
Rapport n ° 2 : Analyse et validation des outils pour l'étude des couches limites turbulentes

Laure BILLON

CEMEF, Mines-ParisTech

Projet MAIDESC, ANR "Méthodes numériques"

12 juin 2014

Directeur de thèse : Elie HACHEM
Co-directeur : Thierry COUPEZ, Ghina JANNOUN

Introduction

En aérodynamique, on distingue deux types d'écoulements : les écoulements laminaires (réguliers), les lignes de courants sont parallèles à l'axe, et les écoulements turbulents (chaotiques), des instabilités engendrent la formation de tourbillons. Les écoulements rencontrés en aéronautique ne sont en général laminaires que sur une faible partie du profil (au voisinage du bord d'attaque).

L'étude de la turbulence est encore un grand défi de nos jours, nous n'avons pas encore les moyens de résoudre les équations de Navier-Stokes par une simulation numérique directe (DNS) sur des cas complexes. En effet, la résolution DNS selon Kolmogorov nécessite un nombre de nœuds très important ($N_x N_y N_z \sim Re^{9/4}$). Nous devons donc recourir à des méthodes moins coûteuses et donc moins précises. Pour cela il existe plusieurs méthodes d'approximations :

- La méthode Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) consiste à prendre la valeur moyenne de l'écoulement. Chaque grandeur instantanée est décomposée en une partie moyenne et une partie fluctuante ($u = \bar{u} + u'$). L'écoulement est lissé et en cas de turbulence, cette méthode doit être couplée à un modèle de turbulence adapté à l'échelle à approximer (par exemple, le modèle de Spalart-Allmaras).
- La méthode grande échelle (LES) consiste à résoudre de manière directe les grandes échelles et à approximer les petites échelles par l'ajout d'une viscosité turbulente μ_t dans la résolution grande échelle. La méthode VMS, est une méthode dérivée de la LES, on parle de méthode LES implicite.

Ces méthodes sont à même de produire une approximation intéressante de l'écoulement près des parois. Toute la subtilité est d'avoir un maillage assez fin pour capter les fluctuations qui engendrent des vortex.

Cette étude fait suite à une recherche bibliographique sur les couches limites [1], nous allons ici chercher à valider et/ou améliorer les outils présents dans CimLib pour l'étude d'écoulements proche paroi.

Le cas de référence pour l'étude des couches limites est le cas de plaque plane à incidence nulle dans un écoulement de fluide visqueux incompressible. C'est un cas simple car la pression statique reste constante dans tout l'écoulement, ainsi il n'y a pas de décollement. Ce cas est parfaitement documenté et la solution exacte est connue pour un écoulement laminaire sans gradient de pression (solution de Blasius).

Pour valider la prise en compte de la couche limite dans une méthode de résolution, celle-ci est testée sur le cas de plaque plane et le profil de vitesse obtenu est comparé à celui présent dans la littérature [2].

1 Présentation des principaux outils de CimLib pour l'étude des écoulements proche paroi

Le groupe CIM-CFL a développé au sein de CimLib une approche monolithique qui consiste à considérer la totalité du domaine comme un seul domaine, maillé avec une unique

grille. L'interface entre le volume immergé et le fluide est localisée en utilisant une fonction level-set [3]. Puis, le problème est résolu à l'aide d'une méthode variationnelle à échelle multiple (VMS) [4], dite implicite LES.

1.1 Solveur VMS

La spécificité de la méthode variationnelle à échelle multiple (VMS) par rapport à la méthode LES est de prendre directement en compte par une méthode de stabilisation les effets des petites échelles sur les grandes. On appelle petite échelle, les fluctuations se produisant sur un volume de dimension inférieur à une maille. Les petites échelles ne sont donc pas explicitement résolues.

Le système d'équations de Navier-Stokes incompressible régit les écoulement de fluides visqueux :

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) - \nabla \cdot \sigma = F \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Avec $\sigma = 2\mu\varepsilon(u) - pI_d$ et $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u)$

CimLib est un code de calcul éléments finis, nous allons donc donner la formulation faible du système (1) sous l'approximation de Galerkin :

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u_h, w_h)_\Omega + \rho(u_h \cdot \nabla u_h, w_h)_\Omega + (2\mu\varepsilon(u_h) : \varepsilon(w_h))_\Omega - (p_h, \nabla \cdot w_h)_\Omega = (F, w_h)_\Omega + (h, w_h)_{\Gamma_\Omega} \\ (\nabla \cdot u_h, q_h)_\Omega = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Cette formulation (2) présente des problèmes de convergence dus à la compatibilité des espaces d'approximations du champ de vitesse et du champ de pression. Pour contourner ce problème, on enrichit les champs de vitesse et de pression grâce à une contribution petite échelle (u', p') qui s'ajoute à la contribution grande échelle (u_h, p_h) .

$$\begin{aligned} u &= u_h + u' & p &= p_h + p' \\ w &= w_h + w' & q &= q_h + q' \end{aligned}$$

On remplace dans (2) les champs de vitesse et de pression.

$$\begin{cases} \rho(\partial_t(u_h + u'), (w_h + w'))_\Omega + \rho((u_h + u') \cdot \nabla(u_h + u'), (w_h + w'))_\Omega \\ \quad + (2\mu\varepsilon(u_h + u') : \varepsilon(w_h + w'))_\Omega - ((p_h + p'), \nabla \cdot (w_h + w'))_\Omega = (F, (w_h + w'))_\Omega + (h, (w_h + w'))_{\Gamma_\Omega} \\ (\nabla \cdot (u_h + u'), (q_h + q'))_\Omega = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ensuite, on sépare le système obtenu (3) en un sous-système grande échelle et un sous-système petite échelle. Le principe est de modéliser les petites échelles sous les hypothèses suivantes :

- Pas de dépendance en temps ($\partial_t u' = 0$)
- Le terme d'advection est guidé par u_h

Puis de substituer la solution dans le système grande échelle.

Le solveur VMS couplé à une méthode d'adaptation de maillage anisotropique [5] portant sur l'erreur *a posteriori* [6] vont nous permettre de traiter des écoulements pour des nombres de Reynolds élevés.

1.2 Adaptation de maillage : Métrique basée sur les arêtes

Dans cette section, nous allons décrire les étapes qui permettent de construire la métrique pour l'adaptation de maillage anisotrope. La construction de la métrique peut être divisée en plusieurs étapes majeures, tout d'abord, la définition d'un tenseur de distribution des longueurs, puis la reconstruction du gradient permettant de définir l'estimateur d'erreur basé sur les arêtes. Enfin, en utilisant le principe d'équidistribution de l'erreur et sous certaines conditions, un ensemble de facteurs d'étirements associés à chaque arête vont être calculés, afin de définir une nouvelle métrique anisotrope.

1.2.1 Définition du tenseur de distribution des longueurs

La métrique est construite directement aux nœuds, et est composée d'arêtes unités. La procédure présentée ici utilise une représentation statistique de la distribution des longueurs de toutes les arêtes partageant un même nœud. Pour définir une telle quantité, considérons une discrétisation éléments finis du domaine Ω . On définit $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}^i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, N\}$ comme un ensemble de nœuds dans le maillage et on désigne par U^i la valeur en \mathbf{X}^i d'une fonction u , enfin, soit Π_h l'opérateur d'interpolation de Lagrange tel que : $\Pi_h u(\mathbf{X}^i) = u(\mathbf{X}^i) = U^i, \forall i = 1, \dots, N$. Soit $\Gamma(i)$ l'ensemble des nœuds connectés au nœud i (Fig. 1).

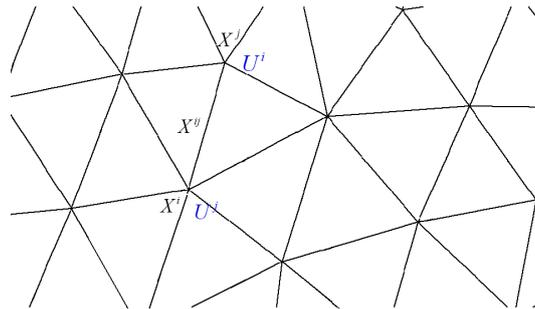


FIGURE 1 – Longueur \mathbf{X}^{ij} de l'arrête allant du nœud i au nœud j

Il est maintenant possible de définir le tenseur de distribution des longueurs comme (voir [6] pour plus de détails) :

$$\mathbb{X}^i = \frac{d}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \quad (4)$$

On définit l'estimateur d'erreur e_{ij} sur la fonction u :

$$e_{ij} = \mathbf{g}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij} \quad (5)$$

où $\mathbf{g}^{ij} = \mathbf{g}^j - \mathbf{g}^i$ et $\mathbf{g}^i = \nabla u(\mathbf{X}^i)$ est le gradient de u évalué au nœud \mathbf{X}^i .

Contrairement à [6] où u représente une fonction analytique utilisée pour guider le maillage, ici u est la solution inconnue à certains ensembles d'équations aux dérivées partielles. Par conséquent, u est définie aux nœuds et \mathbf{g} est défini sur les éléments. Nous avons donc besoin de reconstruire le gradient aux nœuds.

