

MÉTHODES MULTIGRILLES ADAPTATIVES

G. Brèthes(*)

(*)INRIA - projet Ecuador Sophia-Antipolis, France

(*) Lemma Engineering, France

Gautier.Brethes@inria.fr

November 20, 2013

The logo for Inria, featuring the word "Inria" in a stylized, cursive red font.

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f}$$

On veut combiner deux idées:
les **méthodes multigrilles** et l'**adaptation de maillage**

Table des matières:

I. Méthodes multigrilles

II. Adaptation basée Hessien

III. Algorithme Full-multigrid adaptatif anisotrope

IV. Cas tests

Historique

Cela date des années soixante (Bakhvalov, Fedorenko).

Théorie bien établie (Hackbusch, 1985)

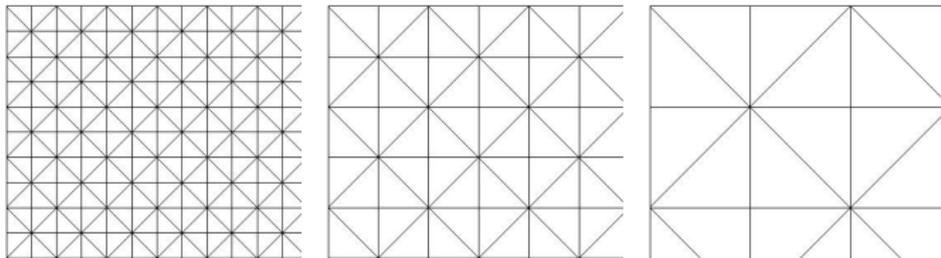
Méthode Full-Multigrid (FMG):

Vite identifiée comme un des premiers algorithmes à solution $O(N)$.

I. Methodes multigrilles

Theory

MG est itératif.



2G:

Après avoir approximé la solution avec un lisseur S (par exemple, Jacobi : $S = \text{diag}(A)^{-1}(\text{diag}(A) - A)$) sur la grille considérée, on transfère, avec une **restriction** R , le résidu sur un maillage plus grossier et on y calcule une correction que l'on retransfère ensuite sur le maillage fin avec une **prolongation** P et que l'on ajoute à l'itéré de la grille fine. Extension au **MG** par récursion.

I. Méthode Multigrille

Propriétés des multigrilles

MG a besoin de deux conditions:

- **propriété de lissage:**

Il existe une constante C_S et une fonction $\eta(\nu)$ indépendants de la taille de maille h (du maillage le plus fin) tels que

$$\|AS^\nu\| \leq C_S h^{-2m} \eta(\nu) \text{ et } \eta(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} 0$$

avec $2m = \text{ordre de l'EDP}$

- **propriété d'approximation:**

Il existe une constante C_A indépendante de h telle que

$$\|A^{-1} - P\bar{A}^{-1}R\| \leq C_A h^{2m} \text{ avec } P \text{ et } R \text{ les opérateurs de transfert.}$$

Alors $\|u_h^{k_{\text{cycle}}} - u_h\| < \rho^{k_{\text{cycle}}}$, ρ indépendant de la taille de maille.

Echec des MG

MG suppose une équation et une solution très lisses.

De plus, les singularités ralentissent la convergence.

Solution possible: utilisation des MG comme préconditionneur d'une méthode quasi-Newton (GMRES).

