École d'été
Analyse Harmonique et Approximation Rationnelle

île de Porquerolles
14-20 Septembre 2003

Signaux de turbulence et analyse de Mellin

Pierre Borgnat
Pierre.Borgnat@ens-lyon.fr

Laboratoire de physique, ÉNS Lyon
Équipe Sisyphe (Signaux, Systèmes et Physique)

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LYON

Adresse actuelle (post-doc INRIA) - Signal Processing Group,
Instituto de Sistemas e Robotico, IST, Lisbonne

Plan de l'exposé

1 - Introduction à la turbulence et à ses signaux

- Turbulence et analyses statistiques

- Turbulence et structures organisées

Plan de l'exposé

1 - Introduction à la turbulence et à ses signaux

- Turbulence et analyses statistiques
- Turbulence et structures organisées

2 - Processus aléatoires auto-similaires

- Représentation de Mellin
- Transformation de Lamperti
- Analyse spectale adaptée
- Analyse conjointe en Mellin et Fourier

Plan de l'exposé

1 - Introduction à la turbulence et à ses signaux

- Turbulence et analyses statistiques
- Turbulence et structures organisées

2 - Processus aléatoires auto-similaires

- Représentation de Mellin
- Transformation de Lamperti
- Analyse spectale adaptée
- Analyse conjointe en Mellin et Fourier
- Conclusion

Plan de l'exposé

1 - Introduction à la turbulence et à ses signaux

- Turbulence et analyses statistiques

- Turbulence et structures organisées

2 - Processus aléatoires auto-similaires

- Représentation de Mellin

- Transformation de Lamperti

- Analyse spectale adaptée

- Analyse conjointe en Mellin et Fourier

- Conclusion

Remerciements à Olivier Michel (labo d'astronomie, université de Nice)
Christophe Baudet (LEGI, Université de Grenoble)
Patrick Flandrin (labo de physique, ÉNS Lyon)
Pierre-Olivier Amblard (LIS, INPG Grenoble)

Introduction à la turbulence

Introduction à la turbulence

Équation de Navier-Stokes

$$\rho D_t \vec{v} = \rho \Big(\underbrace{\partial_t \vec{v}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}_{\text{dérivée convective}} \Big) = -\vec{\nabla} p + \underbrace{\rho \nu \Delta \vec{v}}_{\text{terme de viscosité}} + \vec{f}_v$$

Introduction à la turbulence

Équation de Navier-Stokes

$$\rho D_t \vec{v} = \rho \Big(\underbrace{\partial_t \vec{v}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}_{\text{dérivée convective}} \Big) = -\vec{\nabla} p + \underbrace{\rho \nu \Delta \vec{v}}_{\text{terme de viscosité}} + \vec{f}_v$$

$$\text{Re} = \frac{[\text{non-linéaire}]}{[\text{visqueux}]} = \frac{UL}{\nu}$$

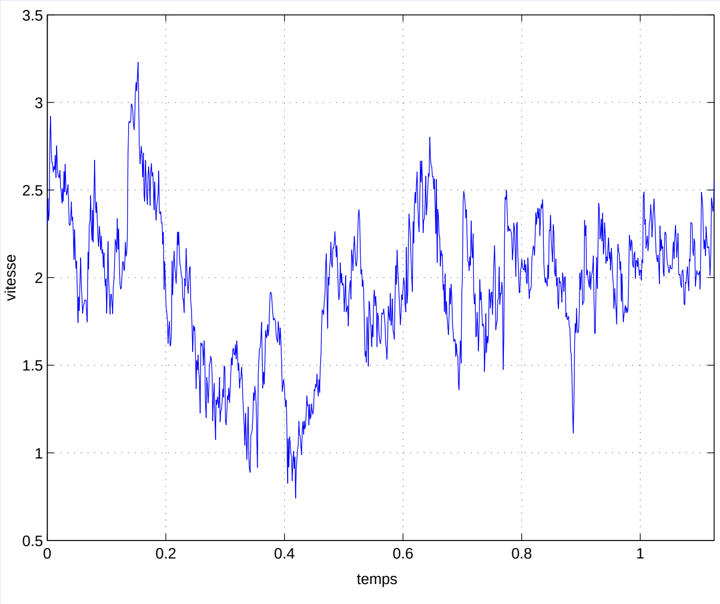
Introduction à la turbulence

Équation de Navier-Stokes

$$\rho D_t\vec{v} = \rho\Big(\underbrace{\partial_t\vec{v}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}_{\text{dérivée convective}} \Big) = -\vec{\nabla}p + \underbrace{\rho\nu\Delta\vec{v}}_{\text{terme de viscosité}} + \vec{f}_v$$

$$\mathrm{Re} = \frac{[\text{non-linéaire}]}{[\text{visqueux}]} = \frac{UL}{\nu} \gg 1$$

Mesures eulériennes de vitesse (expérience GReC dans de l'hélium à 4,5 K)



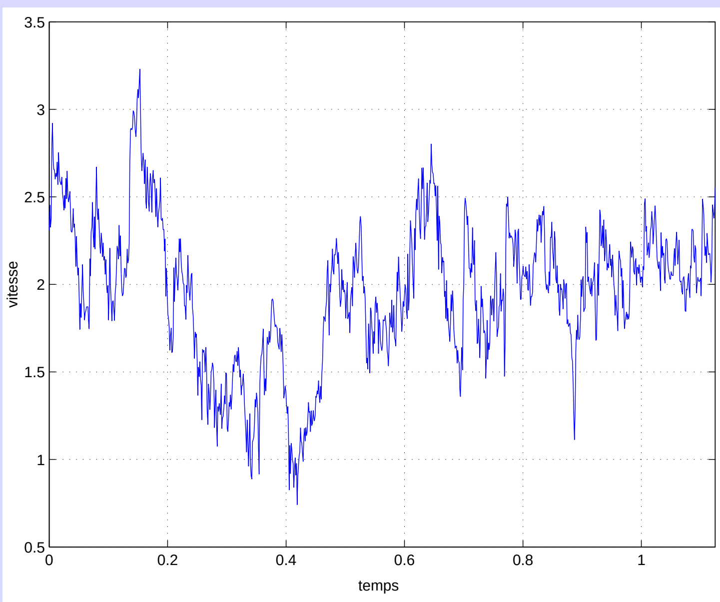
Introduction à la turbulence

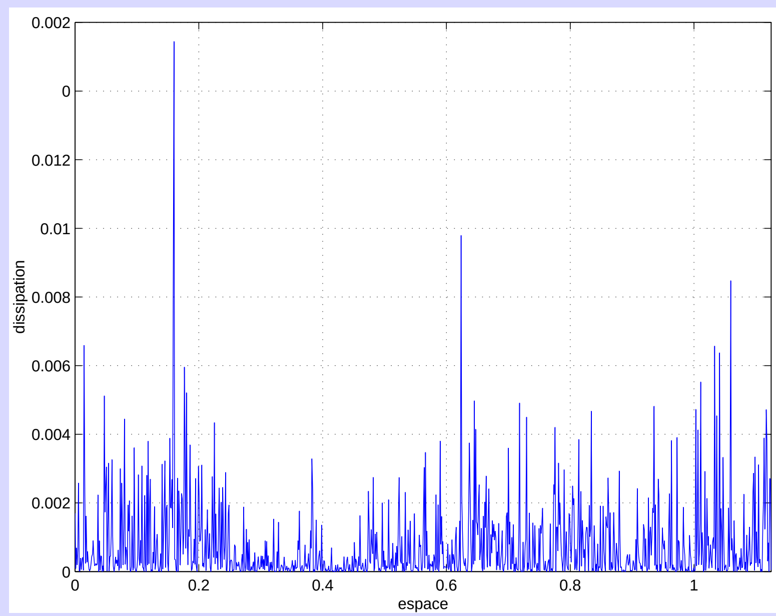
Équation de Navier-Stokes

$$\rho D_t\vec{v} = \rho\Big(\underbrace{\partial_t \vec{v}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}_{\text{dérivée convective}}\Big) = -\vec{\nabla} p + \underbrace{\rho\nu\Delta\vec{v}}_{\text{terme de viscosité}} + \vec{f}_v$$

$$\mathrm{Re} = \frac{[\text{non-linéaire}]}{[\text{visqueux}]} = \frac{UL}{\nu} \gg 1$$

Mesures eulériennes de vitesse (expérience GReC dans de l'hélium à 4,5 K)





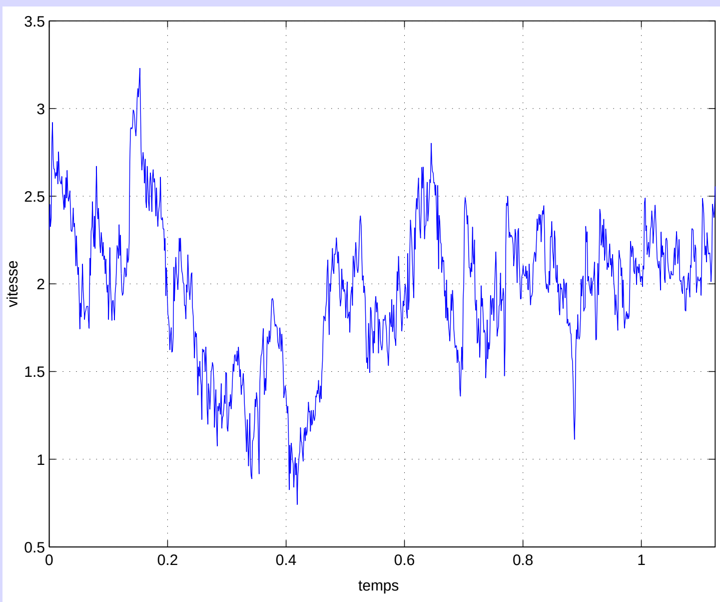
Introduction à la turbulence

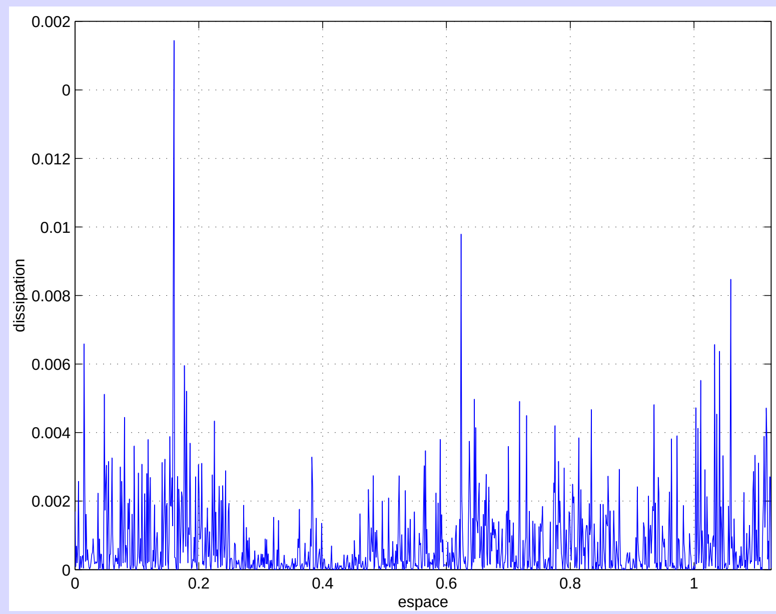
Équation de Navier-Stokes

$$\rho D_t\vec{v} = \rho\Big(\underbrace{\partial_t\vec{v}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}_{\text{dérivée convective}}\Big) = -\vec{\nabla}p + \underbrace{\rho\nu\Delta\vec{v}}_{\text{terme de viscosité}} + \vec{f}_v$$

$$\text{Re} = \frac{[\text{non-linéaire}]}{[\text{visqueux}]} = \frac{UL}{\nu} \gg 1$$

Mesures eulériennes de vitesse (expérience GReC dans de l'hélium à 4,5 K)



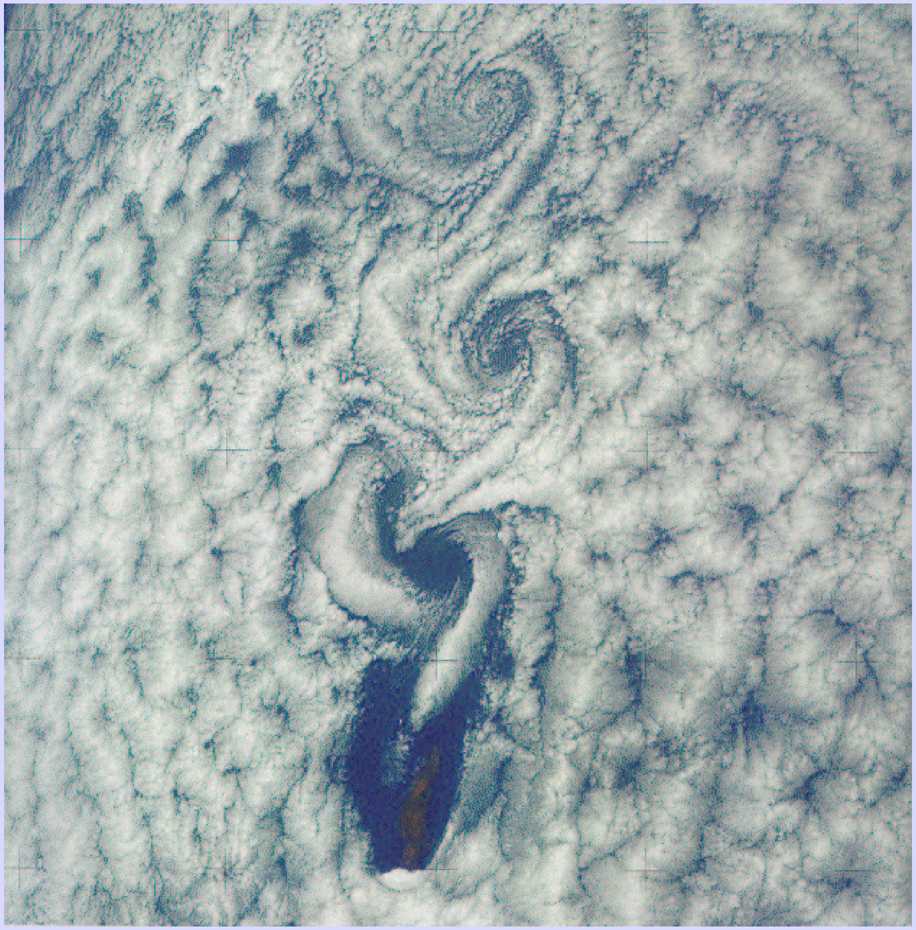


Dissipation $\epsilon \sim \nu < \dfrac{\mathrm{d}(\vec{v}^2)}{\mathrm{d}t} > /2$

Géométrie des écoulements et tourbillons

Géométrie des écoulements et tourbillons

Géométrie des écoulements et tourbillons



Géométrie des écoulements et tourbillons

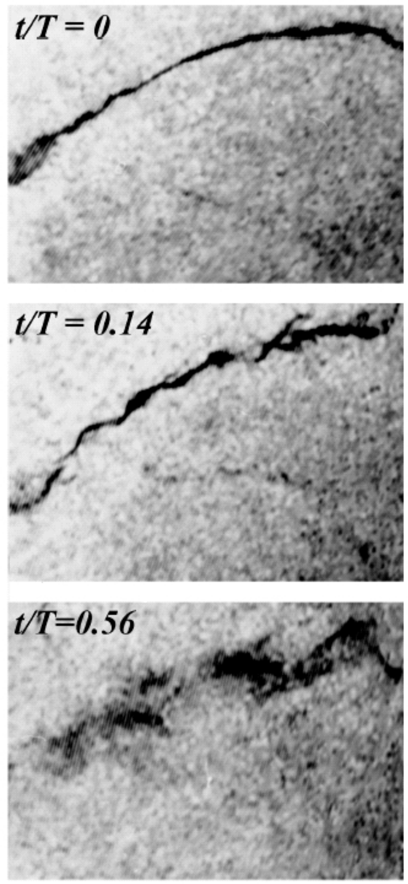
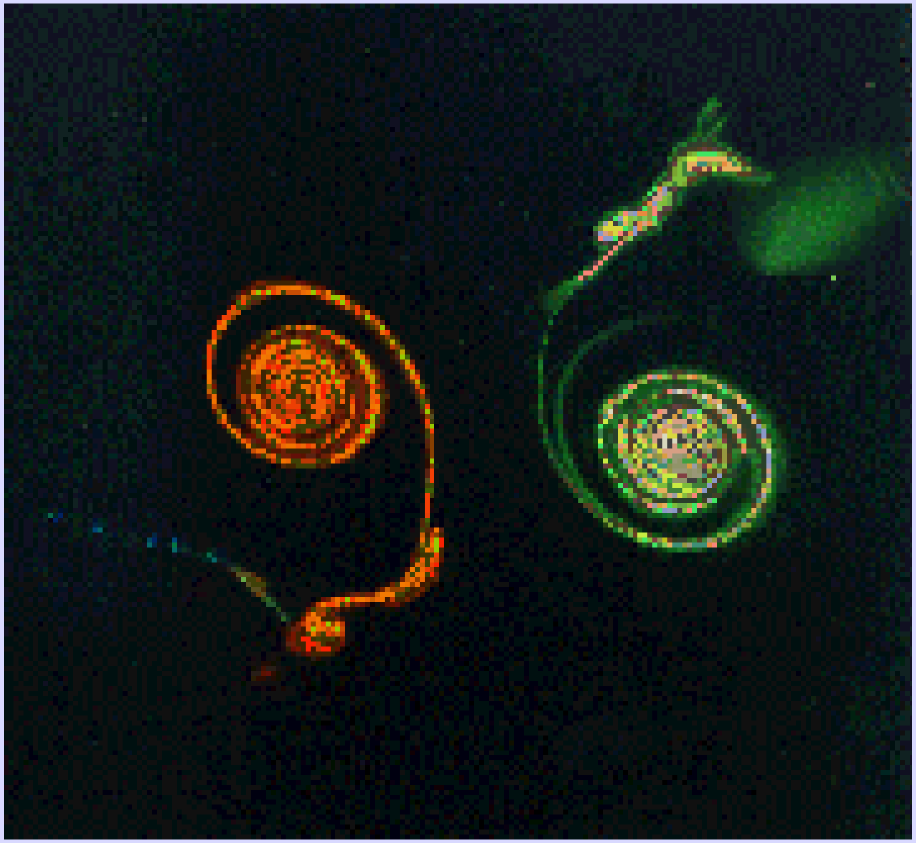


Figure 3. *Visualisation de l'éclatement d'un filament de basse pression dans la turbulence à Re = 400 000. Le temps est adimensionné par le temps de retournement des grandes échelles.*

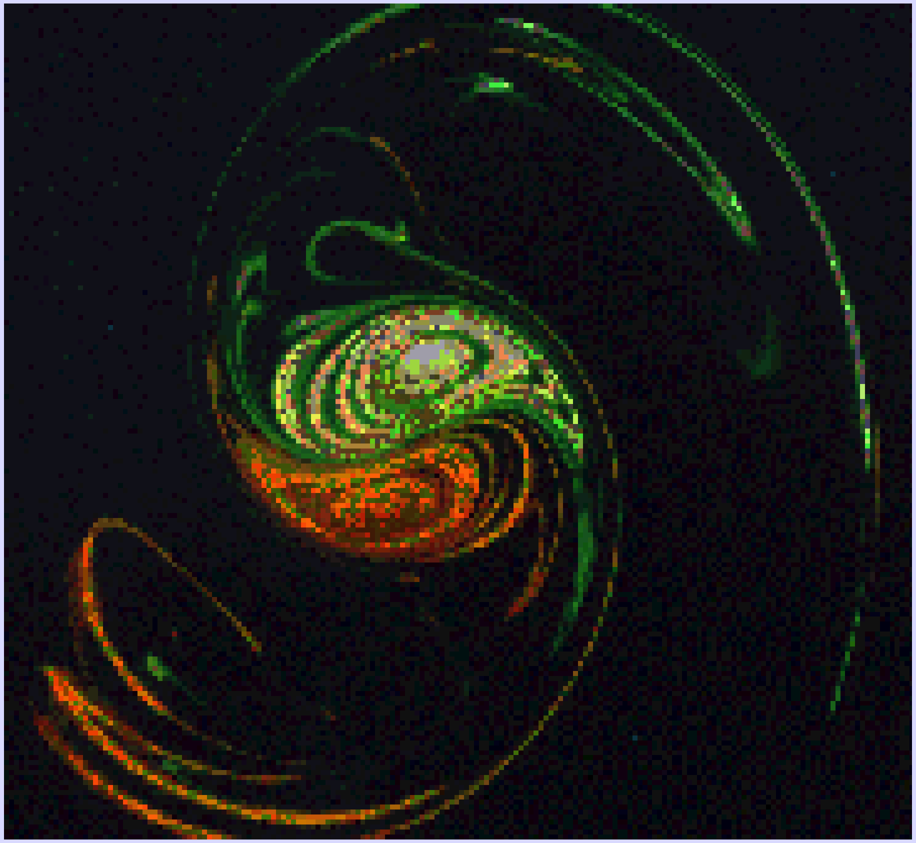
Douady, Couder, Brachet (1991)

Géométrie des écoulements et tourbillons



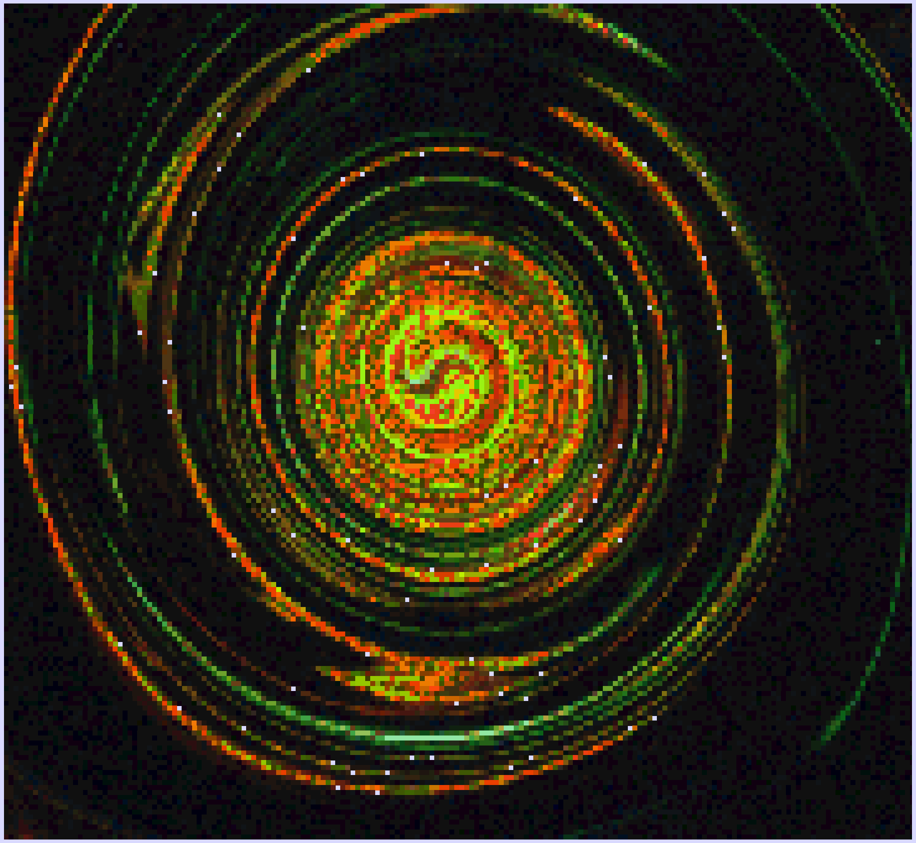
Meunier, Leweke *et al.* (IRPHE, 2000)

