

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à MINES ParisTech

Génération et adaptation de maillage volume-couche limite dynamique
pour les écoulements turbulents autour de géométries complexes

École doctorale n°364

SCIENCES FONDAMENTALES APPLIQUÉES

Spécialité MÉCANIQUE NUMÉRIQUE ET MATÉRIAUX

Soutenue par **Laure BILLON**
le 09 décembre 2016

Dirigée par **Elie Hachem &
Youssef Mesri**



COMPOSITION DU JURY :

Pr Alain Dervieux
Inria Sophia-Antipolis,
Président

Pr Houman Borouchaki
Université de Technologie de Troyes,
Rapporteur

Pr Jean François Remacle
Université Catholique de Louvain,
Rapporteur

Pr Johan Hoffman
KTH Royal Institute of Technology,
Examineur

Dr Youssef Mesri
Mines-ParisTech,
Examineur

Pr Elie Hachem
Mines-ParisTech,
Examineur

*A mon père,
qui m'a certainement
poussé à me dépasser*

Table des matières

Introduction	1
1 Mécanique des fluides numérique	7
1.1 Introduction	7
1.2 Système d'équations de Navier-Stokes	10
1.2.1 Existence et unicité des solutions	12
1.2.2 Formulation éléments finis des équations de NS	13
1.3 Méthodes de résolution numérique	14
1.3.1 Simulation numérique directe (DNS)	15
1.3.2 Approche moyennée des équations de Navier-Stokes (RANS)	16
1.3.3 La simulation des grandes échelles (LES)	21
1.4 La méthode variationnelle multi-échelles (VMS)	23
1.4.1 Résolution du système petite échelle	25
1.4.2 Résolution du système grande échelle	28
1.5 Méthode de volume immergé	29
1.5.1 Fonction levelset	30
1.5.2 Mélange des propriétés mécaniques	31
1.6 Conclusion	34
2 Génération et adaptation de maillage	35
2.1 Introduction	36
2.2 Métrique	36
2.2.1 Définition de l'espace métrique	37
2.2.2 Assemblage de la métrique	38
2.3 Génération de maillage	39
2.3.1 Méthode par arbre	39
2.3.2 Méthode frontale (Advancing front)	40
2.3.3 Méthode de Delaunay	40

2.3.4	Méthode topologique	40
2.3.5	Contrainte de volume minimal	41
2.3.6	Critère de classification	42
2.3.7	Optimisation topologique locale	44
2.3.8	Traitement de la frontière	47
2.4	Adaptation de maillage	47
2.4.1	Estimation de l'erreur d'interpolation sur les arêtes	48
2.4.2	Redimensionnement des arêtes	52
2.4.3	Tenseur de distribution des longueurs	53
2.4.4	Construction de la métrique	54
2.4.5	Comparaison numérique des trois méthodes présentées	63
2.4.6	Adaptation de maillage multi-critères	73
2.5	Conclusion	74
3	Maillage couche limite	75
3.1	Introduction	76
3.2	Théorie de la couche limite	77
3.2.1	Grandeurs utiles	77
3.2.2	Phénomène de décollement	82
3.2.3	Couche limite laminaire	84
3.2.4	Couche limite turbulente	85
3.2.5	Résultats numériques	91
3.3	Maillage de la couche limite	94
3.3.1	Taille de maille	96
3.3.2	Directions des éléments	102
3.3.3	Courbure	104
3.4	Maillage couche limite : applications	107
3.4.1	Exemples élémentaires	108
3.4.2	Profil d'aile NACA0012	114
3.4.3	Ahmed body	116
3.4.4	Vers des géométries plus complexes	118
3.5	Calculs sur le maillage de couche limite	122
3.5.1	Plaque plane	122
3.5.2	Profil d'aile NACA0012	125
3.6	Conclusion	131
4	Couplage	133
4.1	Introduction	133
4.2	Initialisation par un maillage couche limite	135
4.3	Intersection de métriques	142
4.3.1	Réduction simultanée	142

4.3.2	Diagonalisation simultanée	144
4.3.3	Résultats numériques	145
4.4	Couplage avancé - Adaptation de maillage volume-couche limite	149
4.4.1	Zone interne	149
4.4.2	Zone couche limite	150
4.4.3	Domaine restant	151
4.5	Adaptation volume-couche limite : applications	152
4.5.1	Profil d'aile NACA0012	152
4.5.2	Ahmed body	156
4.5.3	Profil d'aile NHLP L1T2	159
4.6	Conclusion	162
	Conclusion et perspectives	163
	Bibliographie	168

Introduction

Ready, hep!

