

MAIDESC-T2-D2: Spécification de ATC2 - Unsteady flow around a circular cylinder at different Reynolds numbers

E. Itam*, B. Koobus*

Juillet 2014

*I3M, Université Montpellier 2, Montpellier, France
emmanuelle.itam@etud.univ-montp2.fr, koobus@math.univ-montp2.fr

Résumé

Ce document propose une spécification du cas test du cylindre circulaire pour des nombres de Reynolds de 3900 et 1 million, ainsi que celui de cylindres en tandem à Reynolds 166000. Des résultats préliminaires obtenus par les partenaires INRIA Sophia-Antipolis et Université Montpellier 2 sont présentés pour ces problèmes d'écoulements.

Keywords : Cylindre circulaire, régime sous-critique, régime super-critique, cylindres en tandem, écoulements massivement décollés, méthode LES variationnelle multiéchelles (VMS), approche hybride RANS/VMS-LES.

1 Introduction

La dynamique des écoulements autour de cylindres de section circulaire seuls ou en réseau est d'un grand intérêt pour de nombreux domaines industriels comme l'industrie du gaz ou pétrolière offshore, l'aéronautique ou encore le génie civil. Ces problèmes d'écoulements sont cependant difficiles à calculer, et ce d'autant plus que le nombre de Reynolds est élevé. La physique de ces écoulements, qui contiennent de nombreuses caractéristiques que l'on rencontre en milieu industriel, est en effet très riche et complexe : zone de stagnation, couche limite, transition laminaire/turbulent, décollement, couche de cisaillement, détachement tourbillonnaire, zone de recirculation, et sillage turbulent entre autres. D'autre part, et contrairement aux cylindres de section carré, le décollement dans le cas de cylindres circulaires n'est pas dû à une singularité dans la géométrie mais à des gradients de pression adverses, ce qui augmente la difficulté de simulation. On peut aussi ajouter que la dynamique des écoulements autour de cylindres circulaires varie fortement avec le nombre de Reynolds.

Pour une prédiction précise de tels écoulements, il est donc indispensable de disposer de modèles numériques et de turbulence performants. Alors que pour des nombres de Reynolds modérés, l'approche de simulation des grandes échelles (LES) est sans doute celle à privilégier, les modèles de turbulence hybride Equations de Navier-Stokes en Moyenne de Reynolds (RANS) / LES sont les modèles les plus indiqués pour traiter ces écoulements à nombre de Reynolds élevé. Dans ce projet ANR, les partenaires INRIA Sophia-Antipolis et Université Montpellier 2 ont choisi de mettre en oeuvre une formulation variationnelle multiéchelles de la LES (VMS-LES) [1, 2] et un modèle hybride RANS/VMS-LES [3]. L'approche VMS-LES,

qui introduit la modélisation des effets des échelles non résolues uniquement dans les petites échelles résolues, est en effet bien adaptée pour simuler des écoulements massivement décollés de cette nature, et son hybridation avec un modèle RANS permet son application à des nombres de Reynolds plus élevés. Pour ce qui est des modèles numériques, ces cas tests pourront permettre d'évaluer différentes approches de discrétisation et d'adaptation de maillage développées dans ce projet ANR. Ils permettront en particulier d'évaluer l'efficacité d'un schéma de discrétisation en temps *multirate* dont l'objectif est de ne pas pénaliser l'avancement en temps de solutions instationnaires par l'utilisation de petits pas de temps imposés par les plus petites mailles telles que celles constituant les couches limites. On pourra aussi examiner les performances, en termes de précision, d'un schéma de discrétisation spatiale décentré avec reconstruction quadratique pour la prédiction de ces écoulements complexes en maillages non structurés.

En complément au cas test du cylindre circulaire, nous décrivons aussi le cas test de deux cylindres en tandem. Celui-ci présente en effet des difficultés supplémentaires, tant sur le plan numérique que du modèle de turbulence. Pour une bonne prédiction de l'écoulement autour du second cylindre, il faut en effet non seulement pouvoir simuler avec précision l'écoulement autour du premier cylindre, mais aussi capturer proprement le sillage entre les deux cylindres. Ceci implique l'utilisation de modèles numérique et de turbulence peu dissipatifs, ainsi qu'un maillage bien adapté. Ces modèles devront être aussi suffisamment efficaces d'un point de vue temps de calcul pour pouvoir faire des statistiques sur un temps suffisamment long, et le maillage pas trop coûteux en termes de nombre d'éléments tout en permettant une simulation précise de l'écoulement. Ce cas test représente donc un problème complémentaire à celui du cylindre circulaire très intéressant dans le but d'évaluer les performances des modèles numériques développés dans ce projet ANR.

2 Ecoulement autour d'un cylindre circulaire - régime sous-critique

Dans cette section, nous spécifions le cas test du cylindre circulaire à Reynolds 3900, et nous présentons les résultats de simulations numériques réalisées par les partenaires INRIA Sophia-Antipolis et Université Montpellier 2.

Le nombre de Reynolds, basé sur le diamètre du cylindre D et la vitesse d'écoulement libre, est égal à 3900. L'écoulement est donc en régime sous-critique. La couche limite est laminaire en amont du point de décollement, et l'écoulement décolle avant les 90 degrés. Le sillage est complètement turbulent et assez large. L'écoulement, subsonique et sous pression atmosphérique, est considéré comme incompressible.

Pour le domaine de calcul, une longueur suivant l'axe du cylindre égale à $\pi \times D$ est considérée comme suffisante. Pour les deux autres dimensions du domaine de calcul, on préconise une longueur d'au moins $20 \times D$. Pour ce cas test, une intégration jusqu'à la paroi est à considérer. La première couche de points du maillage autour du cylindre doit donc être située à une distance normale à la paroi tel que y^+ soit de l'ordre de l'unité. Des conditions de non glissement sont imposées sur la surface du cylindre et des conditions aux limites périodiques sont appliquées dans la direction portée par l'axe du cylindre. Pour ce type d'écoulement à Reynolds modéré, une approche LES est à privilégier.

Afin d'obtenir des résultats considérés comme suffisamment convergés, il est conseillé de faire les statistiques sur un temps de simulation correspondant à une trentaine de cycles de détachement tourbillonnaire.

Des simulations de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à Reynolds 3900 ont été réalisées. L'approche numérique, qui est celle utilisée dans tous les cas tests présentés dans ce document, repose sur une formulation mixte volumes finis/éléments finis et un schéma décentré dont la dissipation numérique est basée sur des dérivées sixièmes [4]. Il en résulte que la dissipation numérique a des effets plus localisés sur les hautes fréquences du champ résolu avec comme conséquence de limiter l'interaction entre dissipation numérique et dissipation du modèle de turbulence. Pour ce qui est de la modélisation de la turbulence, les approches LES et VMS-LES sont mises en oeuvre pour différents modèles de sous maille avec ou sans procédure dynamique.

Le domaine de calcul est tel que $-10 \leq x/D \leq 25$, $-20 \leq y/D \leq 20$ et $-\frac{\pi}{2} \leq z/D \leq \frac{\pi}{2}$ avec x , y et z désignant les directions horizontale, verticale et transversale respectivement, l'axe du cylindre étant situé en $x = y = 0$. Le flux numérique de Steger-Warming est utilisé pour l'écoulement entrant, l'écoulement sortant et sur les surfaces latérales ($y/D = \pm 20$) [32]. Le nombre de Mach dans l'écoulement libre est fixé à 0.1 dans le but de pouvoir faire des comparaisons avec les simulations des écoulements incompressibles existantes dans la littérature. A cet effet, un préconditionnement est utilisé pour traiter le régime à faible nombre de Mach.

Deux maillages tétraédriques non structurés sont générés dans le domaine de l'écoulement. Le premier, noté GR1 dans la suite, est formé d'environ 2.9×10^5 noeuds. La distance du noeud le plus proche à la surface du cylindre est $0.017D$ ce qui correspond à $y^+ \approx 3.31$. Le deuxième maillage, GR2, est obtenu à partir du premier en raffinant d'une façon structurée, chaque tétraèdre est décomposé en 8, donnant ainsi 1.46×10^6 sommets et $y^+ = 0.9$ aux premiers noeuds à la paroi. Des coupes verticales de GR1 et GR2 sont reportées dans les figures 1 et 2 respectivement.

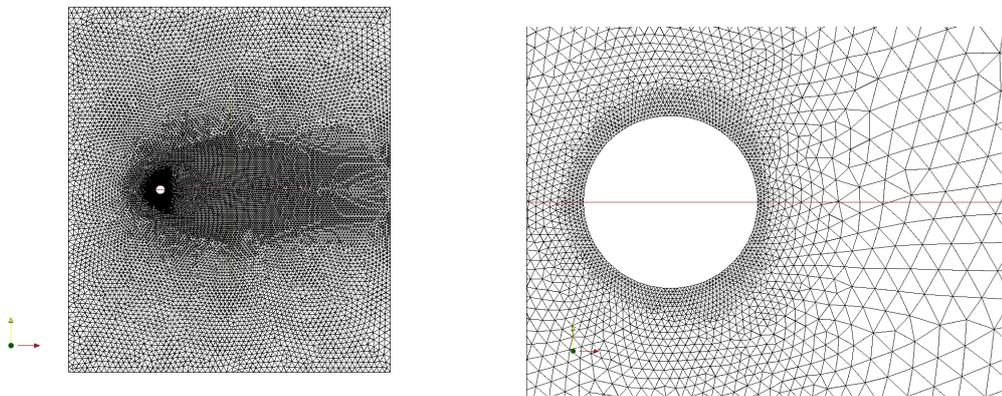


FIG. 1 – Domaine de calcul : section verticale du maillage GR1, et zoom autour du cylindre.