Géométrie des écoulements et tourbillons



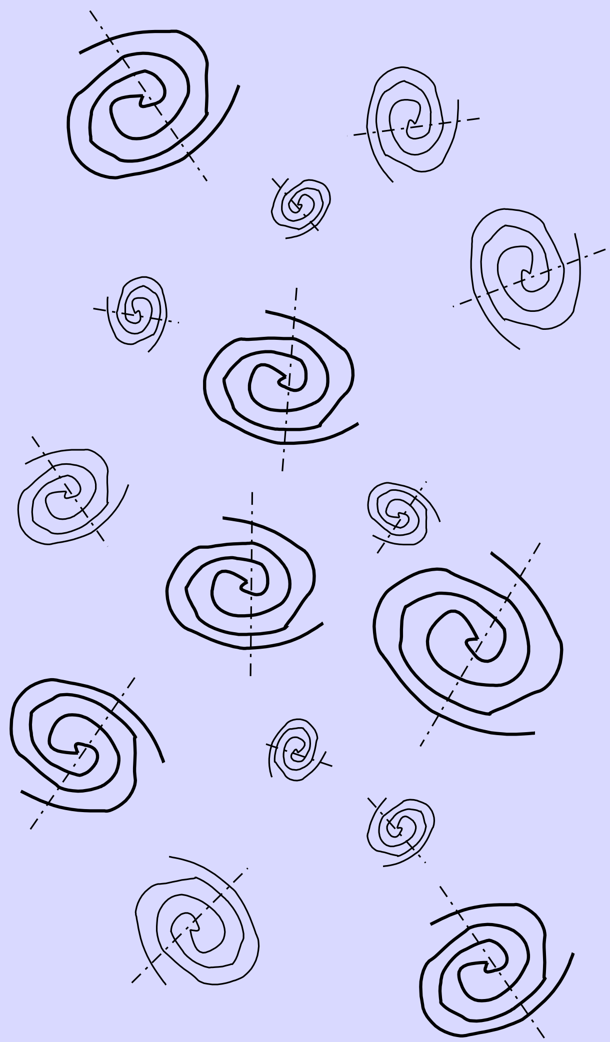
Meunier, Leweke *et al.* (IRPHE, 2000)

Géométrie des écoulements et tourbillons



Meunier, Leweke *et al.* (IRPHE, 2000)

Géométrie des écoulements et tourbillons



Théorie de Kolmogorov (1941)

- Hypothèses sur le comportement des **accroissements de vitesse** :

$$\delta\vec{v}(\vec{r};\vec{x},t) = \vec{v}(\vec{x}+\vec{r};t) - \vec{v}(\vec{x};t).$$

Théorie de Kolmogorov (1941)

- Hypothèses sur le comportement des **accroissements de vitesse** :

$$\delta\vec{v}(\vec{r};\vec{x},t) = \vec{v}(\vec{x}+\vec{r};t) - \vec{v}(\vec{x};t).$$

- **1**- les accroissements sont **stationnaires** (temps et espace)

Def Un processus aléatoire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit stationnaire si pour **tout** $\tau \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t+\tau) \stackrel{d}{=} Y(t), \;\; t \in \mathbb{R}$.

Théorie de Kolmogorov (1941)

• Hypothèses sur le comportement des **accroissements de vitesse** :

$$\delta\vec{v}(\vec{r};\vec{x},t) = \vec{v}(\vec{x}+\vec{r};t) - \vec{v}(\vec{x};t).$$

• **1**- les accroissements sont **stationnaires** (temps et espace)

Def Un processus aléatoire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit stationnaire si pour **tout** $\tau \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t+\tau) \stackrel{d}{=} Y(t), \ \ t \in \mathbb{R}$.

• **2**- les statistiques ne dépendent que de ν et $\bar{\epsilon}$, pour $L \gg r \geq \eta$.

Def La dissipation visqueuse locale est $\epsilon(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\nu\left(\sum_{i,j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2$

et la dissipation moyenne statistique est $$\bar{\epsilon} = \mathbb{E}\left\{\frac{3}{4\pi r^3}\int_{\vec{h}<r}\epsilon(\vec{x}+\vec{h},t)\right\}$$

Analyse dimensionnelle : l'échelle de Kolmogorov est $\eta = (\nu^3/\bar{\epsilon})^{1/4}$.

Théorie de Kolmogorov (1941)

• Hypothèses sur le comportement des **accroissements de vitesse** :

$$\delta\vec{v}(\vec{r};\vec{x},t) = \vec{v}(\vec{x}+\vec{r};t) - \vec{v}(\vec{x};t).$$

• **1**- les accroissements sont **stationnaires** (temps et espace)

Def Un processus aléatoire $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est dit stationnaire si pour **tout** $\tau \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{S}_\tau Y)(t) := Y(t+\tau) \stackrel{d}{=} Y(t), \;\; t \in \mathbb{R}$.

• **2**- les statistiques ne dépendent que de ν et $\overline{\epsilon}$, pour $L \gg r \geq \eta$.

Def La dissipation visqueuse locale est $\epsilon(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\nu \left(\sum_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2$

et la dissipation moyenne statistique est $$\overline{\epsilon} = \mathbb{E}\left\{\frac{3}{4\pi r^3}\int_{\vec{h}<r} \epsilon(\vec{x}+\vec{h},t)\right\}$$

Analyse dimensionnelle : l'échelle de Kolmogorov est $\eta = (\nu^3/\overline{\epsilon})^{1/4}$.

• **3**- dans une zone dite **inertielle**, $L \gg r \gg \eta$, elles ne dépendent plus que de $\overline{\epsilon}$ (turbulence pleinement développée, limite $\nu \to \infty$).

- **Conséquence de 1 et 2,** les statistiques prennent la forme

$$\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} = g_p\left(\frac{r}{\eta}\right)(\bar{\epsilon}r)^{p/3}, \text{ si } \eta \ll r \ll L \text{ (zone inertielle)}$$

- **Conséquence de 1 et 2,** les statistiques prennent la forme

$$\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} = g_p\left(\frac{r}{\eta}\right)(\bar{\epsilon}r)^{p/3}, \;\; \text{si } \eta \ll r \ll L \;\; \text{(zone inertielle)}$$

En ajoutant **3**, $g_p(r/\eta) = C_p$ dans la zone inertielle.

- Ceci est équivalent à supposer l'**auto-similarité** dans la zone inertielle

- **Conséquence de 1 et 2,** les statistiques prennent la forme

$$\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} = g_p\left(\frac{r}{\eta}\right)(\bar{\epsilon} r)^{p/3}, \;\text{ si }\; \eta \ll r \ll L \;\text{ (zone inertielle)}$$

En ajoutant **3**, $g_p(r/\eta) = C_p$ dans la zone inertielle.

- Ceci est équivalent à supposer l'**auto-similarité** dans la zone inertielle

Def Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit auto-similaire d'indice H (noté "H-ss") si pour **tout** $\lambda > 0$,

$$\left(\mathcal{D}_{H,\lambda} X\right)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \;\; t > 0.$$

Par argument dimensionnel : $\overline{\epsilon} \simeq \nu \dfrac{[\delta v(r)]^2}{[r/\delta v(r)]}$

• **Conséquence de 1 et 2,** les statistiques prennent la forme

$$\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} = g_p\left(\frac{r}{\eta}\right)(\bar{\epsilon}r)^{p/3}, \text{ si } \eta \ll r \ll L \text{ (zone inertielle)}$$

En ajoutant **3**, $g_p(r/\eta) = C_p$ dans la zone inertielle.

• Ceci est équivalent à supposer l'**auto-similarité** dans la zone inertielle

Def Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit auto-similaire d'indice H (noté "H-ss") si pour **tout** $\lambda > 0$,

$$\left(\mathcal{D}_{H,\lambda}X\right)(t) := \lambda^{-H}X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$

Par argument dimensionnel : $\overline{\epsilon} \simeq \nu\dfrac{[\delta v(r)]^2}{[r/\delta v(r)]}$

$\rightarrow h = H = \dfrac{1}{3}$ unique.

Comparaisons avec l'expérience

• L'hypothèse de Taylor permet de les relier aux expériences :
on suppose que $\vec{r} \simeq \tau \vec{v}(\vec{r};t)$ qui conduit à $\delta \vec{v}(\vec{r};\vec{x},t) = \vec{v}(\vec{x};t-\tau) - \vec{v}(\vec{x};t)$.

Comparaisons avec l'expérience

• L'hypothèse de Taylor permet de les relier aux expériences :
on suppose que $\vec{r} \simeq \tau \vec{v}(\vec{r};t)$ qui conduit à $\delta \vec{v}(\vec{r};\vec{x},t) = \vec{v}(\vec{x};t-\tau) - \vec{v}(\vec{x};t)$.

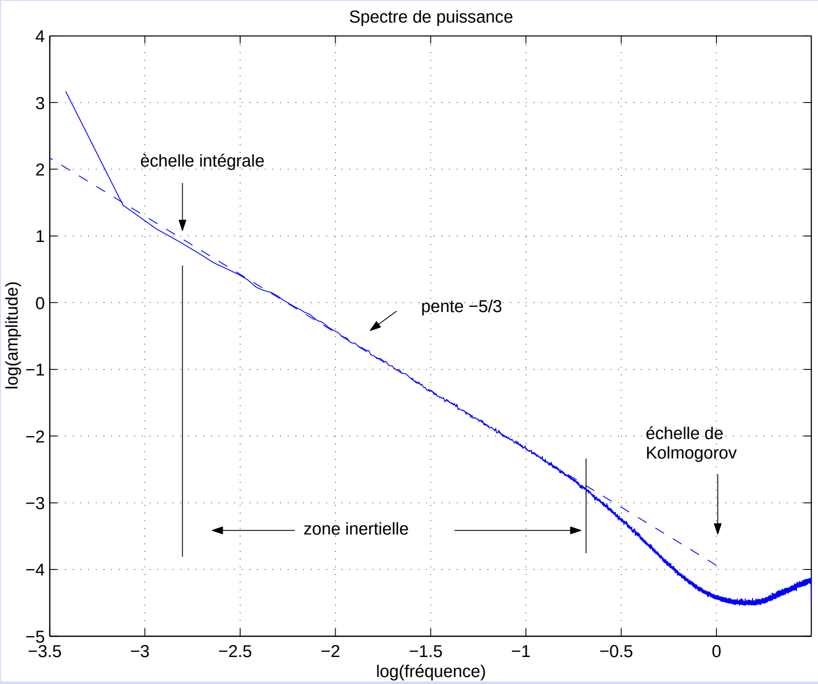
Mesure accessible en un seul point.

Comparaisons avec l'expérience

• L'hypothèse de Taylor permet de les relier aux expériences :
on suppose que $\vec{r} \simeq \tau \vec{v}(\vec{r};t)$ qui conduit à $\delta \vec{v}(\vec{r};\vec{x},t) = \vec{v}(\vec{x};t-\tau) - \vec{v}(\vec{x};t)$.

Mesure accessible en un seul point.

• Spectre attendu pour K41, pour $L \gg r \gg \eta$, $E(k) \sim \nu^{5/4}\bar{\epsilon}^{1/4}(k\eta)^{-5/3}$

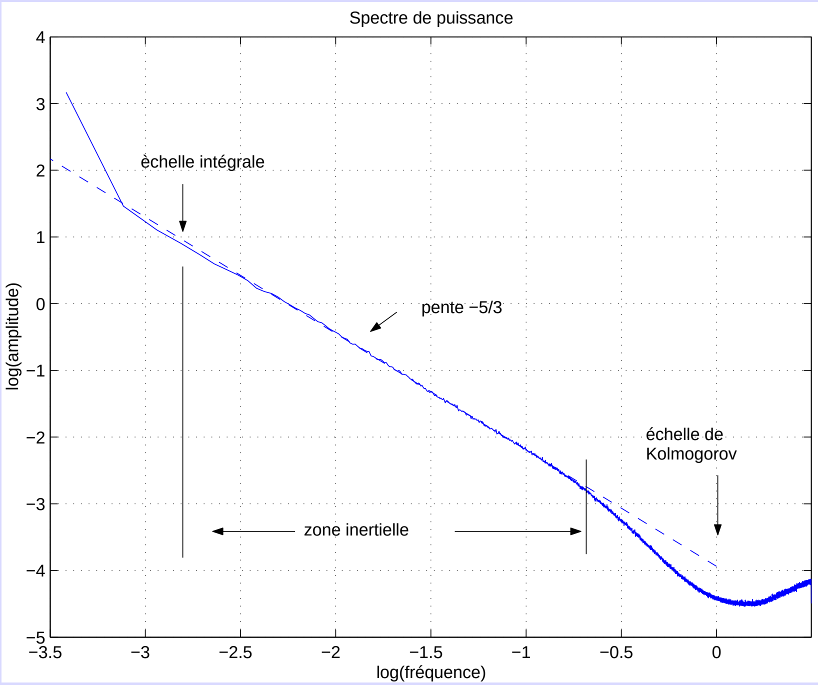


Comparaisons avec l'expérience

• L'hypothèse de Taylor permet de les relier aux expériences :
on suppose que $\vec{r} \simeq \tau\vec{v}(\vec{r};t)$ qui conduit à $\delta\vec{v}(\vec{r};\vec{x},t) = \vec{v}(\vec{x};t-\tau) - \vec{v}(\vec{x};t)$.

Mesure accessible en un seul point.

• Spectre attendu pour K41, pour $L \gg r \gg \eta$, $E(k) \sim \nu^{5/4}\overline{\epsilon}^{1/4}(k\eta)^{-5/3}$



• H-ss **ou** spectre en $k^{-5/3}$

$\longrightarrow$ nécessitent une structure **singulière** de la vitesse au cours du temps.

Mise en évidence de l'intermittence statistique

Autres prédictions de K41 :

- $\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} = C_p(\bar{\epsilon} r)^{p/3}$;

Mise en évidence de l'intermittence statistique

Autres prédictions de K41 :

- $\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} = C_p(\bar{\epsilon}r)^{p/3}$;
- $\dfrac{\delta v(r)}{(\bar{\epsilon}r)^{1/3}}$ est indépendant de r.

Mise en évidence de l'intermittence statistique

Autres prédictions de K41 :

- $\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} = C_p(\bar{\epsilon}r)^{p/3}$;
- $\dfrac{\delta v(r)}{(\bar{\epsilon}r)^{1/3}}$ est indépendant de r.

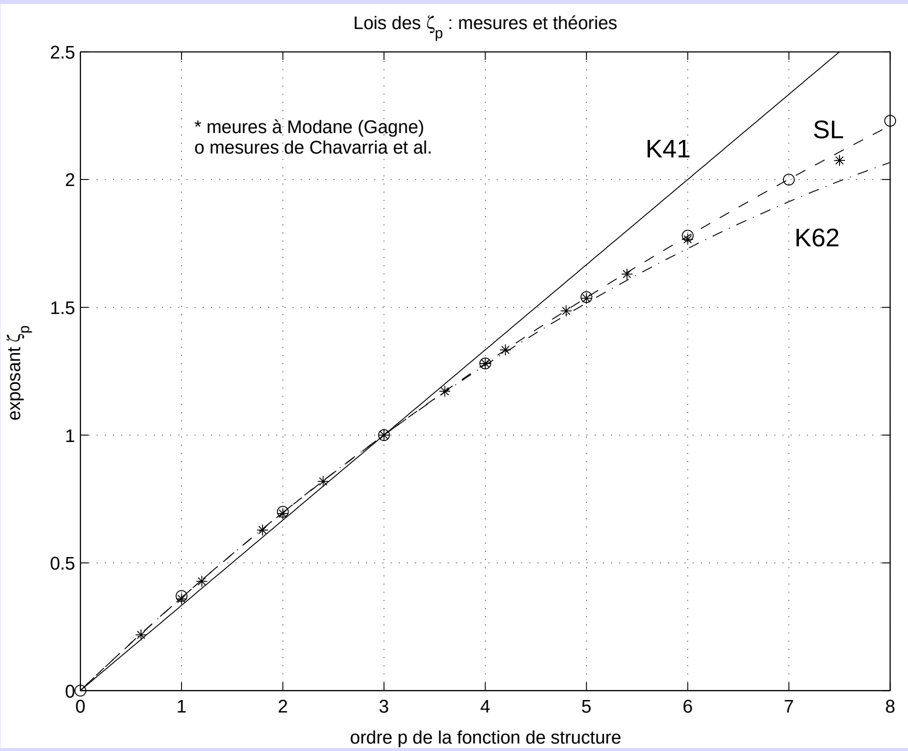
Et dans les expériences ?

Mise en évidence de l'intermittence statistique

Autres prédictions de K41 :

- $\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} = C_p(\bar{\epsilon} r)^{p/3}$;
- $\dfrac{\delta v(r)}{(\bar{\epsilon} r)^{1/3}}$ est indépendant de r.

Et dans les expériences ?

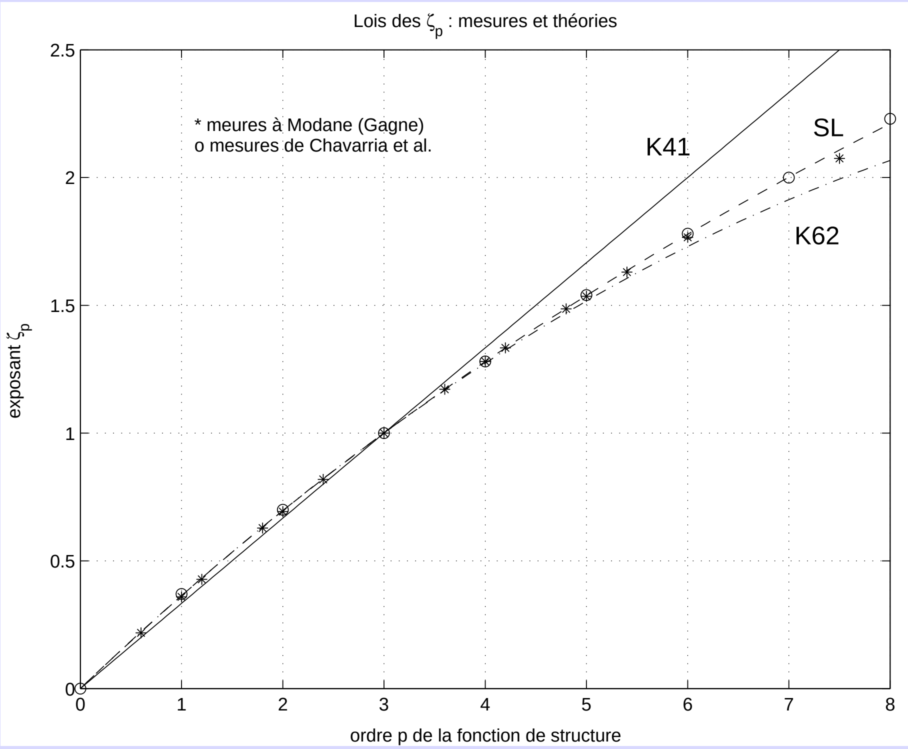


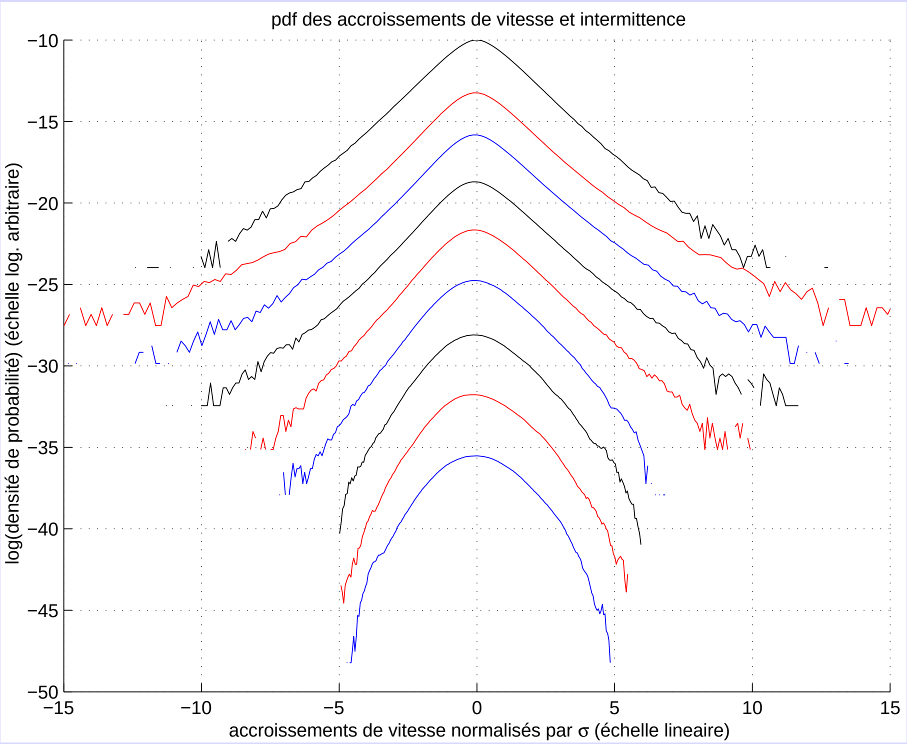
Mise en évidence de l'intermittence statistique

Autres prédictions de K41 :

- $\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} = C_p(\bar{\epsilon}r)^{p/3}$;
- $\dfrac{\delta v(r)}{(\bar{\epsilon}r)^{1/3}}$ est indépendant de r.

Et dans les expériences ?





Expérience GReC dans de l'hélium à 4,5 K, Re$= 5 \cdot 10^6$

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

- **Formalisme multifractal.**

  Objection (de Landau) à K41 : $\mathbb{E}\left\{\epsilon(r)^{p/3}\right\} \neq \left(\mathbb{E}\,\epsilon(r)\right)^{p/3}$.

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

- **Formalisme multifractal.**

Objection (de Landau) à K41 : $\mathbb{E}\left\{\epsilon(r)^{p/3}\right\} \neq (\mathbb{E}\,\epsilon(r))^{p/3}$.

Modification : introduire une régularité **locale** variable de la vitesse.

$$\delta v(\lambda \vec{r}; \vec{x}, t) \overset{d}{=} \lambda^{h(\vec{x},t)} \delta v(\vec{r}; \vec{x}, t), \quad \text{pour} \quad |\vec{r}| \to 0.$$

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

- **Formalisme multifractal.**

  Objection (de Landau) à K41 : $\mathbb{E}\left\{\epsilon(r)^{p/3}\right\} \neq (\mathbb{E}\,\epsilon(r))^{p/3}$.