1.2.2 Estimateur d'erreur à partir de la reconstruction du gradient

Il a été montré dans [6] qu'à travers une analyse d'optimisation il est possible de reconstruire le gradient de u sur les nœuds du maillage à partir des valeurs de la solution et du tenseur de distribution des longueurs :

$$\mathbf{G}^i = (\mathbb{X}^i)^{-1} \sum_{j \in \Gamma(i)} U^{ij} \mathbf{X}^{ij} \quad (6)$$

La méthode de reconstruction permet de préserver le second ordre du gradient de la solution. L'estimateur d'erreur d'interpolation sur l'arête \mathbf{X}^{ij} est donc évalué en substituant \mathbf{G} par \mathbf{g} dans (5) :

$$e_{ij} = \mathbf{G}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij} \quad (7)$$

1.2.3 Construction de la métrique

Dans cette sous-section, le tilde désignera les éléments associés à la nouvelle métrique. A chaque nœud i , la nouvelle métrique est définie par :

$$\widetilde{\mathcal{M}}^i = \frac{|\Gamma(i)|}{d} \left(\widetilde{\mathbb{X}}^i \right)^{-1}, \quad (8)$$

où $\widetilde{\mathbb{X}}^i$ est calculé comme dans (4) en substituant \mathbf{X}^{ij} par $\widetilde{\mathbf{X}}^{ij} = s_{ij} \mathbf{X}^{ij}$. Comme expliqué dans [7], l'erreur change quadratiquement avec les facteurs d'étirements. Afin de construire un maillage optimal basé sur un objectif de nombre N de nœuds, les auteurs ont proposé de limiter le nombre de nœuds créés par N , tout en minimisant l'erreur totale induite sur le maillage. Ceci est équivalent à équidistribuer l'erreur sur toutes les arêtes du maillage. Soit e l'erreur équidistribuée sur toutes les longueurs. Les facteurs d'étirements seront alors définis de façon à engendrer un changement quadratique de l'erreur après étirement :

$$s_{ij} = \left(\frac{e(N)}{e_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sum_i n^i(1)}{N} \right)^{\frac{2}{d}} e_{ij}^{1/2}, \quad (9)$$

avec $e(N) = \left(\frac{N}{\sum_i n^i(1)} \right)^{-\frac{4}{d}}$ l'erreur globale induite et $n^i = \det \left(\frac{d}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} s_{ij}^{-1} \frac{\mathbf{X}^{ij}}{|\mathbf{X}^{ij}|} \otimes \frac{\mathbf{X}^{ij}}{|\mathbf{X}^{ij}|} \right)$ le nombre de nœuds créés sur les différentes arêtes connectées au nœud i .

Le couplage du solveur variationnel à échelle multiple (VMS) et de la méthode d'adaptation de maillage anisotropique permet de capter les forts gradients et les détachements dynamiquement sur les champs prédéfinis, tout en contrôlant le nombre d'éléments [8]. Cependant, la méthode d'adaptation de maillage anisotropique porte sur l'erreur *a posteriori* sur un certain nombre de champs, mais à aucun moment la physique de l'écoulement et les paramètres de couche limite n'interviennent. Pour que l'adaptation vérifie la couche limite, il faut s'assurer que la taille de maille respecte la loi de Kolmogorov (cascade turbulente) [9] afin de capter l'essentiel des perturbations proche paroi. Nous allons dans la suite nous appliquer à vérifier que le couplage VMS-Adaptation permet de capturer la couche limite, et essayer de comprendre ce qui pourrait être amélioré.

2 Plaque plane

Le cas de référence pour l'étude des couches limites est le cas de plaque plane à incidence nulle dans un écoulement de fluide visqueux incompressible. La plaque plane est un cas important dans la communauté pour l'étude des couches limites.

Dans la littérature, la plaque plane est souvent étudiée sous la forme d'une demi-plaque. Les méthodes développées dans CimLib semblent assez robustes pour traiter la plaque entière, nous comparerons donc les résultats sur les deux géométries (Fig. 2).

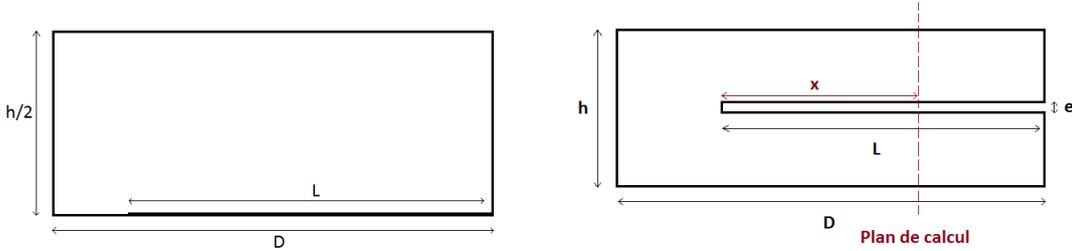


FIGURE 2 – Détails des domaines Demi-plaque (DP) et Plaque complète (P)

2.1 Paramètres de la couche limite

Comme nous l'avons déjà vu, le maillage est un élément primordial pour l'étude de la couche limite, il est nécessaire que celui-ci soit suffisamment fin pour capter la plus petite des perturbations. En outre, plus le nombre de Reynolds augmente, plus il y a de fluctuations de vitesse de petites dimensions (recirculations), et donc, plus le maillage doit être fin. Il est, de plus, très important d'avoir un maillage suffisamment fin dès le début de la simulation pour ne louper aucune fluctuation de vitesse que nous ne pourrions récupérer par la suite. Pour calculer la taille de maille minimale nécessaire, nous avons pris appui sur le calculateur mis à disposition sur le site de la NASA [10]. En fait, le calcul s'effectue comme suit : Soit y^+ le degré de raffinement du maillage,

$$y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu}$$

avec u_τ la vitesse de frottement, et τ_w la contrainte de frottement :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \tau_w = C_F \frac{\rho U_\infty^2}{2}$$

Pour le coefficient de frottement C_F nous avons choisi l'approximation de Schlichting [11] valable pour tous nombres de Reynolds inférieur à 10^9 .

$$C_F = [2 \log_{10}(Re) - 0.65]^{-2.3} \quad (10)$$

Les paramètres précédents nous permettent de déterminer la taille de la plus petite maille :

$$h_{min} = \frac{y^+}{\sqrt{\frac{C_F}{2} * \left(\frac{Re}{L}\right)^2}} \quad (11)$$

De plus, pour définir correctement le maillage nous avons besoin de connaître l'épaisseur de la couche limite δ . L'épaisseur δ est conventionnellement définie comme la distance à la paroi pour laquelle la vitesse atteint 99% de la valeur de la vitesse extérieure U_e (Fig.3).

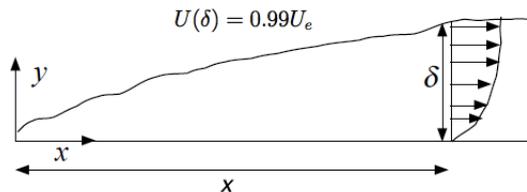


FIGURE 3 – Représentation de l'épaisseur de la couche limite

Une analyse adimensionnelle des équations de Navier-Stokes [12] nous permet de définir δ en tout point du profil en fonction de la distance au bord d'attaque x et du nombre de Reynolds Re de l'écoulement : $\delta(x) \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$. L'expérience montre que le taux d'épaississement de la couche limite turbulente est beaucoup plus grand que celui d'une couche limite laminaire. En laminaire, la loi empirique de Blasius donne

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \quad (12)$$

alors qu'en turbulent on a

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.38}{Re_x^{0.2}} \quad (13)$$

Tous ces paramètres sont déterminants dans l'élaboration du maillage couche limite. Le but de cette étude est de vérifier que l'adaptation de maillage basée sur l'erreur à *posteriori* permet de respecter les paramètres de couche limite et de résoudre correctement l'écoulement proche paroi. Le solveur VMS combiné à l'adaptation de maillage est-il suffisamment précis pour traiter la couche limite ? Quelle est l'influence du choix du nombre d'éléments ? Des paramètres supplémentaires sont-ils nécessaires ?

2.2 Maillage couche limite

Nous allons construire un maillage de couche limite à partir des paramètres définis précédemment sur lequel nous utiliserons le solveur VMS. Les résultats ainsi obtenus seront considérés comme référence pour l'évaluation du couplage du solveur VMS et de l'adaptation de maillage sur la couche limite. Pour réaliser des maillages de couche limite nous avons tenté sans succès d'utiliser gmsh, en effet, le maillage souhaité est trop fin pour être paramétré directement dans la version libre de gmsh. Nous avons donc choisi d'utiliser la métrique *a priori* disponible dans la librairie CimLib. Celle-ci permet à partir de l'épaisseur de couche limite souhaitée et du nombre de mailles voulu d'obtenir le maillage de la couche limite. L'épaisseur spécifiée est en fait découpée de manière homogène en un nombre de mailles souhaitées (Fig.4).