Des simulations LES et VMS-LES ont été effectuées avec les modèles de sous-maille de Smagorinsky et WALE dans leur formulation originale et leur version dynamique sur les deux grilles décrites ci-dessus. Nous rappelons que, dans la version classique, la constante du modèle est celle considérée optimale en écoulements cisailés pour le modèle de Smagorinsky, $C_s = 0.1$, et celle recommandée dans le papier original pour le modèle WALE, $C_w = 0.5$.

Avant de commencer la discussion des résultats statistiques obtenus, notons que la procé-

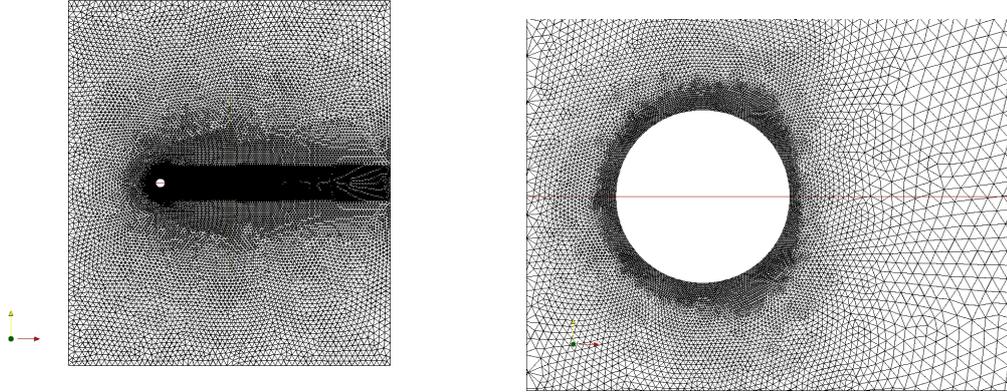


FIG. 2 – Domaine de calcul : section verticale du maillage GR2, et zoom autour du cylindre.

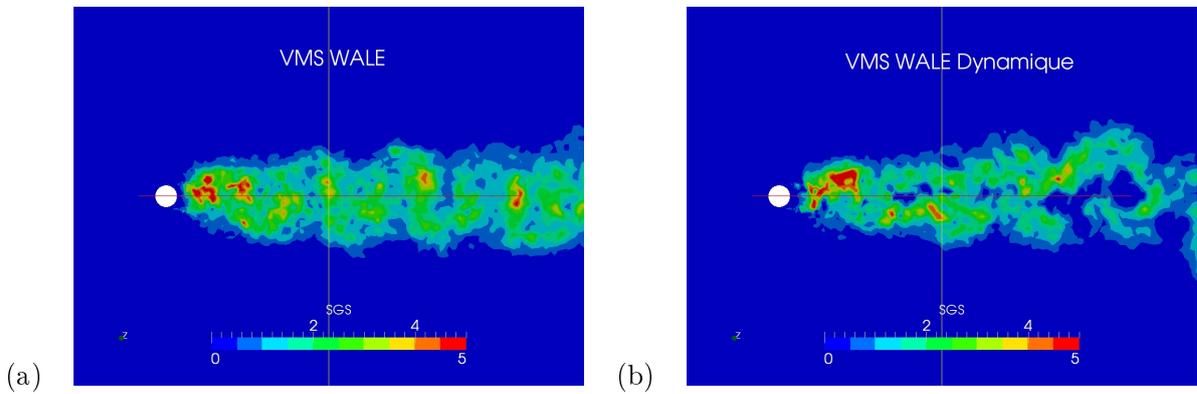


FIG. 3 – Écoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : isocontours du rapport de viscosité μ_{sgs}/μ dans la section $z = 0$ sur GR1 ; (a) modèle VMS-LES WALE, (b) modèle VMS-LES WALE dynamique.

dure dynamique a un effet remarquable sur la quantité de viscosité de sous-maille introduite par le modèle. Dans tous les cas considérés, la viscosité SGS produite dans le sillage derrière le cylindre par les modèles de sous-maille dynamique est réduite de façon significative en comparant avec leur version non-dynamique. Ceci est montré qualitativement par les isocontours instantanés du rapport de viscosité μ_{sgs}/μ sur le plan $z = 0$ obtenus par les simulations VMS-LES avec les versions non-dynamique et dynamique du modèle WALE, figure 3 pour le maillage grossier GR1. Le même comportement de la procédure dynamique concernant la viscosité SGS est remarqué sur le maillage fin GR2, figure 4. En remarquant qu’en raison de la meilleure résolution, la viscosité ajoutée sur le maillage fin est inférieure à celle sur le maillage grossier pour tous les modèles, nous notons que le modèle dynamique WALE fourni généralement des valeurs plus petites de la viscosité SGS dans le sillage, en comparant avec le modèle classique.

Par la suite, nous étudions l’influence de ces différences dans les quantités de viscosité de sous-maille sur les bulk coefficients de l’écoulement et les statistiques. Pour toutes les simulations, le paramètre contrôlant la viscosité numérique, γ , est fixé à la valeur minimale

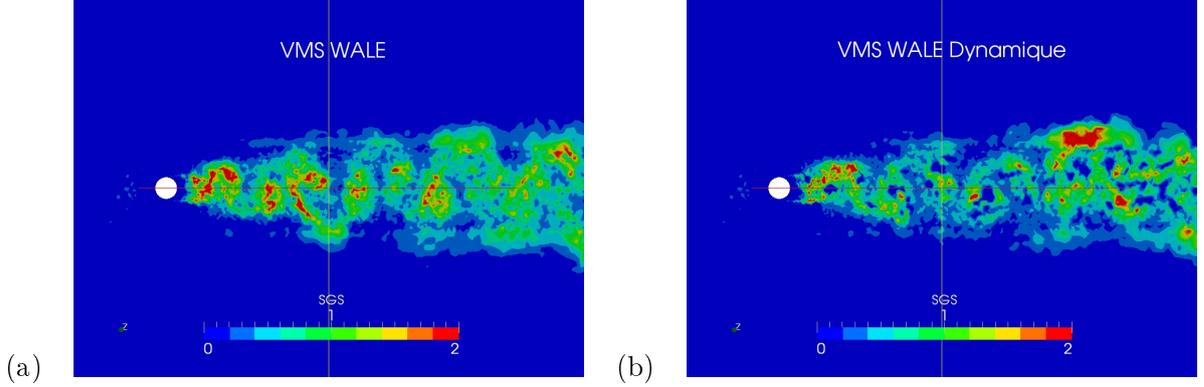


FIG. 4 – Écoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : isocontours du rapport de viscosité μ_{sgs}/μ dans la section $z = 0$ sur GR2 ; (a) modèle VMS-LES WALE, (b) modèle VMS-LES WALE dynamique.

0.3 assurant la stabilité numérique. Les simulations sont effectuées avec le même pas de temps de manière à obtenir environ 500 pas de temps par cycle de détachement tourbillonnaire. Les statistiques sont calculées pour toutes les simulations en moyennant de façon homogène dans la direction de l’axe du cylindre et en temps sur une trentaine de cycles de détachement tourbillonnaire. Les bulk coefficients de l’écoulement sont représentés dans le tableau 1 et sont comparés aux valeurs expérimentales de [5, 6, 7] et celles de Norberg tirées de [8].

Le coefficient moyen de traînée, $\overline{C_d}$, obtenu par Norberg pour $Re = 4020$ est de l’ordre de [0.94, 1.04] ce qui est en bon accord avec les valeurs obtenues par nos différentes simulations sur les deux maillages. Il en est de même pour le nombre de Strouhal S_t obtenu dans nos simulations qui est en bon accord avec les valeurs expérimentales $S_t = 0.21 \pm 0.005$. Pour ces deux coefficients, l’impact de la procédure dynamique des modèles de sous-maille semble être presque négligeable au sein de l’approche VMS-LES.

La distribution du coefficient moyen de pression sur la surface du cylindre est montrée dans la figure 5 pour le modèle WALE dynamique et non dynamique avec les deux approches LES classique et VMS-LES sur la grille GR1. Les grandes différences avec les valeurs expérimentales indiquent que la couche limite n’est pas bien capturée par nos simulations à cause de la faible résolution du maillage. Ceci est corrigé par l’utilisation du maillage plus fin qui permet une prédiction meilleure de la couche limite. Les profils obtenus sur le maillage GR2 sont représentés dans la figure 6. Nous remarquons sur les deux maillages aucune différence notable lorsque la procédure dynamique est active au sein de l’approche VMS-LES. Cependant, avec l’approche LES classique, le modèle de sous-maille dynamique fournit une amélioration plus sensible (voir par exemple figure 5 (a)).

