
MAIDESC-T5-D4: Adaptive FMG for unsteady CFD.

Septembre 2015

Gautier Brèthes, Vincent Levasseur

LEMMA, Les Algorithmes (Le Thales A), 2000 route des Lucioles, 06410 BIOT, France,

Summary. Ce document propose une version préliminaire de la livraison T5-D4 proposée par Lemma pour le projet MAIDESC.

Key words: Multigrid, 3D, CFD

1 Introduction

La société Lemma développe notamment dans le logiciel ANANAS des outils de simulation à la fois très innovatifs (adaptation du maillage) et fonctionnant sur des plateformes informatiques les plus modernes (parallélisme massif). Rappelons dans ce contexte quelques réalisations résultant de la collaboration de Lemma avec la recherche.

Dans sa thèse [5], Damien Guégan a travaillé à un démonstrateur de simulation par maillage adaptatif et parallélisme massif d'écoulement diphasiques, avec des critères d'adaptation basés hessiens.

Suite à la thèse de Hubert Alcin à l'INRIA [1, 2], le module Navier-Stokes a été enrichi par un algorithme de résolution de type Schwarz multiniveau par déflation.

Des critères basés adjoints ont été ensuite introduits dans certains modules de structure d'ANANAS.

Une certaine priorité étant mise sur l'efficacité, notre travail de thèse s'est focalisé sur l'adaptation de notre algorithme FMG dans le module Navier-Stokes d'ANANAS. Dans un premier temps, cette implémentation se fait indépendamment de l'algorithme de Schwarz, mais pourrait être combiné avec Schwartz (qui serait appliqué à la grille la plus grossière) pour atteindre un niveau supérieur de scalabilité.

Pour adapter l'algorithme FMG à un module Navier-Stokes parallèle, une difficulté essentielle est la mise au point d'une version parallèle du solveur elliptique en pression sans perte importante d'efficacité. L'essentiel du travail de mise au point du démonstrateur expérimental portera sur la transposition de FMG à un contexte partitionné pour une mise en œuvre avec MPI.

Dans un premier paragraphe on introduit le modèle Navier-Stokes. Le second paragraphe définit une petite adaptation à l'instationnaire. Le troisième paragraphe définit les conditions d'adaptation au cas partitionné. Le quatrième paragraphe présente quelques mesures d'efficacité. Un cinquième paragraphe fait la synthèse.

2 Modèle Navier-Stokes incompressible instationnaire

Le modèle considéré concerne les écoulement multi-fluides incompressibles. Sa formulation sous forme d'EDP est basée sur une formulation en courbe de niveau (*Level-Set*), comme dans [4, 8] incluse dans un modèle Navier-Stokes parallèle comme dans [7] et étendue au cas adaptatif comme dans [6].

2.1 Équations bi-fluides via Level-Set

On considère le modèle des équations de Navier-Stokes pour deux liquides incompressibles non-miscibles, non soumis à une tension interfaciale et se déplaçant dans une enceinte fermée

Ω .

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (U \otimes U) = \nabla \cdot (\nu(\rho) \nabla U) - \nabla p + \rho g \text{ dans } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (3)$$

où U désigne le vecteur vitesse du système des deux fluides, p sa pression, ρ sa masse volumique, et g le vecteur des forces de gravité. Dans cette formulation, la masse volumique prend seulement deux valeurs ρ_l et ρ_g strictement positives chacune et prise chacune dans un sous-domaine de Ω , les deux sous-domaines étant séparés par une interface. Le modèle est mathématiquement bien posé quand la viscosité $\nu(\rho)$ n'est pas nulle, voir par exemple [10]. L'interface est supposée être une surface suffisamment régulière, et en particulier, avoir une normale bien définie $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} \delta_\rho = \frac{1}{\rho_l - \rho_g} \nabla \rho,$$

où δ_ρ désigne la couche de Dirac portée par cette interface. Pour fixer les idées, ρ_l est la masse volumique d'un liquide, et ρ_g est la masse volumique d'un gaz (le mouvement du gaz étant supposé garantir son incompressibilité). Typiquement, le rapport entre les deux masses volumiques peut atteindre un millier, ce qui représente une difficulté certaine au niveau de l'approximation, aussi bien qu'au niveau de la résolution, ce qui explique que nous ayons tout au long de cette étude utilisé un cyclage extrêmement robuste incluant un GMRES. Le système précédent est complété par une condition au bord, de type glissement ($U \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} = 0$ on $\partial\Omega$ où $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ est la normale au bord).