FIGURE 4 – Découpage homogène

La dernière maille de la couche limite est ensuite raccordée au maillage grossier très rapidement (Fig.5). Ce maillage sera, ensuite, utilisé comme maillage fin lors de la résolution sans adaptation et comme maillage initial lors de la résolution avec adaptation.

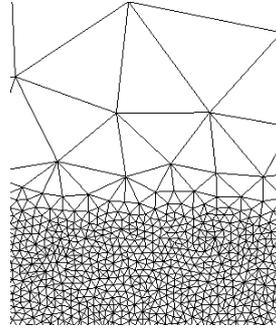


FIGURE 5 – Raccordement de la couche limite au maillage grossier

3 Analyse de la couche limite avec le couplage VMS-Adaptation dynamique

Dans cette section nous allons étudier le cas de plaque plane pour des nombres de Reynolds ($Re_x = \rho U_\infty x / \mu$) compris entre 10^4 et 10^7 avec le solveur VMS couplé à la méthode d'adaptation de maillage.

3.1 Écoulements laminaires

La plaque plane est un cas très stable, ainsi les écoulements restent laminaires jusqu'à un nombre de Reynolds d'environ $5 \cdot 10^6$. Pour les nombres de Reynolds inférieurs, on comparera le profil de vitesse à la solution de Blasius (Fig.6).

Variable de Blasius :

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}}$$

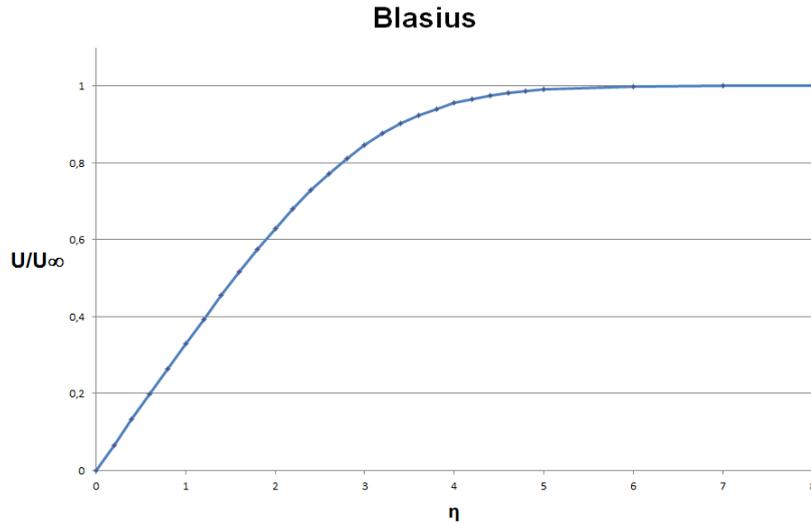


FIGURE 6 – Solution de Blasius ($\frac{U}{U_\infty} = f(\eta)$)

Re=10.000

La plaque plane va d’abord être testé pour un nombre de Reynolds de 10.000, un écoulement laminaire. Le calcul sur le maillage fin sans adaptation sera utilisé comme référence pour étudier, ensuite, la sensibilité du calcul au maillage et valider le couplage VMS-Adaptation dynamique. On remarquera qu’une couche intermédiaire a été rajoutée pour lisser la transition de la couche limite au maillage grossier (Fig.7).

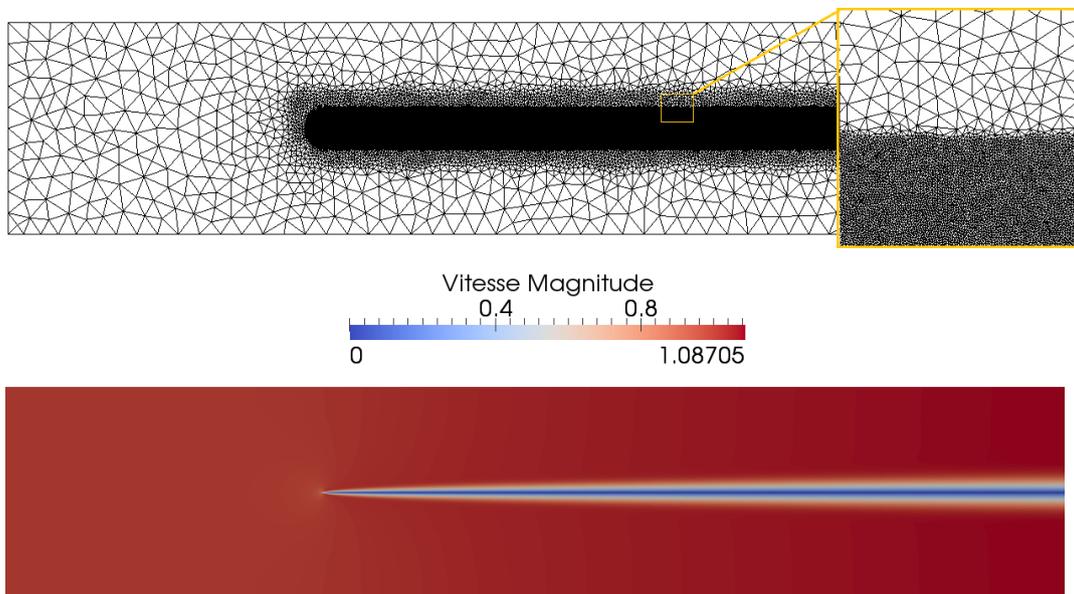


FIGURE 7 – Maillage fin (N=434.982) et simulation sans adaptation - Re=10.000

Puis, le même calcul est réalisé avec adaptation de maillage dynamique et sur un nombre d'éléments identique à celui du maillage fin. La fréquence d'adaptation est fixé à cinq pas de temps.

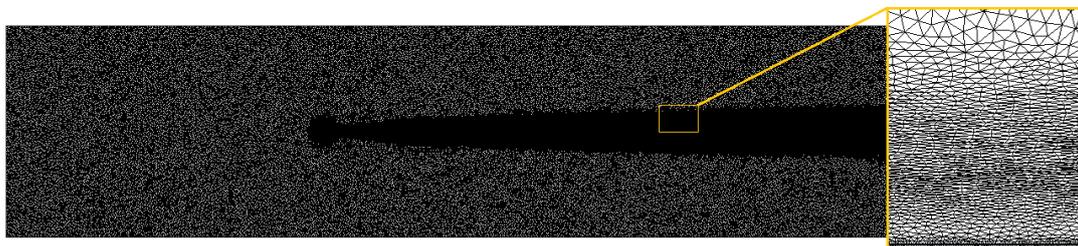


FIGURE 8 – Maillage final avec adaptation de maillage - $Re=10.000$

Le maillage obtenu avec adaptation contient visiblement **beaucoup** trop d'éléments (Fig.8), cela montre que le couplage VMS-Adaptation capte bien les gradients de la vitesse et répartit les éléments non utilisés loin de la paroi. On propose de minimiser par tâtonnement le nombre d'éléments nécessaires pour une erreur sur la vitesse dans la couche limite convenable. Il est intéressant de noter qu'entre le nombre d'éléments demandé (ordre) et le nombre d'éléments présent dans le maillage, il y a une grande différence. Ce qui rend cette opération d'autant plus délicate.

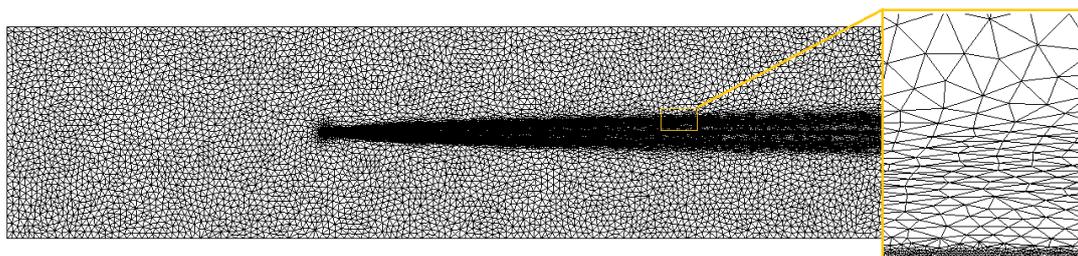


FIGURE 9 – Maillage à 39.918 éléments - Ordre 100.000 - $Re=10.000$

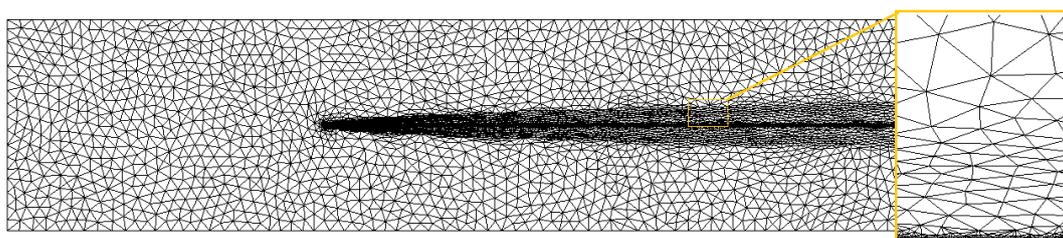


FIGURE 10 – Maillage à 23.196 éléments - Ordre 50.000 - $Re=10.000$

Plusieurs cas ont donc été effectués pour différents nombre d'éléments (Fig.9,10,11), on voit apparaître la couche limite car l'adaptation prend bien en compte les gradients proche paroi. Cette constatation est très rassurante. Le tableau (Tab.1) reprend l'épaisseur de couche limite et la taille de la plus petite maille pour chaque simulation, et donne l'erreur commise sur la vitesse dans la couche limite par rapport au cas sans adaptation sur maillage fin.

