimension $n - k$.

- En conjonction avec le théorème de Youngs généralisé, on retrouve :

Théorème (Lovász 1978)

Le graphe de Kneser $\mathrm{KG}(n, k)$ est $(n - 2k + 2)$-chromatique.

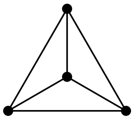
Parfois, les surfaces apparaissent comme par magie…

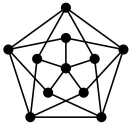
Graphes localement bipartis

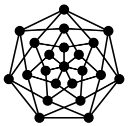
Question (Erdős 1974)

Tout graphe 4-chromatique à n sommets a-t-il un cycle impair de longueur $O(\sqrt{n})$?

- Oui (Kierstead, Szemerédi & Trotter 1984)
- Les graphes de Mycielski généralisés montrent que la borne est au moins $\frac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7})$.







A refinement of Erdős's question

Conjecture (Louis Esperet & MS 2018)

Tout graphe 4-chromatique à n sommets a un cycle impair de longueur au plus $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{8n-7})$.

Théorème (Louis Esperet & MS 2018)

La conjecture est vraie si tous les cycles impairs s'intersectent deux à deux.

- La preuve utilise les surfaces ! (Plus précisément, les quadrangulations du plan projectif.)

Graphs sans deux cycles impairs sommet-disjoints

Théorème (Lovász ~1990 ; Slilaty 2007 ; Kawarabayashi & Ozeki 2013)

Soit G un graphe 4-connexe. Alors, G n'a pas deux cycles impairs sommet-disjoints ssi une des conditions suivantes est satisfaite :

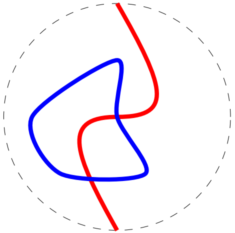
1. il existe un sommet v tel que $G - v$ est biparti
2. il existe un triangle avec arêtes e_1, e_2, e_3 t.q. $G - \{e_1, e_2, e_3\}$ est biparti
3. $|V(G)| \leq 5$
4. G peut être plongé dans le plan projectif de sorte que toutes les faces sont bordées par un nombre pair d'arêtes.

Courbes fermées dans le plan projectif

Lemme

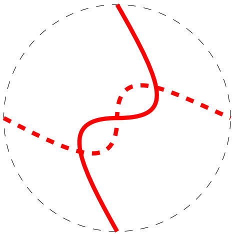
Le plan projectif a deux types de courbes simples fermées :

- les courbes contractiles
- les courbes non contractiles.



Lemme

Deux courbes simples fermées non contractiles dans le plan projectif s'intersectent un nombre impair de fois.



Cycles impairs dans les quadrangulations du plan projectif

Lemme

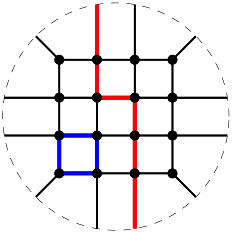
Une quadrangulation du plan projectif est bipartie

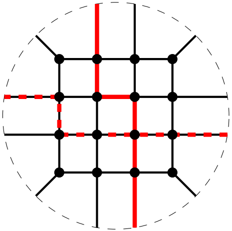
$$\Updownarrow$$

elle contient un cycle non contractile pair.

Lemme

Les cycles impairs dans une quadrangulation (non bipartie) du plan projectif s'intersectent deux à deux.





Largeur en arêtes des quadrangulations du plan projectif

Théorème (Louis Esperet & MS 2018)

Si G est une quadrangulation du plan projectif avec f faces, alors

$$f \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{ew}(G)(\mathrm{ew}(G) - 1).$$

La borne est atteinte par une famille infinie de graphes.

- La preuve utilise le théorème de Lins (1981).
- Liens avec la géométrie (*conjecture de la zone de remplissage*).
- L'analogue continu de la largeur en arêtes s'appelle la systole.

Largeur en arêtes des quadrangulations du plan projectif

Théorème (Louis Esperet & MS 2018)

Si G est une quadrangulation du plan projectif avec n sommets, alors

$$n - 1 \geq \frac{1}{2}\,\mathrm{ew}(G)(\mathrm{ew}(G) - 1).$$

La borne est atteinte par une famille infinie de graphes.

- La preuve utilise le théorème de Lins (1981).
- Liens avec la géométrie (*conjecture de la zone de remplissage*).
- L'analogue continu de la largeur en arêtes s'appelle la systole.

Largeur en arêtes des quadrangulations du plan projectif

Théorème (Louis Esperet & MS 2018)

Si G est une quadrangulation du plan projectif avec n sommets, alors

$$\mathrm{ew}(G) \leq \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{8n-7}).$$

La borne est atteinte par une famille infinie de graphes.

- La preuve utilise le théorème de Lins (1981).
- Liens avec la géométrie (*conjecture de la zone de remplissage*).
- L'analogue continu de la largeur en arêtes s'appelle la systole.