  Modification : introduire une régularité **locale** variable de la vitesse.

$$\delta v(\lambda\vec{r};\vec{x},t) \stackrel{d}{=} \lambda^{h(\vec{x},t)}\delta v(\vec{r};\vec{x},t), \quad \text{pour} \quad |\vec{r}| \to 0.$$

- Si l'on suppose que l'exposant h est valable sur un ensemble aléatoire de l'espace de dimension $D(h)$ (non forcément entière), le comportement générique modélisé devient

$$\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} \sim \overline{\epsilon}^{p/3} r^{\zeta_p} \qquad\qquad \zeta_p = \inf_h (ph - D(h))$$

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

• **Formalisme multifractal.**

Objection (de Landau) à K41 : $\mathbb{E}\left\{\epsilon(r)^{p/3}\right\} \neq (\mathbb{E}\,\epsilon(r))^{p/3}$.

Modification : introduire une régularité **locale** variable de la vitesse.

$$\delta v(\lambda\vec{r};\vec{x},t) \stackrel{d}{=} \lambda^{h(\vec{x},t)}\delta v(\vec{r};\vec{x},t), \quad \text{pour} \quad |\vec{r}| \to 0.$$

• Si l'on suppose que l'exposant h est valable sur un ensemble aléatoire de l'espace de dimension $D(h)$ (non forcément entière), le comportement générique modélisé devient

$$\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} \sim \overline{\epsilon}^{p/3} r^{\zeta_p} \qquad\qquad \zeta_p = \inf_h (ph - D(h))$$

• Estimation : interprétation thermodynamique (Frisch, Parisi ; Arnéodo et coauteurs)

• Limite de la théorie : interpréter la struture fractale... ?

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

- **Cascades multiplicatives.**

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

• **Cascades multiplicatives.**
La probabilité $P_r(\ln|\delta v|)$ varie d'une échelle r à l'autre.
Il a été proposé de décrire comment elle se déforme d'une échelle à l'autre.

$$P_{r_2}(\ln|\delta v|) = G^{\star[n(r_2)-n(r_1)]} \star P_{r_1}(\ln|\delta v|),$$

où $G_{r_1,r_2} = G^{\star[n(r_2)-n(r_1)]}$ est le propagateur de l'échelle r_1 à r_2.

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

• **Cascades multiplicatives.**
La probabilité $P_r(\ln|\delta v|)$ varie d'une échelle r à l'autre.
Il a été proposé de décrire comment elle se déforme d'une échelle à l'autre.

$$P_{r_2}(\ln|\delta v|) = G^{\star[n(r_2)-n(r_1)]} \star P_{r_1}(\ln|\delta v|),$$

où $G_{r_1,r_2} = G^{\star[n(r_2)-n(r_1)]}$ est le propagateur de l'échelle r_1 à r_2.

• Conséquence : **auto-similarité étendue** (ESS), soit séparation de p et r.

$$\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} \sim e^{H(p)n(r)} \text{ avec } H(p) = -\ln \tilde{G}(p),$$

$\tilde{G}$ est la transformée de Laplace de G, $\tilde{G}(p) = \int e^{-pn} G(n) \mathrm{d}n$.

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

• **Cascades multiplicatives.**
La probabilité $P_r(\ln|\delta v|)$ varie d'une échelle r à l'autre.
Il a été proposé de décrire comment elle se déforme d'une échelle à l'autre.

$$P_{r_2}(\ln|\delta v|) = G^{\star[n(r_2)-n(r_1)]} \star P_{r_1}(\ln|\delta v|),$$

où $G_{r_1,r_2} = G^{\star[n(r_2)-n(r_1)]}$ est le propagateur de l'échelle r_1 à r_2.

• Conséquence : **auto-similarité étendue** (ESS), soit séparation de p et r.

$$\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} \sim e^{H(p)n(r)} \text{ avec } H(p) = -\ln\tilde{G}(p),$$

$\tilde{G}$ est la transformée de Laplace de G, $\tilde{G}(p) = \int e^{-pn}G(n)\mathrm{d}n$.

$$\boxed{\text{Propriété de multi-scaling, lois } e^{H(p)n(r)}}$$

Esquisse d'interprétations de l'intermittence

• **Cascades multiplicatives.**
La probabilité $P_r(\ln|\delta v|)$ varie d'une échelle r à l'autre.
Il a été proposé de décrire comment elle se déforme d'une échelle à l'autre.

$$P_{r_2}(\ln|\delta v|) = G^{\star[n(r_2)-n(r_1)]} \star P_{r_1}(\ln|\delta v|),$$

où $G_{r_1,r_2} = G^{\star[n(r_2)-n(r_1)]}$ est le propagateur de l'échelle r_1 à r_2.

• Conséquence : **auto-similarité étendue** (ESS), soit séparation de p et r.

$$\mathbb{E}\left\{(\delta v(r;\vec{x},t))^p\right\} \sim e^{H(p)n(r)} \text{ avec } H(p) = -\ln \tilde{G}(p),$$

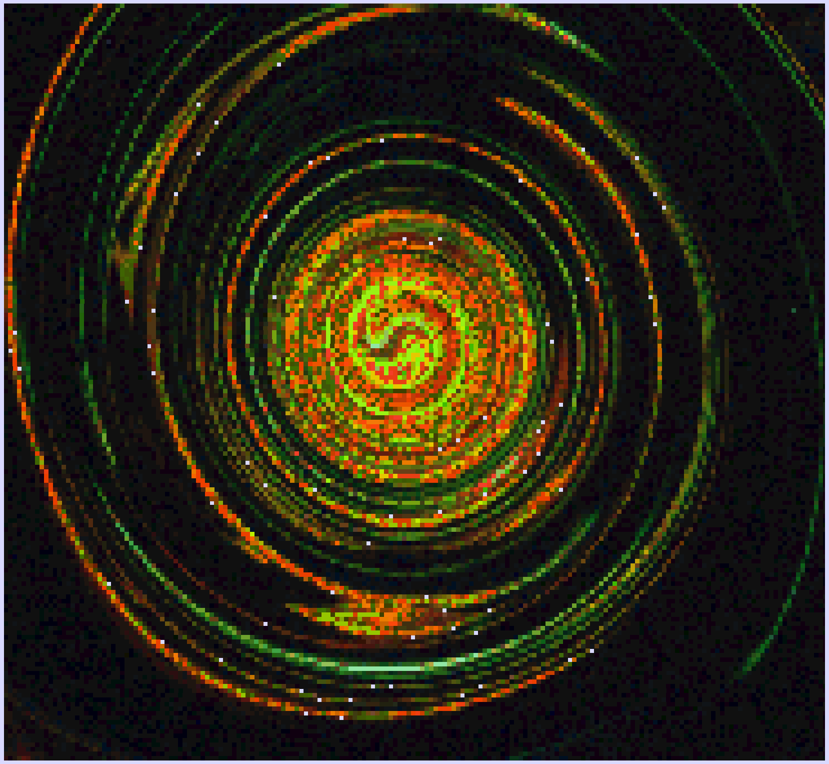
$\tilde{G}$ est la transformée de Laplace de G, $\tilde{G}(p) = \int e^{-pn} G(n) \mathrm{d}n$.

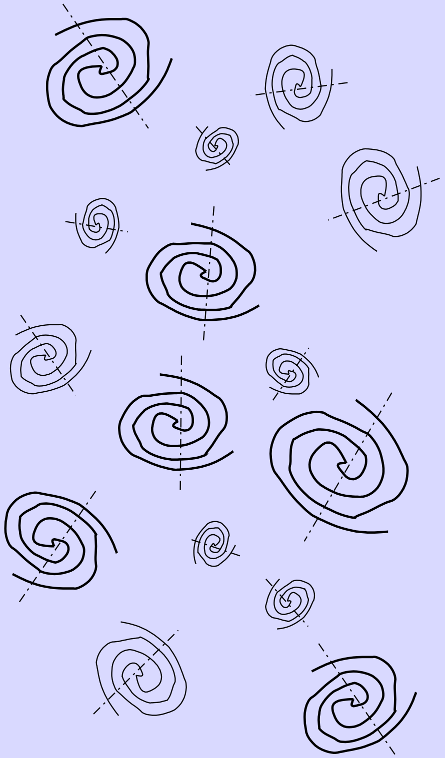
$\boxed{\text{Propriété de multi-scaling, lois } e^{H(p)n(r)}}$

• Idées de Novikov, Castaing ; interprétation en signal Chainais, Abry.

• Limite : pas de géométrie du tout. Décrit l'intermittence **statistique**.

Quelques approches de l'intermittence "spatio-temporelle"





Quelques approches de l'intermittence “spatio-temporelle”

- Description par des modèles de vortex

Vortex de Lundgren (1982) $\Rightarrow$ spectre en $k^{-5/3}$

Quelques approches de l'intermittence "spatio-temporelle"

- Description par des modèles de vortex

Vortex de Lundgren (1982) $\Rightarrow$ spectre en $k^{-5/3}$

- Études de singularités géométriques oscillantes

Quelques approches de l'intermittence "spatio-temporelle"

- Description par des modèles de vortex

Vortex de Lundgren (1982) $\Rightarrow$ spectre en $k^{-5/3}$

- Études de singularités géométriques oscillantes

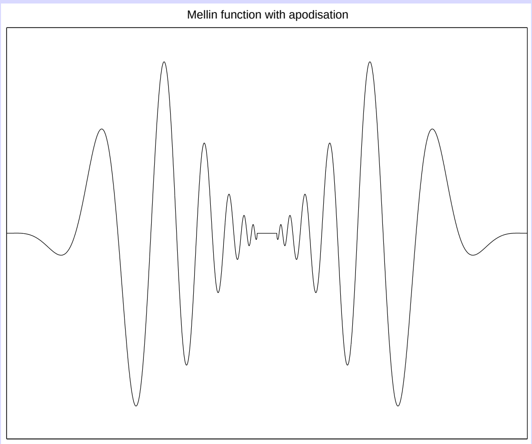
$$|t - t_0|^h g\left(\frac{1}{|t - t_0|^\beta}\right)$$

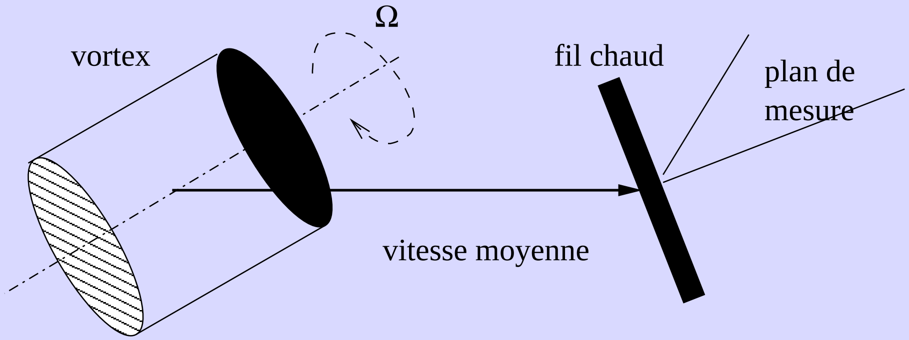
Quelques approches de l'intermittence "spatio-temporelle"

- Description par des modèles de vortex

Vortex de Lundgren (1982) $\Rightarrow$ spectre en $k^{-5/3}$

- Études de singularités géométriques oscillantes



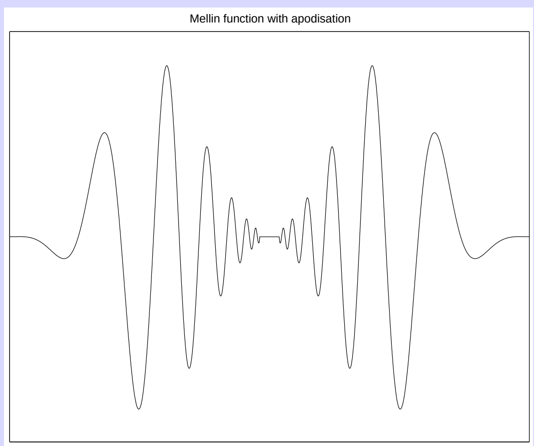


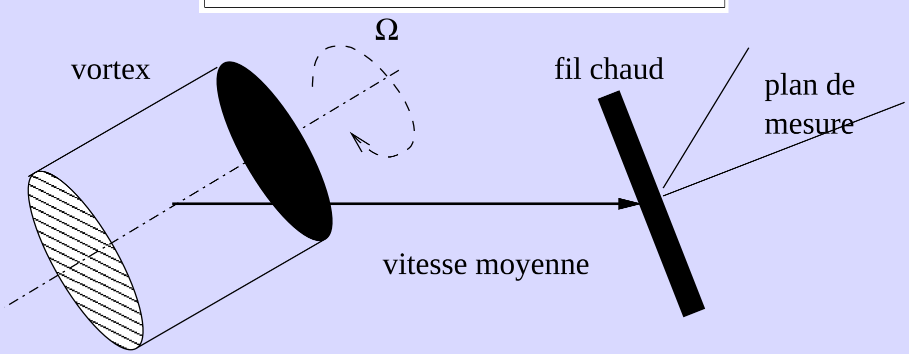
Quelques approches de l'intermittence "spatio-temporelle"

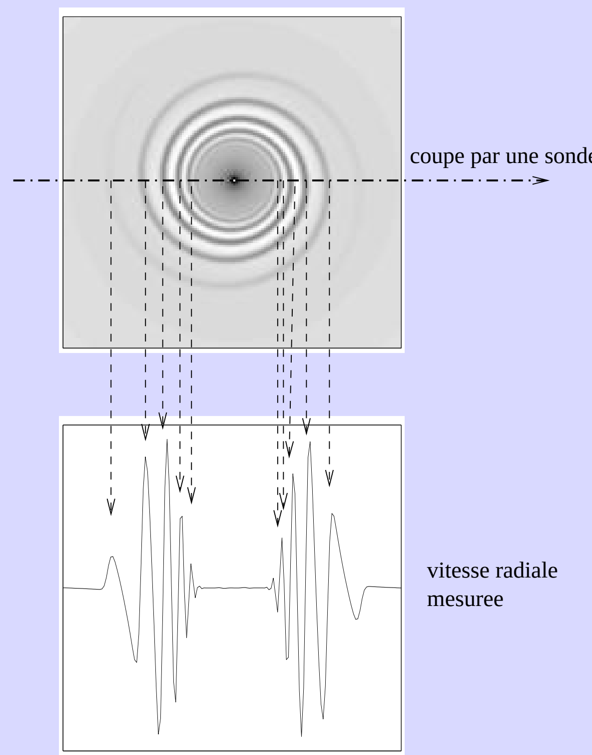
- Description par des modèles de vortex

Vortex de Lundgren (1982) $\Rightarrow$ spectre en $k^{-5/3}$

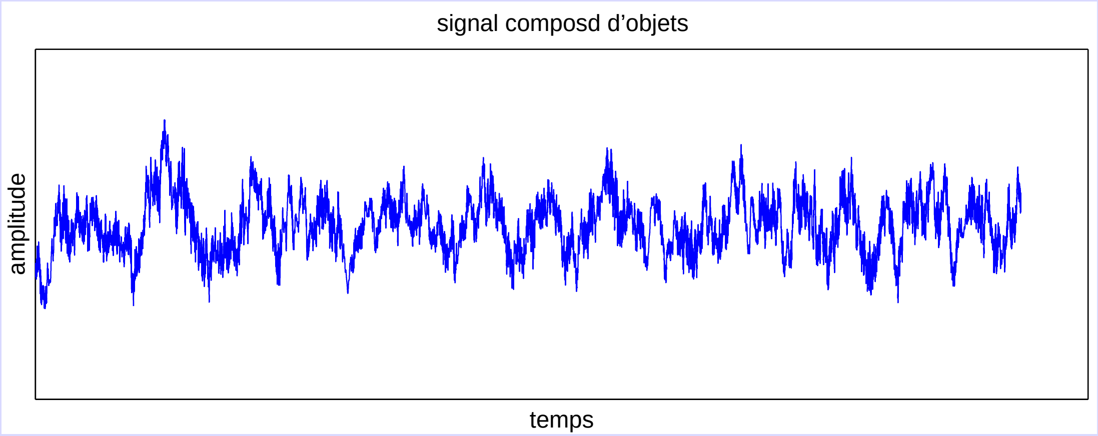
- Études de singularités géométriques oscillantes



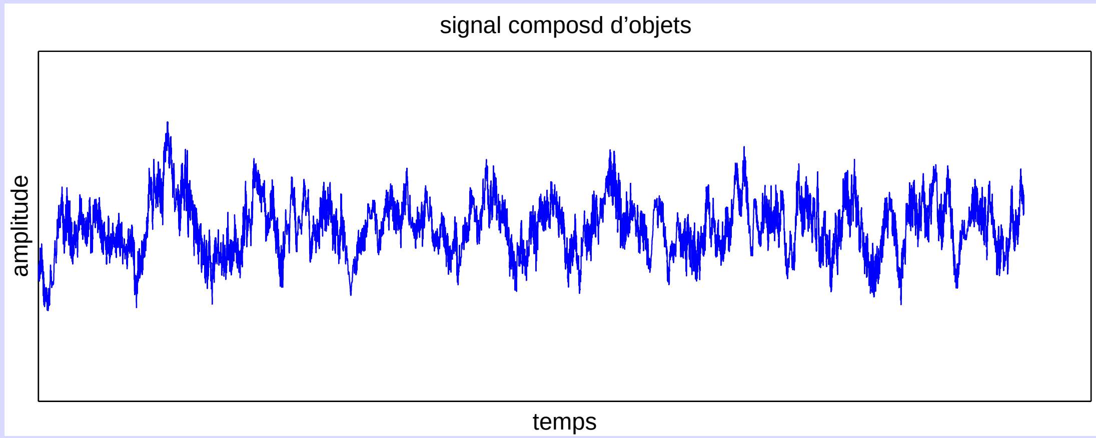


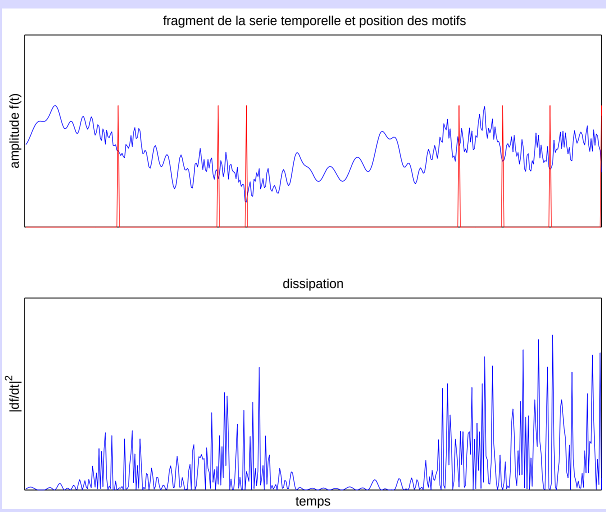


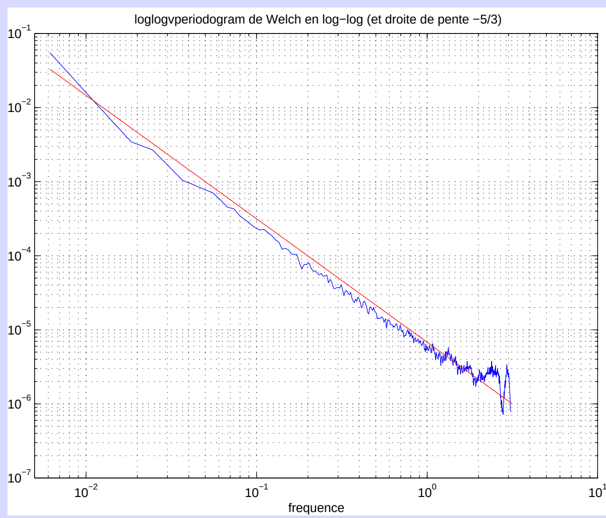
- Exemple d'un modèle-jouet de signal "turbulent" avec **structures organisées**.

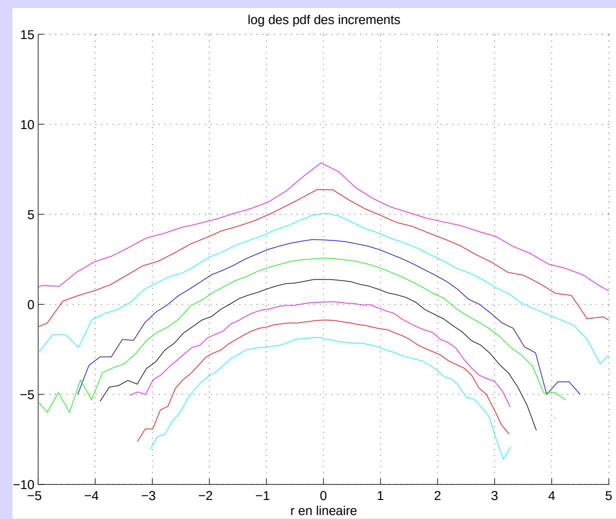


- Exemple d'un modèle-jouet de signal "turbulent" avec **structures organisées**.