Comme observé dans [5], la longueur de recirculation moyenne est sous-estimée sur le maillage grossier GR1. Ceci peut être dû au fait que le maillage est très grossier et donc incapable de capturer avec suffisamment de précision l’écoulement. L’utilisation des modèles de sous-maille dynamiques fournit une légère amélioration dans la prédiction de cette quantité. Cependant, le bon accord avec les valeurs expérimentales est obtenu sur le maillage fin GR2 avec l’approche VMS-LES, indépendamment de la version dynamique ou non dynamique utilisée des modèles SGS. Ces observations sont confirmées par les profils de vitesse horizontale moyenne reportés dans les figures 7 et 8 et fournis par le modèle VMS-LES dans ses deux versions dynamique et non dynamique sur les deux maillages GR1 et GR2 respective-

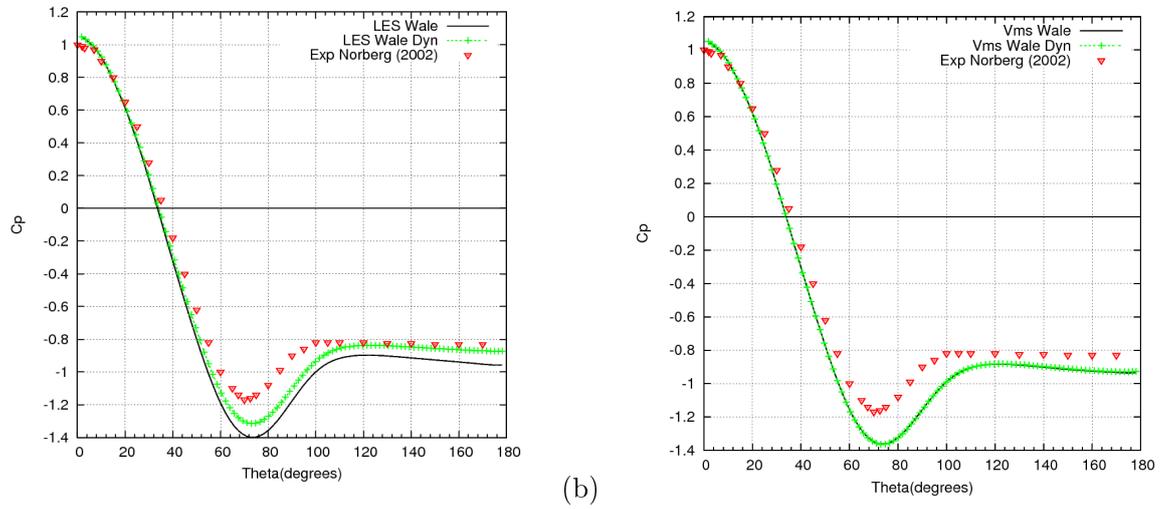


FIG. 5 – Ecoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : distribution du coefficient de pression sur la surface du cylindre, obtenue sur GR1 par le modèle WALE dynamique et non dynamique avec les approches (a) LES classique et (b) VMS-LES.

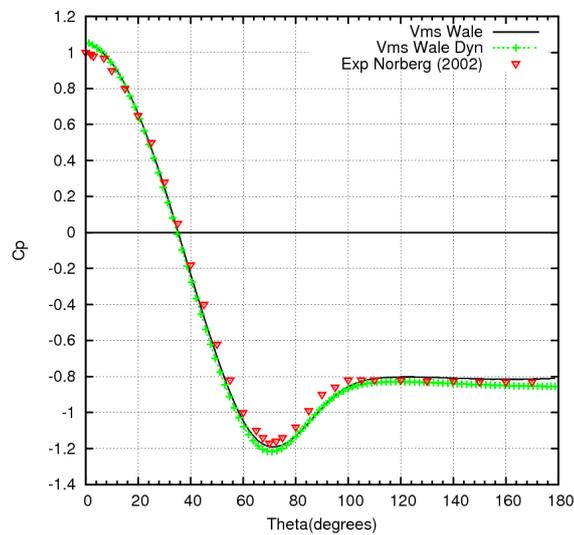


FIG. 6 – Ecoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : distribution du coefficient de pression sur la surface du cylindre, obtenue sur GR2 par le modèle WALE dynamique et non dynamique avec l’approche VMS-LES.

| | $\overline{C_d}$ | l_r | $-\overline{C_{pb}}$ | St |
|--------------------------------------|------------------|-------------|----------------------|--------------|
| LES Smagorinsky (GR1) | 0.98 | 1.06 | 0.97 | 0.219 |
| LES dyn. Smagorinsky (GR1) | 0.95 | 1.12 | 0.93 | 0.219 |
| LES WALE (GR1) | 0.96 | 1.06 | 0.96 | 0.219 |
| LES dyn. WALE (GR1) | 0.94 | 1.20 | 0.87 | 0.22 |
| VMS Smagorinsky (GR1) | 0.98 | 1.08 | 0.95 | 0.22 |
| VMS dyn. Smagorinsky (GR1) | 0.99 | 1.08 | 0.95 | 0.218 |
| VMS WALE (GR1) | 0.96 | 1.06 | 0.94 | 0.22 |
| VMS dyn. WALE (GR1) | 0.97 | 1.08 | 0.93 | 0.22 |
| VMS Smagorinsky (GR2) | 0.94 | 1.71 | 0.80 | 0.216 |
| VMS dyn. Smagorinsky (GR2) | 0.96 | 1.70 | 0.82 | 0.22 |
| VMS WALE (GR2) | 0.94 | 1.47 | 0.81 | 0.22 |
| VMS dyn. WALE (GR2) | 0.94 | 1.47 | 0.85 | 0.22 |
| Exp. [6], min. | – | – | – | 0.205 |
| max. | – | – | – | 0.215 |
| Exp. [5], min. | – | 1.13 | – | – |
| max. | – | 1.23 | – | – |
| Exp. [7], min. | – | 1.41 | – | 0.206 |
| max. | – | 1.51 | – | 0.21 |
| Exp. Norberg (from [8]), min. | 0.94 | – | 0.83 | – |
| max. | 1.04 | – | 0.93 | – |

TAB. 1 – Bulk coefficients de l’écoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 obtenu par les simulations LES et VMS-LES dynamique et non-dynamique. $\overline{C_d}$ désigne le coefficient moyen de traînée, l_r est la longueur de recirculation, $\overline{C_{pb}}$ est le coefficient de pression à la base du cylindre, St is le nombre de Strouhal.

ment. Nous remarquons que la mauvaise prédiction obtenue sur le maillage grossier GR1 est parfaitement corrigée par l’utilisation de la grille raffinée GR2. Notons aussi qu’une amélioration légère est apportée par la procédure dynamique sur le maillage fin. Ceci est également confirmé par la prédiction des profils en “V” de la vitesse horizontale moyenne à différents endroits derrière le cylindre représentés dans les figures 9 et 10 sur les grilles GR1 et GR2 respectivement. Encore une fois, le calcul sur le maillage fin GR2 est beaucoup plus précis et une amélioration assez sensible est fournie par l’approche VMS-LES dynamique surtout sur la grille fine. Ces mêmes profils obtenus par l’approche LES classique avec le modèle WALE dans ses deux versions dynamiques et non dynamiques sont représentés dans les figures 11 et 12. En comparant les figures 11 et 12 aux figure 7 et 9, nous remarquons encore une fois que l’effet de la procédure dynamique au sein de l’approche LES classique est plus important que son effet dans l’approche VMS-LES.

Par ailleurs, il est à noter que les surcoûts de calcul engendrés par l’utilisation de l’approche VMS-LES d’une part et de la procédure dynamique d’autre part sont faibles. En effet, pour ce cas test et en prenant par exemple le modèle de sous-maille WALE sur le maillage formé de 2.9×10^5 noeuds, le temps CPU moyen pour simuler sur 64 coeurs un cycle de détachement

tourbillonnaire échantillonné par environ 500 pas de temps est dans le cas LES de 1542 sec., 1636 sec. en LES dynamique, 1600 sec. en VMS-LES et 1728 sec. en VMS-LES dynamique.

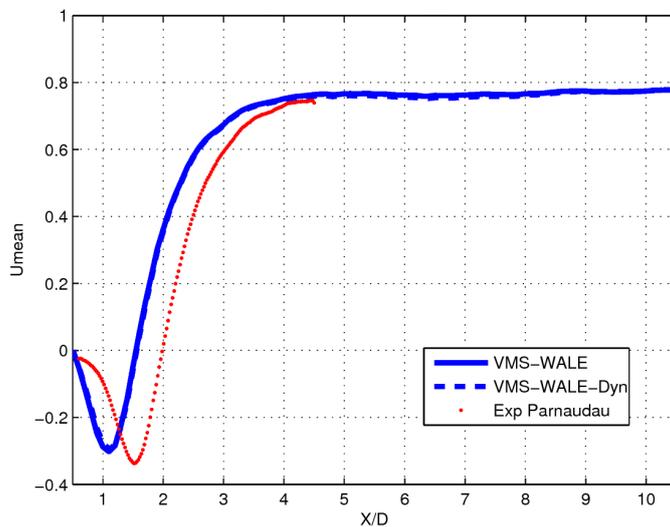


FIG. 7 – Ecoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : vitesse horizontale moyenne obtenue le long de l’axe central du sillage par les simulations VMS-LES WALE dynamique et non dynamique sur le maillage grossier GR1.

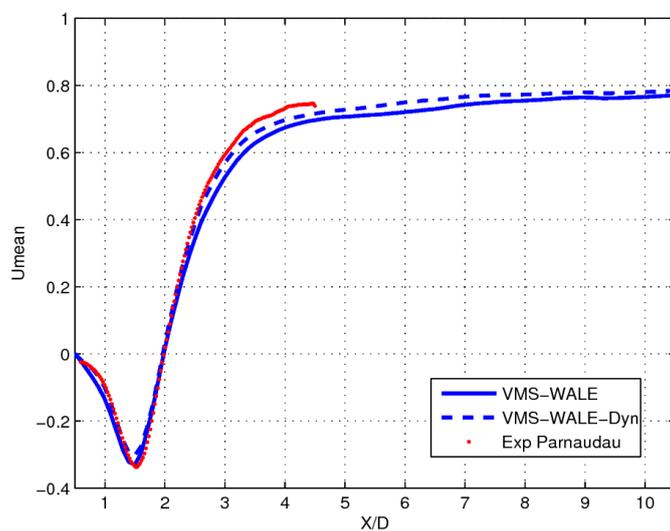


FIG. 8 – Ecoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : vitesse horizontale moyenne obtenue le long de l’axe central du sillage par les simulations VMS-LES WALE dynamique et non dynamique sur le maillage grossier GR2.