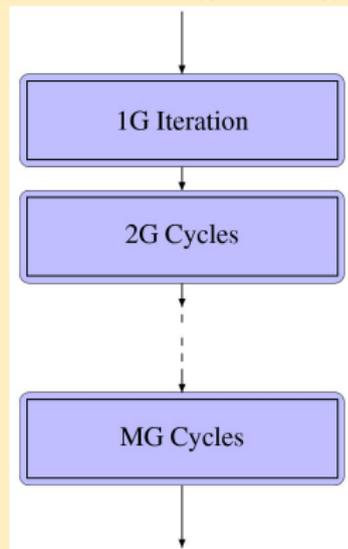
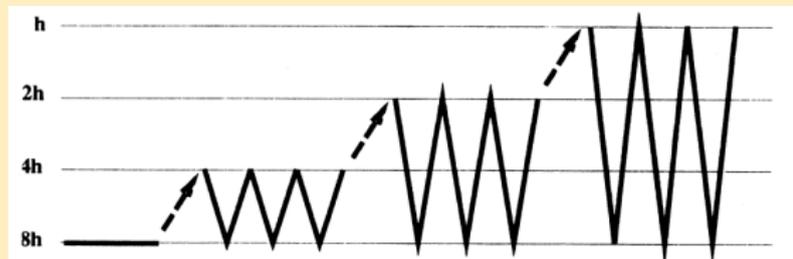
I. Méthodes multigrilles

Full-multigrid method

L'algorithme FMG applique successivement les MG à une séquence de maillages. On commence sur un maillage grossier, puis on transfère la solution calculée sur un maillage plus fin, etc...

On arrête les cycles multigrilles quand l'erreur algorithmique

$\|u_h^{k_{cycle}} - u\|$ est inférieure à l'erreur d'approximation $\|u_h - u\|$.



I. Méthodes multigrilles

Full-multigrid method

FMG a besoin des propriétés de lissage et d'approximation ainsi que d'une **propriété de convergence**:

$\forall i_{phase} > 0, \|u^{i_{phase}+1} - Pu^{i_{phase}}\| \leq C_1(h_{i_{phase}+1})^\alpha$, α l'ordre de précision.

Alors $\|u_h^{k_{cycle}} - u\| < (1 + \epsilon)\|u - u_h\|$, k_{cycle} indépendant de h (*)
Et alors, l'algorithme FMG a une complexité de $O(N)$, avec N le nombre de sommets de la grille la plus fine.

Echec de la FMG

La propriété de convergence n'est pas toujours vraie, donc la convergence itérative (*) doit être contrôlée.

-Travaux sur les estimateurs a priori (Arioli, 2004): $\|u_h - u\| \leq Kh^2$.

-Autre idée : utilisation d'estimateurs a posteriori.

La propriété de convergence n'est pas vérifiée pour les maillages grossiers.

Solution possible: l'adaptation de maillages.

I. Méthodes multigrilles

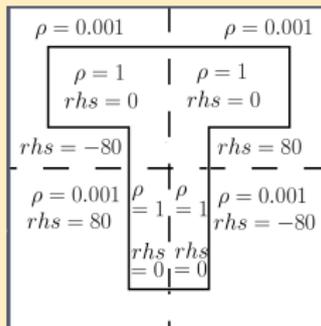
Expérience avec FMG: cas test de Tatebe

Sur chaque phase, on résout l'équation sur le maillage le plus fin d'une phase en utilisant la méthode GMRES Les multigrilles sont utilisées comme préconditionneur du GMRES (Tatebe, 1993).

Le lissage est fait avec dix balayages de Jacobi (seulement pour passer du fin au grossier) Les transferts entre maillages sont faits par interpolation (pour un transfert d'un maillage grossier vers un maillage fin) et accumulation (pour un transfert d'un fin vers un maillage grossier)

Cas de Tatebe:

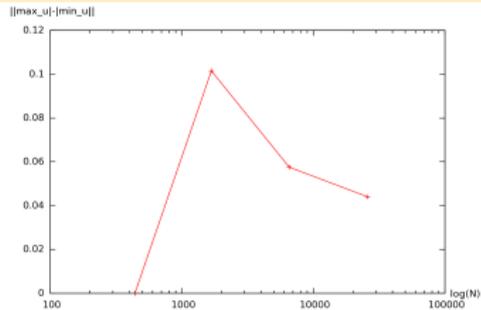
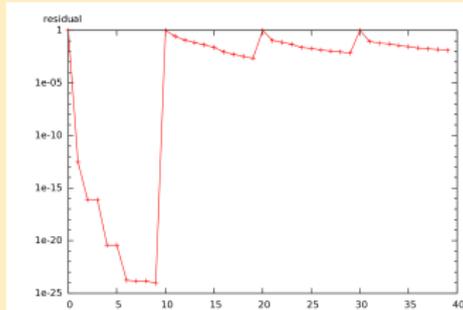
$$-\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\nabla u\right) = rhs$$