Dans la méthode Level-Set, on modifie la formulation (1-3). On considère une fonction lisse ϕ , la Level Set, dont le contour 0 est porté par l'interface. Les deux sous-domaines sont donc repérés par la fonction de Heaviside H appliquée à ϕ :

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < 0 \\ 1 & \text{if } \phi \geq 0. \end{cases}$$

$$\rho(\phi) = \rho_g + (\rho_l - \rho_g)H(\phi)$$

$$\phi_t + \nabla \cdot (U \phi) = 0, \quad (4)$$

$$\rho(\phi) \frac{\partial U}{\partial t} + \rho(\phi) \nabla \cdot (U \otimes U) + \nabla p - \rho(\phi) g = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot U = 0. \quad (6)$$

2.2 Approximation par éléments finis

Le système (5-6) est approché par une méthode de projection standard avec une approximation P_1 - P_1 en élément fini continu de degré un comme dans [7]. L'interface est advectée à l'aide de l'équation (4) qui est approchée par des volumes finis centrés-sommets [3].

Introduisons quelques notations supplémentaires. Soit Ω_h la discrétisation du domaine de calcul Ω inclus dans $\mathbb{R}^{dim}$ et soit $\mathcal{H}$ un maillage de Ω_h . Pour simplifier nous supposons que le domaine discret Ω_h est identique à Ω . On omet les indices de discrétisation spatiale $_h$. $V = \{\psi \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \mid \psi|_K \text{ is affine } \forall K \in \mathcal{H}\}$ est l'espace usuel d'éléments finis P_1 . V est engendré

par les fonctions de base ψ_i décrites dans les chapitres précédents. On note $\mathbf{V} = V^{dim}$, Les variables multi-fluides discrètes sont:

$$\mathbf{U} = \sum_i \mathbf{U}_i \psi_i, \quad p = \sum_i p_i \psi_i \quad \text{and} \quad \phi = \sum_i \phi_i \psi_i.$$

Projecteur L^2 :

pour tout $u \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, on note $\mathcal{P}u : \mathbf{L}^2 \mapsto V$ la fonction telle que pour tout sommet $\mathbf{x}_i$ de $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{P}u(\mathbf{x}_i) = \frac{\int_{\Omega} u \psi_i d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \psi_i d\mathbf{x}}.$$

Pour tout $\mathbf{U} = (u, v) \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^2$, on note $\mathcal{P}\mathbf{U} = (\mathcal{P}u, \mathcal{P}v)$ le projecteur dans $\mathbf{V}$. Cet opérateur $\mathcal{P}$ est utilisé pour transformer un champ discret constant par élément en un champ discret continu et affine par élément.

L'algorithme global d'avancement en temps s'écrit:

  tape 1: (  tape de prédiction) La vitesse est explicitement prédite via l'équation (5) en omettant le terme de pression:

$$\bar{\mathbf{U}}_i = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{|C_i|} \int_{\Omega} \psi_i (\nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) - \mathbf{g}) d\mathbf{x},$$

où $|C_i|$ est le volume de la cellule associée au sommet i :

$$|C_i| = \sum_j \int_{\Omega} \psi_i \psi_j d\mathbf{x}.$$

  tape 2: (  tape de projection) Cette étape évalue la pression en utilisant la prédiction de la vitesse et met à jour la vitesse en imposant une contrainte approchée de divergence nulle (6). A cet effet, on résout

$$\int \frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \cdot \nabla \psi d\mathbf{x} = \frac{1}{\Delta t} \int \nabla \psi \cdot \bar{\mathbf{U}} d\mathbf{x} \quad \forall \psi \in V,$$

dans V par éléments finis P_1 . La correction de vitesse basée sur le gradient de pression est constante par élément. Elle est transférée dans $\mathbf{V}$ à l'aide de $\mathcal{P}$ et ajoutée à la vitesse :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \bar{\mathbf{U}} + \Delta t \mathcal{P} \left(\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) \quad \text{and} \quad \mathbf{U}^{n+1} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

  tape 3: (Advection de la Level-Set) La fonction ϕ est advectée à l'aide de l'équation (4) avec $\mathbf{U}^n$ comme vitesse pour passer du niveau en temps n au niveau en temps $n+1$. Cette équation est approchée par un volume fini centré sommet précis au second ordre. De manière classique, afin d'éviter sur la Level-Set la formation de très forts gradients la Level-Set est remplacée régulièrement par une fonction $\tilde{\phi}^{n+1}$ définie comme la distance signée au contour $\{\phi^{n+1} = 0\}$. Nous renvoyons à [7] pour plus de détails.