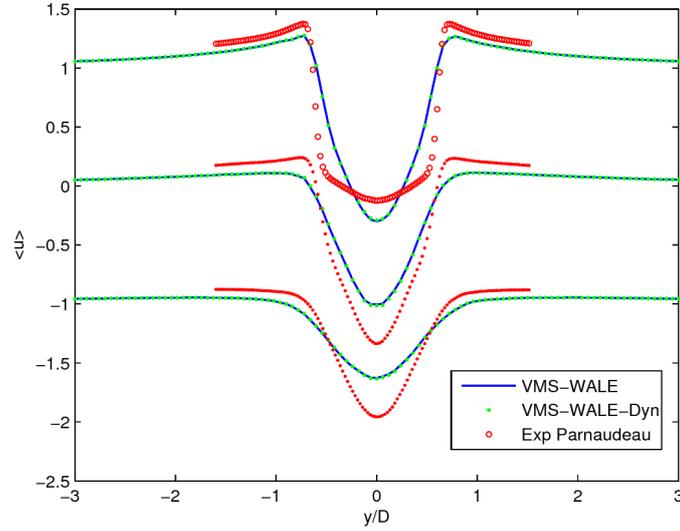


FIG. 9 – Ecoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : vitesse horizontale moyenne à $x/D = 1.06$ (haut), $x/D = 1.54$ (centre) and $x/D = 2.02$ (bas), obtenue le long de l’axe central du sillage par les simulations VMS-LES WALE dynamique et non dynamique sur le maillage grossier GR1.

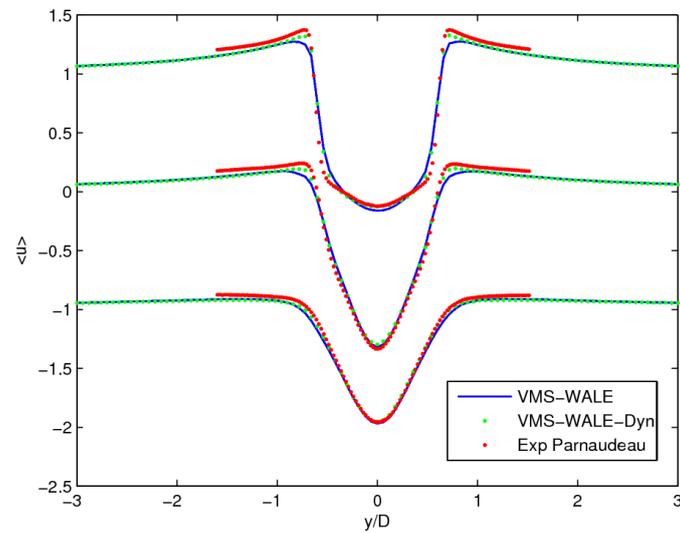


FIG. 10 – Ecoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : vitesse horizontale moyenne à $x/D = 1.06$ (haut), $x/D = 1.54$ (centre) and $x/D = 2.02$ (bas), obtenue le long de l’axe central du sillage par les simulations VMS-LES WALE dynamique et non dynamique sur le maillage grossier GR2.

3 Ecoulement autour d’un cylindre circulaire - régime super-critique

Dans cette section, nous spécifions le cas test du cylindre circulaire à Reynolds 1 million, et nous présentons les résultats de simulations numériques réalisées par les partenaires INRIA

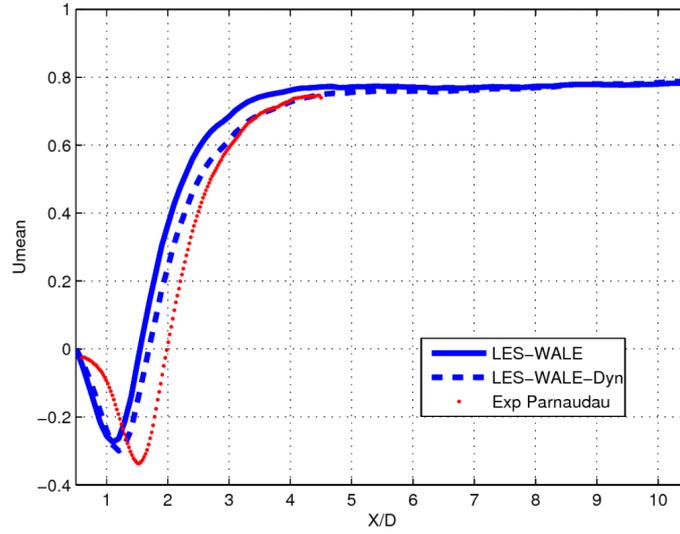


FIG. 11 – Ecoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : vitesse horizontale moyenne obtenue le long de l’axe central du sillage par les simulations LES WALE dynamique et non dynamique sur le maillage grossier GR1.

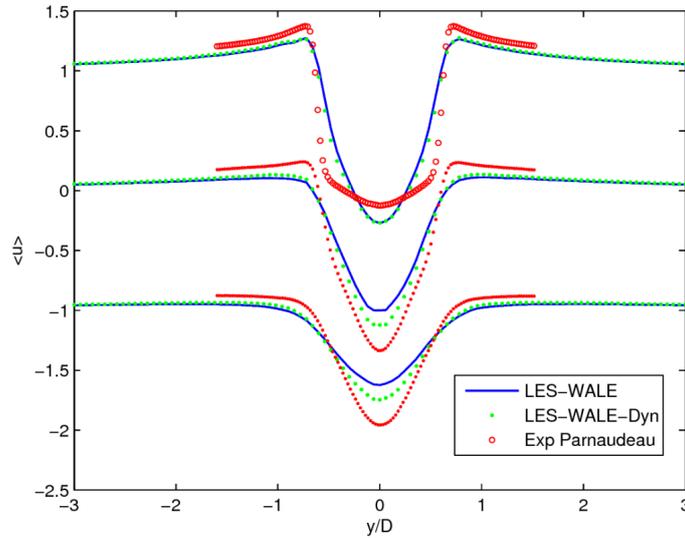


FIG. 12 – Ecoulement autour d’un cylindre circulaire à Reynolds 3900 : vitesse horizontale moyenne à $x/D = 1.06$ (haut), $x/D = 1.54$ (centre) and $x/D = 2.02$ (bas), obtenue le long de l’axe central du sillage par les simulations LES WALE dynamique et non dynamique sur le maillage grossier GR1.

Sophia-Antipolis et Université Montpellier 2.

Le nombre de Reynolds, basé sur le diamètre du cylindre D et la vitesse d’écoulement libre, est égal à 1 million. L’écoulement est donc en régime super-critique. La couche limite est turbulente aux points de décollement, et l’écoulement décolle après les 90 degrés avec

un sillage turbulent plus étroit comparativement au cas test précédent. L'écoulement, subsonique et sous pression atmosphérique, est à nouveau considéré comme incompressible.

Pour le domaine de calcul, une longueur suivant l'axe du cylindre égale à $\pi \times D$ est considérée comme suffisante. Pour ce nombre de Reynolds, et si une intégration jusqu'à la paroi est mise en oeuvre, la première couche de points du maillage autour du cylindre doit donc être située à une distance normale à la paroi tel que y^+ soit de l'ordre de l'unité c'est à dire $y \simeq 2 \cdot 10^{-5} \times D$. Des conditions de non glissement sont alors imposées sur la surface du cylindre. Une autre option possible, afin de limiter le coût des grilles de calcul en proche paroi, est d'utiliser une approche lois de paroi qui représente la vitesse tangentielle dans une couche limite par des lois analytiques. Des conditions aux limites périodiques sont sinon appliquées dans la direction portée par l'axe du cylindre. Pour ce type d'écoulement à Reynolds élevé, une approche hybride RANS/LES est à privilégier.

Afin d'obtenir des résultats suffisamment convergés, il est conseillé de faire les statistiques sur un temps de simulation équivalent à une trentaine de cycles de détachement tourbillonnaire.

Seulement quelques études numériques ont été menées pour des nombres de Reynolds supérieurs à 5×10^5 . Ces valeurs correspondent au régime super-critique qui apparait pour des nombres de Reynolds supérieurs à 2×10^5 et pour lesquels la couche limite est turbulente quand l'écoulement décolle. Il est généralement accepté que le phénomène de détachement tourbillonnaire périodique est très faible (s'il y en a un) dans la partie basse de l'intervalle $[5 \times 10^5, 1.5 \times 10^6]$.

Pour la simulation de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire de diamètre $D = 0.05715\text{m}$, à $\text{Re} = 1$ million, nous avons mis en oeuvre une approche hybride RANS/VMS-LES avec le modèle de sous-maille WALE dans sa version originale et équipé de la procédure dynamique. Des lois de paroi sont utilisées afin de limiter le nombre de noeuds du maillage près du cylindre. Le nombre de Mach est fixé à 0.1, ce qui permet de pouvoir faire des comparaisons avec les résultats déjà existants au sein de la communauté CFD pour les écoulements incompressibles. Afin d'éviter une détérioration de l'approximation spatiale causée par un ajout trop important de viscosité par le schéma de Roe lorsque le nombre de Mach est petit, on introduit un préconditionnement (de type Roe-Turkel dans le terme de stabilisation)

Le maillage tétraédrique non structuré est formé d'environ 2.854 millions de noeuds et 15 millions d'éléments. La distance du noeud le plus proche à la surface du cylindre est $0.002D$, ce qui correspond à $y^+ \approx 100.0$. Une coupe verticale de ce maillage est reporté dans la figure 13. Le domaine de calcul est tel que $-10D \leq x \leq 55D$, $-10D \leq y \leq 10D$, et $0 \leq z \leq 4D$ avec x , y et z désignant les directions horizontale, verticale et transversale respectivement, l'axe du cylindre étant situé en $x = y = 0$.