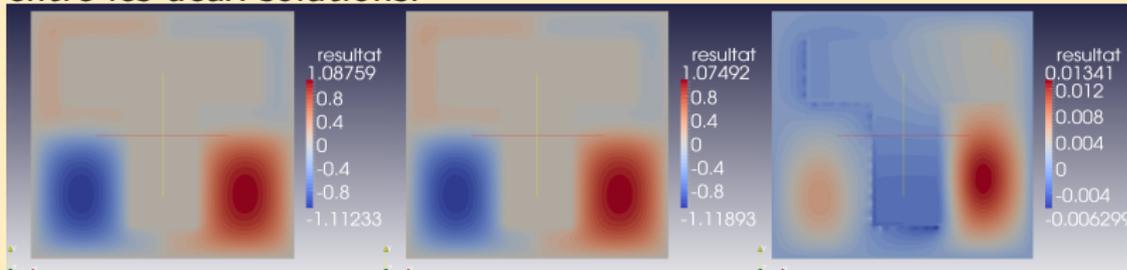
I. Méthodes multigrilles

Résultats

10 cycles par phase



Solution convergée, solution pour 10 cycles par phase et différence entre les deux solutions.



$|\min(u)| \approx 1.1$. L'approximation est fautive de 1.1% et la différence entre le cas FMG et le cas convergé est du même ordre.

II. Adaptation basée Hessien

Maillage continu

Metrique \mathcal{M} : $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ une matrice $\forall \mathbf{x} \in \Omega$.

Nombre de sommets: $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathcal{M}(\mathbf{x}))} \, d\mathbf{x}$

Définition d'une distance riemannienne entre deux points:

$$\text{dist}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{length}_{\mathcal{M}}(\mathbf{ab}) = \int_0^1 \sqrt{{}^t \mathbf{ab} \mathcal{M}(\mathbf{a} + \theta \mathbf{ab}) \mathbf{ab}} \, d\theta$$

$\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ = **maillage unité pour** $\mathcal{M} \Leftrightarrow \forall$ l'arête $\mathbf{e} \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$,
 $\text{length}_{\mathcal{M}}(\mathbf{e}) \approx 1$

II. Adaptation basée Hessien

Construction de la métrique

Une approximation u_h de u , calculée sur un maillage donné. H_{u_h} le Hessien.

$h_i(\mathbf{x}) = (\lambda_i(\mathbf{x}))^{-1/2}$, avec $(\lambda_i(\mathbf{x}))_{i=1, \dim}$ les valeurs propres de $H_{u_h}(\mathbf{x})$.

$(\mathbf{v}_i(\mathbf{x}))_{i=1, \dim}$ les vecteurs propres de $H_{u_h}(\mathbf{x})$.

Minimisation de l'erreur:

$$\epsilon_{\mathcal{M}} = \|u - \Pi_h u\| \approx \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N h_i(\mathbf{x})^2(\mathbf{x}) |\mathbf{v}_i(\mathbf{x})^t H_{u_h}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$$

sous la contrainte: $N = \int_{\Omega} \sqrt{\det(\mathcal{M}_{L^1}(\mathbf{x}))} \, d\mathbf{x}$.

Le **champ de métrique optimal** $\mathcal{M}_{L^1}(\mathbf{x})$ est donné par:

$$\mathcal{M}_{L^1}(\mathbf{x}) = \mathcal{D}_{L^p} \det(|H_{u_h}(\mathbf{x})|)^{-\frac{1}{5}} |H_{u_h}(\mathbf{x})|$$

où $\mathcal{D}_{L^1} = N^{\frac{2}{3}} \left(\int_{\Omega} \det(|H_{u_h}(\mathbf{x})|)^{\frac{2}{5}} \, d\mathbf{x} \right)^{-\frac{2}{3}}$.