Épaississement de l'interface.

Pour de grands rapports de masse volumique de chaque côté de l'interface, la manipulation de fonctions Heaviside $H(\phi)$ strictement discontinues pour définir la masse volumique conduit à des instabilités de l'approximation et quelquefois à des divergences du calcul. Dans l'équation (5), $H(\phi)$ est remplacée par une version "épaissie" $H_\eta(\phi)$ définie par :

$$H_\eta(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi < -\eta, \\ \frac{1}{2}(1 + \frac{\phi}{\eta} + \frac{1}{\pi} \sin(\frac{\pi\phi}{\eta})) & \text{if } |\phi| \leq \eta, \\ 1 & \text{if } \phi > \eta. \end{cases}$$

En pratique, le paramètre η est choisi de manière que $\eta = k \Delta x$ avec $k \approx 3$. Cet épaississement d'interface renforce comme attendu la stabilité globale mais introduit un paramètre de discrétisation supplémentaire à prendre en compte.

Quelques remarques.

Dans le modèle numérique présenté, l'avancement en temps peut se faire soit en semi-implicite en ne résolvant que l'équation pression, soit en implicite faiblement couplé en résolvant chaque étape de manière implicite, soit en implicite couplé en réitérant à chaque pas de temps les étapes précédentes comme dans les algorithmes de type SIMPLE [9]. On s'intéresse ici à la première option, semi-implicite et on se pose la question des modalités de résolution par FMG du système dont la pression est la solution.

3 Une idée globale du module adaptatif

Dans l'algorithme de point fixe local instationnaire utilisé dans [6], l'intervalle en temps est préalablement divisé en un certain nombre de *sous-intervalles*:

$$[0, T] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_k, t_{k+1}] \cup \dots \cup [t_{n_{si}-1}, t_{n_{si}}].$$

La simulation calcule chaque sous-intervalle l'un après l'autre.

Dans chaque sous-intervalle $[t_k, t_{k+1}]$:

- L'avancement en temps se fait à maillage spatial fixe. Mais ce maillage est adapté par point fixe, c'est à dire que dans chaque sous-intervalle, l'avancement en temps est ré-itéré entre deux mises à jour du maillage (sur la base d'une nouvelle métrique dépendant de l'avancement en temps précédent).

- (a) Dans la nouvelle version à laquelle la thèse du premier auteur contribue, la génération d'un nouveau maillage adapté (toujours pour $[t_k, t_{k+1}]$) est suivie de la *génération de maillages plus grossiers en utilisant des métriques plus grossières*.

- (b) Les différents niveaux sont partitionnés en commençant par le niveau fin et en calquant la partition d'un niveau grossier sur celle du niveau directement plus fin.

- (c) L'avancement en temps est réalisé. *On résout la projection en pression par FMG/FMV en utilisant les niveaux construits.*

- Les étapes (a)(b)(c) sont ré-itérées jusqu'à un couplage solution/maillage satisfaisant.

4 Vers MG en instationnaire : FMV

4.1 Motivations

Nous présentons une courte étude d’une modification assez simple de notre algorithme pour une adaptation à l’instationnaire. Rappelons le contexte de FMG stationnaire. le but est d’obtenir une solution assez précise en partant de grilles grossières en raffinant et en adaptant, et en s’arrêtant de raffiner quand le maillage et sa solution sont satisfaisants. Dans la plate-forme ANANAS, la résolution adaptative instationnaire se fait sur un intervalle en temps durant lequel le maillage est fig  , cf. [6]. On dispose donc des maillages et des inconnues au temps précédent, et on conserve le même maillage pour le niveau de temps à calculer.

On notera que l’EDP    résoudre n’est pas de type Cauchy-Kowalevska pour la pression, en d’autres termes que la pression ne sera pas avancée en temps sur la base d’une dérivée en temps de la pression. il est néanmoins possible d’extrapoler à partir des instants précédents une condition d’initialisation de la pression pour l’algorithme itératif de l’étape de projection. Cette option n’est pas très robuste et n’a pas été envisagée dans ce travail. On utilisera seulement l’existence du maillage fin en transformant le FMG en un cyclage proche des cycles FMV. Bien que FMV désigne une méthode de cyclage, nous conservons cette appellation pour le nouveau solveur proposé.

4.2 Description de la méthode

Notre méthode de résolution FMV est très semblable à la méthode FMG. La seule différence réside dans l’assemblage du second membre de l’équation à résoudre.

Dans le cas de FMG, à chaque phase, on assemble le second membre sur le maillage courant, c’est-à-dire le maillage le plus fin de la phase.