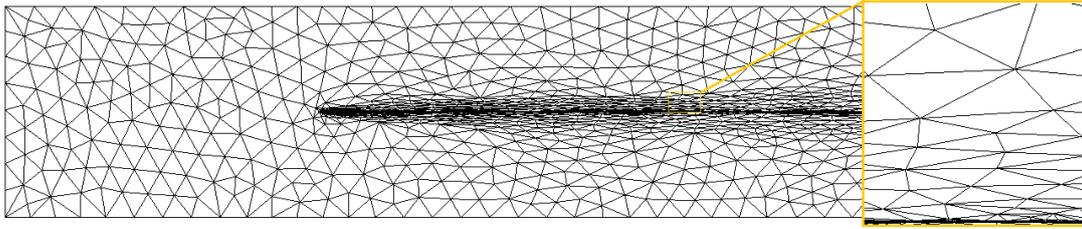


FIGURE 11 – Maillage à 7.562 éléments - Ordre 10.000 - Re=10.000

Re = 10.000	Fin	N=218956	N=39918	N=23296	N=7512
δ	$1,82 \cdot 10^{-1}$	$1,83 \cdot 10^{-1}$	$1,85 \cdot 10^{-1}$	$2,01 \cdot 10^{-1}$	$2,19 \cdot 10^{-1}$
h_{min}	$6,25 \cdot 10^{-3}$	$6,25 \cdot 10^{-3}$	$6,25 \cdot 10^{-3}$	$6,85 \cdot 10^{-3}$	$7,45 \cdot 10^{-3}$
erreur (%)		$5,16 \cdot 10^{-3}$	0,11	1,85	3,84

TABLE 1 – Paramètres de calculs pour Re=10.000

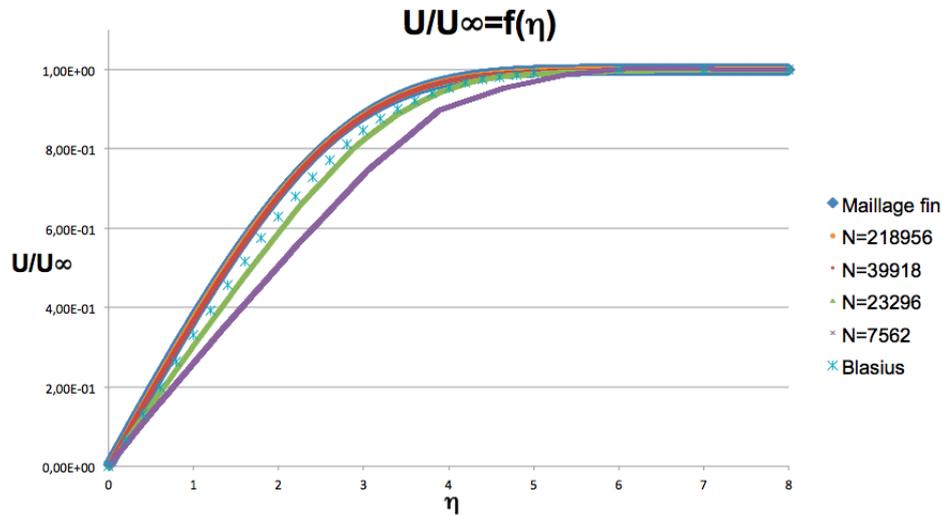


FIGURE 12 – Comparaison des différentes simulations à Blasius - Re=10.000

Il est clair que le maillage à 7.562 éléments (Fig.11) n'est pas suffisant à vue d'œil car la couche limite n'est pas assez raffinée, ce qui est confirmé dans le tableau (Tab.1) et sur la courbe (Fig.12). Le maillage à 23.296 éléments est lui aussi un peu trop grossier dans la couche limite (Fig.12 et Tab.1). Le calcul nécessiterait sûrement un maillage à 30.000 éléments afin d'obtenir une erreur de 1%, ce qui semble raisonnable.

Nous retiendrons de ce cas que l'on peut passer d'un maillage isotrope fin d'environ 435.000 éléments à un maillage anisotrope de 30.000 éléments en ne réalisant qu'une erreur de 1% sur la vitesse. Cela peut représenter un gain de temps considérable sur des cas complexes.

Re=50.000 et Re=100.000

Intéressons nous maintenant à des écoulements à nombre de Reynolds plus élevé, les écoulements deviennent de plus en plus complexes à résoudre. On répète la même étude que pour Re=50.000 et Re=100.000. Un maillage fin est généré et l'écoulement est calculé sur ce maillage sans adaptation, ce cas sera considéré comme référence (Fig.13).

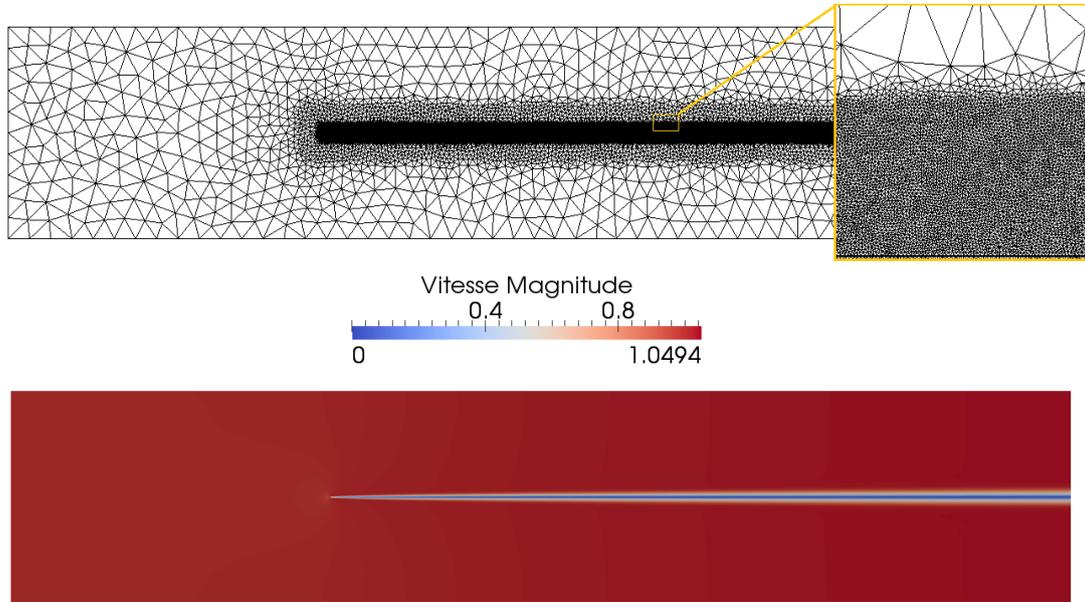


FIGURE 13 – Maillage fin (N=836649) et simulation sans adaptation - Re=50.000

Étant donné les résultats obtenus pour Re=10.000 et afin d'optimiser le temps de calcul, le premier maillage avec adaptation est donc lancé pour 400.000 éléments au lieu de 850.000 éléments. Cependant, ce maillage ne sera pas présenté car il contient déjà trop d'éléments (illisible). Ci-dessous sont donc présentés des maillages obtenus grâce au couplage VMS-Adaptation pour des nombres d'éléments décroissants (Fig.14,15).