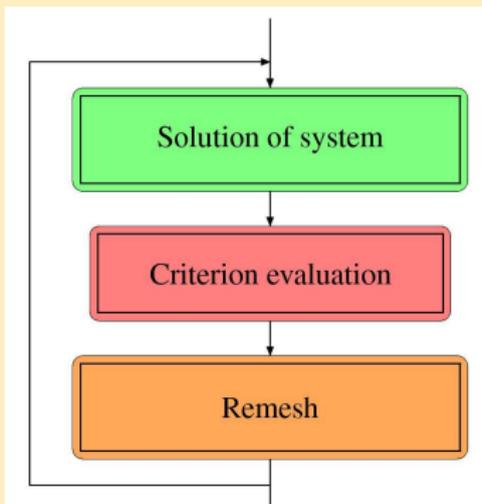
Création d'un *maillage unité* pour cette métrique.

II. Adaptation basée Hessien

Boucle point fixe d'adaptation de maillage

On applique l'adaptation basée Hessien jusqu'à ce qu'on trouve le maillage qui est le meilleur pour la résolution de cette équation, le maillage optimal:

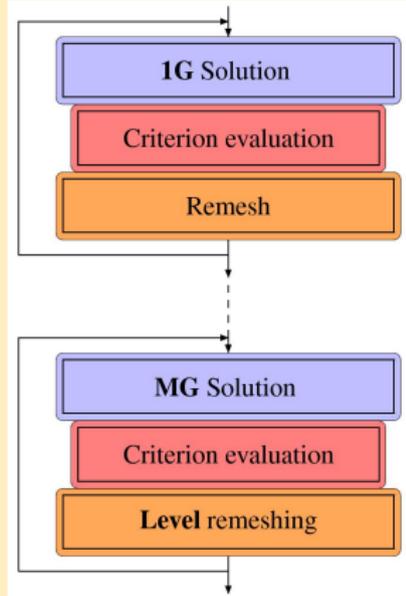
- 1- calcul d'une solution approchée de l'EDP sur le maillage courant
- 2- calcul du Hessien approché et de la métrique optimale
- 3- construction d'un nouveau maillage suivant la métrique
- 4- retour à 1.



III. Algorithme Full-Multigrid adaptatif anisotrope

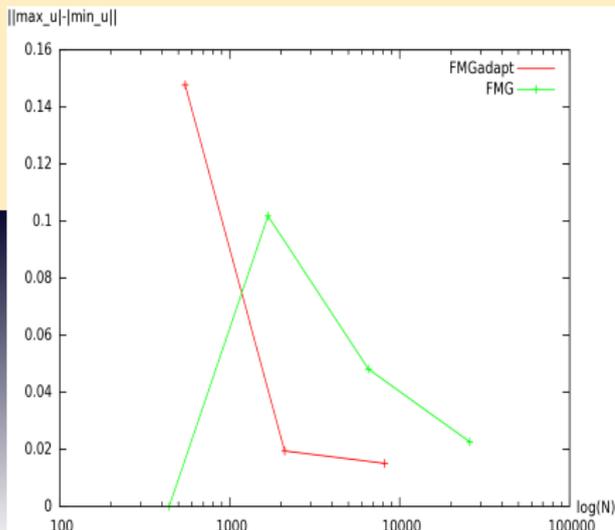
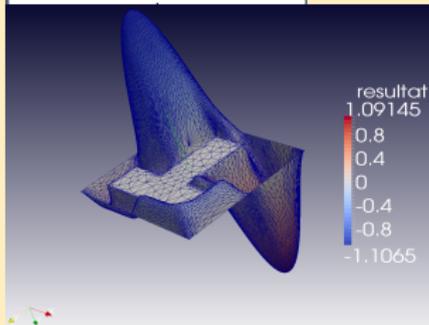
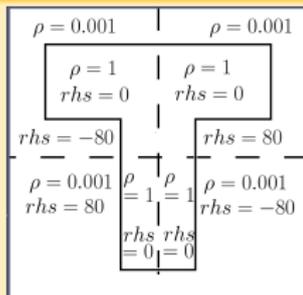
On utilise l'algorithme FMG mais, *pour chaque phase FMG*, on applique la boucle d'adaptation ci-dessus. A l'intérieur, la solution est obtenue par cyclage MG. Entre les phases, le nombre de noeuds est augmenté dans la métrique optimale. L'adaptation assure une meilleure propriété de convergence.