Pour les simulations réalisées sur ce cas test, le paramètre contrôlant la viscosité numérique γ est fixé à la valeur minimale 0.3 assurant la stabilité numérique. Les reprises sont effectuées avec le même pas de temps de manière à obtenir environ 500 pas de temps par cycle de détachement tourbillonnaire. Les statistiques sont calculées pour toutes les simulations en moyennant de façon homogène dans la direction de l'axe du cylindre et en temps sur une trentaine de cycles de détachement tourbillonnaire.

Le tableau 2 présente les valeurs des bulk coefficients obtenues avec nos simulations numériques ainsi que celles d'autres auteurs et les valeurs expérimentales.

Parmi les quelques résultats expérimentaux disponibles, nous avons reporté ceux de Shih et al.(1993) [28], Schewe(1983) [27], Guven et al.(2006) [14], Goelling(2006) [12] et Zdravko-

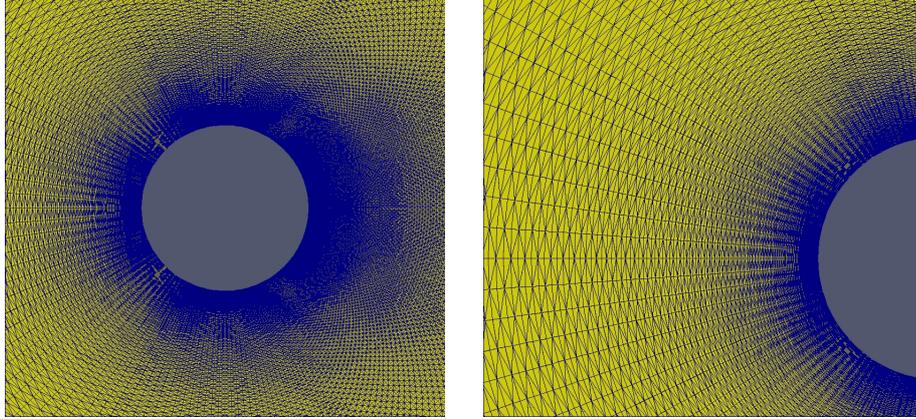


FIG. 13 – Domaine de calcul : section verticale du maillage avec zoom.

TAB. 2 – Bulk coefficients de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à Reynolds 10^6 où $\overline{C_d}$ désigne le coefficient moyen de traînée, C'_i est la moyenne quadratique des fluctuations du coefficient de portance et enfin $\overline{C_{pb}}$ représente le coefficient de pression à la base du cylindre.

| Present simulations | Mesh size | $\overline{C_d}$ | C'_i | $C_{p_{base}}$ |
|---|-----------|------------------|--------|----------------|
| Hybrid RANS/VMS-LES WALE dyn | 2.85M | 0.27 | 0.08 | 0.21 |
| Hybrid RANS/VMS-LES WALE non dyn | 2.85M | 0.28 | 0.09 | 0.21 |
| Simulations | | | | |
| RANS of Catalano et al. [9] | 2.3M | 0.39 | | 0.33 |
| LES of Catalano et al. [9] | 2.3M | 0.31 | | 0.32 |
| LES of Ono and Tamura [23] | 4.5M | 0.27 | 0.13 | |
| LES of Kim and Mohan [16] | 6.8M | 0.27 | 0.12 | 0.28 |
| Experiments | | | | |
| Shih et al. [28] | | 0.24 | | 0.33 |
| Schewe [27] | | 0.22 | | |
| Szechenyi [33] | | 0.25 | | 0.32 |
| Güven et al. [14] | | 0.22 | | |
| Goelling [12] | | | | |
| Zdravkovich [36] | | 0.2-0.4 | .1-.15 | .2-.34 |

vich(1997) [36]. Nous avons seulement trouvé trois calculs avec l'approche LES, par Kim et Mohan(2005) [16], Catalano et al.(2003) [9], Ono et Tamura(2008) [23], et nous avons ajouté un résultat RANS de Catalano et al.(2003) [9].

Les simulations LES des références précédentes ont été obtenues sur des grilles de 2.3×10^6 noeuds (Catalano et al.(2003) [9]), 4.5×10^6 noeuds (Ono et Tamura(2008) [23]) et 6.8×10^6

noeuds (Kim and Mohan [16]). On peut voir que les simulations LES ont besoin d'un nombre plutôt important de noeuds, puisqu'avec moins de 4 millions de noeuds, le coefficient de drag moyen est surestimé.

Avec notre grille encore assez grossière à 2.85 millions de noeuds, on peut cependant observer une bonne prédiction de l'écoulement avec notre modèle hybride qui rejoint les résultats expérimentaux de Zdravkovich(1997) [36] et ceux LES de Ono et Tamura(2008) [23] sur des maillages plus fins, en particulier le coefficient de drag moyen et la pression d'arrière corps moyenne. Les fluctuations en temps de la portance sont quelque peu sous-estimés dans nos calculs, ce qui peut s'expliquer par l'utilisation d'un maillage pas très raffiné autour du corps. Néanmoins, on peut voir sur la figure 14 représentant le champ instantané de vorticité, qu'un niveau de fluctuation raisonnable est capturé. Il est à remarquer que la procédure dynamique quand elle est utilisée au sein de notre approche hybride n'améliore pas les résultats sur ce cas test.

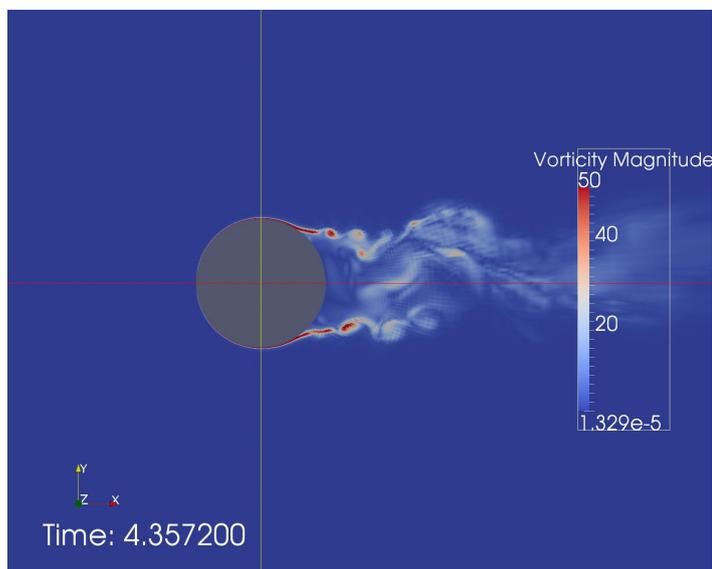


FIG. 14 – Champ instantané de vorticité

Pour des raisons de comparaison avec les résultats expérimentaux disponibles pour le C_p moyen, on a recalculé le même écoulement avec notre modèle hybride (dynamique et non dynamique donnent sensiblement les mêmes résultats) pour des nombres de Reynolds de 6.7×10^5 et 1.25×10^6 (voir figure 15). Les grilles utilisées contiennent moins de points pour limiter les coûts de calcul. L'agrément global est bon. Pour le cas du Reynolds 6.7×10^5 , il y a une légère sous-estimation de la pression d'arrière corps.

De plus, dans la figure 15, la courbe expérimentale présente un petit décalage des valeurs autour de $\theta = 110^\circ$ qui indique la présence d'une recirculation secondaire non capturée dans nos simulations. Enfin, pour Reynolds 1.25×10^6 , la pression d'arrière corps est parfaitement prédite, avec cependant un décollement qui a lieu un peu tôt dans nos simulations.

Remarquons enfin que le temps CPU de ce cas test sur 128 coeurs de la machine Jade du CINES était globalement de $7 \times 24 = 168$ heures, soit l'équivalent de 896 jours de calculs sur

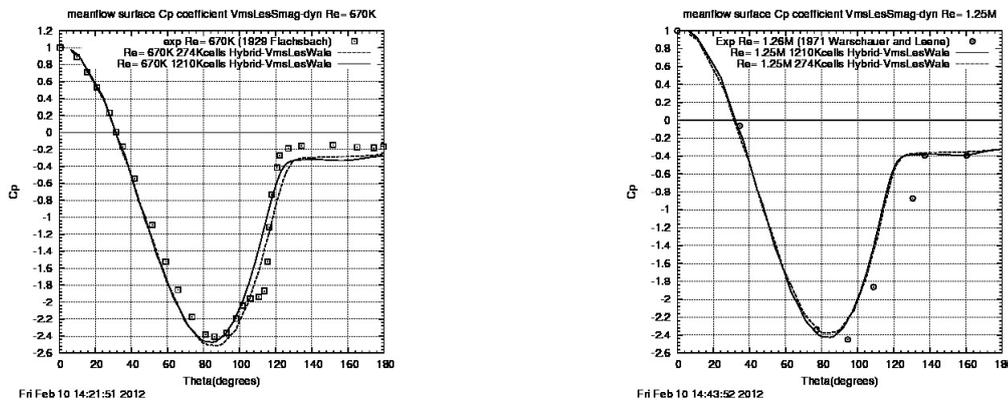


FIG. 15 – Distribution du coefficient moyen de pression en fonction de l'angle θ . Comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques obtenus sur deux maillages.

un processeur mono-coeur.