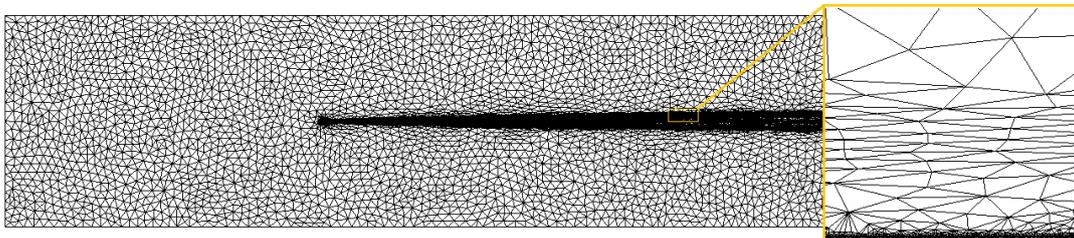


FIGURE 14 – Maillage à 68.956 éléments - Ordre 200.000 - Re=50.000

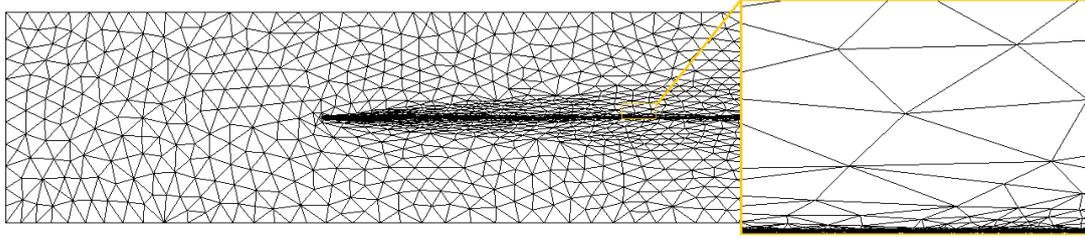


FIGURE 15 – Maillage à 31.798 éléments - Ordre 50.000 - Re=50.000

Re = 50.000	Fin	N=109058	N=68956	N=31798
δ	$8,45E - 02$	$8,42E - 02$	$9,15E - 02$	$2,87E - 01$
h_{min}	$1,95E - 03$	$2,05E - 03$	$2,15E - 03$	$3,55E - 03$
erreur (%)		1,35	3,99	28,1

TABLE 2 – Paramètres de calculs pour Re=50.000

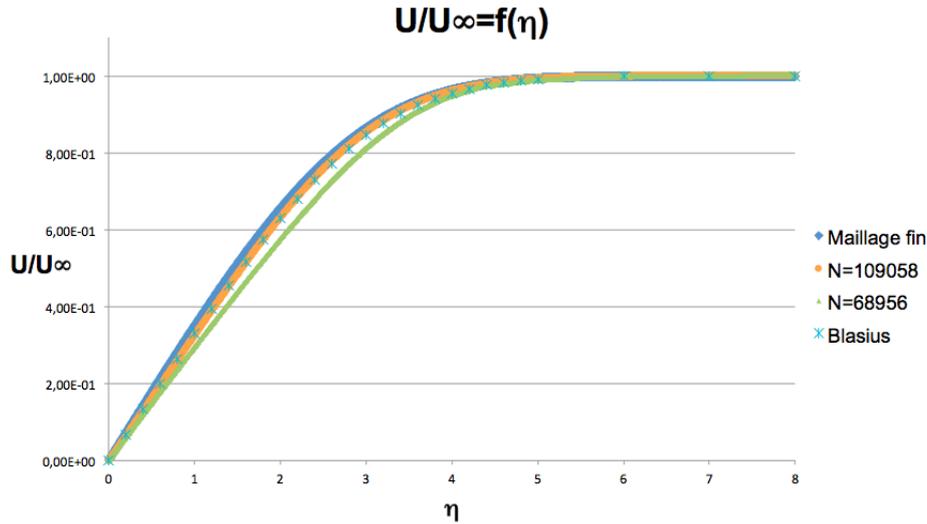


FIGURE 16 – Comparaison des différentes simulations à Blasius - Re=50.000

Il est clair que le maillage à 31.798 éléments est beaucoup trop grossier (Fig.15). Celui-ci présente une erreur de 28% sur la vitesse dans la couche limite (Tab.2), et ne sera pas tracé sur la figure (Fig.16) car la courbe ne correspond pas du tout à la solution de Blasius.

Le maillage à 109.058 éléments bien que présentant 1,4% d'erreur sur la vitesse dans la couche limite semble être un bon compromis entre précision et coût (Tab.2 et Fig.14). De plus, la courbe de vitesse du maillage à 109.058 éléments se superpose bien avec la solution de Blasius (Fig.16). Cependant, on rappelle que le maillage obtenu pour 109.058 éléments contient beaucoup trop d'éléments loin de la paroi et rend celui-ci illisible. On en déduit que pour capter correctement la couche limite avec le couplage VMS-Adaptation, un grand nombre d'éléments est nécessaire, quitte à en avoir trop loin de la paroi.

On remarquera, de plus, sur le zoom de la figure (Fig.14) des irrégularités dans la crois-

sance des mailles de la couche limite.

Le cas de plaque plane pour un nombre de Reynolds 100.000, appuie les constatations faites auparavant. Le nombre d'éléments doit être très important pour réussir à saisir toute la subtilité des fluctuations de vitesse dans la couche limite. Le maillage fin contient 1.707.309 éléments, on notera tout de même que l'on peut se satisfaire d'un maillage à 450.000 éléments anisotropes pour obtenir la même solution. On se contentera ici de présenter la comparaison des différentes simulations à la solution de Blasius (Fig.17).

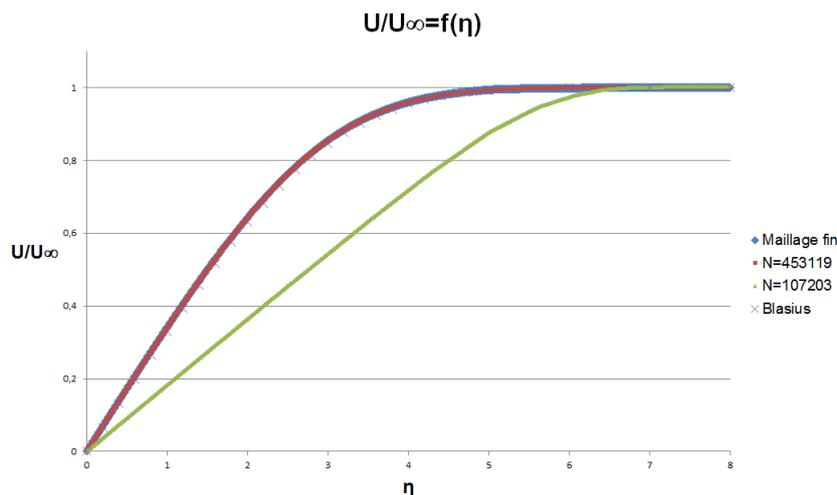


FIGURE 17 – Comparaison des différentes simulations à Blasius - Re=100.000

Malheureusement l'étude de la couche limite pour des nombres de Reynolds 1.000.000 et plus, est impossible dans les conditions actuelles. Les h_{min} nécessaires sont trop fins et le mailleur MTC de CimLib n'arrive pas à construire un tel maillage isotrope par la métrique *a priori*. Le couplage VMS-Adaptation permet d'aller un peu plus loin que la métrique *a priori*, mais rencontre, lui aussi, vite des problèmes avec le mailleur.

On peut donc conclure de cette section que le couplage VMS-Adaptation donne de bons résultats sur la couche limite laminaire sous condition d'avoir un nombre d'éléments suffisants. On notera que la répartition des éléments n'est pas optimale, il y a plus d'éléments que nécessaire loin de la paroi mais c'est le seul moyen de s'assurer que l'écoulement dans la couche limite est correctement résolu. En effet pour des nombres d'éléments inférieurs les maillages obtenus par adaptation présentent une croissance de maille irrégulière dans la couche limite. La figure (Fig.18) montre clairement une couche isotrope plus grossière au milieu de la couche limite. L'adaptation de maillage montre donc des failles, apparemment, le critère du nombre d'éléments et de l'équidistribution de l'erreur sur la norme de la vitesse et ses directions ne suffisent pas. On propose donc d'aller regarder de plus près les maillages couche limite. Pour la suite, nous allons donc nous concentrer sur la génération de maillage isotrope et anisotrope avec la métrique *a priori*. De plus, le solveur VMS est très consommateur de temps, nous allons donc à présent travailler avec le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras pour nos cas de validation.

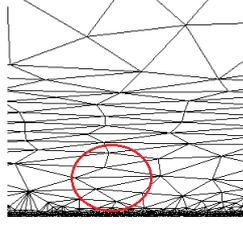


FIGURE 18 – Détail couche limite avec la métrique dynamique basée sur les arêtes

4 Analyse de la couche limite avec le modèle de Spalart-Allmaras et un maillage *a priori*

Le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras est un modèle à une équation qui permet de prendre en compte le caractère turbulent de l'écoulement proche paroi par l'ajout d'une viscosité turbulente à un système RANS. Le calcul est plus rapide qu'avec la VMS car la turbulence est moyennée.

4.1 Présentation des équations du modèle Spalart-Allmaras (SA)

Les équations du modèle sont données ci-dessous dans leur version standard [13][14] :

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + v \cdot \nabla \tilde{\nu} = C_{b1}(1 - F_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} (\nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu})\nabla \tilde{\nu}] + C_{b2}|\nabla \tilde{\nu}|^2) - (C_{w1}F_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2}F_{t2}) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2} \quad (14)$$

La résolution de l'équation (14) nous donne $\tilde{\nu}$ qui nous permettra ensuite de calculer la viscosité turbulente ($\eta_t = F_{v1}\tilde{\nu}$). Les paramètres de l'équation (14) sont les suivants :

$$F_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad F_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi F_{v1}}, \quad F_{t2} = C_{t3} e^{-C_{t4}\chi^2},$$

$$F_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right), \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r), \quad r = \min\left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}, 10\right),$$

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} F_{v2}, \quad S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

où d est la distance à la paroi, κ est la constante de von Karman, et les coefficients restants sont définis ci dessous :

$$C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad \sigma = 2/3, \quad C_{v1} = 7.1, \quad C_{v2} = 0.7, \quad C_{v3} = 0.9,$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma}, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2, \quad C_{t3} = 1.2, \quad C_{t4} = 0.5$$

Cependant la version *standard* peut être améliorée, en effet, pour éviter la production d'une viscosité négative engendrant une perte de convergence et de précision, on peut utiliser

la version *négative* [15]. Cette version consiste à remplacer (14) quand $\tilde{\nu} < 0$ par :

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + v \cdot \nabla \tilde{\nu} = C_{b1}(1 - C_{t3})\tilde{S}\tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} (\nabla \cdot [(\nu + F_n \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] + C_{b2} |\nabla \tilde{\nu}|^2) - C_{w1} \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2} \quad (15)$$

avec $F_n = \frac{C_{n1} + \chi^3}{C_{n1} - \chi^3}$, $C_{n1} = 16$. De plus, la viscosité turbulente η_t est fixée à zéro quand $\tilde{\nu}$ est négative.