Le FMG adaptatif doit avoir une **complexité de $O(N)$** .



IV. Cas Tests

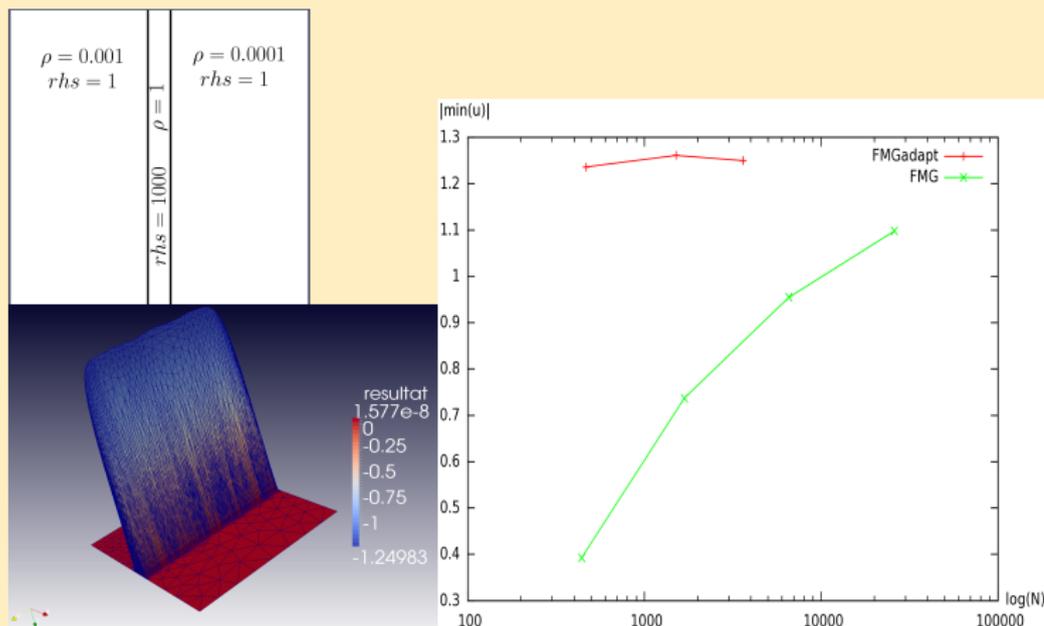
Cas test de Tatebe



Ce cas test est symétrique. Après convergence, la différence entre le maximum et le minimum doit être égal à 0. On observe que cette différence décroît plus rapidement avec l'adaptation.

IV. Cas tests

Cas de la bande centrale

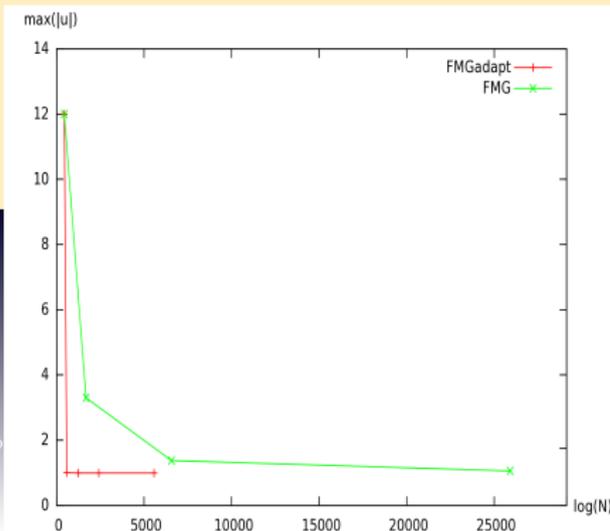
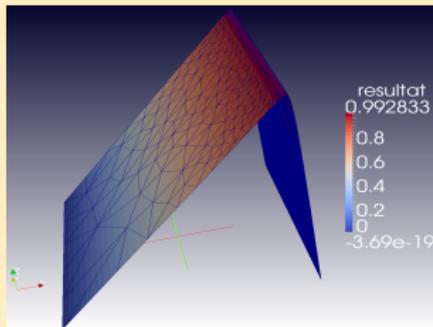