On a l’équation

$$A_{\mathcal{M}} v = f_{\mathcal{M}}.$$

Dans le cas de FMV, à chaque phase, on assemble le second membre non pas sur le maillage courant mais sur le maillage le plus fin. Puis, on le transfère sur le maillage courant par accumulation. On résout donc

$$A_{\mathcal{M}} v = R_{\mathcal{M}_{fin} \rightarrow \mathcal{M}} f_{\mathcal{M}_{fin}}.$$

Pour être plus clair, on compare les seconds membres pour le cas test du cercle.

4.3 Exemple avec le cas test du cercle

On considère une suite de maillages uniformes, les mêmes que ceux utilisés dans les exemples en FMG. Le maillage le plus grossier a 121 points et le plus fin en a 103041. Ces deux maillages sont montrés par les figures 1 et 2.

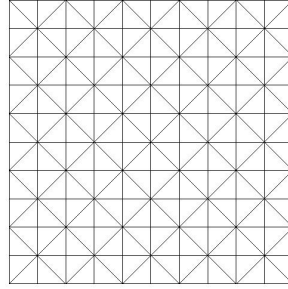


Fig. 1. Maillage uniforme 121 points

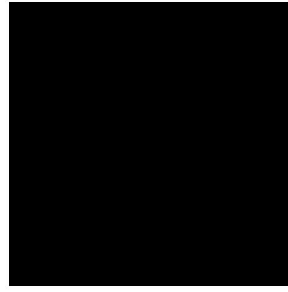


Fig. 2. Maillage uniforme 103041 points

On remarque que la maillage à 103041 points est tellement fin qu'on ne peut même pas voir ses mailles. Un zoom sur ce maillage est donné par la figure 3. Le second membre $f_{\mathcal{M}}$ assemblé directement sur le maillage grossier est montré par la figure 4. La figure 5 montre, au contraire, le second membre $f_{\mathcal{M}_{fin}}$ assemblé sur le maillage fin. On constate que les deux seconds membres $f_{\mathcal{M}}$ et $f_{\mathcal{M}_{fin}}$ sont très différents, $f_{\mathcal{M}_{fin}}$ étant nécessairement une meilleure représentation du second membre analytique f .

Reste à transférer $f_{\mathcal{M}_{fin}}$ sur le maillage grossier. Une simple accumulation nous donne $R_{\mathcal{M}_{fin} \rightarrow \mathcal{M}} f_{\mathcal{M}_{fin}}$, représenté sur la figure 6. On observe une grande différence avec $f_{\mathcal{M}}$. Ce nouveau second membre ressemble beaucoup plus à $f_{\mathcal{M}_{fin}}$.

A partir de là, on peut lancer notre résolution de la même façon que pour le FMG avec, à chaque phase, un second membre transféré depuis le maillage à 103041 points. Notons qu'au fur et à mesure que l'on avance dans la résolution et qu'on passe d'une phase à la suivante, le second membre transféré ressemble de plus en plus au second membre assemblé sur le maillage courant, jusqu'à ce qu'on arrive à la dernière phase où le maillage courant est lui-même le maillage à 103041 points. Les courbes de convergence des méthodes FMG et FMV sont données par les figures 7 et 8 qui représentent l'erreur, respectivement en fonction du nombre de points et du temps CPU. On observe, sur la figure 7, que les résultats, au début de la résolution, sont bien meilleurs en FMV qu'en FMG mais que, plus on avance dans les phases, plus les deux courbes se rapprochent, l'avantage du FMV sur le FMG diminuant, pour finalement arriver à des résultats identiques à la dernière phase. Ceci est parfaitement logique puisque, au fur et à mesure qu'on utilise des maillages de plus en plus fins, le second membre assemblé dessus est de plus en plus proche du second membre assemblé sur le maillage à 103041 points. Finalement, à la dernière phase, le maillage utilisé pour la résolution est le maillage à 103041 points lui-même ce qui implique que, lors de cette