4 Cylindres en tandem

4.1 Contexte industriel

Un écoulement uniforme, autour de deux obstacles, ne peut pas être assimilé, pour chacun d'entre eux, à un écoulement autour d'un seul obstacle lorsqu'ils sont suffisamment proches. En effet, les paramètres aérodynamiques tels que la portance, le lâcher de tourbillons, la traînée... sont affectés en raison de l'interaction non-linéaire d'échappements tourbillonnaires et de sillages entre les deux obstacles, et cette influence est dépendante de l'espacement entre ceux-ci. La simulation d'écoulements autour de telles géométries constitue un axe d'étude très utile pour de nombreux domaines industriels tels que les installations pétrolières off-shore, les industries nucléaires, le génie civil, l'aéronautique...

Afin de simplifier l'étude de ce phénomène, les obstacles sont souvent modélisés par des géométries simples comme des cylindres circulaires. Les résultats qui sont présentés dans cette partie concernent des cylindres circulaires en tandem.

4.2 Expériences de la NASA sur les cylindres en tandem

Des expériences ont été menées dans le "Basic Aerodynamic Research Tunnel" (BART), au centre de recherche de Langley, pour étudier le comportement de l'écoulement instationnaire généré par les composantes du train d'atterrissage d'un avion. Les résultats sont reportés dans l'article de L. N Jenkins et al. de 2005, intitulé "Characterization of unsteady flow structures around tandem cylinders for component interaction studies in airframe noise" [15].

Cette étude fait partie du projet "Quiet Aircraft Technology" (QAT) de la NASA qui vise à mieux comprendre le processus de génération du bruit et cherche à développer des techniques pour le réduire. Des progrès sont déjà apparus dans la compréhension des mécanismes à l'origine du bruit d'un avion, généré au niveau des bords de bord d'attaque et des volets d'atterrissage. Cependant, comprendre comment le bruit est généré par un train d'atterrissage et le réduire reste difficile de par la complexité de sa configuration et le grand

nombre de composants qui le constitue. Dans ces expériences, cette structure est simplifiée et modélisée par deux cylindres en tandem.

4.2.1 Conditions des expériences

Le tunnel BART dans lequel s'effectuent les simulations est subsonique et placé sous conditions atmosphériques. Il mesure 0.711 mètres de hauteur, 1.016 mètres de largeur et possède une longueur de 3.048 mètres. Les tests ont été réalisés avec un écoulement libre de vitesse 56m/s , ce qui correspond à un nombre de Reynolds de 1.66×10^5 , calculé à partir du même diamètre D des cylindres. La distance de séparation entre les deux cylindres est notée L et varie au cours des expériences (le cylindre arrière peut être translaté d'amont en aval). L'angle θ que l'on aperçoit sur le schéma de la figure 16, est mesuré à partir du point de stagnation et il est positif dans le sens horaire.

Afin que les résultats expérimentaux puissent s'appliquer à des valeurs quelconques de diamètres de cylindres et de distances de séparation entre eux, on s'intéresse au ratio L/D et les différents comportements de l'écoulement sont décrits pour les deux rapports $L/D = 1.435$ et $L/D = 3.70$.

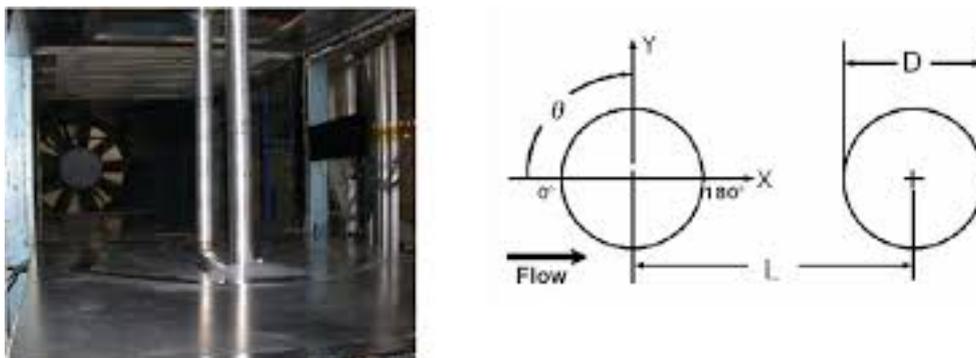


FIG. 16 – Arrangement des cylindres en tandem dans BART et schéma le modélisant

Durant ces expériences, le champ de vitesse du fluide est déterminé grâce à une technique de vélocimétrie par image de particule digitale 2D et un anémomètre à fil chaud est utilisé pour mesurer la fréquence de détachement des tourbillons.

4.2.2 Résultats expérimentaux

Comportement du fluide pour $L/D = 1.435$ Dans ce régime de faible espacement, l'écoulement possède un comportement asymétrique par rapport à la ligne centrale longitudinale reliant les deux cylindres. En effet, les couches de cisaillement du cylindre amont englobent le cylindre aval et une zone de recirculation se crée entre les cylindres. Une allée tourbillonnaire se forme en arrière du cylindre aval, due aux couches de cisaillements du premier obstacle. Cela correspond à une interférence de sillage et on retrouve ce comportement en visualisant les lignes de courant de l'écoulement qui apparaissent sur la figure 17.

La configuration du sillage est ainsi similaire à celui d'un cylindre seul, excepté que le sillage est plus étroit et que la séparation de l'écoulement a lieu plus loin en arrière du

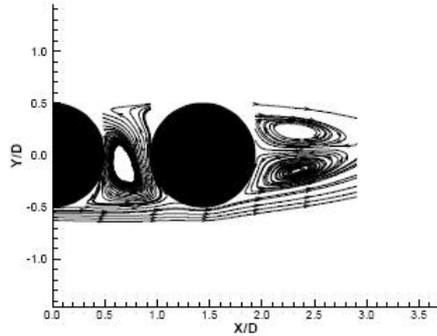


FIG. 17 – Lignes de courant pour $L/D = 1.435$

cylindre aval. Les deux cylindres se comportent de la même façon qu’une seule géométrie de forme allongée avec des lâchers de tourbillons en arrière du cylindre aval seulement. Ceci correspond à une augmentation de l’énergie cinétique (figure 18) dans le sillage du dernier obstacle.

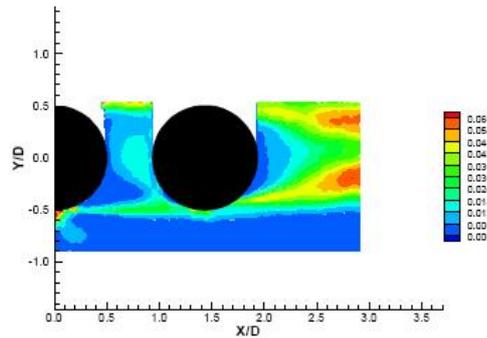


FIG. 18 – Énergie cinétique turbulente pour $L/D = 1.435$

Comportement du fluide pour $L/D = 3.70$ Dans ce régime d’espacement critique, le comportement de l’écoulement entre les cylindres est semblable à celui que l’on observe à l’arrière d’un cylindre seul, à l’exception de la région très proche de l’avant du cylindre aval. Les lignes de courant (19) montrent la formation d’une zone de recirculation entre les cylindres qui est 2.5 fois plus étroite que celle formée à cette même distance pour le cas $L/D = 1.435$.

Entre les cylindres, l’énergie cinétique turbulente (figure 20) est élevée au niveau de la fermeture de la zone de recirculation et cette énergie diminue à proximité de la face avant du cylindre aval.

Enfin, à l’arrière du cylindre aval, une autre zone de recirculation se forme associée à la formation de tourbillons. De plus, on observe que l’énergie cinétique turbulente est la plus élevée à moins d’un diamètre de l’obstacle et qu’elle est 5.5 fois plus élevée que celle mesurée pour cette même distance avec comme espacement entre les cylindres $L/D = 1.435$.

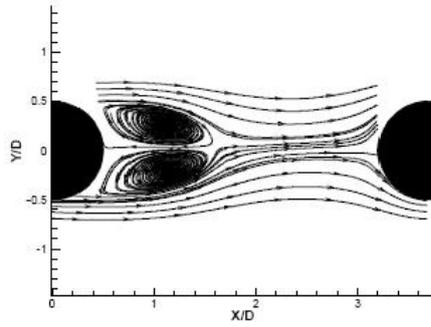


FIG. 19 – Lignes de courant entre les cylindres, pour $L/D = 3.7$

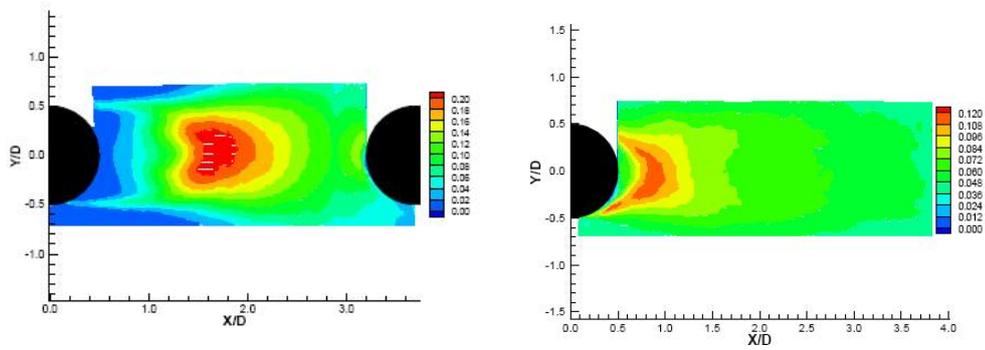


FIG. 20 – Énergie cinétique turbulente entre les cylindres et à l'arrière du cylindre aval, pour $L/D = 3.7$