On observe que le minimum tend vers une limite ≈ 1.25 qui est plus vite atteinte avec l'adaptation.

IV. Cas tests

Cas de la couche limite

On résout $-\Delta u = rhs$ où $rhs(x, y) = \frac{1}{\alpha^2(\exp(1/\alpha)-1)} \exp(x/\alpha)$ avec $\alpha = 0.006$.

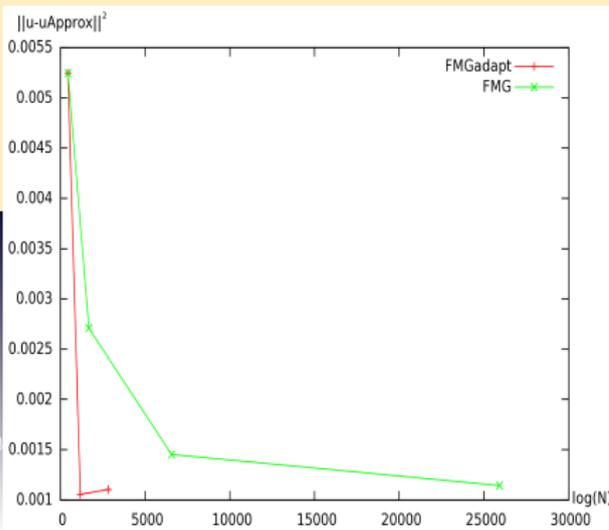
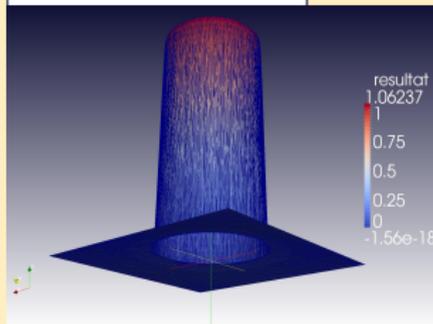
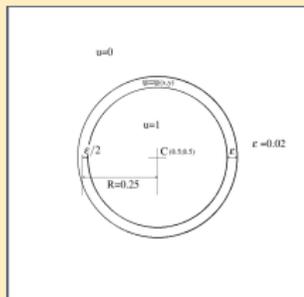


Le résultat tend vers une limite ≈ 0.99 qui est atteinte beaucoup plus vite avec l'adaptation que sans.

IV. Cas test

Cas de la discontinuité circulaire

On résout $-\Delta u = rhs$ où $u(x, y) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\psi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\psi}{\epsilon}\right) \right]$
avec $\psi = R - \sqrt{(x_C - x)^2 + (y_C - y)^2}$



La norme, qui doit être égale à 0 pour une bonne approximation, décroît plus vite avec l'adaptation.

Synthèse

- MG combinées avec de nouvelles technologies d'adaptation.
- L'introduction d'un algorithme plus complexe assure
 - une plus grande sécurité dans l'exactitude des résultats et
 - un meilleur contrôle du coût de calcul:

$N = \varepsilon^{-\frac{dim}{\alpha}}$ pour obtenir une erreur ε .

Perspectives

- Contrôle de la convergence des MG.
- Contrôle de la convergence de la boucle d'adaptation.
- Estimateur d'erreur a posteriori et correcteur : $u_h \pm \delta u_h$.