La problématique énergétique actuelle pousse l'industrie à concevoir des moyens de transport moins gourmands en énergie. En effet pendant longtemps les seules contraintes des concepteurs se limitaient à l'esthétique et à la performance, la crise économique de 1930 et le choc pétrolier de 1970 ont permis une prise de conscience sur les réserves de pétrole, incitant les constructeurs à limiter la consommation de leurs véhicules. Ceci est d'autant plus d'actualité avec l'enjeu environnemental au centre des préoccupations mondiales. Les pertes énergétiques associées aux moyens de transports, sont principalement dues au rendement du moteur et à la résistance de l'air. La résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse, notamment en raison du comportement turbulent de l'écoulement à l'arrière du véhicule, on parle de force de traînée telle que :

$$F_D = \rho S C_D V^2$$

avec ρ la masse volumique de l'air, S la section maximale du véhicule perpendiculairement à l'écoulement, et C_D le coefficient de traînée. Le coefficient de traînée est le paramètre au cœur de l'amélioration de l'efficacité énergétique de forme. La traînée se décompose en trois grandes contributions : la traînée de forme, la traînée de frottement et la traînée induite par la portance. Pour diminuer la résistance aérodynamique d'une automobile, les constructeurs peuvent agir sur deux paramètres : le coefficient de traînée C_D et la section S . Afin de conserver un certain confort dans l'habitacle, on agit uniquement sur le coefficient de traînée. Pour réduire le coefficient de traînée il est nécessaire de profiler le véhicule, arrondir sa face avant de manière à adoucir la pénétration dans l'air, et allonger sa face arrière de manière à "recoller" proprement les filets d'air, sans perte d'énergie par turbulence. La forme idéale

est celle d'une goutte d'eau, c'est en fait la forme engendrée par la résistance de l'air à la chute du volume d'eau, son coefficient de traînée vaut $C_D = 0.05$ (figure CDdessin), tandis que les voitures grand public affichent un coefficient de traînée moyen $C_D = 0.3$.

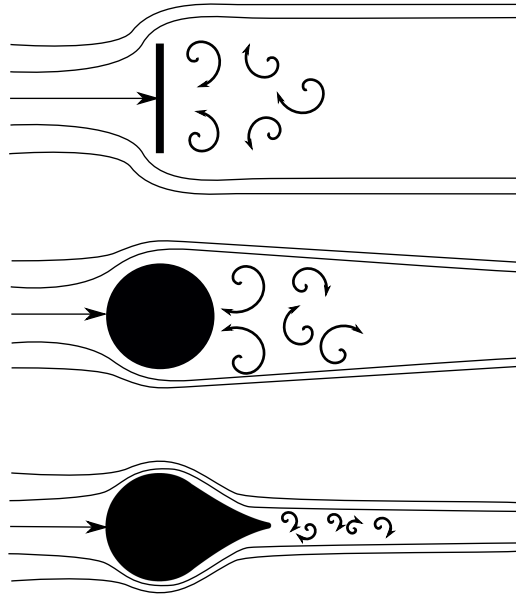


FIGURE 1 – Schéma de l'écoulement sur une plaque ($C_D = 1.28$), sur un cercle ($C_D = 0.5$) et sur une goutte d'eau ($C_D = 0.05$) de même section maximale

Cependant un faible coefficient de traînée est à l'origine d'une mauvaise tenue de route à haute vitesse, pour pallier à cette problématique on utilise des ailerons notamment pour les voitures de sport (figure 2). Un aileron permet de canaliser le flux d'air entre la carrosserie et lui-même afin de rajouter de la pression sur le train arrière, diminuer la turbulence et ainsi créer une déportance qui plaque la voiture au sol. Cela permet d'assurer un meilleur appui aérodynamique à haute vitesse, et donner plus de stabilité en virage. Néanmoins la présence d'un aileron augmente le coefficient de traînée, c'est pourquoi les voitures de sport commercialisées sont équipées d'ailerons rétractables qui ne sortent qu'au delà d'une certaine vitesse. Sur le même principe les Formule 1 sont équipées du DRS (Drag Reduction System), un système d'aileron arrière mobile permettant de diminuer la traînée au détriment de l'adhérence, afin de gagner en vitesse de pointe en ligne droite. La plupart des améliorations aérodynamiques des modèles de série proviennent

des connaissances acquises en sport automobile à travers les courses de voitures d'endurance et de Formule 1.