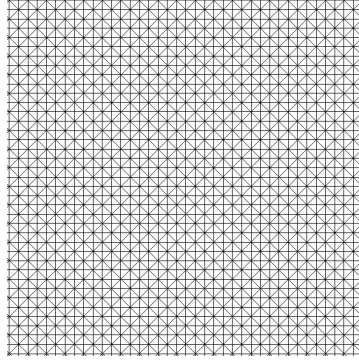


Fig. 3. Zoom maillage uniforme 103041 points

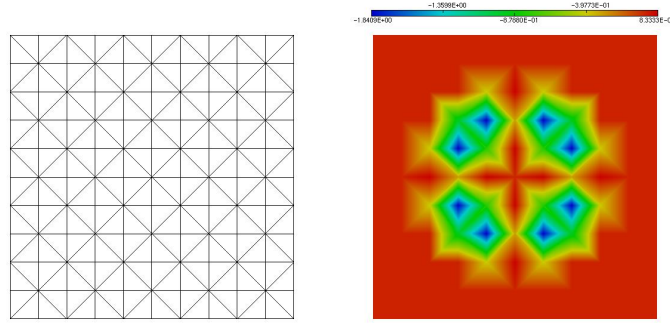


Fig. 4. Second membre assemblage grossier

définie par la formule suivante:

$$u = \alpha x(x - 1)$$

avec, dans le cas présent, $\alpha = 1000000000$.

La résolution est faite en FMG uniforme avec quatre grilles ayant respectivement 216, 1331, 9261 et 68921 points. On effectue 100 itérations à chaque phase. Cela nous permet d'obtenir une solution convergée. En effet, on trace la convergence du résidu sur chacune des quatre grilles et on observe qu'il y a bien convergence. Ces quatre courbes de convergence sont données par les figures 10, 11, 12 et 13. On peut voir une grande différence entre la courbe de convergence de la première phase et les suivantes avec une brusque descente de la courbe à la septième itération au lieu d'une descente progressive. Cela est dû au fait que, lors de la première phase, on effectue un GMRES avec un simple préconditionnement Jacobi alors qu'ensuite, le préconditionnement se fait avec des multigrilles.

On observe également que la convergence ne ralentit pas d'une phase à l'autre, conséquence de l'utilisation des multigrilles. La figure 14 montre la solution calculée. Enfin, la figure 15 nous donne la convergence en fonction du nombre de points. On remarque une décroissance

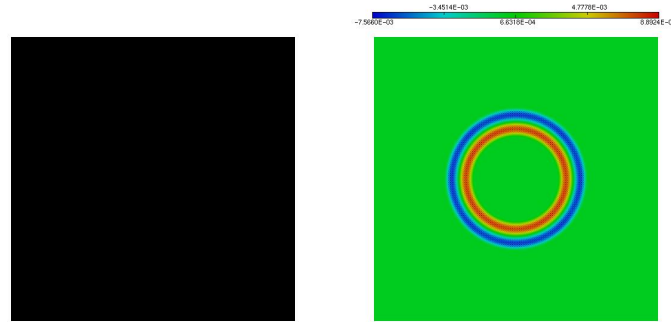


Fig. 5. Second membre assemblage grossier

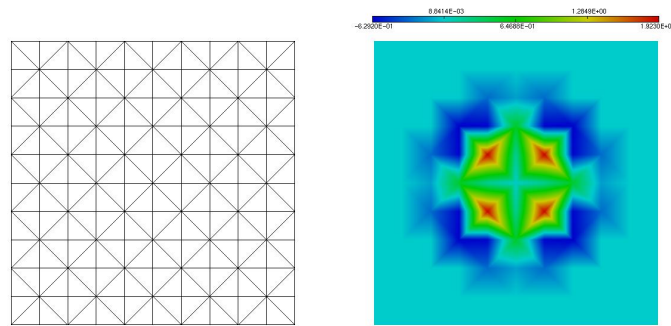


Fig. 6. Second membre assemblage fin transféré sur grossier

très lente, même pas d'ordre 1. On peut aussi effectuer les calculs en MPI. Les maillages et les résultats correspondants sont donnés par la figure 16.