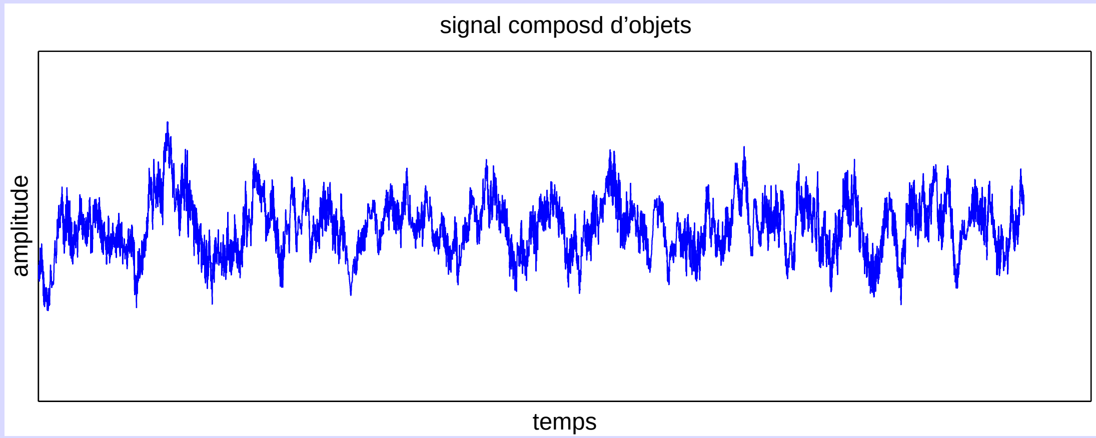


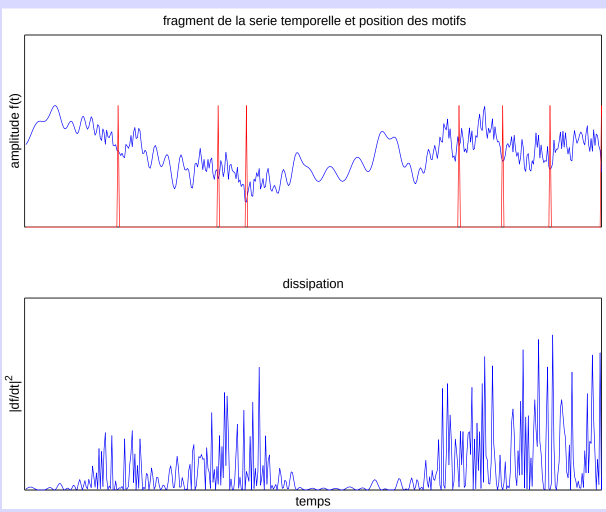


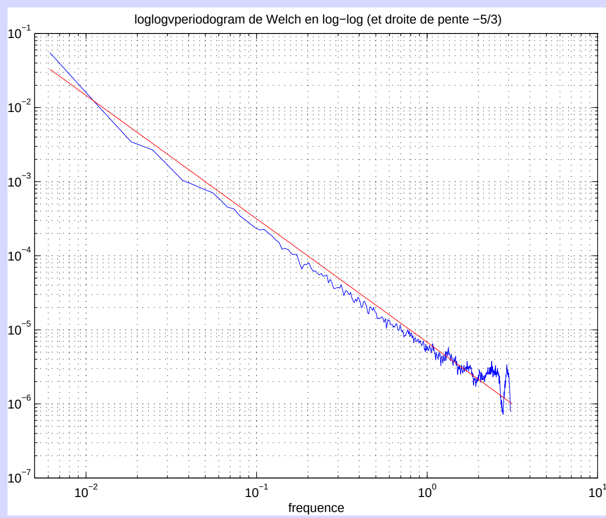


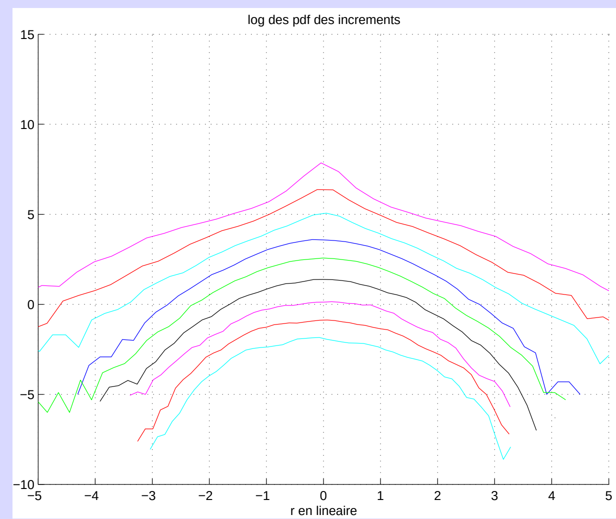
Signal obtenu par superposition de *chirps*, $h(t - t_i)|t - t_i|^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$.

- Exemple d'un modèle-jouet de signal "turbulent" avec **structures organisées**.









Signal obtenu par superposition de *chirps*, $h(t-t_i)|t-t_i|^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}$.

- L'**organisations spatiale** peut ainsi conduire à l'**intermittence statistique**.

Quelques expériences pour étudier les structures organisées

Quelques expériences pour étudier les structures organisées

• Beaucoup de dispositifs expérimentaux cherchent à caractériser un vortex spécifiquement produit dans l'expérience.

Quelques expériences pour étudier les structures organisées

• Beaucoup de dispositifs expérimentaux cherchent à caractériser un vortex spécifiquement produit dans l'expérience.
$\longrightarrow$ étude stabilité / instabilité de structures
$\longrightarrow$ caractérisation des structures (écoulement global, turbulence)
$\longrightarrow$ recherche (détection, analyse,...) dans dans la turbulence développée

Quelques expériences pour étudier les structures organisées

• Beaucoup de dispositifs expérimentaux cherchent à caractériser un vortex spécifiquement produit dans l'expérience.
$\longrightarrow$ étude stabilité / instabilité de structures
$\longrightarrow$ caractérisation des structures (écoulement global, turbulence)
$\longrightarrow$ recherche (détection, analyse,...) dans dans la turbulence développée

Disques rotatifs opposés (machine à laver, dispositif de von Kàrmàn) ;

tourbillon derrière une ailette ou une marche.

Quelques expériences pour étudier les structures organisées

• Beaucoup de dispositifs expérimentaux cherchent à caractériser un vortex spécifiquement produit dans l'expérience.
$\longrightarrow$ étude stabilité / instabilité de structures
$\longrightarrow$ caractérisation des structures (écoulement global, turbulence)
$\longrightarrow$ recherche (détection, analyse,...) dans dans la turbulence développée
Disques rotatifs opposés (machine à laver, dispositif de von Kàrmàn) ;
tourbillon derrière une ailette ou une marche.

• Mesures de vitesses lagrangiennes et mise en évidence de tourbillons.

Quelques expériences pour étudier les structures organisées

• Beaucoup de dispositifs expérimentaux cherchent à caractériser un vortex spécifiquement produit dans l'expérience.
$\longrightarrow$ étude stabilité / instabilité de structures
$\longrightarrow$ caractérisation des structures (écoulement global, turbulence)
$\longrightarrow$ recherche (détection, analyse,...) dans dans la turbulence développée
Disques rotatifs opposés (machine à laver, dispositif de von Kàrmàn) ;
tourbillon derrière une ailette ou une marche.

• Mesures de vitesses lagrangiennes et mise en évidence de tourbillons.
Mordant, Pinton, O. Michel 2001 ; La Porta, Bodenschatz, et al. 2001

Quelques expériences pour étudier les structures organisées

• Beaucoup de dispositifs expérimentaux cherchent à caractériser un vortex spécifiquement produit dans l'expérience.
$\longrightarrow$ étude stabilité / instabilité de structures
$\longrightarrow$ caractérisation des structures (écoulement global, turbulence)
$\longrightarrow$ recherche (détection, analyse,...) dans dans la turbulence développée
Disques rotatifs opposés (machine à laver, dispositif de von Kàrmàn) ;
tourbillon derrière une ailette ou une marche.

• Mesures de vitesses lagrangiennes et mise en évidence de tourbillons.
Mordant, Pinton, O. Michel 2001 ; La Porta, Bodenschatz, et al. 2001

• Mesure directe de la vorticité présente dans les tourbillons.
Lund 1987 ; Baudet, Pinton, Ciliberto 1992 ; Baudet, Michel 1999

Quelques expériences pour étudier les structures organisées

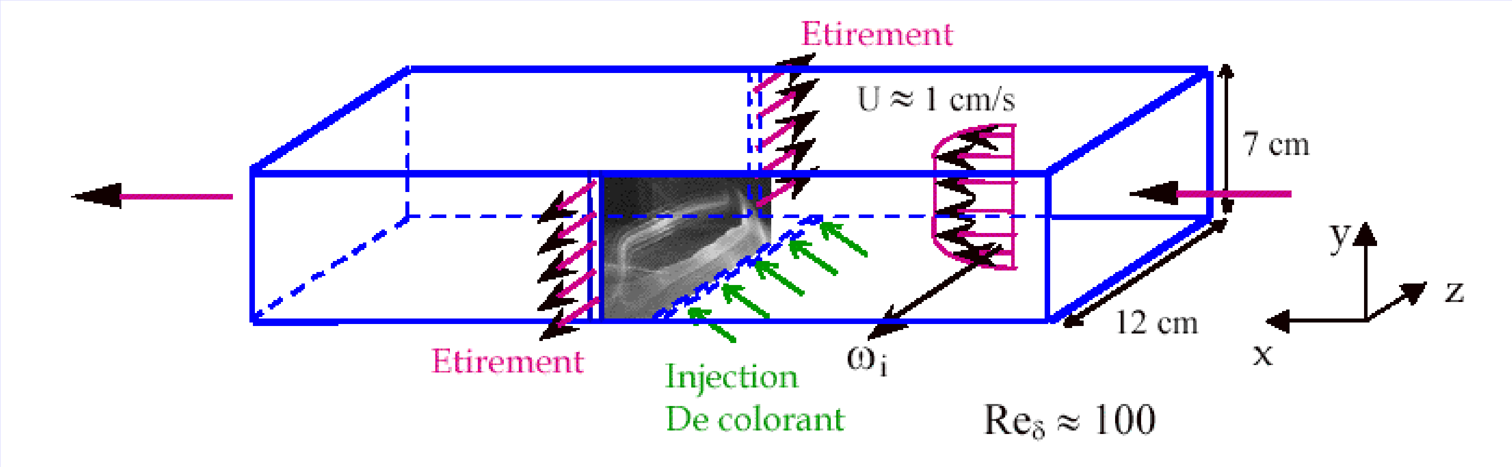
• Beaucoup de dispositifs expérimentaux cherchent à caractériser un vortex spécifiquement produit dans l'expérience.
→ étude stabilité / instabilité de structures
→ caractérisation des structures (écoulement global, turbulence)
→ recherche (détection, analyse,...) dans dans la turbulence développée
Disques rotatifs opposés (machine à laver, dispositif de von Kàrmàn) ;
tourbillon derrière une ailette ou une marche.

• Mesures de vitesses lagrangiennes et mise en évidence de tourbillons.
Mordant, Pinton, O. Michel 2001 ; La Porta, Bodenschatz, et al. 2001

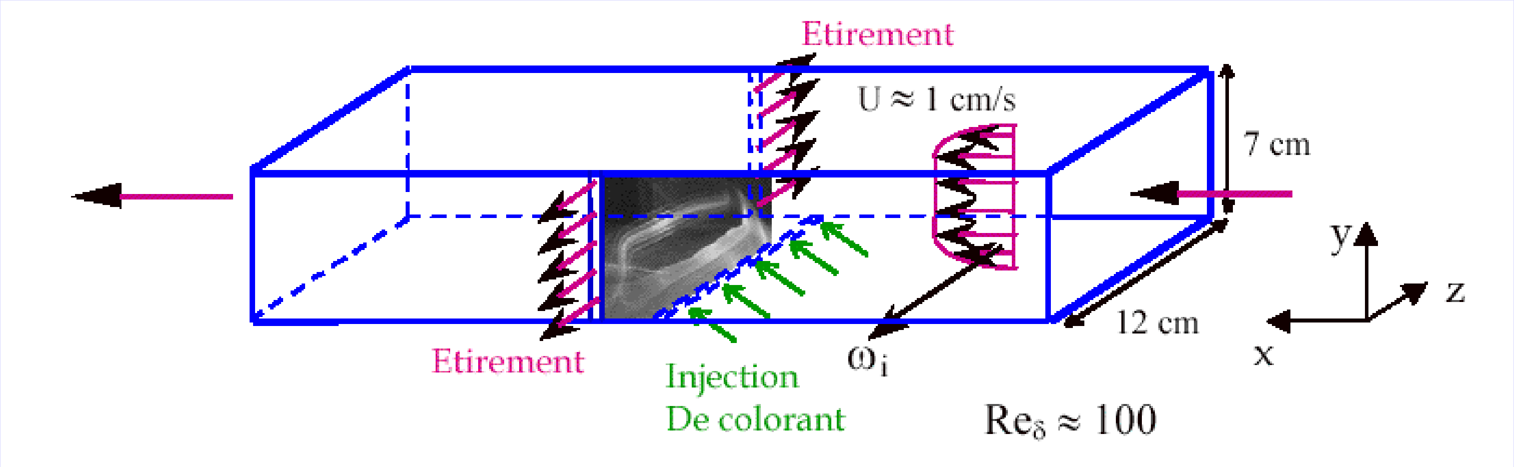
• Mesure directe de la vorticité présente dans les tourbillons.
Lund 1987 ; Baudet, Pinton, Ciliberto 1992 ; Baudet, Michel 1999

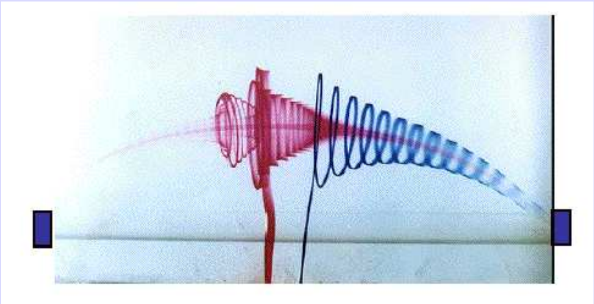
• Mesures de quantités globales révélant (?) l'intermittence.
Pinton, Holdsworth, Bramwell 1998

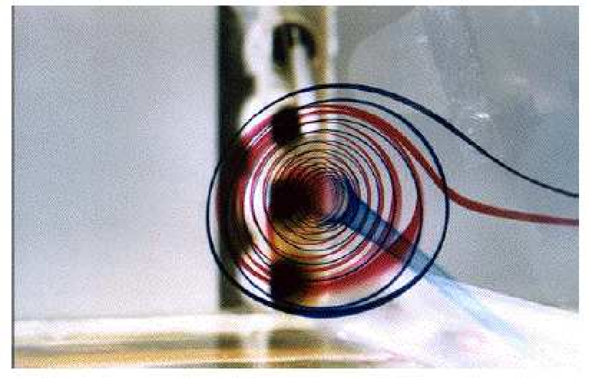
• **Étude des caractéristiques tourbillons**
expérience de P. Petitjeans, Y. Cuypers et coauteurs (ESPCI)



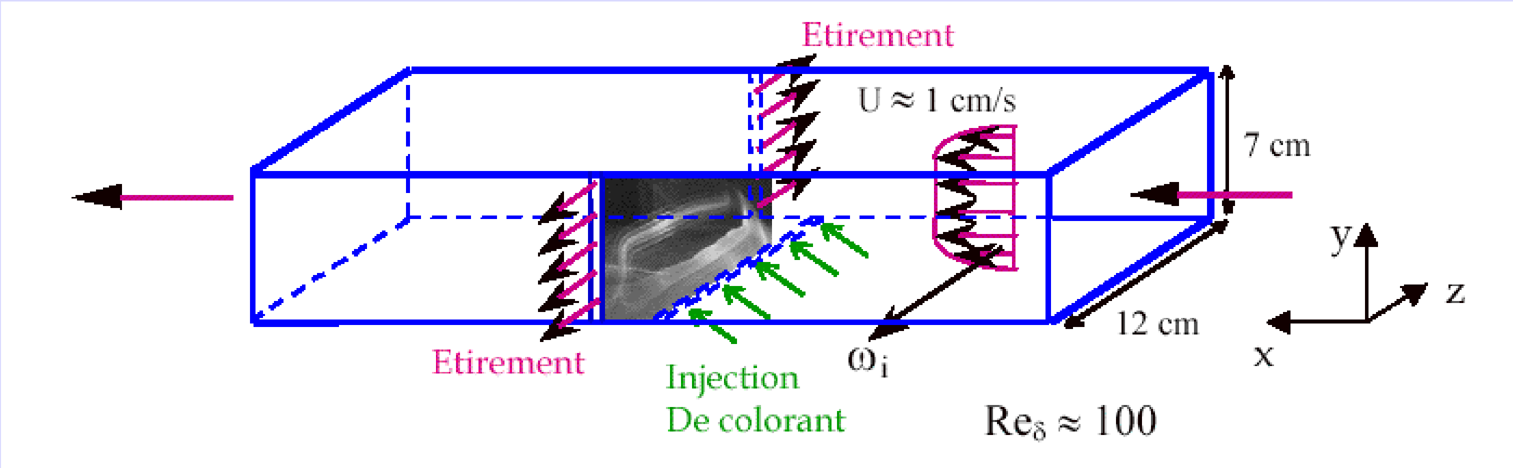
• **Étude des caractéristiques tourbillons**
expérience de P. Petitjeans, Y. Cuypers et coauteurs (ESPCI)

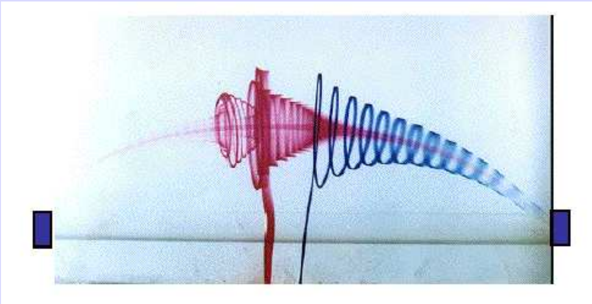


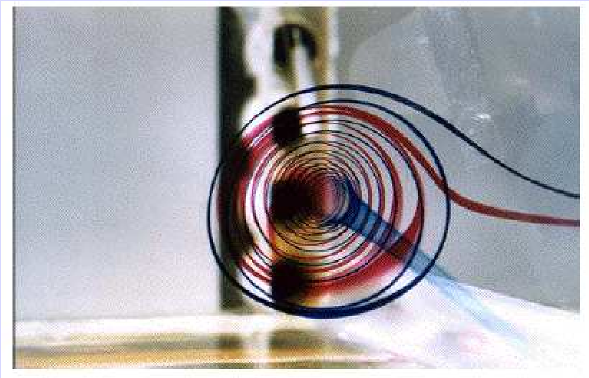


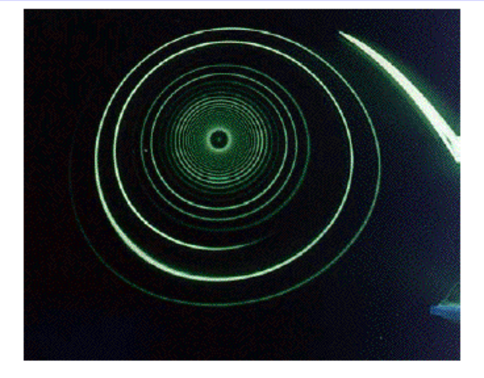


• **Étude des caractéristiques tourbillons**
expérience de P. Petitjeans, Y. Cuypers et coauteurs (ESPCI)





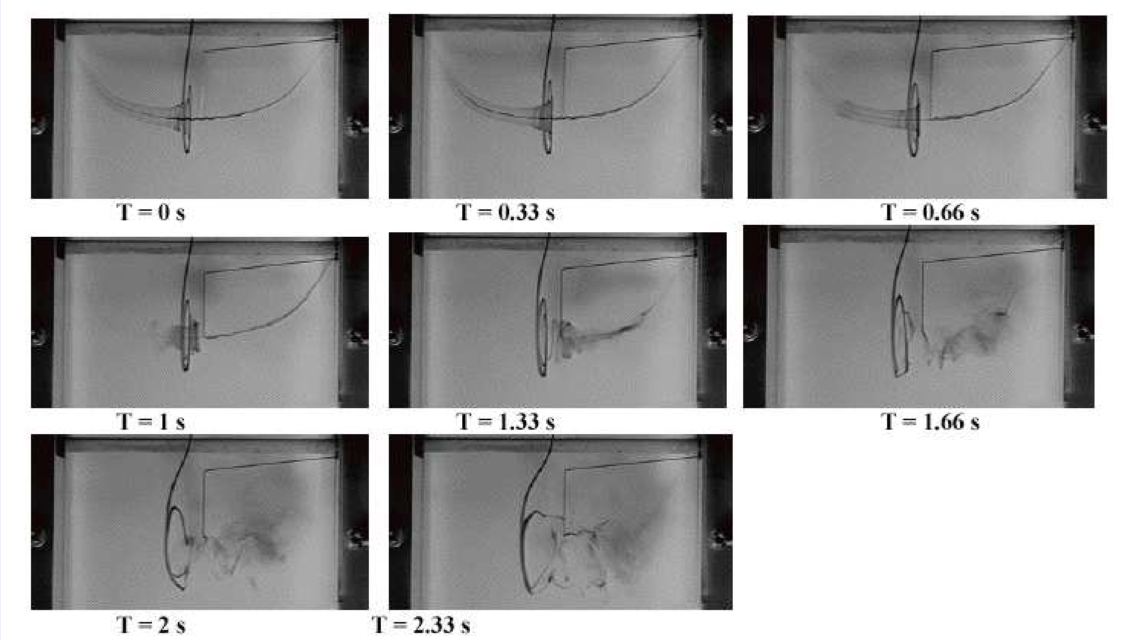




- **Étude des caractéristiques tourbillons**

expérience de P. Petitjeans, Y. Cuypers et coauteurs (ESPCI)

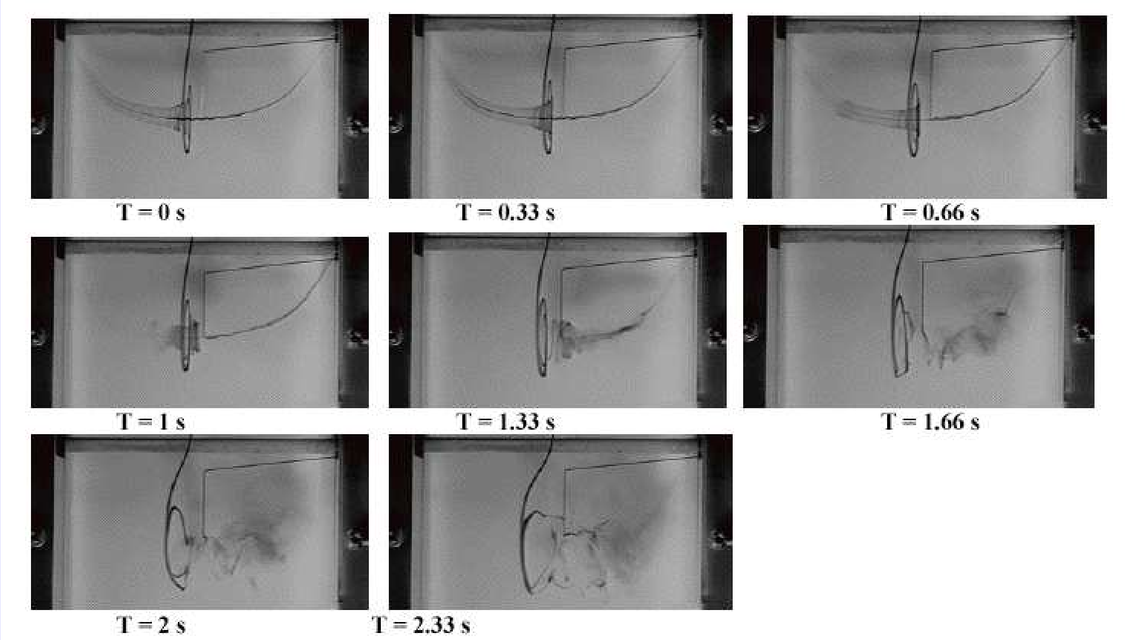
Séquence de formation / instabilité / explosion d'un vortex.

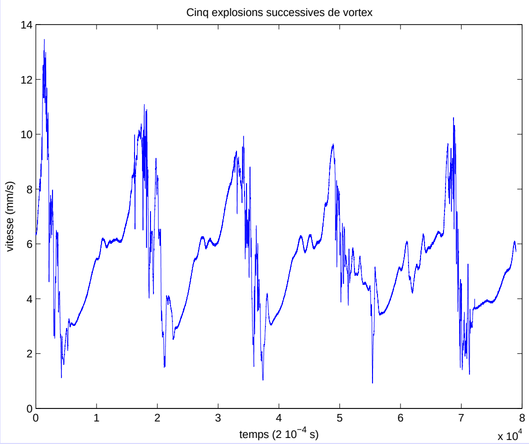


- **Étude des caractéristiques tourbillons**

expérience de P. Petitjeans, Y. Cuypers et coauteurs (ESPCI)

Séquence de formation / instabilité / explosion d'un vortex.