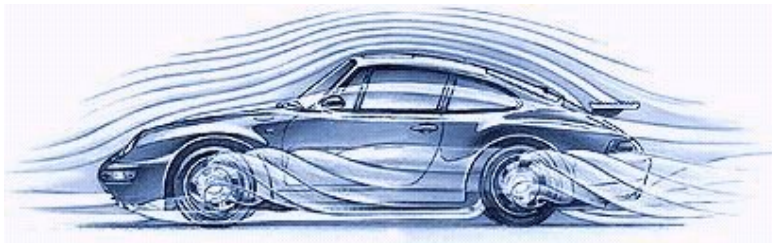


FIGURE 2 – Représentation de l'écoulement d'air autour d'une Porsche 911 [Wan, 2000]

De plus, une gestion optimisée des flux d'air autour du véhicule permet d'augmenter le confort en réduisant les bruits d'air, tout en ventilant efficacement les pneus, les freins et le bloc moteur. Finalement la conception d'un véhicule efficace énergétiquement est une question d'optimisation très minutieuse. Chaque prototype passe des essais en soufflerie afin d'être ajusté et ainsi de suite jusqu'à validation. C'est un processus long et coûteux, depuis les années 1940 on développe des méthodes de simulation numériques (CFD pour Computational Fluid Dynamics) permettant d'effectuer à moindres coûts des essais en soufflerie numérique. Depuis quelques années ces méthodes tendent à se démocratiser grâce notamment à l'évolution des capacités de calculs des supercalculateurs. Au delà de l'automobile, elles permettent de simuler les écoulements d'air autour d'éoliennes, d'avions [Hoffman et al., 2014], ou encore dans un autre registre, du flux sanguin dans le système cardiovasculaire [Sahni et al., 2006].

La mécanique des fluides numérique consiste à résoudre numériquement, à l'aide d'ordinateurs puissants, les équations mathématiques qui régissent les écoulements fluides. Ce sont des équations très complexes dont on ne connaît pas à ce jour de solution exacte, leur résolution passe donc par une discrétisation de l'espace en un maillage composé de nœuds de calculs. Les écoulements aérodynamiques réels sont en majorité turbulents, leur résolution précise nécessite une grande concentration de nœuds de calculs dans la zone de couche limite et le sillage, or à ce jour la puissance des ordinateurs de calculs n'est pas suffisante pour traiter des configurations aussi lourde. On estime que de telles machines de calculs seront disponibles d'ici 2040. En attendant, une solution pour alléger la charge de calculs est d'utiliser des

techniques d'adaptation de maillage dynamique qui permettent de générer un maillage anisotrope optimal sous la contrainte d'un nombre d'éléments de maillage pour contrôler la précision de la solution numérique à un instant donné [Alauzet et Loseille, 2016]. L'adaptation de maillage dynamique est une technique très prometteuse [Park et al., 2016] cependant encore peu adaptée au maillage de la couche limite qui est une zone cruciale de la résolution qui influence tout l'écoulement en aval. En effet pour une résolution précise la couche limite nécessite un maillage structuré en strates ce que les techniques d'adaptation de maillage non structurés ne permettent pas jusqu'ici.

Organisation et plan de la thèse

Cette thèse a été financée par l'agence nationale de la recherche (ANR) dans le cadre du projet MAIDESC : Maillage Adaptatif pour les interfaces Instationnaires avec Déformations, Étirements, Courbures, mené par l'Inria, l'université de Montpellier II et le CEMEF. Elle a été effectuée au sein du CEMEF (Centre de Mise En Forme des Matériaux) dans l'équipe Computing & FLuids. Elle s'appuie sur la librairie de calcul parallèle éléments finis CIMLIB [Digonnet et Coupez, 2003] et le mailleur topologique MTC [Coupez, 1991]. Dans cette thèse on s'intéresse aux écoulements incompressibles turbulents avec un intérêt particulier pour la couche limite et sa discrétisation.