Les équations (14) et (15) sont assimilables à des équations de Convection-Diffusion-Réaction lorsque l'on réarrange les termes :

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \underbrace{\left(v - \frac{C_{b2}}{\sigma} \nabla \tilde{\nu} \right) \cdot \nabla \tilde{\nu}}_{Convection} - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}]}_{Diffusion} - \underbrace{\left[C_{b1}(1 - F_{t2})\tilde{S} + (C_{w1}F_w - \frac{C_{b1}}{\kappa^2}F_{t2})\frac{\tilde{\nu}^2}{d} \right]}_{Reaction} \tilde{\nu} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \underbrace{\left(v - \frac{C_{b2}}{\sigma} \nabla \tilde{\nu} \right) \cdot \nabla \tilde{\nu}}_{Convection} - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla \cdot [(\nu + F_n \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}]}_{Diffusion} - \underbrace{\left[C_{b1}(1 - C_{t3})\tilde{S} + C_{w1}\frac{\tilde{\nu}^2}{d} \right]}_{Reaction} \tilde{\nu} \quad (17)$$

Des premiers développements ont été réalisés par F. Cremonesi [16] dans CimLib, ceux-ci ont été revus et corrigés. Le modèle Spalart-Allmaras est maintenant disponible dans CimLib laissant à l'utilisateur le choix entre les deux versions (standard ou négative).

4.2 Validation du modèle de Spalart-Allmaras sur un NACA0012

Avant d'utiliser le modèle de Spalart-Allmaras, nous allons le valider sur un cas complexe, l'analyse de la traînée sur un profil NACA0012 pour un nombre de Reynolds de 5.000. Mehdi Khalloufi s'est chargé d'effectuer les simulations et les calculs de traînée dont il a comparé les résultats à l'ancien code et à la littérature (Tab.3).

	Ref. [17]	Ref. [18]	Ref. [19]	Ref. [20]	Moyenne Ref.
C_D	0.05513	0.0556	0.0554	0.05511	0.05531

TABLE 3 – Résultats littérature pour la traînée sur NACA0012 pour Re=5000

	Moyenne Ref.	SA V1	SA V2
C_D	0.0551	0.03730	0.05276

TABLE 4 – Comparaison littérature et code pour la traînée sur NACA0012 pour Re=5000

Le tableau (Tab.4) montre une nette amélioration du modèle Spalart-Allmaras, et valide les développements effectués. Nous pouvons donc maintenant revenir à notre cas de plaque plane en toute sécurité.

4.3 Résultats

On travaille ici sur des maillages fixes générés à l'aide de la métrique *a priori*, nous allons comparer les maillages isotropes et anisotropes pour les deux géométries de plaques. On rappelle qu'ici contrairement à la section 3 aucune couche de transition n'a été ajoutée entre la couche limite et le maillage grossier.

Re=10.000

Le cas de plaque plane pour un nombre de Reynolds de 10.000 ne présente aucune difficulté pour générer le maillage, ni pour effectuer les calculs. La figure (Fig.19) montre de très bons résultats pour les deux géométries de plaque que le maillage soit isotrope ou anisotrope.

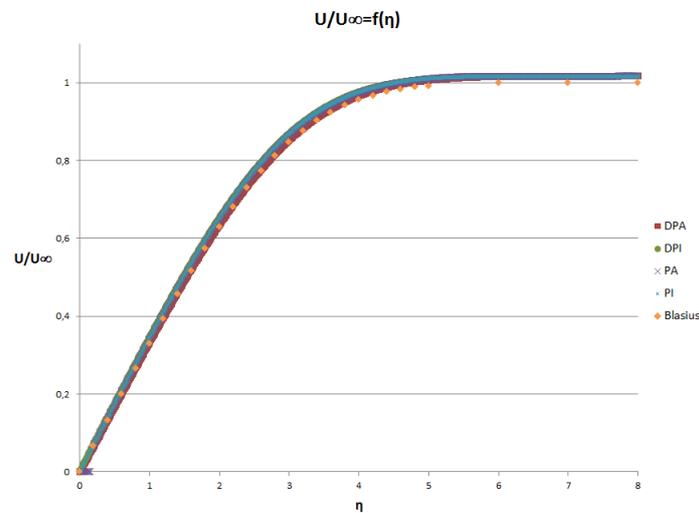


FIGURE 19 – Comparaison des différentes simulations à Blasius - Re=10.000

Re=100.000

C'est un cas beaucoup plus compliqué, la génération des maillages s'effectue toujours sans problème particulier. Contrairement aux calculs sur maillages isotropes qui sont très difficile à réaliser (voir impossible), long et instable. En effet, les calculs divergent s'ils sont directement lancés à Re=100.000, l'utilisateur doit augmenter progressivement le nombre de Reynolds. En procédant ainsi sur le cas Demi-Plaque isotrope nous obtenons de mauvais résultats (Fig.20), nous n'avons pas persévéré pour la plaque isotrope car le cas est deux fois plus lourd et possède deux coins engendrant des instabilités supplémentaires rendant le calcul impossible. Rappelons que le même cas a été traité dans la section 3 avec succès, les deux cas diffèrent en un unique point, la couche de transition entre le maillage couche limite et le maillage grossier. Il est donc clair que la transition brutale de la couche limite vers le maillage grossier joue un rôle majeur dans les problèmes de convergence des calculs isotrope. De leurs côtés, les calculs sur maillage anisotrope donnent de très bons résultats.

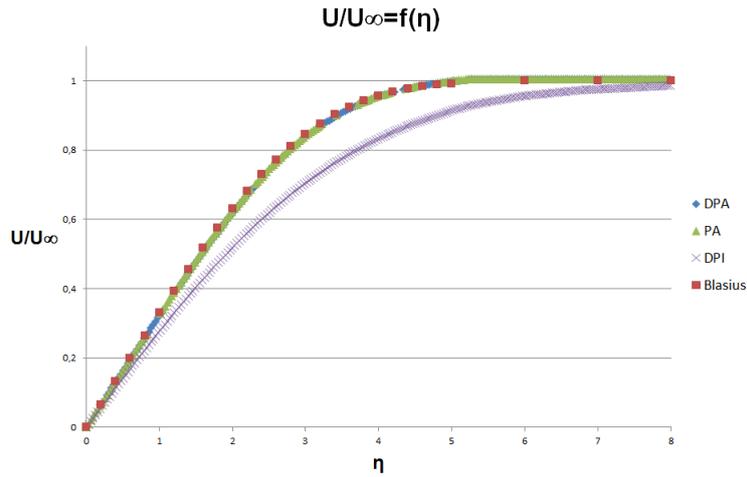


FIGURE 20 – Comparaison des différentes simulations à Blasius - $Re=100.000$

$Re=1.000.000$

Les maillages anisotropes sont générés assez facilement contrairement aux maillages isotropes, il est impossible avec la méthode actuelle de générer un maillage isotrope pour un nombre de Reynolds 10^6 . De plus, les calculs sur maillage anisotrope divergent très vite, cela s'explique par la forte discontinuité du maillage (Fig.21).

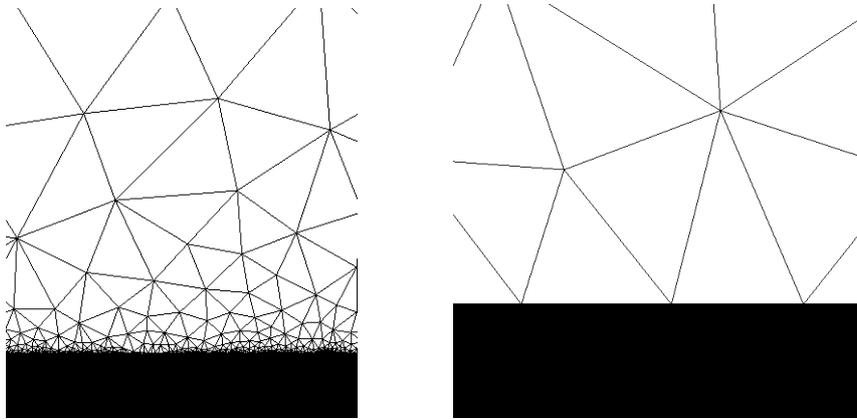


FIGURE 21 – Zoom sur les discontinuités de maillage sur Demi-plaque isotrope à gauche et anisotrope à droite

Il est donc évident que nous rencontrons actuellement un gros problème avec la génération du maillage. En s'inspirant de tous les problèmes rencontrés jusqu'à alors, nous avons envisagé la construction d'une nouvelle métrique adaptée à l'étude des couches limites. En effet, la métrique doit prendre en compte les paramètres physique de la couche limite, assurer une croissance des mailles de la couche limite progressive mais aussi assurer la transition nécessaire entre la couche limite et le reste du domaine.