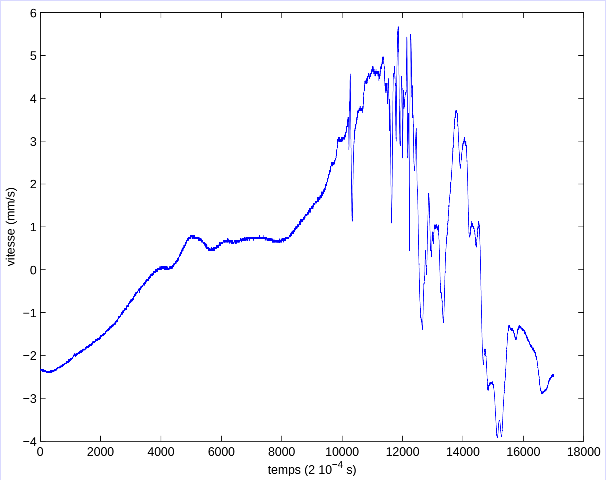


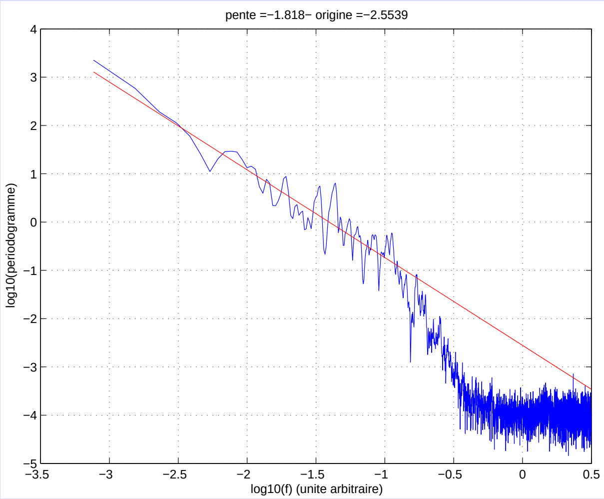


• Étude des caractéristiques tourbillons

expérience de P. Petitjeans, Y. Cuypers et coauteurs (ESPCI)

Analyse spectrale des signaux : pour un vortex isolé.

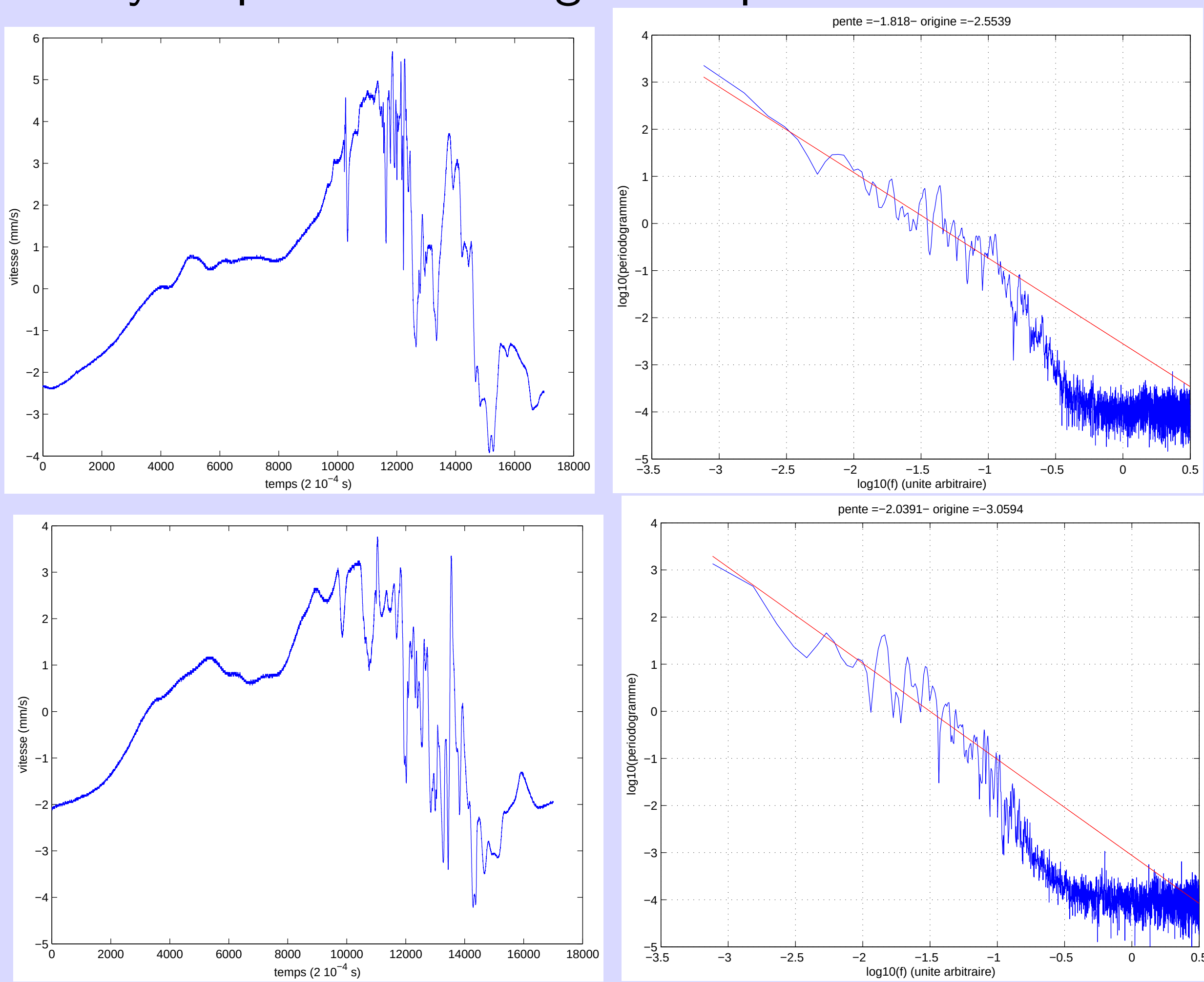




- **Étude des caractéristiques tourbillons**

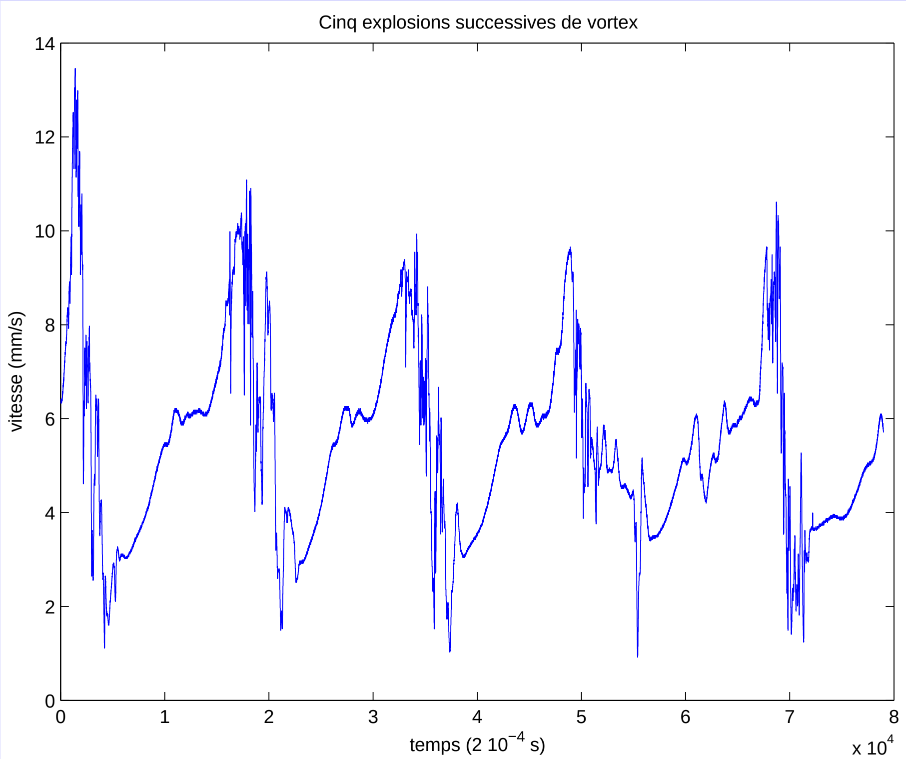
expérience de P. Petitjeans, Y. Cuypers et coauteurs (ESPCI)

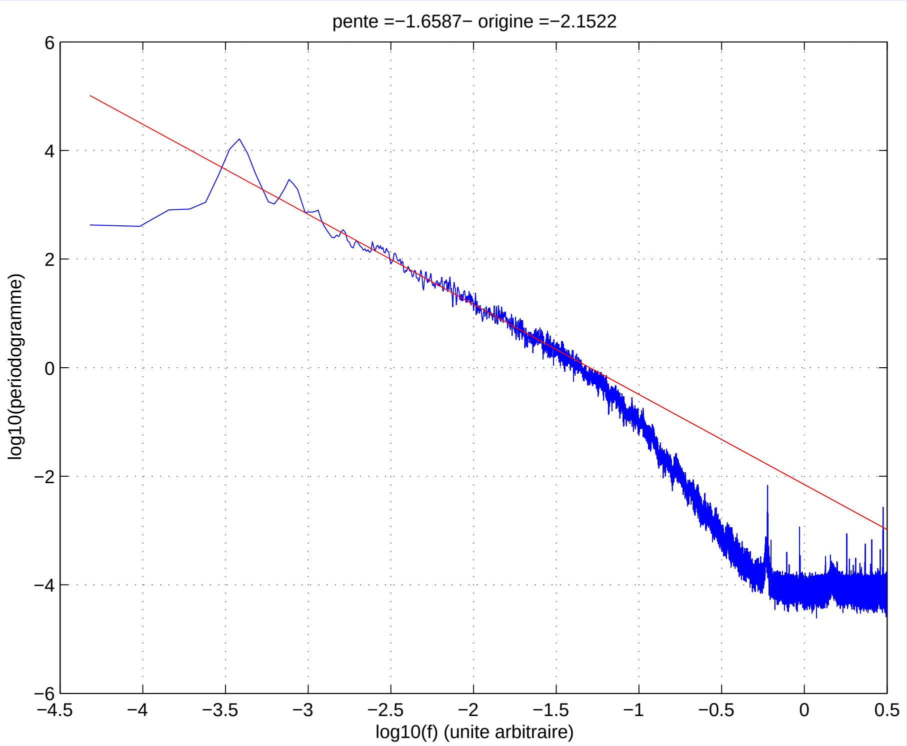
Analyse spectrale des signaux : pour un vortex isolé.



• **Étude des caractéristiques tourbillons**
expérience de P. Petitjeans, Y. Cuypers et coauteurs (ESPCI)

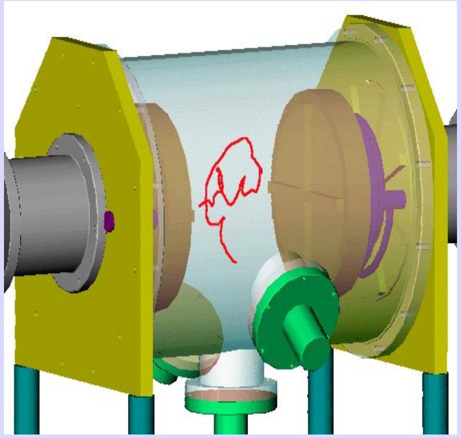
Analyse spectrale des signaux : pour la suite des explosions.





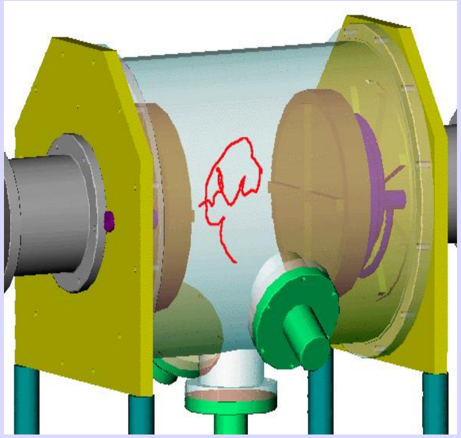
- **Vitesse lagrangienne**, suivre $\vec{v}(\vec{r}(t);t)$ au cours du temps t (Mordant et al.).

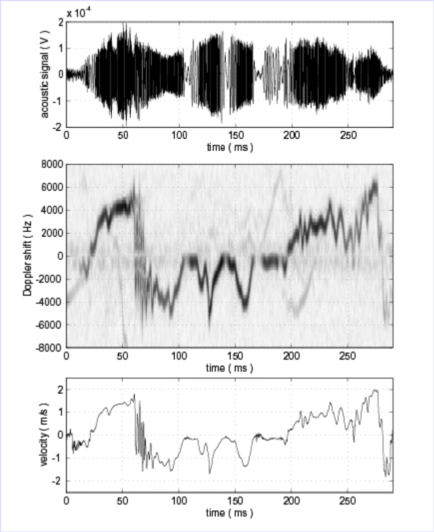
  Une bille est mise dans un écoulement turbulent et suivie par sonar Doppler.



- **Vitesse lagrangienne**, suivre $\vec{v}(\vec{r}(t);t)$ au cours du temps t (Mordant et al.).

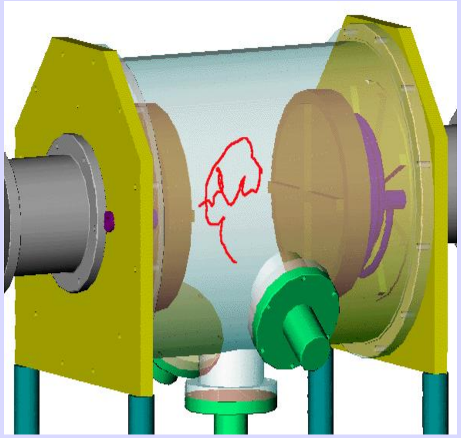
  Une bille est mise dans un écoulement turbulent et suivie par sonar Doppler.

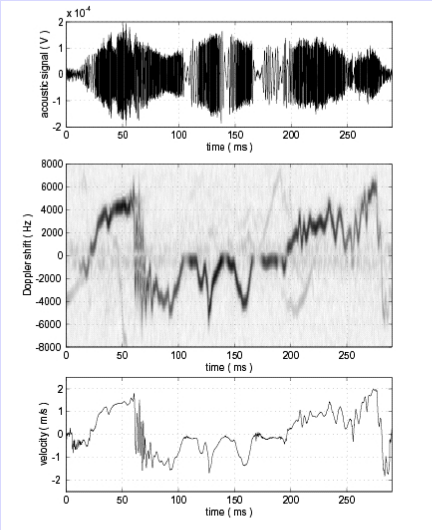


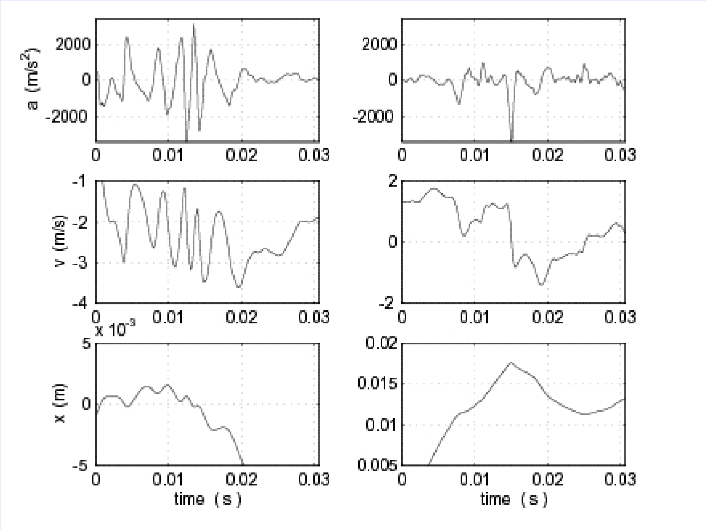


- **Vitesse lagrangienne**, suivre $\vec{v}(\vec{r}(t);t)$ au cours du temps t (Mordant et al.).

  Une bille est mise dans un écoulement turbulent et suivie par sonar Doppler.

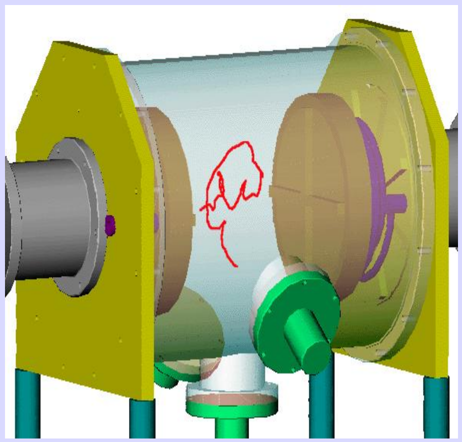


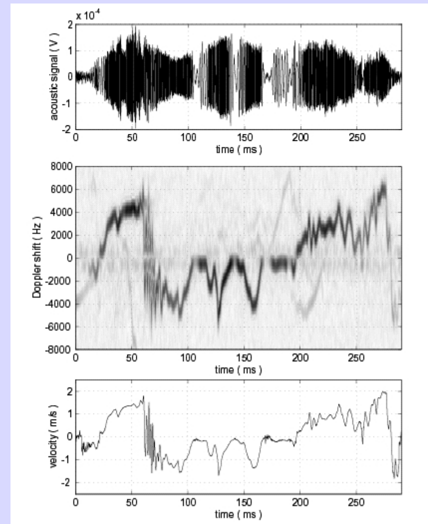


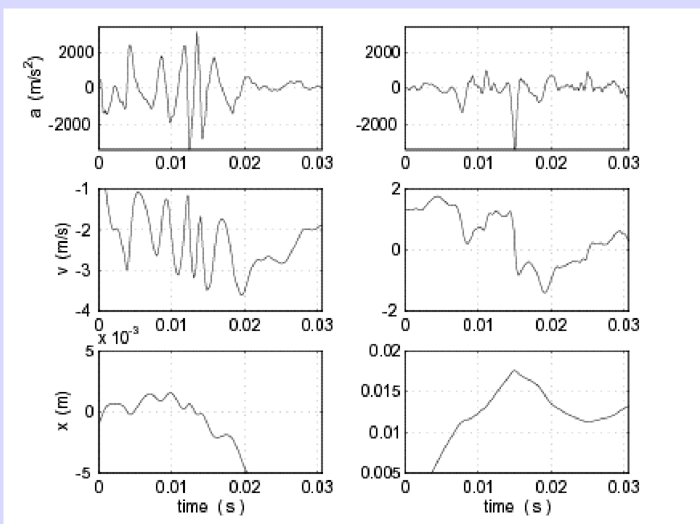


- **Vitesse lagrangienne**, suivre $\vec{v}(\vec{r}(t);t)$ au cours du temps t (Mordant et al.).

  Une bille est mise dans un écoulement turbulent et suivie par sonar Doppler.







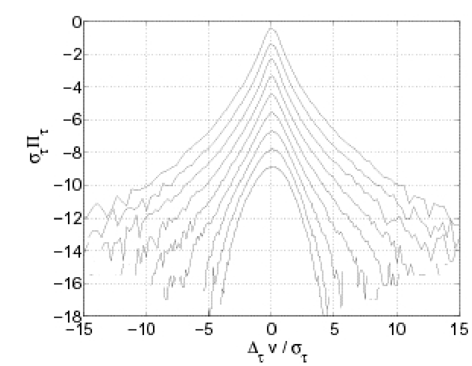


FIG. 3: PDF $\sigma_\tau \Pi_\tau$ of the normalized increment $\Delta v_\tau / \sigma_\tau$. The curves are shifted for clarity. From top to bottom: $\tau = [0.15, 0.3, 0.6, 1.2, 2.5, 5, 10, 20, 40]$ ms.

- **Vitesse lagrangienne**, suivre $\vec{v}(\vec{r}(t);t)$ au cours du temps t (Mordant et al.).

  Remarque : nécessité de méthodes d'analyse **non-stationnaire**.

- **Vitesse lagrangienne**, suivre $\vec{v}(\vec{r}(t);t)$ au cours du temps t (Mordant et al.).

  Remarque : nécessité de méthodes d'analyse **non-stationnaire**.

décomposition **temps-fréquence** (ici spectre de Wigner) ou **suivi de cible**

$$W_X(t,f) = \int X(t+\tau/2)\overline{X(t-\tau/2)}e^{-i2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau.$$

(filtrage de Kalman)

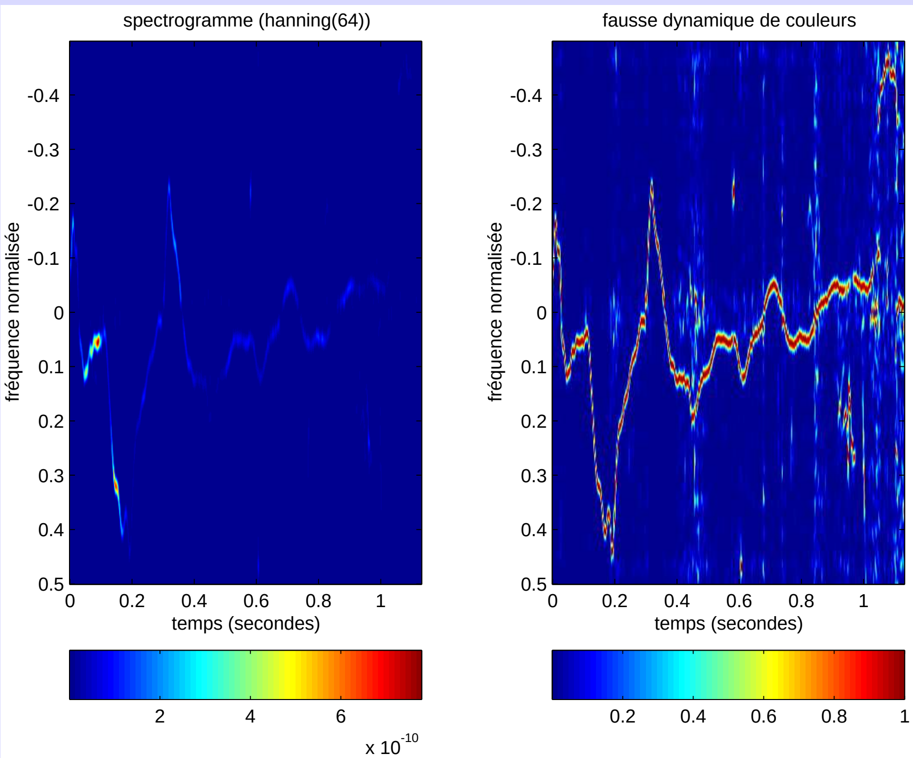
Turbulence et structures

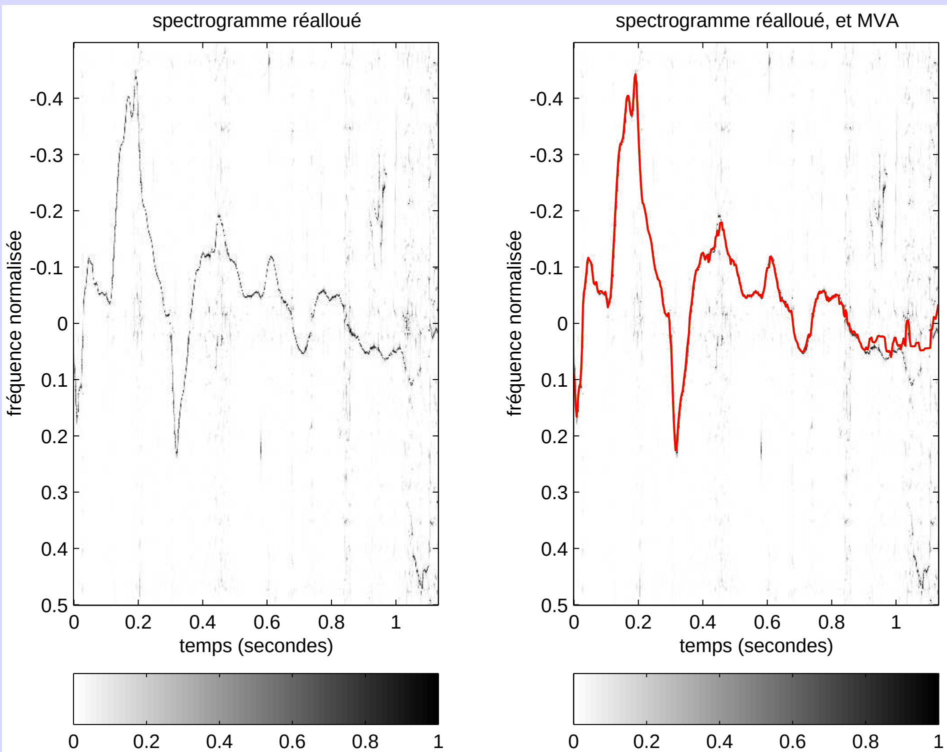
- **Vitesse lagrangienne**, suivre $\vec{v}(\vec{r}(t);t)$ au cours du temps t (Mordant et al.).