Les écoulements de fluide réel autour d'un corps solide laissent apparaître une couche de fluide ralenti autour de celui-ci, c'est la couche limite. L'étude de ce phénomène est primordial pour la résolution complète de l'écoulement, notamment pour les écoulements turbulents où la couche limite est le lieu de développement de la turbulence et des détachements. Il est donc nécessaire de traiter la résolution de cette zone avec précaution, notamment en assurant un maillage suffisamment fin, structuré et décrivant précisément la courbure de l'interface. Les nombreuses études théoriques de la couche limite permettent de déterminer approximativement, en fonction des caractéristiques de l'écoulement et de la géométrie immergée, le maillage nécessaire pour une résolution précise de l'écoulement.

Une technique d'adaptation de maillage dynamique performante a été développée au CEMEF ces dernières années, elle repose sur un estimateur d'erreur qui permet de pondérer les nœuds du maillage afin de les redistribuer en densifiant les zones de forts gradients. Cette méthode bien que efficace ne permet pas en l'état actuel d'assurer une discrétisation de la couche limite aussi fine et structurée que nécessaire. Dans cette thèse on propose d'étudier le maillage de la couche limite afin de proposer une évolution de l'adaptation

de maillage qui permet une résolution précise des écoulements turbulents autour de géométries complexes.

Pour traiter cette problématique, on s'intéresse dans un premier chapitre aux équations de la mécanique des fluides et aux différentes méthodes numériques existantes pour les résoudre. On développe ensuite plus en détails la méthode variationnelle multi-échelles et la méthode d'immersion de volume employées dans cette thèse. Ce chapitre permet de comprendre la difficulté de résolution des équations de la mécanique des fluides et l'impact du maillage sur la solution. Ainsi le choix et la construction du maillage constituent une problématique à part entière.

Dans le second chapitre, on définit quelques notions de géométrie différentielle relatives au concept de métrique essentielles à la compréhension de la technique de génération de maillage employée dans ce travail. La deuxième moitié du chapitre est axée sur l'automatisation de la génération de maillage avec la présentation de la technique d'adaptation de maillage dynamique basée sur les arêtes sous la contrainte d'un nombre d'éléments fixés. On propose finalement quelques améliorations portant sur le dénombrement et la régularisation de la métrique.

Dans le troisième chapitre, on revient sur le phénomène de couche limite en détails. On étudie dans un premier temps la théorie de la couche limite, ainsi que les grandeurs et équations associées afin de définir précisément le maillage adapté à sa description. Dans un second temps, on présente une nouvelle méthode d'adaptation de maillage permettant la construction automatique d'un maillage couche limite en accord avec la théorie quelque soit la complexité de la géométrie immergée. Il s'agit d'un maillage *a priori*, soit réalisé en amont de la simulation, et fixe tout au long de la simulation.

Dans le quatrième chapitre, on s'applique à proposer un couplage permettant à la fois de conserver un maillage minimum et structuré dans la couche limite mais également d'adapter dynamiquement le maillage sur l'erreur *a posteriori*. On valide ensuite le couplage proposé sur des cas de références et proposons l'étude de cas plus complexes.

Valorisation de la thèse

Publications

- Laure Billon, Youssef Mesri, Elie Hachem. Anisotropic boundary layer mesh generation for immersed complex geometries. *Engineering with Computers*, pages 1-12, 2016

- Laure Billon, Youssef Mesri, Elie Hachem. Toward Monolithic Boundary-Volume Mesh Adaptation. *Computer-Aided Design*, in preparation 2017

Conférences et séminaires avec présentation orale

- Laure Billon, Youssef Mesri and Elie Hachem, Adaptive meshing method for turbulent flow simulations, *ECCOMAS Congress*, Heraklion, June 2016
- Laure Billon, Youssef Mesri and Elie Hachem, Adaptation de maillage dynamique pour les écoulements turbulents autour de géométries immergées, *Groupe de travail des doctorants, LJLL, UPMC*, Paris, Mars 2016
- Laure Billon, Youssef Mesri and Elie Hachem, Adaptive Finite Element Simulation of Multi-Physics Turbulent Flow with Applications in Aerodynamics, *ADMOS*, Nantes, June 2015
- Laure Billon, Youssef Mesri and Elie Hachem, Parallel anisotropic 3D mesh adaptation for unsteady turbulent Flows, *PANACM*, Buenos Aires, April 2015
- Laure Billon, Youssef Mesri and Elie Hachem, Mesh adaptation for unsteady interfaces with deformation, stretching and curvature, Poster, *Séminaire de Mécanique des fluides CEA/GAMNI*, Paris, February 2015
- Elie Hachem, Laure Billon, Jessica Sari, Thierry Coupez, Variational multiscale large eddy simulation and anisotropic mesh adaptation for transient and turbulent flows, *AERO2014, 49th International Symposium of Applied Aerodynamics*, Lille, March 2014