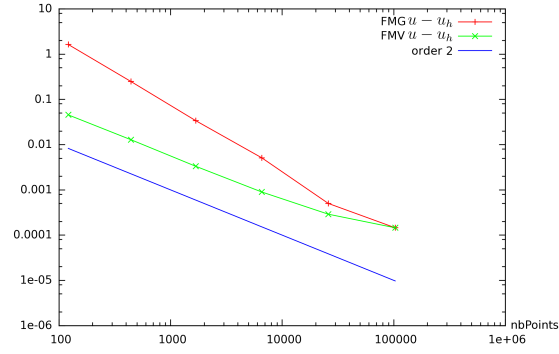


Fig. 7. Convergence en nombre de points du FMG et du FMV

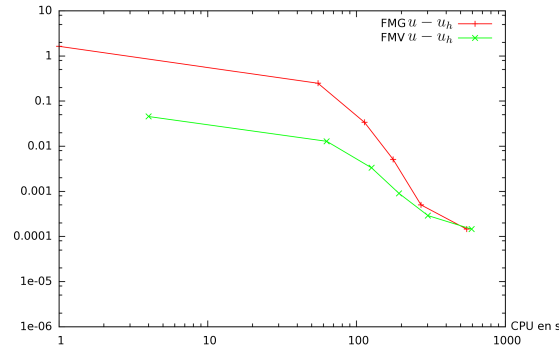


Fig. 8. Convergence en temps CPU du FMG et du FMV

7 Conclusion

Nous avons résumé la description du transfert d'une partie des travaux académiques réalisés à l'INRIA vers l'industrie. Ce transfert reste à consolider, puis à tester sur des cas massivement parallèles. Une des premières application sera la simulation de grandes structures dans un écoulement diphasique turbulent. Le nombre de points des maillages utilisés est de plusieurs dizaines de millions de sommets et dans ces niveaux de nombre de points les méthodes FMG apporteront un important progrès en efficacité. La seconde étape concernera le calcul adaptatif d'un écoulement diphasique utilisant le mailleur FEFLOW, lui aussi transféré de l'INRIA vers LEMMA et testé par LEMMA dans le cadre de MAIDESC.

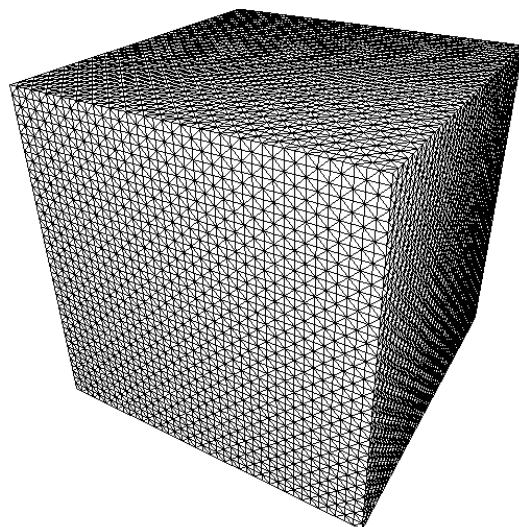


Fig. 9. Maillage cubique en trois dimensions

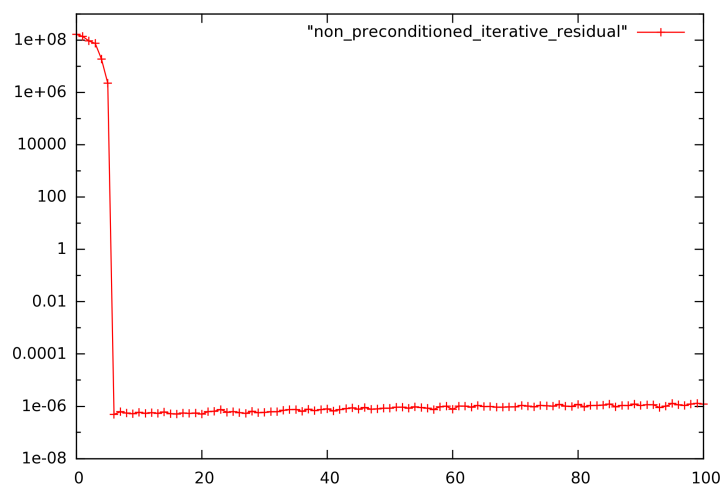


Fig. 10. Convergence du résidu première phase

References

1. H. Alcin. *Algorithmes de rsolution d'coulements instationnaires et adjoints*. PhD thesis, Université de Nice, Nice, France, 2012.