5 Métrique Couche limite

L'idée de la nouvelle métrique est de prendre en entrée les paramètres physique du problème : Nombre de Reynolds Re , Longueur caractéristique L . Mais aussi les caractéristiques du maillage couche limite souhaité : le raffinement y^+ , le ratio d'anisotropie r , le facteur de croissance appliqué dans la couche limite γ et, si besoin, le nombre de mailles dans l'épaisseur de la couche limite N .

5.1 Construction de la métrique

Afin de paramétrer la transition de la couche limite au maillage grossier, on propose un système de "boîtes" (Fig.22). L'utilisateur indique la taille de maille grossière désirée sur la boîte 3 (H_3), ainsi qu'une taille de maille de transition sur la boîte 2 (H_2). Le code se charge ensuite d'effectuer une transition linéaire de la plus grande taille de maille de la couche limite à la boîte 2, et une transition exponentielle de la boîte 2 à la boîte 3. La boîte 2 est totalement paramétrable par l'utilisateur (centre, dimensions, taille de maille).

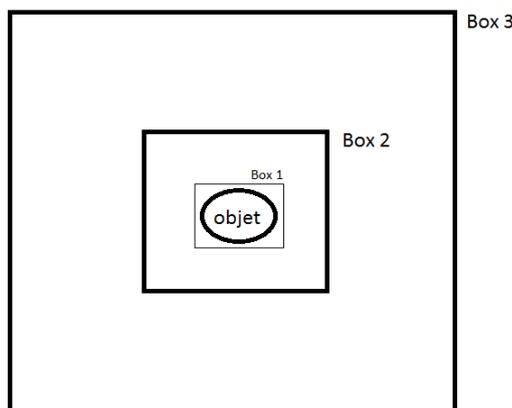


FIGURE 22 – Présentation du découpage du domaine utilisé dans MetriqueCoucheLimite

De plus, l'utilisateur a le choix entre créer directement la couche limite sur la surface de l'objet immergé ou sur une boîte (Box 1) dont il indiquera aussi la taille de maille souhaitée (H_1), les dimensions, et le centre. Cette option est très utile quand le maillage de départ n'est pas suffisamment fin pour capter la géométrie.

Maintenant, intéressons nous à la construction effective de la couche limite. Tout d'abord, nous avons besoin de la plus petite taille de maille h_{min} (11), puis de l'épaisseur de couche limite δ . Or, l'épaisseur de couche limite est différente que l'on soit dans un écoulement laminaire (12) ou dans un écoulement turbulent (13), le seuil de transition laminaire-turbulent étant différent d'un cas à l'autre, nous avons choisi de laisser l'utilisateur préciser si son écoulement est turbulent grâce au booléen *turb*.

Le facteur de grossissement choisi par l'utilisateur va donc nous permettre de déterminer le

nombre de mailles nécessaires dans l'épaisseur de la couche limite :

$$N = \frac{\ln \left(1 - \frac{\delta(1-\gamma)}{h_{min}} \right)}{\ln \gamma}$$

Toutefois, si l'utilisateur sait précisément combien de mailles il souhaite, il peut fixer N .

Nous souhaitons, à partir de là, construire une métrique qui permet de contrôler la taille de maille perpendiculairement à la paroi h et la taille de maille dans le sens de l'écoulement notée h_t pour chaque maille de la couche limite (Fig.23). L'utilisateur a la possibilité de choisir un ratio d'anisotropie r souhaité dans la couche limite (ex. 1 = isotrope), l'anisotropie est maximale sur la paroi de l'objet et diminue tel que en dehors de la couche limite tous les éléments soient isotrope.

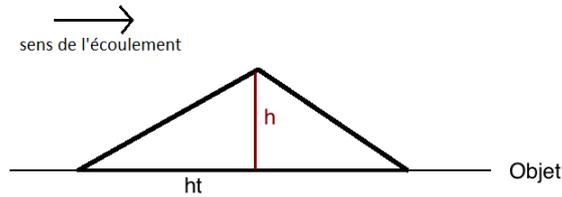


FIGURE 23 – Tailles de maille h et h_t

On utilise une approche multi-levelset de la couche limite, c'est à dire, on définit pour chaque couche de maille un niveau $Level[0..N + 1]$ (Fig.24).



FIGURE 24 – Définition de levelset pour chaque couche de maille dans la couche limite

Entre $Level[k + 1]$ et $Level[k + 2]$ il y a une maille dans l'épaisseur dont les dimensions sont :

$$\begin{cases} h_k = h_{min} * \gamma^k \\ h_{t_k} = \left(\frac{1-r}{N-1} * k + r \right) * h_k \end{cases}$$

On remarque dans la figure 24, que l'on a défini une couche de maille à l'intérieur de l'objet $Level[0]$. Cette couche est très importante pour assurer les calculs proche paroi. Cette couche a une épaisseur égale à 25% de δ , contrairement aux autres couches de la couche limite, celle-ci contient plusieurs mailles dans son épaisseur, dont les dimensions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} h_0 &= h_{min} * \gamma^{0.1N} \\ ht_0 &= r * h_0 \end{aligned}$$

Dans le reste de l'objet on souhaite maximiser la taille de maille, pour économiser du temps de calcul. Mais il faut, cependant, que le maillage reste homogène avec une transition progressive qui permet aux solveurs de converger.

Finalement, on construit la métrique de la manière suivante :

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_t} \right) * \frac{\nabla\alpha \otimes \nabla\alpha^T}{\|\nabla\alpha\|^2} + \frac{1}{h_t} I & \text{dans la couche limite} \\ \frac{1}{h} I & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La méthode proposée pour la construction de la métrique est une méthode itérative qui permet d'aller progressivement vers la taille de maille minimale souhaitée. En effet, aucun mailleur n'est capable de gérer une taille de maille si petite en une seule itération. La figure (Fig.25) montre très bien la construction itérative.

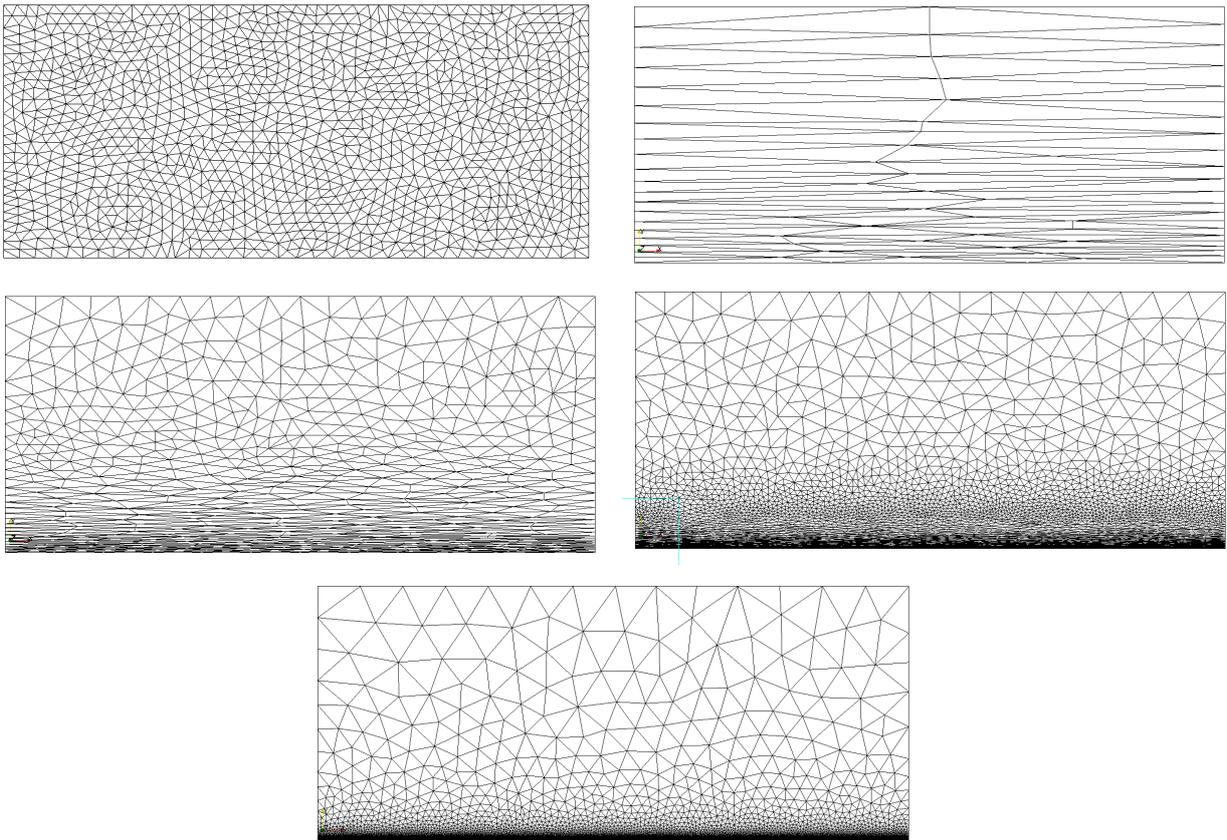


FIGURE 25 – Étapes construction du maillage

5.2 Premiers résultats

Nous présenterons ici les premiers résultats obtenus sur les cas de plaque plane présentés dans la section 4. La seule différence repose sur le maillage initial qui a été construit par la nouvelle métrique. Les résultats sont excellents pour un nombre de Reynolds 100.000 (Fig.26).