1

Mécanique des fluides numérique

Sommaire

1.1 Introduction	7
1.2 Système d'équations de Navier-Stokes	10
1.2.1 Existence et unicité des solutions	12
1.2.2 Formulation éléments finis des équations de NS	13
1.3 Méthodes de résolution numérique	14
1.3.1 Simulation numérique directe (DNS)	15
1.3.2 Approche moyennée des équations de Navier-Stokes (RANS)	16
1.3.3 La simulation des grandes échelles (LES)	21
1.4 La méthode variationnelle multi-échelles (VMS)	23
1.4.1 Résolution du système petite échelle	25
1.4.2 Résolution du système grande échelle	28
1.5 Méthode de volume immergé	29
1.5.1 Fonction levelset	30
1.5.2 Mélange des propriétés mécaniques	31
1.6 Conclusion	34

1.1 Introduction

L'étude des écoulements fluides qui composent notre environnement est un sujet qui suscite un grand intérêt et qui n'est pourtant pas encore arrivée à maturité. A travers le temps les hommes ont analysé la mécanique des fluides, à tâtons dans un premier temps par la conception et l'optimisation

de forme des flèches et autres lances, puis par l'analyse théorique. L'analyse d'Archimède (287-212 Av. J.C.) : "Tout corps plongé dans un fluide reçoit une poussée verticale dirigée vers le haut égale au poids du fluide déplacé", et les avancées de Pascal (1623-1662) sur la notion de pression ont permis de définir l'équilibre statique des fluides. C'est à la fin du 15e siècle qu'on commence à appréhender les mouvements fluides grâce aux illustrations et descriptions très détaillées apportées par Léonard de Vinci (1452-1519) à partir de leur observation (Figure 1.1), il est à l'origine de l'appellation "turbulence".

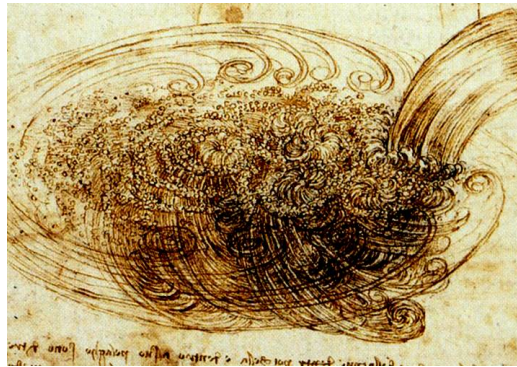


FIGURE 1.1 – Illustration de la turbulence par Léonard de Vinci

Ce n'est que deux siècles plus tard que Newton (1642-1727) apporta une contribution primordiale à l'analyse mathématique des mouvements fluides avec le principe fondamental de la dynamique.

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

En 1738 Daniel Bernoulli (1700-1782) met pour la première fois en équations les phénomènes hydrodynamiques, dans son œuvre "Hydrodynamica", reposant sur un principe mécanique, la conservation des forces vives, ainsi que sur une hypothèse simplificatrice, le parallélisme des tranches. Cette hypothèse lui permet de ramener l'étude du mouvement à une seule variable d'espace, et ainsi, de parvenir à des équations différentielles ordinaires. C'est grâce à Daniel Bernoulli que la discipline visant à l'étude du mouvement des fluides acquiert le statut de science, qui prend au passage le nom de son ouvrage, Hydrodynamique. L'approche théorique ainsi initiée inspira notamment Jean d'Alembert (1717-1783) [Guilbaud, 2007] qui consacra un grand nombre de ses travaux à l'analyse théorique des phénomènes hydrodynamiques et proposa en 1749 d'introduire un champ de vitesse (fonction