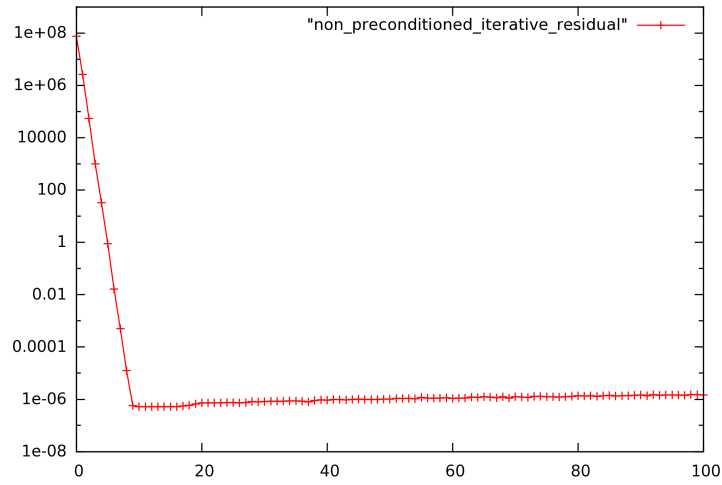


Fig. 11. Convergence du résidu deuxième phase

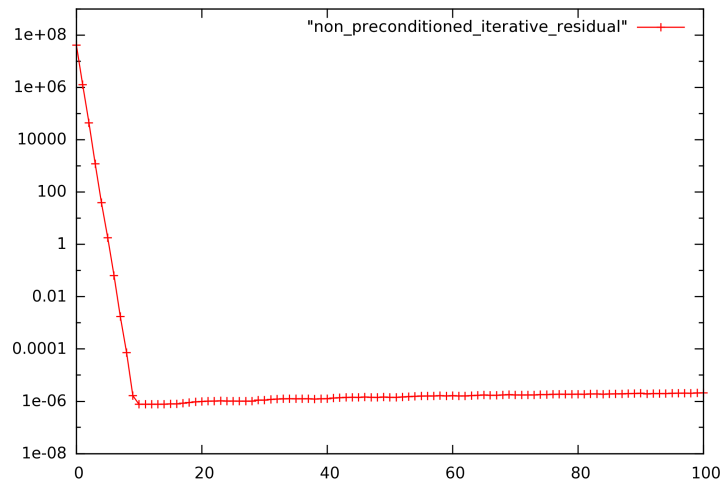


Fig. 12. Convergence du résidu troisième phase

2. H. Alcin, B. Koobus, O. Allain, and A. Dervieux. Efficiency and scalability of a two-level schwarz algorithm for incompressible and compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(1):69–89, 2013.
3. C. Debiez and A. Dervieux. Mixed-Element-Volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculations. , 29:89–118, 2000.

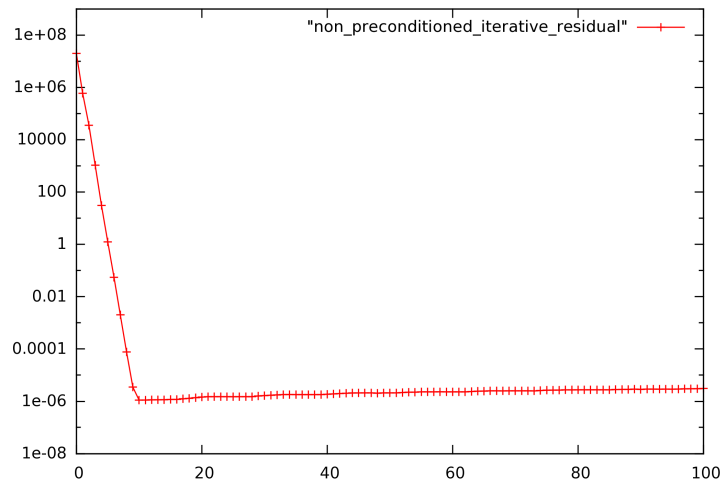


Fig. 13. Convergence du résidu quatrième phase

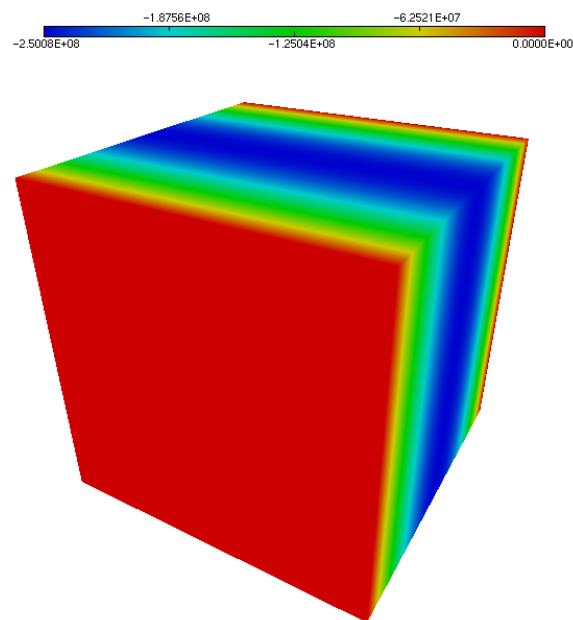


Fig. 14. Solution calculée du cas en trois dimensions

4. A. Dervieux and F. Thomasset. Multifluid incompressible flows by a finite element method. *Lecture Notes in Physics*, 11:158–163, 1981.