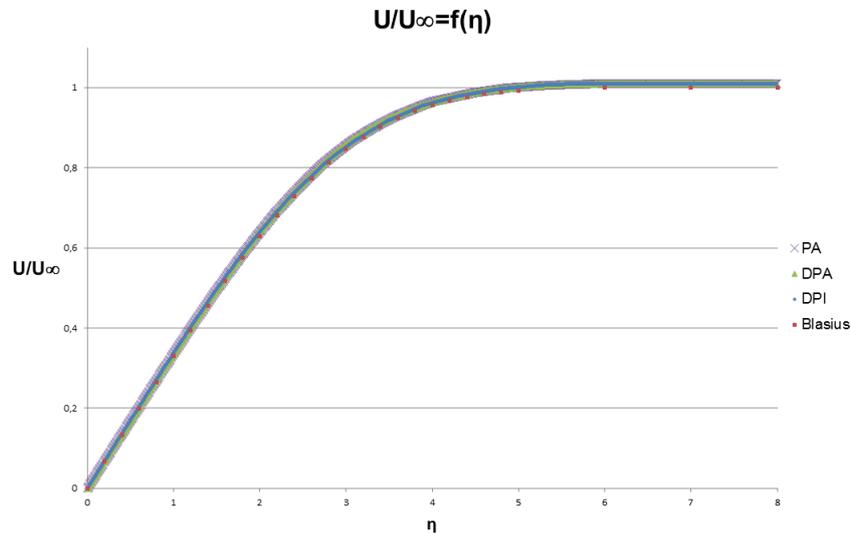


FIGURE 26 – Comparaison des différentes simulations à Blasius - $Re=100.000$

La nouvelle métrique a permis de construire un maillage satisfaisant pour effectuer le cas de plaque plane pour un Reynolds de 1.000.000. On notera que même avec cette nouvelle métrique, il est impossible de construire un maillage isotrope pour un nombre de Reynolds 10^6 . Le maillage a un ratio d'anisotropie $r = 10$. On peut observer sur la courbe (Fig.27) que le profil de vitesse de la couche limite se superpose parfaitement à la solution de Blasius.

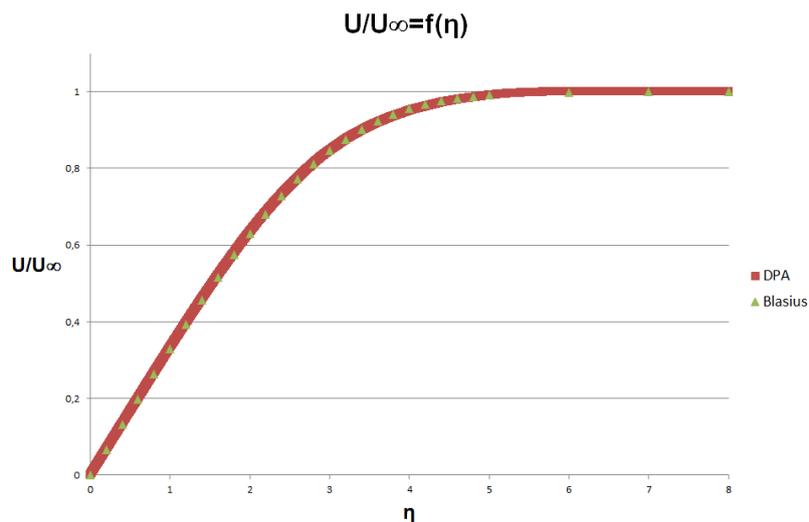


FIGURE 27 – Comparaison de la simulation à Blasius - $Re=1.000.000$

On constate une nette amélioration des résultats grâce à l'utilisation de cette nouvelle métrique. Cette métrique a un grand potentiel, et devrait nous permettre d'aller capturer aussi bien les couches limites turbulentes de la plaque plane que celles de cas beaucoup plus complexes.

Conclusion

Dans ce rapport, une investigation extensive des outils numérique de CimLib a été réalisée. Dans le contexte du projet ANR MAIDESC, il est envisagé avec les partenaires de développer les méthodes d'adaptation multi-échelles et multi-physique (Interaction Fluide/Structure). Cela passe nécessairement par l'étude approfondie de la couche limite. Le couplage du solveur éléments finis stabilisés VMS avec l'adaptation de maillage anisotrope dynamique s'avère être un outil performant pour capturer toute fluctuations dans la solution. En revanche, les résultats montrent qu'elle n'est pas adaptée aux couches limites turbulentes. La métrique *a priori* est simple d'utilisation mais, de même, pour un écoulement turbulent (haut Reynolds) des failles apparaissent, notamment sur la transition de la couche limite au reste du domaine. Finalement, une nouvelle métrique a été développée pour combler les failles des méthodes précédentes. Cette métrique a un grand potentiel pour attaquer des problèmes complexes. L'idée à terme est de réussir à coupler cette métrique avec la métrique a posteriori dynamique [21] et le solveur VMS pour des problèmes Fluide/Structure telle que l'éolienne.

Bibliographie

- [1] Laure Billon. Étude et analyse des couches limites pour les écoulements turbulents. Technical report, CEMEF, Mines-Paristech, January 2013.
- [2] Christophe Corre. La couche limite en aérodynamique. In *Aérodynamique Fondamentale*. ENSAM - SINUMEF, 2005.
- [3] E. Hachem, S. Feghali, R. Codina, and T. Coupez. Immersed stress method for fluid–structure interaction using anisotropic mesh adaptation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(9) :805–825, 2013.
- [4] E. Hachem, B. Rivaux, T. Kloczko, H. Dignonnet, and T. Coupez. Stabilized finite element method for incompressible flows with high reynolds number. *Journal of Computational Physics*, 229(23) :8643–8665, November 2010.
- [5] G. Jannoun, E. Hachem, J. Veysset, and T. Coupez. Adaptive time-step with anisotropic meshing for unsteady convection-diffusion problems. 2013.
- [6] T. Coupez. Metric construction by length distribution tensor and edge based error for anisotropic adaptive meshing. *Journal of Computational Physics*, 230(7) :2391–2405, 2011.
- [7] T. Coupez, G. Jannoun, N. Nassif, H.C. Nguyen, H. Dignonnet, and E. Hachem. Adaptive time-step with anisotropic meshing for incompressible flows. (241) :195–211, 2013.
- [8] T. Coupez and E. Hachem. Solution of high-reynolds incompressible flow with stabilized finite element and adaptive anisotropic meshing. 267 :65–85, 2013.
- [9] Uriel Frisch and Andrei Nikolaevich Kolmogorov. *Turbulence : The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, November 1995.
- [10] Bill Jones. Viscous grid spacing calculator, 1997.
- [11] Hermann Schlichting. *Boundary-layer theory*. McGraw hill edition, 1979.
- [12] Jean Cousteix. *Aérodynamique : turbulence et couche limite*. Cépaduès-editions, 1989.
- [13] P. R Spalart and S. R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *Recherche Aerospaciale*, (1) :5–21, 1994.
- [14] Christopher Rumsey. NASA - the spalart-allmaras turbulence model, March 2013.
- [15] S. R. Allmaras, F. T. Johnson, and P. R Spalart. Modifications and clarifications for the implementation of the spalart-allmaras turbulence model. In *ICCFD7-1902*, Big Island, Hawaii, July 2012.
- [16] F Cremonesi, G. Jannoun, J. F. Geneste, Y. H. Grunevald, and E. Hachem. Application of anisotropic edge-based unsteady mesh adaptation to aerodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2013.
- [17] N. Villedieu, T. Quintino, M. Ricchiuto, and H. Deconinck. Third order residual distribution schemes for the navier-stokes equations. (230) :4301–4315, 2011.
- [18] L. Martinelli. *Calculations of Viscous Flows with a Multigrid Method*. PhD thesis, Princeton University, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, 1987.
- [19] R. Radespiel and R.C. Swanson. An investigation of cell centered and cell vertex multigrid schemes for the navier-stokes equations. (89-0453), 1989.

- [20] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible navier-stokes equations. (131) :267–279, 1997.
- [21] A. Loseille and R. Löhner. Anisotropic mesh generation application to high-fidelity simulation in CFD. 2013.