de plusieurs variables spatiales) et par conséquent d'appliquer pour la première fois à l'hydrodynamique les calculs aux différences partielles. Dans ce manuscrit qui répond à un concours pour le prix de Mathématiques organisé par l'Académie de Berlin sur le thème : "Déterminer la théorie de la résistance que souffrent les corps solides dans leur mouvement, en passant par un fluide", Jean d'Alembert reprend toute l'analyse de l'hydrodynamique sans s'encombrer de l'hypothèse de parallélisme de tranches, supposition arbitraire. Il s'appuie cette fois uniquement sur la conservation de la masse et l'égalité de pression en tous sens, ce qui lui permet d'établir l'équation bidimensionnelle caractérisant un écoulement potentiel idéal. D'Alembert apporte là une contribution essentielle grâce à laquelle il peut être aujourd'hui considéré comme le premier savant à avoir représenté le fluide comme un milieu mathématiquement caractérisable par des fonctions dépendant de façon continue des variables d'espaces et de la variable de temps. Peu de temps après et en s'appuyant sur les avancées proposées par d'Alembert, Leonhard Euler (1707-1783) parvient en 1755 à établir des équations gouvernant en trois dimensions l'écoulement d'un fluide idéal compressible, ce qui permit à la science du mouvement des fluides d'acquérir ses fondements théoriques :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p \quad (1.2)$$

Ainsi 1755 marque un tournant dans l'étude des phénomènes hydrodynamiques, toutes les recherches se recentrent sur l'équation d'Euler afin dans un premier temps de tenter de la résoudre et dans un second temps de la comparer à l'expérience.

"Du moins en certains cas la solution du Problème se refusera entièrement à l'analyse", d'Alembert

En effet comme l'a constaté d'Alembert la résolution de l'équation d'Euler constitue un problème mathématique des plus complexes dû essentiellement à son caractère non-linéaire. En 1780, d'Alembert fût également le premier à voir dans l'équation d'Euler un Paradoxe, en effet un corps immergé dans un écoulement à vitesse constante ne devrait si l'on s'en tient aux lois du mouvement des fluides parfaits, ne subir aucune résistance, soit ni traînée, ni portance. Ainsi un oiseau ne pourrait pas voler, ce qui pose un problème évident de concordance avec l'expérience.

Ce n'est que 40 ans plus tard, en 1822, que l'ingénieur des Ponts et Chaussées Henri Navier (1785-1836) est venu à bout de la difficulté soulevée par le Paradoxe de d'Alembert en ajoutant la viscosité à l'équation d'Euler, mais

c'est le mathématicien George Gabriel Stokes (1819-1903) qui en proposa une démonstration rigoureuse à l'occasion de sa thèse en 1845. On retiendra donc cette équation sous le nom de Navier-Stokes :

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p} \quad (1.3)$$

L'équation de Navier-Stokes fournit la meilleure description mathématique des écoulements de fluides réels connue à ce jour. Cependant sa résolution présente encore une grande difficulté et constitue l'un des problèmes du millénaire.

1.2 Système d'équations de Navier-Stokes

Soit le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec d la dimension de l'espace pour l'intervalle de temps $[0, T]$, on note Γ le bord du domaine Ω . Les équations de Navier-Stokes ainsi que celles d'Euler ont été obtenues à partir d'un point de vue eulérien, c'est à dire en suivant l'évolution au cours du temps des grandeurs macroscopiques locales comme le vecteur vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ en un point M donné où $\mathbf{x} = \mathbf{OM}$. Ainsi ce vecteur concerne une particule de fluide différente à chaque instant.

Soit une particule de fluide, son accélération est égale à la dérivée particulaire de la vitesse, on montre aisément qu'elle s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.4)$$

où $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ à l'accélération locale et $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ correspond à l'accélération convective.

Chaque particule de fluide est soumise à un ensemble de forces extérieures recensées ci-dessous :

- Les forces de volume, \mathbf{f} (par exemple le poids),
- la résultante des forces de pression, $-\nabla p$,
- la résultante des forces de viscosité, $2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$.

avec $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ le tenseur des déformations :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (1.5)$$

Par application du principe fondamental de la dynamique on retrouve l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \nabla p + \mathbf{f} \quad (1.6)$$

De plus, on utilise le principe de conservation de masse, c'est à dire que l'on se place dans le cas d'un fluide en écoulement incompressible. Ce qui se traduit, à l'aide d'un bilan de masse, par :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.7)$$

Finalement, on définit le système d'équations de Navier-Stokes incompressible :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \nabla p + \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Associé aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_g \\ \mathbf{n} \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p \mathbf{l}_d) = \mathbf{h} & \text{sur } \Gamma_h \end{cases} \quad (1.9)$$

où $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$ et $\Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset$. Les fonctions \mathbf{g} et \mathbf{h} sont données et \mathbf{n} est le vecteur normal à Γ orienté vers l'extérieur.