  Remarque : nécessité de méthodes d'analyse **non-stationnaire**.

décomposition **temps-fréquence** (ici spectre de Wigner) ou **suivi de cible**

$$W_X(t,f) = \int X(t+\tau/2)\overline{X(t-\tau/2)}e^{-i2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau.$$ (filtrage de Kalman)



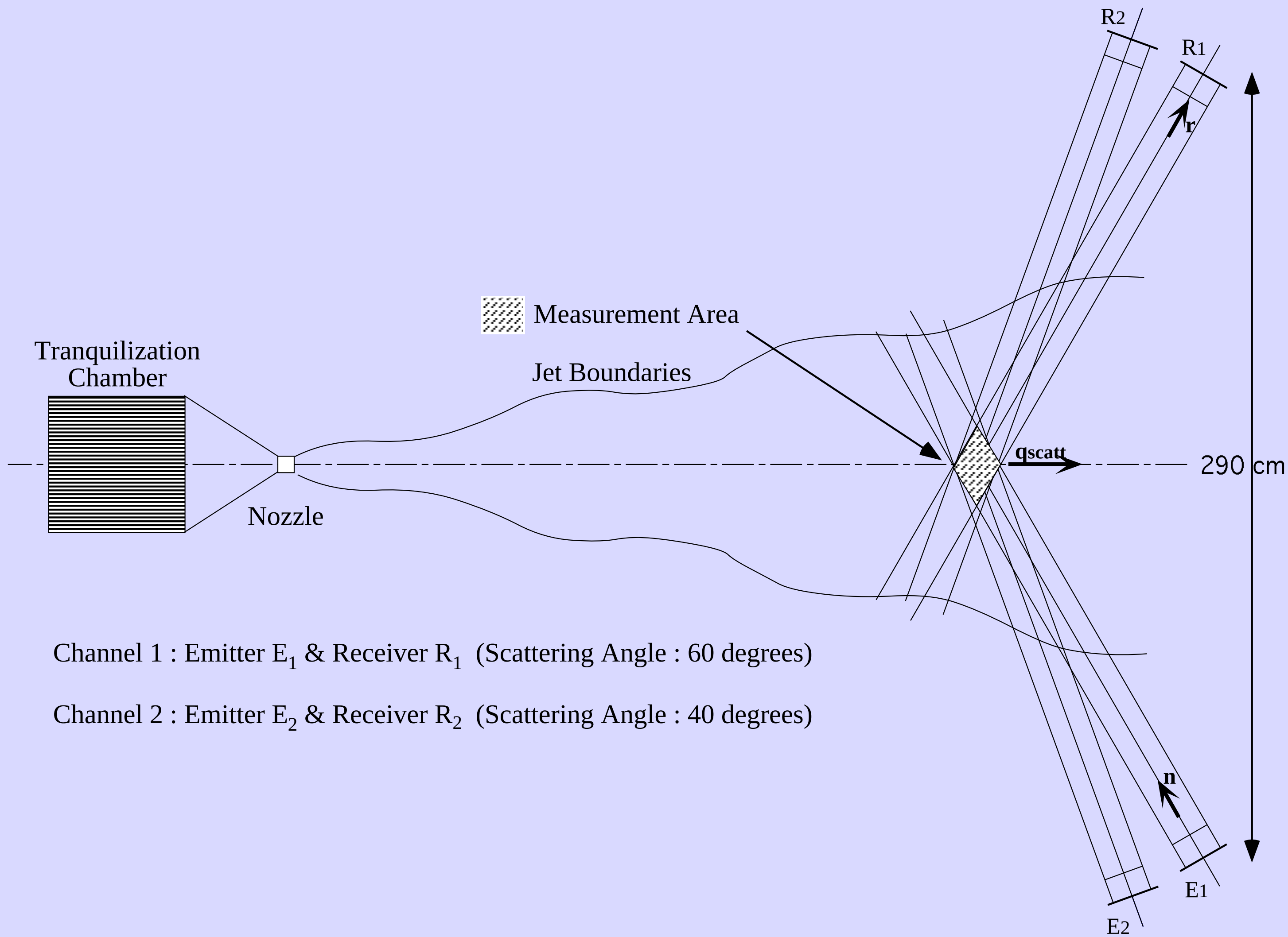


Spectrogramme / Spectro. réalloué

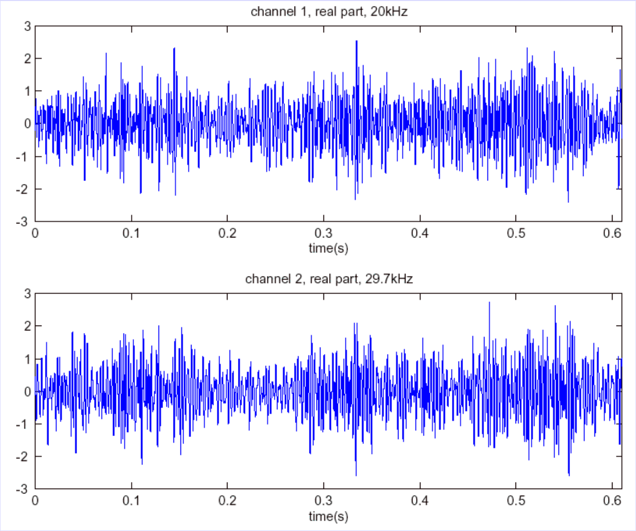
Spectro réalloué / filtrage de Kalman

- **Mesure de la vorticité,** $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ par diffusion de son (Baudet, Michel)

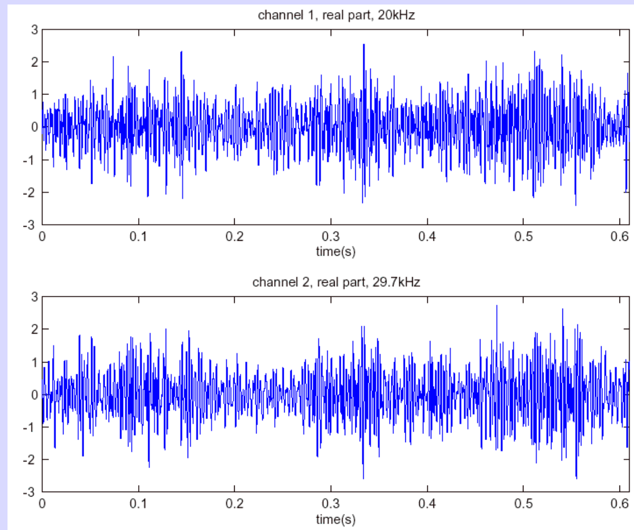
- **Mesure de la vorticité,** $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ par diffusion de son (Baudet, Michel)

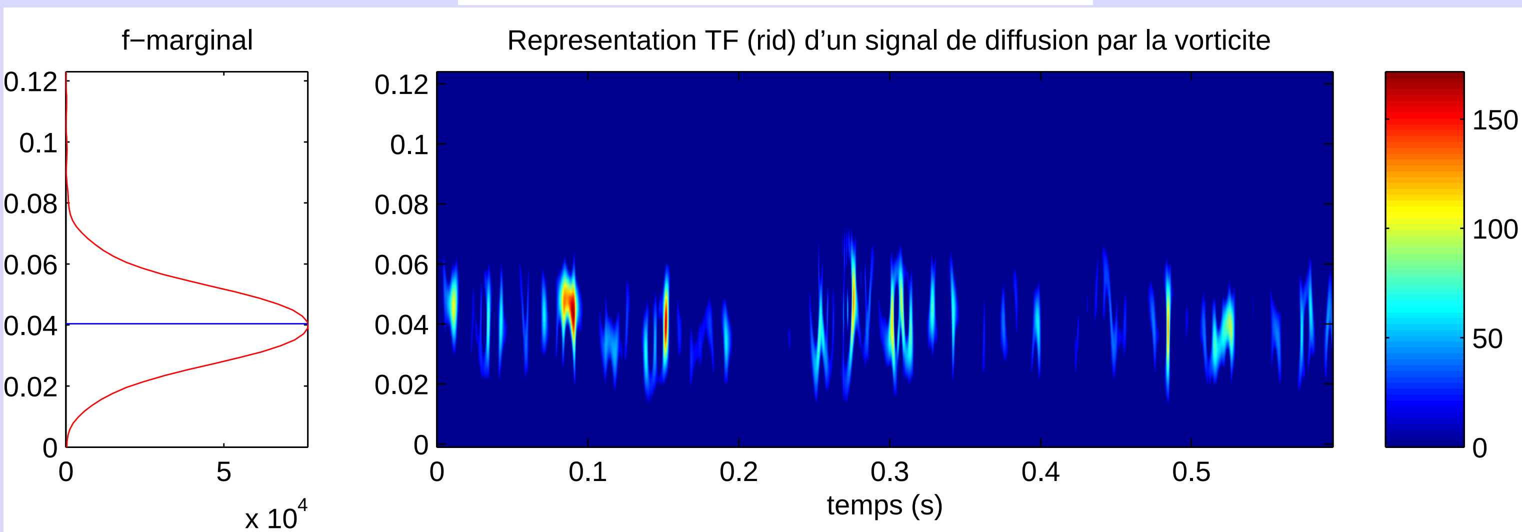


- **Mesure de la vorticité,** $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ par diffusion de son (Baudet, Michel)



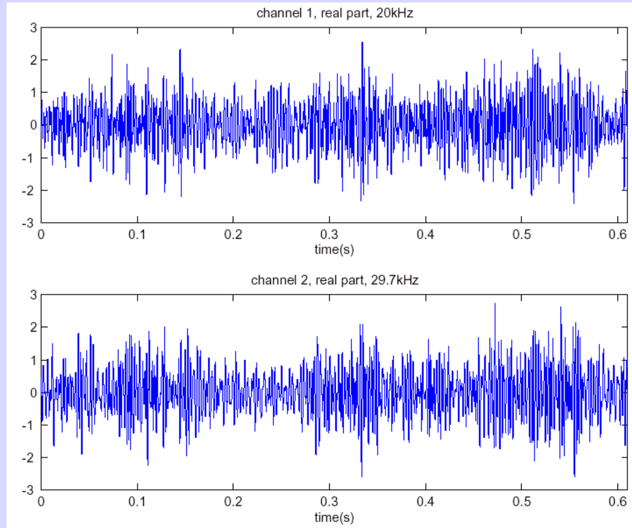
- **Mesure de la vorticité,** $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ par diffusion de son (Baudet, Michel)

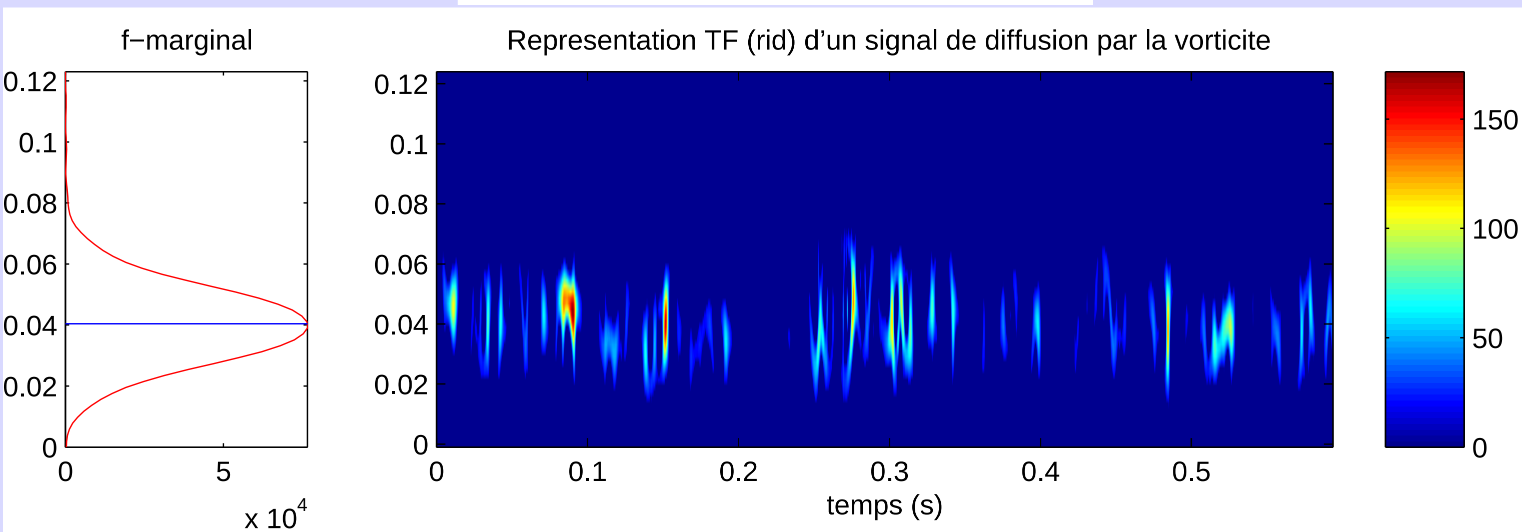




Turbulence et structures

- **Mesure de la vorticité,** $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ par diffusion de son (Baudet, Michel)





Pour plus de détails récents : thèse de Cédric Poulain, LEGI (UJF Grenoble) 09/2003

Processus aléatoires et dilatations : Analyses de Mellin et Lamperti

Processus aléatoires et dilatations : Analyses de Mellin et Lamperti

Idée de l'auto-similarité - le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Processus aléatoires et dilatations : Analyses de Mellin et Lamperti

Idée de l'auto-similarité - le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Def Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit auto-similaire d'indice H (noté "H-ss") si pour **tout** $\lambda > 0$,

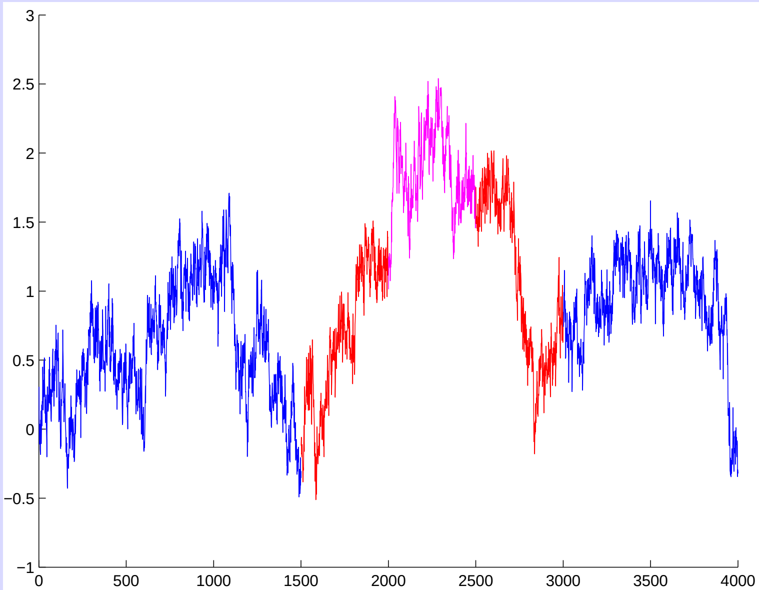
$$(\mathcal{D}_{H,\lambda} X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \;\; t > 0.$$

Processus aléatoires et dilatations : Analyses de Mellin et Lamperti

Idée de l'auto-similarité - le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Def Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit auto-similaire d'indice H (noté "H-ss") si pour **tout** $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \overset{d}{=} X(t), \quad t > 0.$$

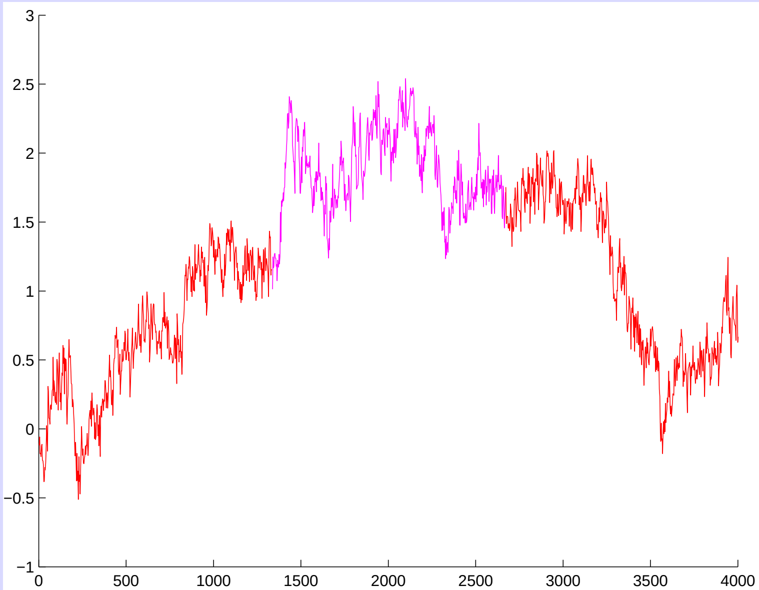


Processus aléatoires et dilatations : Analyses de Mellin et Lamperti

Idée de l'auto-similarité - le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Def Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit auto-similaire d'indice H (noté "H-ss") si pour **tout** $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda} X)(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \;\; t > 0.$$

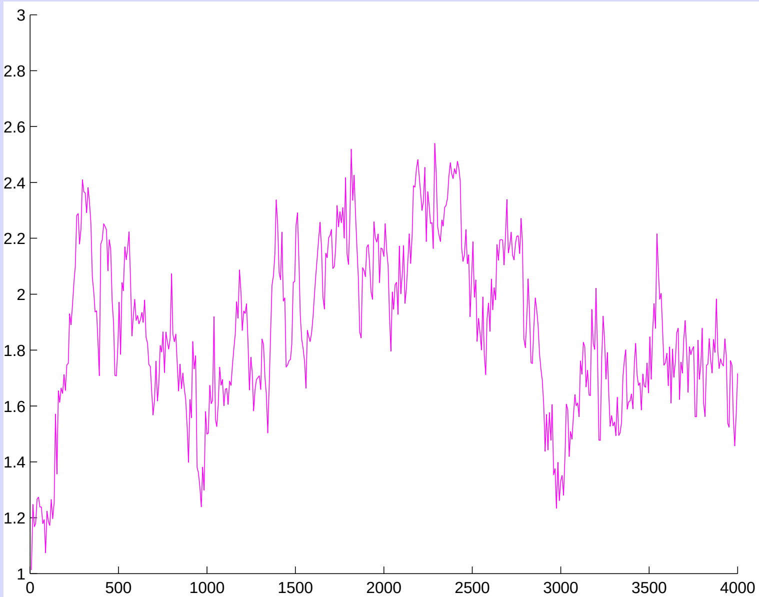


Processus aléatoires et dilatations : Analyses de Mellin et Lamperti

Idée de l'auto-similarité - le signal révèle la même chose à chaque échelle.

Def Un processus aléatoire $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit auto-similaire d'indice H (noté "H-ss") si pour **tout** $\lambda > 0$,

$$(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)\,(t) := \lambda^{-H} X(\lambda t) \stackrel{d}{=} X(t), \;\; t > 0.$$



• Auto-similarité et échelle de Mellin

Les dilatations d'indice H, $\{\mathcal{D}_{H,\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}_*^+\}$, forment un **groupe continu** d'opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}_*^+, t^{-2H-1}\mathrm{d}t)$.

• Auto-similarité et échelle de Mellin

Les dilatations d'indice H, $\{\mathcal{D}_{H,\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}_*^+\}$, forment un **groupe continu** d'opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}_*^+, t^{-2H-1}\mathrm{d}t)$.

• Son **générateur** hermitien tel que $\mathcal{D}_{H,\lambda} = e^{i2\pi\lambda\mathcal{C}}$, est

$$i2\pi(\mathcal{C}X)(t) = (-H + t\mathrm{d}/\mathrm{d}t)X(t).$$

• Auto-similarité et échelle de Mellin

Les dilatations d'indice H, $\{\mathcal{D}_{H,\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}_*^+\}$, forment un **groupe continu** d'opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}_*^+, t^{-2H-1}\mathrm{d}t)$.

• Son **générateur** hermitien tel que $\mathcal{D}_{H,\lambda} = e^{i2\pi\lambda\mathcal{C}}$, est

$$i2\pi(\mathcal{C}X)(t) = (-H + t\mathrm{d}/\mathrm{d}t)X(t).$$

• Les fonctions propres de $\mathcal{C}$ sont les ***chirps* de Mellin**

$$\frac{\mathrm{d}E_{H,\beta}(t)}{E_{H,\beta}(t)} = (H + i2\pi\beta)\frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \Rightarrow \quad E_{H,\beta}(t) = t^{H+i2\pi\beta}$$

- **Auto-similarité et échelle de Mellin**

Les dilatations d'indice H, $\{\mathcal{D}_{H,\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}_*^+\}$, forment un **groupe continu** d'opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}_*^+, t^{-2H-1}\mathrm{d}t)$.