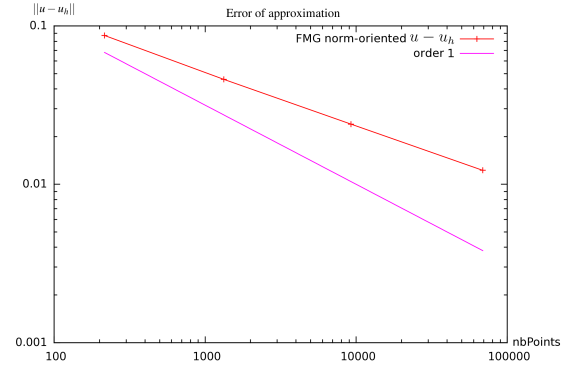


Fig. 15. Convergence du cas en trois dimensions

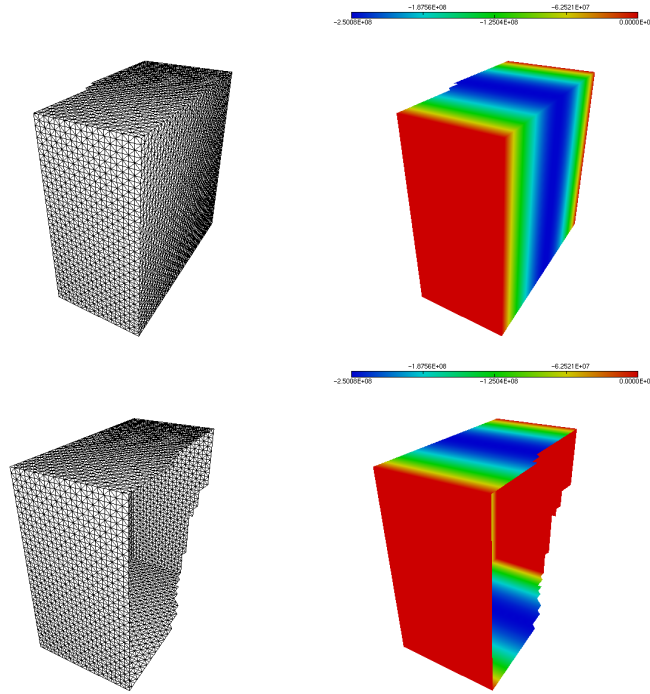


Fig. 16. Cas 3D en MPI

5. D. Guégan. *Modélisation numérique d'  coulements bifluides 3D instationnaires avec adaptation de maillage*. PhD thesis, Universit   de Nice Sophia Antipolis, Sophia Antipo-

- lis, France, 2007. (in French).
6. D. Guégan, O. Allain, A. Dervieux, and F. Alauzet. An L^∞ - L^p mesh adaptive method for computing unsteady bi-fluid flows. , 84(11):1376–1406, 2010.
7. A.-C. Lesage, O. Allain, and A. Dervieux. On level set modelling of bi-fluid capillary flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 53(8):1297–1314, 2007.
8. S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1):12–49, 1988.
9. S.V. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.
10. J. Simon. Non-homogenous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure. *SIAM journal on mathematical analysis*, 21(5):1093–1117, 1990.

8 Remerciements

Ce rapport est une livraison du projet MAIDESC n° ANR-13-MONU-0010 de l'Association Nationale de la Recherche.

References

1. H. Alcin. *Algorithmes de résolution d'écoulements instationnaires et adjoints*. PhD thesis, Université de Nice, Nice, France, 2012.
2. H. Alcin, B. Koobus, O. Allain, and A. Dervieux. Efficiency and scalability of a two-level schwarz algorithm for incompressible and compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(1):69–89, 2013.
3. C. Debiez and A. Dervieux. Mixed-Element-Volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculations. , 29:89–118, 2000.
4. A. Dervieux and F. Thomasset. Multifluid incompressible flows by a finite element method. *Lecture Notes in Physics*, 11:158–163, 1981.
5. D. Guégan. *Modélisation numérique d'écoulements bifluïdes 3D instationnaires avec adaptation de maillage*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, Sophia Antipolis, France, 2007. (in French).
6. D. Guégan, O. Allain, A. Dervieux, and F. Alauzet. An L^∞ - L^p mesh adaptive method for computing unsteady bi-fluid flows. , 84(11):1376–1406, 2010.
7. A.-C. Lesage, O. Allain, and A. Dervieux. On level set modelling of bi-fluid capillary flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 53(8):1297–1314, 2007.
8. S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, 79(1):12–49, 1988.
9. S.V. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:1787–1806, 1972.
10. J. Simon. Non-homogenous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure. *SIAM journal on mathematical analysis*, 21(5):1093–1117, 1990.