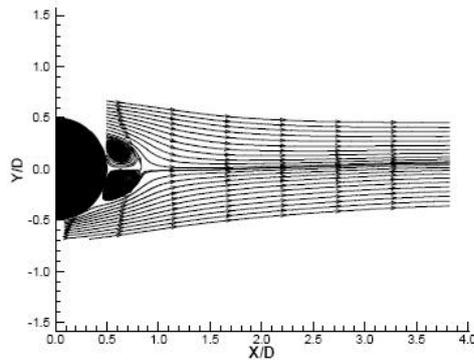


FIG. 21 – Lignes de courant à l'arrière du cylindre aval, pour $L/D = 3.7$

4.3 Premier workshop sur les problèmes de "bruit de cellule" d'un avion simulé sur bancs d'essais

4.3.1 Objectifs du workshop

Le premier workshop sur les problèmes de "bruit de cellule" d'un avion simulé sur bancs d'essais (BANC-I) a eu lieu à Stockholm en Suède, le 10 – 11 Juin, 2010. Il a été organisé

par le groupe "Discussion Group on Benchmark Experiments and Computations for Airframe Noise" (BECAN) et cosponsorisé par le comité "Aeroacoustics and Fluid Dynamics Technical Committees"). Les objectifs de ce workshop, auquel ont participé plus de quatre-vingt-cinq chercheurs venant de quatorze pays différents, étaient multiples :

- Servir de plate-forme commune pour une évaluation approfondie des outils de simulation pour la prédiction du bruit d'une cellule d'avion, incluant à la fois le champ proche de l'écoulement instable et les radiations acoustiques générées par l'interaction de cet écoulement avec les surfaces solides.
- Identifier les lacunes actuelles en termes de compréhension physique de ces problèmes, des bases de données expérimentales et de la capacité de prédiction des principales sources de bruit de la cellule d'un avion.
- Aider à déterminer les meilleures pratiques et accélérer le développement d'un ensemble de données de référence de qualité.
- Promouvoir de futures études coordonnées se basant sur des configurations communes

Quatre catégories de problèmes ont été traités pendant le BANC-I :

- Bruit de bord de fuite d'un profil,
- Cylindres en tandem,
- Train d'atterrissage rudimentaire
- Bruit de la cavité interne d'un train d'atterrissage

4.3.2 Problème des cylindres en tandem

L'article intitulé "Summary of the Tandem Cylinder Solutions from the Benchmark for Airframe Noise Computations-I Workshop" de David P. Lockard, paru en 2011 [19], donne un résumé des résultats des simulations numériques d'écoulements autour de cylindres en tandem qui ont été présentés durant ce workshop. Ce problème consiste en la simulation d'un écoulement autour de deux cylindres en tandem qui respectent la même configuration que celle utilisée au cours des expériences de la NASA (Figure 16). Le diamètre D des cylindres est d'environ 0.05715 mètres et la distance de séparation L entre eux s'étend de $3D$ à $18D$. Les simulations concernent différents maillages, approches numériques et modèles de turbulences. La valeur du coefficient moyen de traînée de chaque cylindre obtenu dans certaines de ces simulations (celles dont la valeur de $\overline{C_d}$ s'approche le plus de la valeur expérimentale) est comparée avec nos résultats dans la partie qui suit.

4.4 Simulations numériques de l'écoulement autour de cylindres en tandem

Cette section présente les résultats que l'on a obtenus pour les simulations de l'écoulement autour des cylindres en tandem. Ces simulations ont pour objectif d'évaluer sur ce cas test l'approche hybride RANS/VMS-LES avec les modèles de sous-maille WALE et Smagorinsky dans leur version dynamique. Ce cas test est particulièrement difficile puisque pour obtenir une bonne prédiction de l'écoulement autour du deuxième cylindre, on doit à la fois prédire correctement l'écoulement autour du premier cylindre ainsi que le sillage turbulent entre les deux cylindres. Cela implique de pouvoir disposer d'une grille suffisamment fine entre les deux

cylindres, ainsi que de modèles numériques et de turbulence qui ne soient pas trop dissipatifs.

Le maillage que l'on peut visualiser sur la figure 22 est formé d'environ 2.59 millions de noeuds et de 15 millions d'éléments. Le domaine de calcul est tel que $-10 \leq x/D \leq 50$, $-10 \leq y/D \leq 20$, et $-2 \leq z/D \leq 2$ avec x , y et z désignant les directions horizontale, verticale et transversale respectivement, l'axe du premier cylindre étant situé en $x = y = 0$, et l'espacement entre les deux cylindres étant $L/D = 3.7$. On considère un nombre de Reynolds calculé sur la base du diamètre du cylindre D et de la vitesse de l'écoulement libre, égal à 166000 et le nombre de Mach est fixé à 0.1.

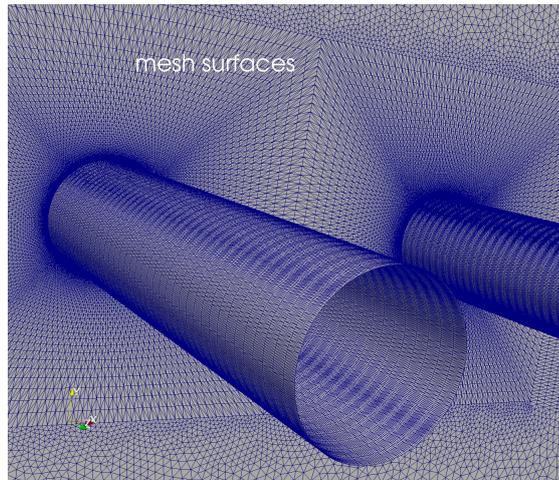


FIG. 22 – Maillage à 2.59 millions de noeuds : 142 noeuds en θ et 45 noeuds en z

La figure 23 donne la distribution du coefficient de pression en fonction de l'angle θ pour les deux cylindres pour l'approche RANS ($k - \varepsilon$ bas Reynolds de Goldberg [13]) et l'approche hybride VMS-LES WALE dynamique. On remarque, que pour les deux cylindres la valeur du coefficient $\overline{C_{pb}}$ prédite par le modèle hybride RANS/VMS-LES est en bon accord avec les valeurs expérimentales calculées dans l'expérience de BART, ce qui n'est pas le cas du modèle RANS pour le premier cylindre. Notons cependant la présence de dissymétries pour le modèle hybride au niveau du deuxième cylindre. Ceci peut être dû au fait que les macro-cellules générées dans l'approche VMS afin de séparer les échelles résolues, ne sont pas symétriques et que les effets de cette non symétrie sont amplifiés pour le deuxième cylindre, avec des statistiques réalisées sans doute sur un temps pas assez long. On a vérifié que cette dissymétrie est bien atténuée lorsqu'on utilise un modèle LES au lieu du modèle VMS-LES dans notre approche hybride (voir figure 24).

Pour le premier cylindre, l'approche hybride donne des résultats globalement plus en accord avec les valeurs expérimentales que l'approche RANS qui surestime le coefficient de pression moyen. On peut cependant noter que le coefficient de pression moyen est mieux prédit par le modèle RANS dans la zone de stagnation du deuxième cylindre.

Enfin, le tableau 3 donne la valeur du coefficient moyen de traînée $\overline{C_d}$ pour nos deux

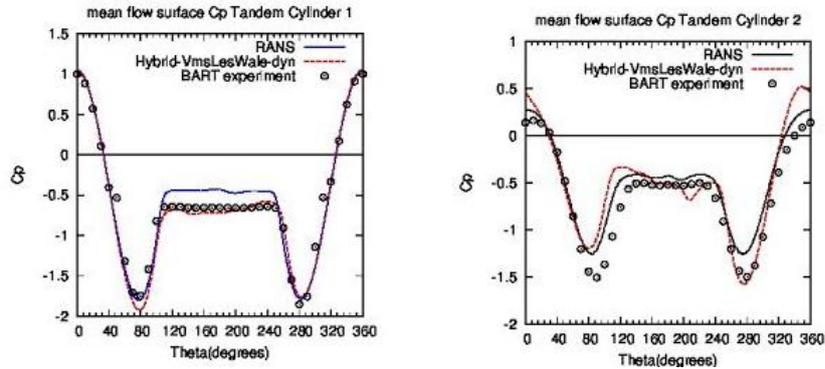


FIG. 23 – Distribution du coefficient moyen de pression en fonction de l'angle θ sur les deux cylindres pour l'approche hybride VMS-LES WALE dynamique

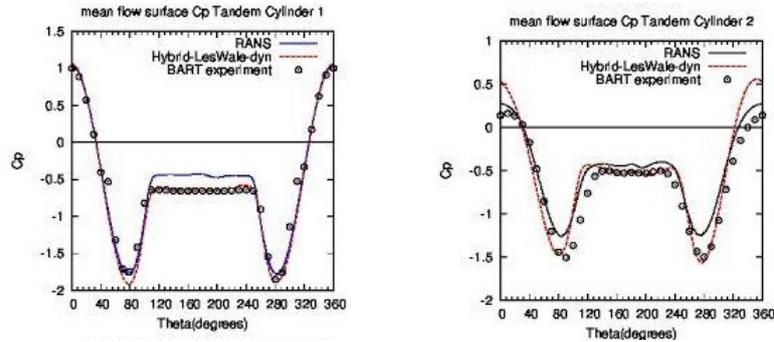


FIG. 24 – Distribution du coefficient moyen de pression en fonction de l'angle θ sur les deux cylindres pour l'approche hybride LES WALE dynamique

calculs hybrides ainsi que ceux résumés par Lockard concernant le workshop sur les cylindres en tandem (2011) [19]. Pour l'ensemble des simulations, nos résultats sont en bon accord avec les valeurs expérimentales, même s'ils sont un peu moins précis autour du cylindre aval pour le modèle hybride équipé de VMS-LES WALE dynamique.