- Son **générateur** hermitien tel que $\mathcal{D}_{H,\lambda} = e^{i2\pi\lambda\mathcal{C}}$, est

$$i2\pi(\mathcal{C}X)(t) = (-H + t\mathrm{d}/\mathrm{d}t)X(t).$$

- Les fonctions propres de $\mathcal{C}$ sont les ***chirps* de Mellin**

$$\frac{\mathrm{d}E_{H,\beta}(t)}{E_{H,\beta}(t)} = (H + i2\pi\beta)\frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \Rightarrow \quad E_{H,\beta}(t) = t^{H+i2\pi\beta}$$

- Décomposition dans la **représentation de Mellin**

$$(\mathcal{M}_H X)(\beta) = \int_0^{+\infty} t^{-H-i2\pi\beta} X(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \ \text{ et } \ X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{H,\beta}(t)(\mathcal{M}_H X)(\beta)\mathrm{d}\beta.$$

Interprétation : β a le sens d'une **échelle**, associée à l'invariance par dilatation.

Théorème de Lamperti

Définition de $\mathcal{L}_H$.
Étant donné $H \geq 0$*, la* $\boldsymbol{transformation\ de\ Lamperti}$ $\mathcal{L}_H$ *d'un processus stochastique* $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t),\ t > 0.$$

Théorème de Lamperti

Définition de $\mathcal{L}_H$.
Étant donné $H \geq 0$, la $\boldsymbol{transformation\ de\ Lamperti}$ *$\mathcal{L}_H$ d'un processus stochastique $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t),\ t > 0.$$

Définition de ${\mathcal{L}_H}^{-1}$.
Étant donné $H \geq 0$, la $\boldsymbol{transformation\ de\ Lamperti\ inverse}$ *${\mathcal{L}_H}^{-1}$ d'un processus stochastique $\{X(t), t > 0\}$ est définie par :*

$$({\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t) = e^{-Ht} X(e^t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Théorème de Lamperti

Définition de $\mathcal{L}_H$.
Étant donné $H \geq 0$, *la* **transformation de Lamperti** $\mathcal{L}_H$ *d'un processus stochastique* $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t),\ t > 0.$$

Définition de ${\mathcal{L}_H}^{-1}$.
Étant donné $H \geq 0$, *la* **transformation de Lamperti inverse** ${\mathcal{L}_H}^{-1}$ *d'un processus stochastique* $\{X(t), t > 0\}$ *est définie par :*

$$({\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t) = e^{-Ht} X(e^t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Théorème de J. Lamperti (1962).
Si $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ *est un processus stationnaire alors sa transformée de Lamperti* $\{(\mathcal{L}_H Y)(t), t > 0\}$ *est auto-similaire d'indice* H.

Théorème de Lamperti

Définition de $\mathcal{L}_H$.
Étant donné $H \geq 0$, la $\textbf{transformation de Lamperti}$ $\mathcal{L}_H$ *d'un processus stochastique $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est définie par :*

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t),\ t > 0.$$

Définition de ${\mathcal{L}_H}^{-1}$.
Étant donné $H \geq 0$, la $\textbf{transformation de Lamperti inverse}$ ${\mathcal{L}_H}^{-1}$ *d'un processus stochastique $\{X(t), t > 0\}$ est définie par :*

$$({\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t) = e^{-Ht} X(e^t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Théorème de J. Lamperti (1962).
Si $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus stationnaire alors sa transformée de Lamperti $\{(\mathcal{L}_H Y)(t), t > 0\}$ est auto-similaire d'indice H.

$\textbf{\textit{Inversement}}$, *si $\{X(t), t > 0\}$ est auto-similaire d'indice H, alors sa transformée de Lamperti inverse $\{({\mathcal{L}_H}^{-1} X)(t), t > 0\}$ est stationnaire.*

Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

$X(t)$

$Y(t) = \left(\mathcal{L}_H^{-1} X\right)(t)$

Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

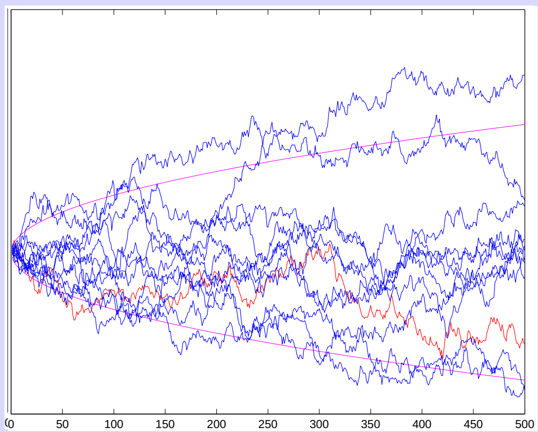
$X(t)$

$Y(t) = \left(\mathcal{L}_H^{-1} X\right)(t)$

Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens $(H = 1/2)$

$X(t)$



$Y(t) = \left(\mathcal{L}_H^{-1} X\right)(t)$

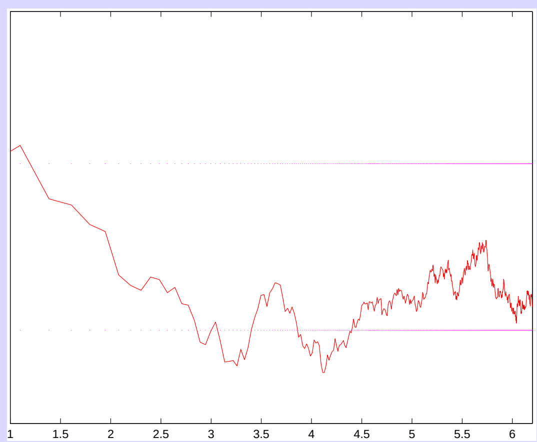
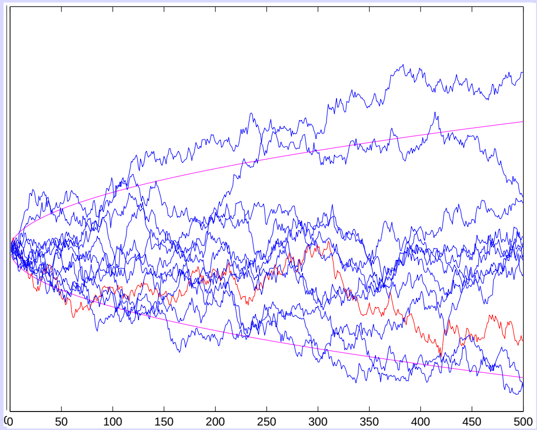


Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

Mouvements browniens ($H = 1/2$)

$X(t)$



$Y(t) = \left(\mathcal{L}_H^{-1} X\right)(t)$

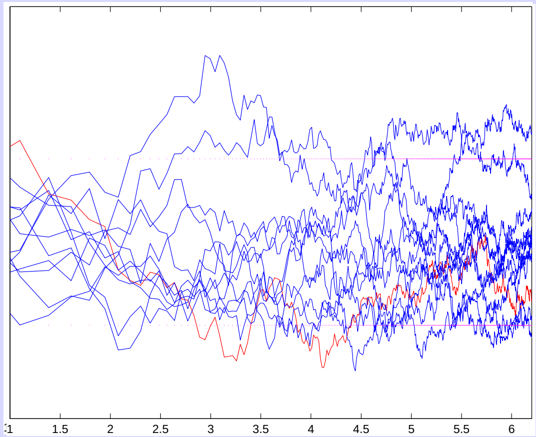
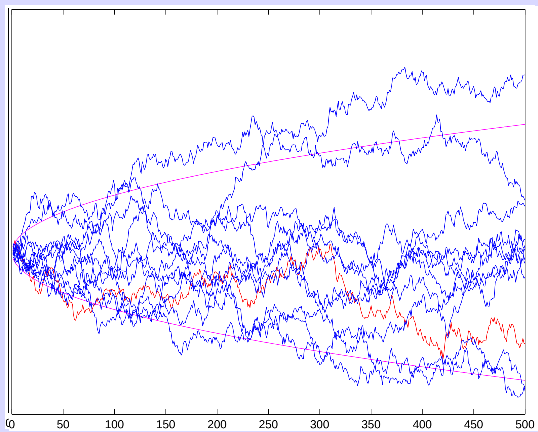


Illustration : naviguer entre stationnarité et auto-similarité.

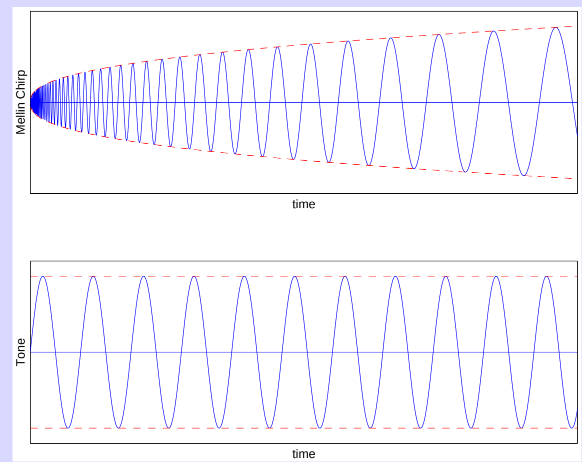
Mouvements browniens $(H = 1/2)$

$X(t)$

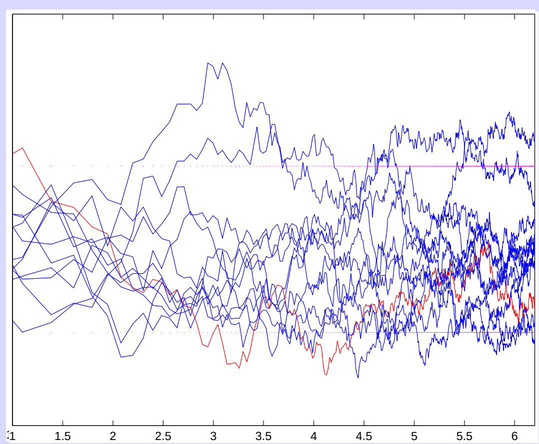


“Chirp” de Mellin

$t^{H+i2\pi\beta}$



$Y(t) = \left(\mathcal{L}_H^{-1} X\right)(t)$



Sinusoïde $e^{i2\pi\beta t}$

Processus d’Ornstein-Uhlenbeck

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{S}_\tau$.

$$\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln\lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H\,\mathcal{S}_\tau\,\mathcal{L}_H{}^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{S}_\tau$.

$$\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln\lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H\, \mathcal{S}_\tau\, \mathcal{L}_H{}^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{S}_\tau$.

$$\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln\lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H\, \mathcal{S}_\tau\, \mathcal{L}_H{}^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

- les descriptions des propriétés d'un signal en fonction de l'**échelle**

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{S}_{\tau}$.

$$\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln\lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H\,\mathcal{S}_\tau\,\mathcal{L}_H{}^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

- les descriptions des propriétés d'un signal en fonction de l'**échelle**

- les descriptions des propriétés d'un signal en **temps**

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{S}_\tau$.

$$\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln\lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H\,\mathcal{S}_\tau\,\mathcal{L}_H{}^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

• les descriptions des propriétés d'un signal en fonction de l'**échelle**

• les descriptions des propriétés d'un signal en **temps**

$\longrightarrow$ domaine **connu** (méthodes et modèles de l'analyse des signaux stationnaires, temps-fréquence,...)

Réinterprétation du Théorème de Lamperti

La transformation de Lamperti garantit essentiellement l'équivalence unitaire des opérateurs $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ et $\mathcal{S}_\tau$.

$$\mathcal{L}_H{}^{-1}\mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln\lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H\,\mathcal{S}_\tau\,\mathcal{L}_H{}^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}$$

De même, la transformation met en regard :

- les descriptions des propriétés d'un signal en fonction de l'**échelle**

  $\longrightarrow$ outils envisagés ici : construits sur la **transformée de Mellin**.

- les descriptions des propriétés d'un signal en **temps**

  $\longrightarrow$ domaine **connu** (méthodes et modèles de l'analyse des signaux stationnaires, temps-fréquence,...)

Schéma de réflexion - utiliser $\mathcal{L}_H$

Schéma de réflexion - utiliser $\mathcal{L}_H$

Soit une opération (notée $\mathbf{T}$) sur un processus auto-similaire X.

$$\begin{array}{c} X(t) \\ H\text{-ss} \end{array} \longrightarrow (\mathbf{T}X)$$

Schéma de réflexion - utiliser $\mathcal{L}_H$

Soit une opération (notée $\mathbf{T}$) sur un processus auto-similaire X.

$$\begin{array}{c} X(t) \\ H\text{-ss} \end{array} \longrightarrow (\mathbf{T}X)$$

$$\begin{array}{c} Y(t) = ({\mathcal{L}_H}^{-1}X)(t) \\ \text{stationnaire} \end{array} \longrightarrow (\tilde{\mathbf{T}}Y)$$

Schéma de réflexion - utiliser $\mathcal{L}_H$

Soit une opération (notée $\mathbf{T}$) sur un processus auto-similaire X.

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} X(t) \\ H\text{-ss} \end{array} & \longrightarrow & (\mathbf{T}X) \\
\Big\Downarrow {\mathcal{L}_H}^{-1} & & \Big\Uparrow \mathcal{L}_H \\
\begin{array}{c} Y(t) = ({\mathcal{L}_H}^{-1}X)(t) \\ \text{stationnaire} \end{array} & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{T}}Y)
\end{array}
$$

Schéma de réflexion - utiliser $\mathcal{L}_H$

Soit une opération (notée $\mathbf{T}$) sur un processus auto-similaire X.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} X(t) \\ H\text{-ss} \end{array} \arrow[r, "\mathcal{L}_H\tilde{\mathbf{T}}{\mathcal{L}_H}^{-1}X"] \arrow[d, Rightarrow, "{\mathcal{L}_H}^{-1}"] & (\mathbf{T}X) \\
\begin{array}{c} Y(t) = ({\mathcal{L}_H}^{-1}X)(t) \\ \text{stationnaire} \end{array} \arrow[r] & (\tilde{\mathbf{T}}Y) \arrow[u, Rightarrow, "\mathcal{L}_H"']
\end{tikzcd}
$$

Schéma de réflexion - utiliser $\mathcal{L}_H$

Soit une opération (notée $\mathbf{T}$) sur un processus auto-similaire X.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} X(t) \\ H\text{-ss} \end{array} \arrow[r, "\mathcal{L}_H \tilde{\mathbf{T}} \mathcal{L}_H{}^{-1} X"] \arrow[d, Rightarrow, "\mathcal{L}_H{}^{-1}"] & (\mathbf{T}X) \\
\begin{array}{c} Y(t) = (\mathcal{L}_H{}^{-1} X)(t) \\ \text{stationnaire} \end{array} \arrow[r] & (\tilde{\mathbf{T}}Y) \arrow[u, Rightarrow, "\mathcal{L}_H"']
\end{tikzcd}
$$

- L'analyse de Mellin est en fait l'image de celle de Fourier,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}\mathcal{L}_H{}^{-1} X)(\beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_H{}^{-1} X)(u) e^{-i2\pi\beta u} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} t^{-H} X(t) t^{-i2\pi\beta - 1} \mathrm{d}t = (\mathcal{M}_H X)(\beta)
\end{aligned}
$$

Utiliser $\mathcal{L}_H$ pour l'analyse spectrale

- Covariances caractérisées en $R_X(t,s) := \mathbb{E}\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

  et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation.

Utiliser $\mathcal{L}_H$ pour l'analyse spectrale

- Covariances caractérisées en $R_X(t,s) := \mathbb{E}\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

  et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation. $c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(t-s)$

Utiliser $\mathcal{L}_H$ pour l'analyse spectrale

- Covariances caractérisées en $R_X(t,s) := \mathbb{E}\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

  et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation. $c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(t-s)$

- Analyse spectrale de Mellin.

$$\Xi_X(\beta) = (\mathcal{M}_{H=0}\, c_X)(\beta)$$

Utiliser $\mathcal{L}_H$ pour l'analyse spectrale

- Covariances caractérisées en $R_X(t,s) := \mathbb{E}\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

  et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation. $c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(t-s)$

- Analyse spectrale de Mellin.

$$\Xi_X(\beta) \quad = (\mathcal{M}_{H=0}\, c_X)(\beta) \qquad\qquad (\mathcal{F}\gamma_Y)(\nu) = \Gamma_Y(\nu)$$

Utiliser $\mathcal{L}_H$ pour l'analyse spectrale

- Covariances caractérisées en $R_X(t,s) := \mathbb{E}\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

  et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation. $c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(t-s)$

- Analyse spectrale de Mellin.

$$\begin{aligned} \Xi_X(\beta) &= (\mathcal{M}_{H=0}\, c_X)(\beta) \\ &= \Gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(\beta) \end{aligned}$$

$$(\mathcal{F}\gamma_Y)(\nu) = \Gamma_Y(\nu)$$

Utiliser $\mathcal{L}_H$ pour l'analyse spectrale

- Covariances caractérisées en $R_X(t,s) := \mathbb{E}\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\} = (ts)^H c_X(t/s)$

  et $c_X(e^\tau)$ est une fonction de corrélation. $c_X(t/s) = \gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(t-s)$

- Analyse spectrale de Mellin.

$$\begin{aligned} \Xi_X(\beta) &= (\mathcal{M}_{H=0}\, c_X)(\beta) \\ &= \Gamma_{\mathcal{L}_H{}^{-1}X}(\beta) \end{aligned}$$

$$(\mathcal{F}\gamma_Y)(\nu) = \Gamma_Y(\nu)$$

- Décomposition (de type Cramér)...

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{H+i2\pi\sigma} \mathrm{d}\xi(\sigma)$$

... de processus H-ss : $\mathrm{d}\xi(\sigma)$ décorrélés

$$Y(t) = \int e^{i2\pi ft} d\xi(f)$$

...pour un processus stationnaire : $\mathrm{d}\xi(f)$ décorrélés

$$\mathbb{E}\left\{\mathrm{d}\xi(\beta)\overline{\mathrm{d}\xi(\sigma)}\right\} = \Xi_X(\beta)\ \delta(\beta-\sigma)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\sigma$$

Filtres covariants en échelle

Définition 1. – *Un système* **covariant en échelle** $\mathcal{G}$ *commute avec* $\boldsymbol{toute}$ *dilatation*

$$\mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G} \qquad (\forall \lambda > 0)\,(\forall H \in \mathbb{R})\,.$$

Filtres covariants en échelle

Définition 1. – *Un système* **covariant en échelle** $\mathcal{G}$ *commute avec* ***toute*** *dilatation*

filtre LTI $\mathcal{H}$

$$\mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G} \qquad (\forall\lambda > 0)\,(\forall H \in \mathbb{R})\,.$$

$$\mathcal{H}\mathcal{S}_\tau = \mathcal{S}_\tau\mathcal{H}$$

Filtre linéaire covariant – convolution multiplicative

$$(\mathcal{G}X)\,(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s)X(s)\mathrm{d}s/s.$$

$$(\mathcal{H}Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)Y(s)\mathrm{d}s$$

Propriété principale – préserve l'auto-similarité.

...préserve la stationnarité.

Filtres covariants en échelle

Définition 1. – *Un système* **covariant en échelle** $\mathcal{G}$ *commute avec **toute** dilatation*

$$\mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G} \qquad (\forall\lambda > 0)\,(\forall H \in \mathbb{R})\,.$$

Filtre linéaire covariant – convolution multiplicative

$$(\mathcal{G}X)\,(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s)X(s)\mathrm{d}s/s.$$

Propriété principale – préserve l'auto-similarité.

filtre LTI $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}\mathcal{S}_\tau = \mathcal{S}_\tau\mathcal{H}$$

$$(\mathcal{H}Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-s)Y(s)\mathrm{d}s$$

...préserve la stationnarité.

Relations de filtrage en échelle. $X(t) = (\mathcal{G}A)\,(t)$.

$$\longrightarrow\ c_X(\lambda) = \int_0^{\infty} \rho_g(\lambda/u)c_A(u)du/u$$

avec la **corrélation de Mellin**

$$\rho_g(\lambda) := \int_0^{\infty} g(\lambda u)g(u)u^{-2H}\mathrm{d}u/u.$$

Représentation en sortie de filtre

Représentation en sortie de filtre

Représentation générale d'un signal H-ss.

$$X(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s) \mathrm{d}V(s)/s,$$

$\mathrm{d}V(t)$ bruit blanc transformé de Lamperti

$$\mathbb{E}\left\{\mathrm{d}V(t)\mathrm{d}V(s)\right\} = \sigma^2 t^{2H+1} \delta(t-s) \mathrm{d}t \mathrm{d}s$$

Représentation en sortie de filtre

Représentation générale d'un signal H-ss.

$$X(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s)\mathrm{d}V(s)/s,$$

$\mathrm{d}V(t)$ bruit blanc transformé de Lamperti

$$\mathbb{E}\left\{\mathrm{d}V(t)\mathrm{d}V(s)\right\} = \sigma^2 t^{2H+1}\delta(t-s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

Corrélation de Mellin pour les processus H-ss.

$$X(t) = \int_0^{\infty} g(t/s)\mathrm{d}V(s)/s,$$

implique alors

$$c_X(\lambda) = \sigma^2\lambda^{-H}\int_0^{\infty} g(\lambda u)g(u)u^{-2H}\mathrm{d}u/u$$

Exemple du modèle paramétrique de Noret

- Solution de l'équation de Langevin lampertisée :

$$tdX(t) + (\alpha - H)X(t)dt = dV(t) = t^{H+1/2}dB(t)$$

Exemple du modèle paramétrique de Noret

- Solution de l'équation de Langevin lampertisée :

$$tdX(t) + (\alpha - H)X(t)dt = dV(t) = t^{H+1/2}dB(t)$$

- Représentation intégrale ($g(u) = u^{H-\alpha}$ si $u > 1$)

$$X_{\alpha,H}(t) = \int_0^t (t/s)^{H-\alpha}\mathrm{d}V(s)/s$$

Exemple du modèle paramétrique de Noret

- Solution de l'équation de Langevin lampertisée :

$$tdX(t) + (\alpha - H)X(t)dt = dV(t) = t^{H+1/2}dB(t)$$

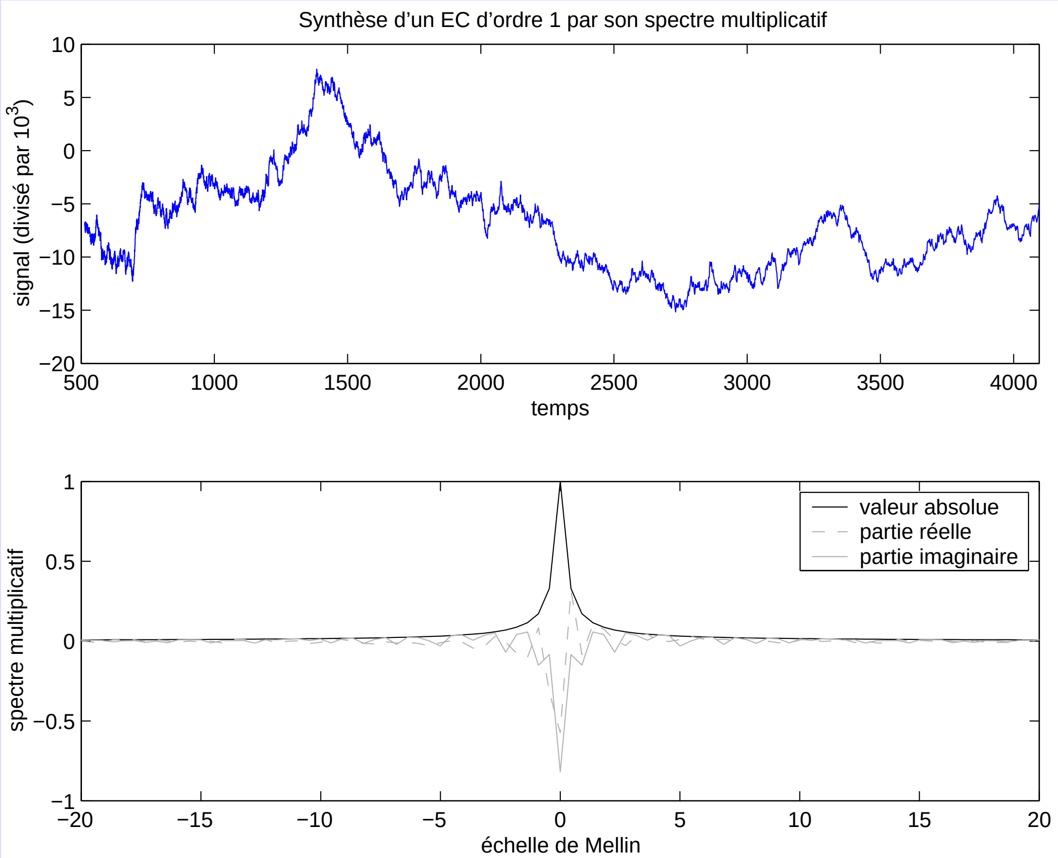
- Représentation intégrale ($g(u) = u^{H-\alpha}$ si $u > 1$)

$$X_{\alpha,H}(t) = \int_0^t (t/s)^{H-\alpha} \mathrm{d}V(s)/s$$

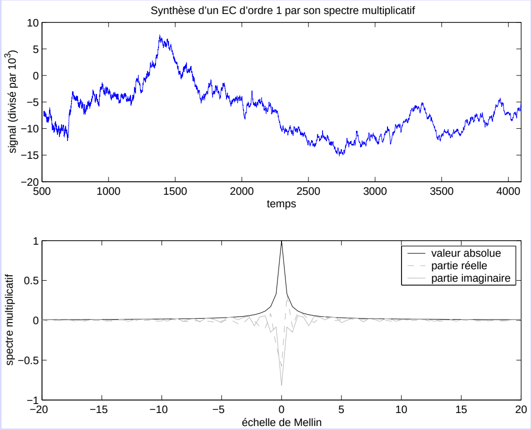
$\longrightarrow$ modèle H-ss d'ordre 1, à deux paramètres.

$$R_{X_{\alpha,H}}(t,s) = \sigma^2 (ts)^H \left(\frac{s}{t}\right)^{-\alpha} \qquad \text{si} \quad s > t.$$

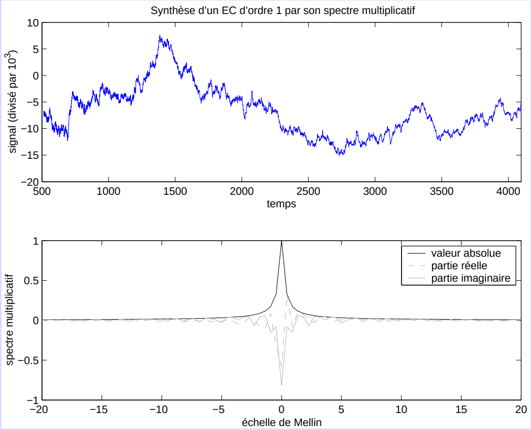
Exemple du modèle de Noret

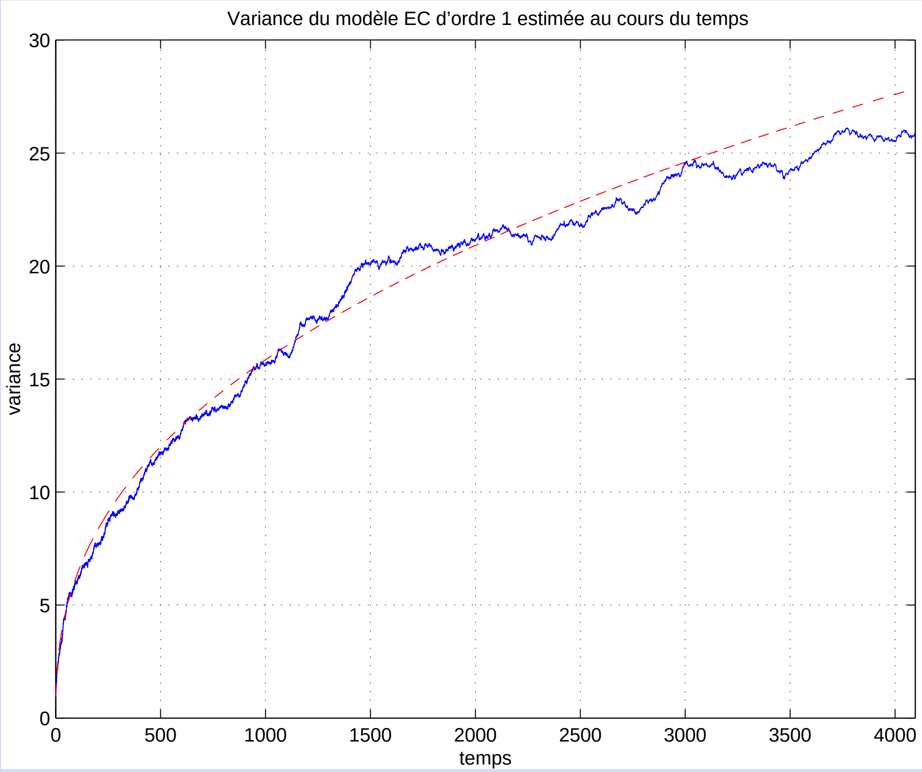


Exemple du modèle de Noret

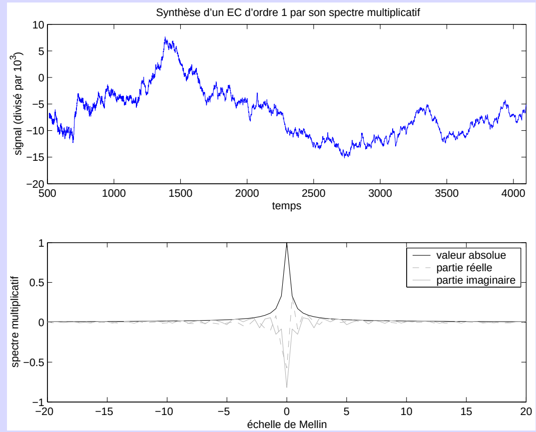


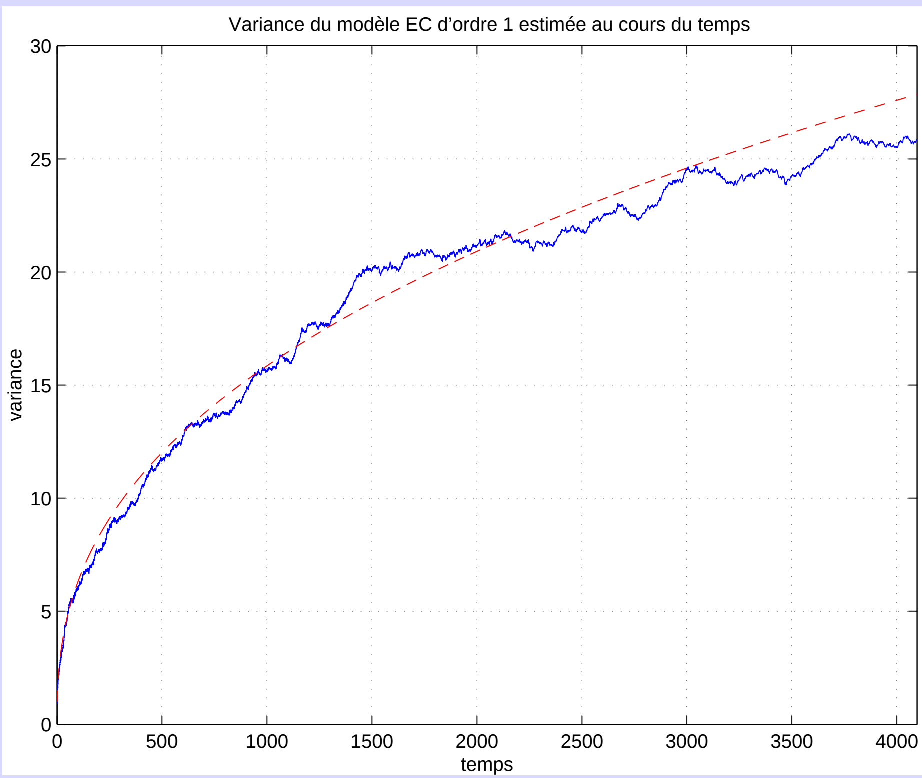
Exemple du modèle de Noret

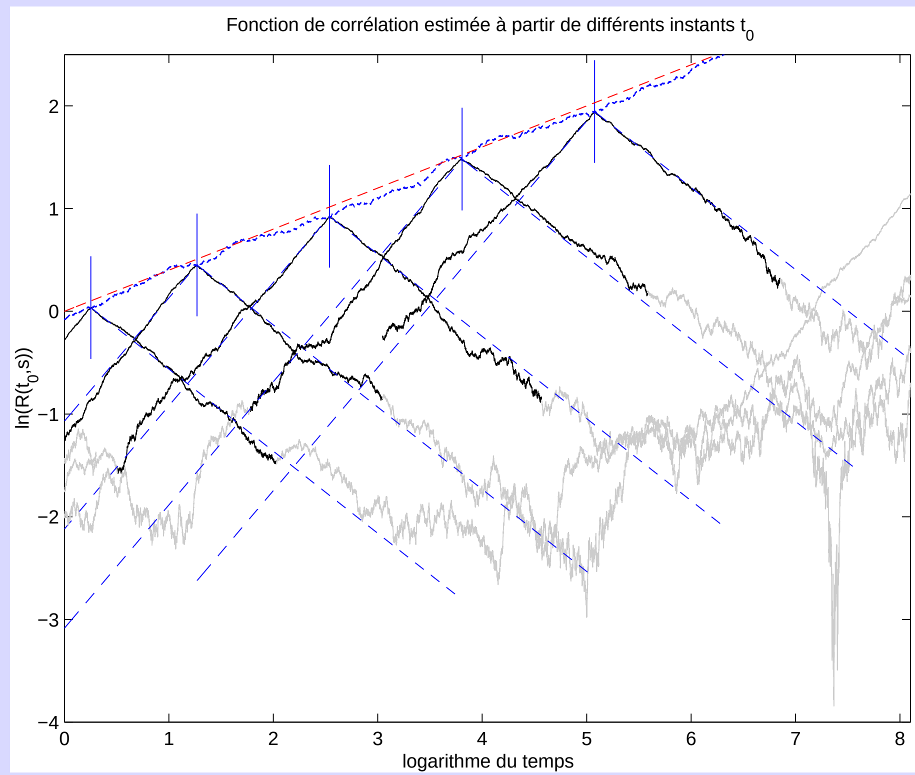




Exemple du modèle de Noret







Analyse conjointe en Mellin et Fourier

Exemple de la fonction de **Weierstrass-Mandelbrot**, définie par

$$W(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{-nH} (1 - e^{i\lambda^n t}) e^{i\phi_n}.$$

Analyse conjointe en Mellin et Fourier

Exemple de la fonction de **Weierstrass-Mandelbrot**, définie par

$$W(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{-nH}(1 - e^{i\lambda^n t})e^{i\phi_n}.$$

• Dans la version aléatoire, les ϕ_n sont i.i.d. dans $[0, 2\pi[$;
elle est une superposition de modes incohérents aux **fréquences** en λ^{-n}.

Analyse conjointe en Mellin et Fourier

Exemple de la fonction de **Weierstrass-Mandelbrot**, définie par

$$W(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{-nH} (1 - e^{i\lambda^n t}) e^{i\phi_n}.$$

• Dans la version aléatoire, les ϕ_n sont i.i.d. dans $[0, 2\pi[$;
elle est une superposition de modes incohérents aux **fréquences** en λ^{-n}.

• Propriété d'**invariance d'échelle discrète**,

$$W(\lambda^k t) \stackrel{d}{=} \lambda^{-kH} W(t).$$

Analyse conjointe en Mellin et Fourier

Exemple de la fonction de **Weierstrass-Mandelbrot**, définie par

$$W(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{-nH}(1 - e^{i\lambda^n t})e^{i\phi_n}.$$

• Dans la version aléatoire, les ϕ_n sont i.i.d. dans $[0, 2\pi[$;
elle est une superposition de modes incohérents aux **fréquences** en λ^{-n}.

• Propriété d'**invariance d'échelle discrète**,

$$W(\lambda^k t) \stackrel{d}{=} \lambda^{-kH} W(t).$$

• Décomposition de **Mellin** ?

Analyse conjointe en Mellin et Fourier

Exemple de la fonction de **Weierstrass-Mandelbrot**, définie par

$$W(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^{-nH}(1 - e^{i\lambda^n t})e^{i\phi_n}.$$

• Dans la version aléatoire, les ϕ_n sont i.i.d. dans $[0, 2\pi[$;
elle est une superposition de modes incohérents aux **fréquences** en λ^{-n}.

• Propriété d'**invariance d'échelle discrète**,

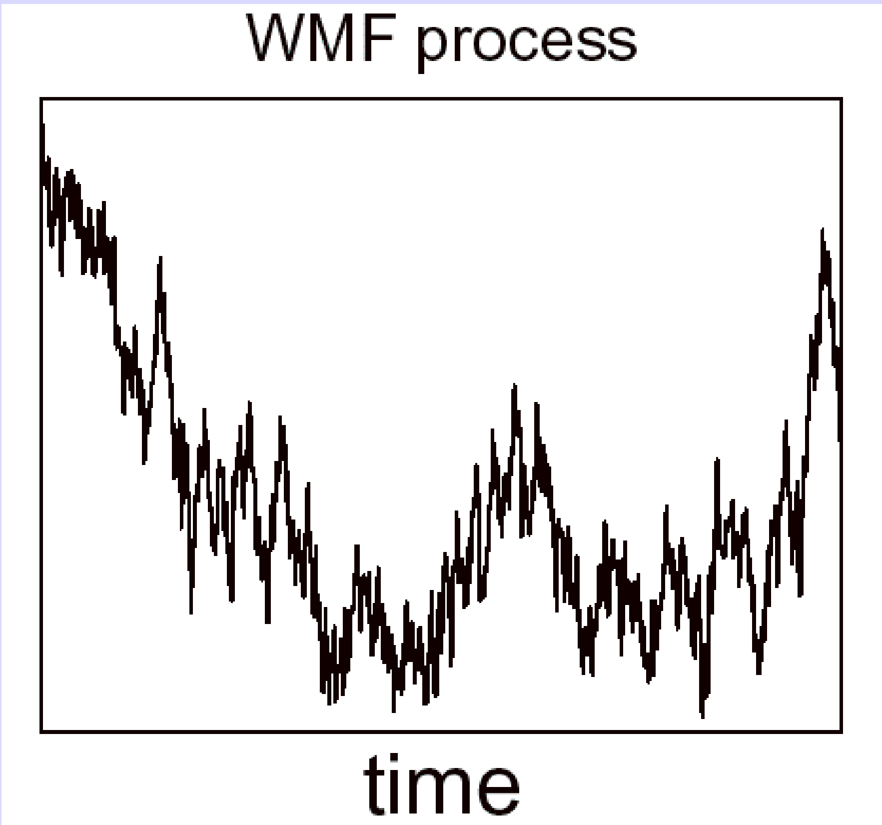
$$W(\lambda^k t) \stackrel{d}{=} \lambda^{-kH} W(t).$$

• Décomposition de **Mellin** ? Elle existe, pour $\phi_n = n\mu$ (Berry, Lewis)

$$W(t) = \sum_m \frac{-\boldsymbol{\Gamma}(-H - m/\ln\lambda)}{\ln\lambda} e^{[-i\pi(H+m/\ln\lambda)/2]} E_{H,m/\ln\lambda}(t).$$

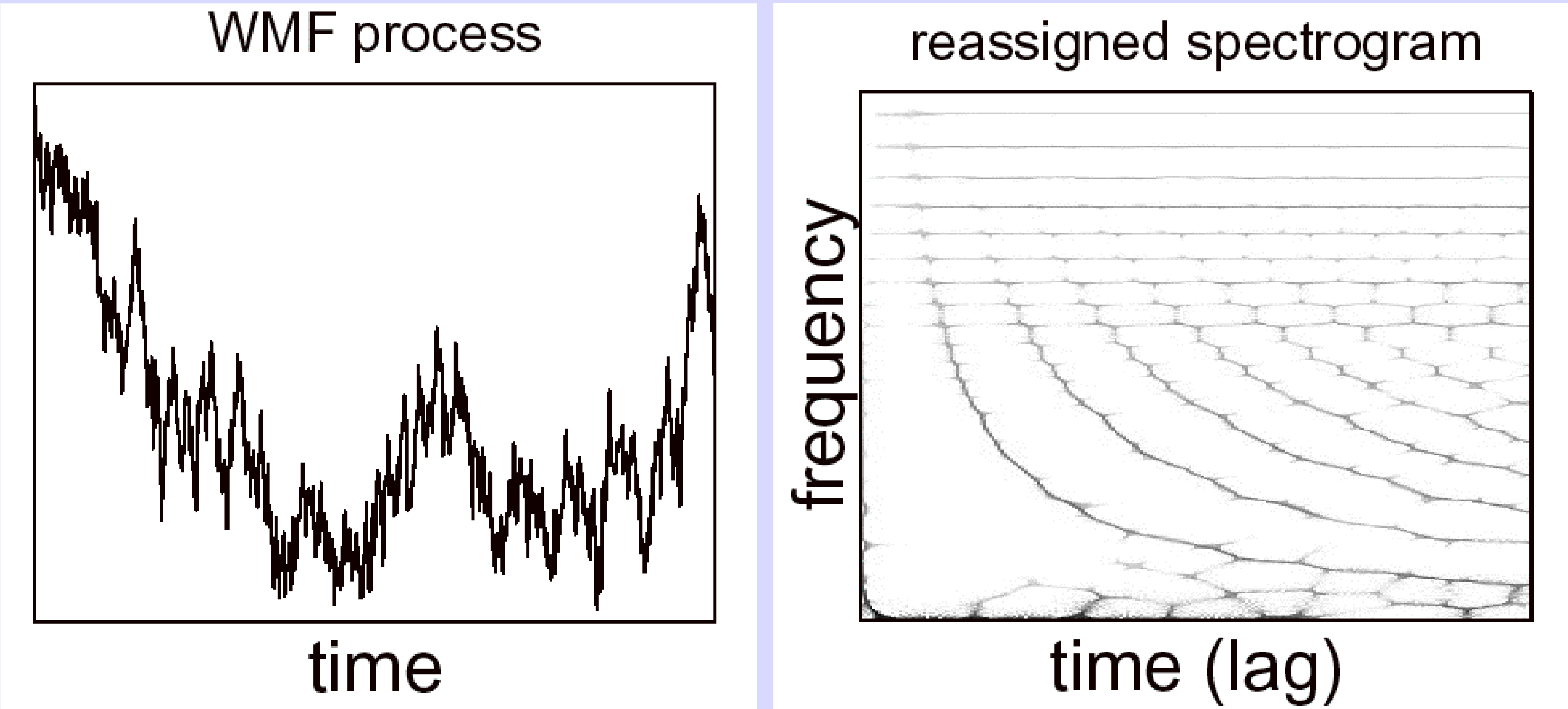
Analyse conjointe en Mellin et Fourier

Pour une fonction de Weierstrass-Mandelbrot aléatoire, $H = 0,3$ et $\lambda = 1,07$.



Analyse conjointe en Mellin et Fourier

Pour une fonction de Weierstrass-Mandelbrot aléatoire, $H = 0,3$ et $\lambda = 1,07$.



Conclusion

- Richesse et complexité des signaux de turbulence

Conclusion

- Richesse et complexité des signaux de turbulence

1. statistique non simple ($\neq$ gaussienne)

Conclusion

- Richesse et complexité des signaux de turbulence

1. statistique non simple ($\neq$ gaussienne)
2. invariance d'échelle mais comme symétrie brisée

Conclusion

- Richesse et complexité des signaux de turbulence

1. statistique non simple ($\neq$ gaussienne)
2. invariance d'échelle mais comme symétrie brisée
3. des caractères non stationnaires dans les mesures

Conclusion

• Richesse et complexité des signaux de turbulence

1. statistique non simple ($\neq$ gaussienne)
2. invariance d'échelle mais comme symétrie brisée
3. des caractères non stationnaires dans les mesures

• Nécessité d'analyses **non stationnaires**, en **échelle** et aussi **non linéaires**

Conclusion

• Richesse et complexité des signaux de turbulence

1. statistique non simple ($\neq$ gaussienne)
2. invariance d'échelle mais comme symétrie brisée
3. des caractères non stationnaires dans les mesures

• Nécessité d'analyses **non stationnaires**, en **échelle** et aussi **non linéaires**

1. temps-fréquence / temps-échelle

Conclusion

• Richesse et complexité des signaux de turbulence

1. statistique non simple ($\neq$ gaussienne)
2. invariance d'échelle mais comme symétrie brisée
3. des caractères non stationnaires dans les mesures

• Nécessité d'analyses **non stationnaires**, en **échelle** et aussi **non linéaires**

1. temps-fréquence / temps-échelle
2. tests sur les ordres supérieurs

Conclusion

• Richesse et complexité des signaux de turbulence

1. statistique non simple ($\neq$ gaussienne)
2. invariance d'échelle mais comme symétrie brisée
3. des caractères non stationnaires dans les mesures

• Nécessité d'analyses **non stationnaires**, en **échelle** et aussi **non linéaires**

1. temps-fréquence / temps-échelle
2. tests sur les ordres supérieurs
3. quelles méthodes rendant compte des structures ?

Conclusion

- Richesse et complexité des signaux de turbulence

1. statistique non simple ($\neq$ gaussienne)
2. invariance d'échelle mais comme symétrie brisée
3. des caractères non stationnaires dans les mesures

- Nécessité d'analyses **non stationnaires**, en **échelle** et aussi **non linéaires**

1. temps-fréquence / temps-échelle
2. tests sur les ordres supérieurs
3. quelles méthodes rendant compte des structures ?

- Multiplicité des concepts et des approches

Conclusion

• Richesse et complexité des signaux de turbulence

1. statistique non simple ($\neq$ gaussienne)
2. invariance d'échelle mais comme symétrie brisée
3. des caractères non stationnaires dans les mesures

• Nécessité d'analyses **non stationnaires**, en **échelle** et aussi **non linéaires**

1. temps-fréquence / temps-échelle
2. tests sur les ordres supérieurs
3. quelles méthodes rendant compte des structures ?

• Multiplicité des concepts et des approches

Commentaire final sur ce qu'est une **échelle**.

$\longrightarrow$ échelle des ondelettes,

$\longrightarrow$ échelle de l'analyse de Mellin.

Publicité : `http ://www.ens-lyon.fr/~pborgnat`