Il est à noter que ces résultats sont plus précis que ceux du workshop répertoriés par Lockard bien que les maillages utilisés puissent être bien plus importants (jusqu'à 133 millions de noeuds).

Dans la figure 25, nous montrons le champ instantané de la norme de la vorticité pour le modèle RANS et celui hybride VMS-LES WALE dynamique. Nous pouvons observer que le modèle RANS a une forte tendance à amortir les fluctuations de l'écoulement, alors que le modèle hybride permet de capturer un niveau significatif de fluctuations.

Remarquons enfin que le temps CPU de ce cas test des cylindres en tandem, sur 128 coeurs de la machine Jade du CINES était globalement de $6 \times 24 = 144$ heures, soit l'équivalent de 7686 jours de calculs sur un processeur mono-coeur.

TAB. 3 – Bulk coefficients de l'écoulement autour de cylindres en tandem où $\overline{C_d}$ désigne le coefficient moyen de traînée

| | Mesh size | $\overline{C_d}$ Cyl. 1 | $\overline{C_d}$ Cyl. 2 |
|----------------------------------|-----------|-------------------------|-------------------------|
| Hybrid VMS WALE dyn. | 2.59M | 0.64 | 0.38 |
| Hybrid VMS-LES Smago dyn. | 2.59M | 0.61 | 0.32 |
| Numerical results | | | |
| Lockard (2011) workshop | 2M-133M | 0.33-0.80 | 0.29-0.52 |
| DES Aybay (2010) | 6.7M | 0.64 | 0.44 |
| HRLES Vatsa (2010) | 8.7M | 0.64 | 0.45 |
| Experiments | | | |
| Neuhart et al. (2009) | | 0.64 | 0.31 |

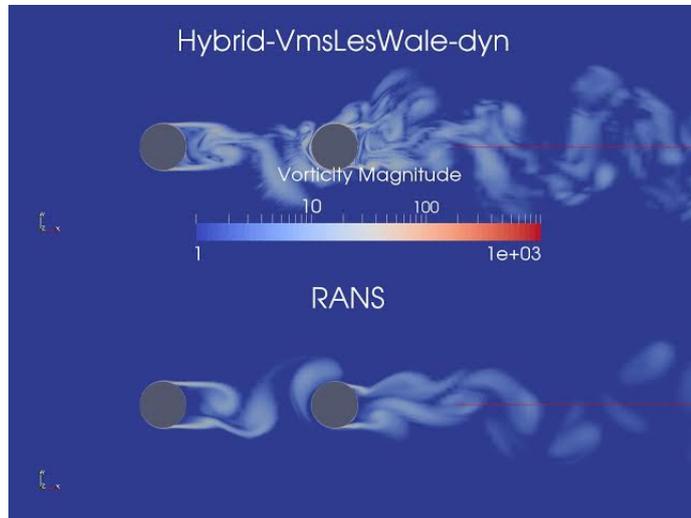


FIG. 25 – Visualisation de la norme de la vorticité pour l'approche RANS et l'approche hybride RANS/VMS-LES WALE dynamique

Remerciements

Nous remercions le CINES pour les ressources HPC (Grant 2014-c20142a5067 et Grant 2014-x20142a6386) qui ont permis de réaliser les simulations présentées dans ce document.

Ce rapport est une livraison du projet MAIDESC n^o ANR-13-MONU-0010 de l'Association Nationale de la Recherche.

Références

- [1] B. Koobus and C. Farhat, A Variational Multiscale Method for the Large Eddy Simulation of Compressible Turbulent Flows on Unstructured Meshes - Application to Vortex Shedding, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 1367-1383, 2004.
- [2] C. Farhat, A. Rajasekharan, B. Koobus. A dynamic variational multiscale method for large eddy simulations on unstructured meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195, 1667-1691, 2006.
- [3] C. Moussaed, M.V. Salvetti, S. Wornom, B. Koobus and A. Dervieux, Simulation of the flow past a circular cylinder in the supercritical regime by blending RANS and variational-multiscale LES models, *Journal of Fluids and Structures*, Volume 47, May 2014, pages 114-123.
- [4] S. Camarri, B. Koobus, M.V. Salvetti, A. Dervieux, A low-diffusion MUSCL scheme for LES on unstructured grids, *Computers & Fluids*, 33 :1101-1129, 2004.
- [5] L.M. Lourenco and C. Shih. Characteristics of the plane turbulent near wake of a circular cylinder. a particle image velocimetry study, (data taken from Kravchenko and Moin). *Exp. Fluids*, 20 :441-453, 1996.
- [6] L. Ong and J. Wallace. The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder. *Exp. Fluids*, 20 :441-453, 1996.
- [7] P. Parnaudeau, J. Carlier, D.Heitz and E. Lamballais. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 3900. *Phys. Fluids*, 20(085101), 2008.
- [8] A.G. Kravchenko and P. Moin. Numerical studies of flow over a circular cylinder at $re=3900$. *Phys. Fluids*, 12(2) :403-417, 1999.
- [9] P. Catalano, M. Wang, G. Iaccarino and P. Moin. Numerical simulation of the flow around a circular cylinder at High Reynolds numbers. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 24 :463-469, 2003.
- [10] J. Fröhlich and D. von Terzi. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Prog. Aerosp. Sci.*, 44(5) :349-377, 2008.
- [11] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin and W.H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys. Fluids*, 3, 1760, 1991.
- [12] B. Gölling. Experimental Investigations of Separating Boundary-Layer Flow from Circular Cylinder at Reynolds Numbers from 10^5 up to 10^7 ; three-dimensional vortex flow of a circular cylinder. In G.E.A. Meier and K.R. Sreenivasan, editors, *Proceedings of IU-TAM Symposium on One Hundred Years of Boundary Layer Research*, pages 455-462, The Netherlands, 2006. Springer.
- [13] U. Goldberg and D. Ota. A $k - \varepsilon$ Near-Wall Formulation for Separated Flows. *AIAA 22nd Fluid Dynamics, Plasma Dynamics, Lasers Conference*, 91-1482, June 1990.
- [14] O. Guven, C. Farell, and V.C. Patel. Surface-roughness effects on the mean flow past circular cylinders. *J. Fluid Mech.*, 98(4) :673-701, 1980.
- [15] Luther N. Jenkins, Medhi R. Khorrami, Meelan M. Choudhari, and Catherine B. McGinley. *Fluids. Exp.* NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 2005.
- [16] S.-E. Kim and L.S. Mohan. Prediction of unsteady loading on a circular cylinder in high Reynolds number flows using large eddy simulation. *Proceedings of OMAE 2005 : 24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engin*

- [17] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk.*, URSS, 30 :299-303, 1941.
- [18] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 3 :269-289, 1979.
- [19] David P.Lockard, *NASA Langley Research Center, Hampton, VA 23681*, 2011.
- [20] R. Martin and H. Guillard. A second-order defect correction scheme for unsteady problems. *Comput. and Fluids*, 25(1) :9-27, 1996.
- [21] C. Moussaed Modèles variationnels dynamique et hybride pour la simulation numérique d'écoulements turbulents. *Thèse de doctorat, Université Montpellier 2*, 2013.
- [22] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow Turb. Comb.*, 62(3) :183-200, 1999.
- [23] Y. Ono and T. Tamura. LES of flows around a circular cylinder in the critical Reynolds number region. In *Proceedings of BBAA VI International Colloquium on : Bluff Bodies Aerodynamics and Applications*, Milano, Italy, July 20-24 2008.
- [24] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameters, vectors and difference schemes, *J. Comp. Phys.*, 43, 357-372, 1981.
- [25] B. Sainte-Rose, O. Allain, C. Leca, A. Dervieux, Draft : A study of LES models dor the simulation of a turbulent flow around supercritical tandem cylinders, *OMAE 2014-24031*
- [26] P. Sagaut, S. Deck and M. Terracol. Multiscale and multiresolution approaches in turbulence. Imperial college Press, London, 2006.
- [27] G. Schewe. On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from subcritical up to transcritical Reynolds numbers. *J. of Fluid Mechanics*, 133 :265-285, 1983.
- [28] W.C. L. Shih and C. Wang and D. Coles and A. Roshko. Experiments on Flow past rough circular cylinders at large Reynolds numbers. *J. Wind Engg. and Industrial Aerodynamics*, 49 :351-368, 1993.
- [29] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, *Monthly Weather Review*, 91(3), 99-164, 1963.
- [30] C. G. Speziale. Computing non-equilibrium flows with time-dependent RANS and VLES. *15th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics (ICNMF, Monterey)*, 1996.
- [31] C. G. Speziale. Turbulence modeling for time-dependent RANS and VLES : a review. *AIAA J.* 36, 2, 173-184, 1998.
- [32] J.L. Steger and R.F. Warming. Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic equations with applications to the finite difference methods. *J. Comp. Phys.*, 40(2), 263-293, 1981.
- [33] E. Szechenyi. Supercritical reynolds number simulation for two-dimensional flow over circular cylinders. *J. Fluid Mech.*, 70 :529-542, 1975.
- [34] P. van Leer. Towards the ultimate conservative scheme. IV : A new approach to numerical convection, *J. Comp. Phys.*, 23, 276-299, 1977.
- [35] Terzi,D.A., Fröhlich,J., Rodi,W., Hybrid Techniques for Large-Eddy Simulations of Complex Turbulent Flows *High Performance Computing in Science and Engineering*, 2008
- [36] M.M. Zdravkovich. *Flow around circular cylinders Vol 1 : Fundamentals. Oxford University Press*, 1997.