En 1883, Osborne Reynolds (1842-1912) introduit un critère d'apparition des instabilités turbulentes, dénommé nombre de Reynolds (Re), il s'agit d'un nombre sans dimension représentant le rapport entre les forces d'inerties et les forces visqueuses. Soit,

$$\rho \|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\| \sim \frac{\rho U^2}{L} \quad \text{et} \quad 2\mu \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\| \sim \frac{\mu U}{L^2} \quad (1.10)$$

Si bien que,

$$\frac{\rho \|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\|}{2\mu \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|} \sim \frac{\rho U L}{\mu} = \text{Re} \quad (1.11)$$

où U représente la vitesse de l'écoulement libre et L la taille caractéristique du problème. Pour chaque problème étudié il existe un nombre de Reynolds critique au delà duquel l'écoulement est turbulent et en deçà duquel l'écoulement est laminaire. Ce nombre critique est généralement autour de 2000. Dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, les forces visqueuses et le transport diffusif associé l'emportent sur le transport convectif. Ce sera le cas

pour les écoulements à très faible vitesse, et/ou de taille caractéristique très faible, et/ou de fluide très visqueux. Et inversement pour les grands nombres de Reynolds, qui caractérisent la plupart des écoulements que l'on rencontre au quotidien. Le nombre de Reynolds est le paramètre clef de la nature des solutions du système d'équations de Navier-Stokes.

1.2.1 Existence et unicité des solutions

La compréhension et la validation théorique de ces équations est encore à un niveau primitif. Leur résolution consiste à trouver un couple vitesse-pression (\mathbf{u}, p) satisfaisant la configuration du problème. L'équation de Navier-Stokes ainsi que celle d'Euler comportent un terme non linéaire, l'accélération convective $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, ce qui rend sa résolution encore plus complexe. Les mathématiciens du 19e siècle ont cherchés à obtenir des solutions analytiques en vain dans le cas le plus général. Mais ce n'est que bien plus tard que les chercheurs se sont interrogés sur l'existence de solutions et leur unicité, soit si le système d'équations de Navier-Stokes était bien posé. En effet, il a été mis en évidence au cours de ces recherches que suivant l'ordre de grandeur de la donnée initiale u_0 soit on assiste à une convergence vers une solution globale pour u_0 petit, soit on observe une explosion en temps fini pour u_0 grand [Gallagher, 2014]. En 1934 Jean Leray (1906-1998) publie une étude magistrale sur l'existence de solutions régulières du système d'équations de Navier-Stokes sur un intervalle borné, dans laquelle il explique les difficultés (liées à la turbulence) rencontrées pour prouver l'existence d'une solution régulière définie sur l'ensemble de tous les réels positifs [Leray, 1934]. Le travail de Leray reste encore aujourd'hui une référence incontournable dans ce domaine, où les progrès notables n'ont été établis que dans le cas de la dimension 2 où l'on a à la fois existence et unicité des solutions. La preuve de l'unicité des solutions en dimension 3 fait partie des problèmes du millénaire. Plus exactement, la question à \$1,000,000 de la Fondation Clay est de savoir si pour une donnée initiale quelconque (aussi régulière que nécessaire, mais de taille arbitraire) il y a une unique solution globale en temps, ou si une explosion en temps fini peut avoir lieu pour certaines données.

En attendant de plus amples avancées du côté analytique, le système d'équations de Navier-Stokes est aujourd'hui résolu de manière discrète grâce à la simulation numérique, au moyen d'ordinateurs dotés de grandes puissances de calcul.

1.2.2 Formulation éléments finis des équations de NS

Dans ce travail on utilise une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis, afin d'exprimer le système d'équations de Navier-Stokes sous forme variationnelle, on définit quelques notations utiles. L'espace des fonctions dont les dérivées d'ordre $m \geq 0$ appartiennent à $L^2(\Omega)$ est noté classiquement $H^m(\Omega)$. Le sous-espace de $H^1(\Omega)$ dont les fonctions s'annulent sur la frontière est noté $H_0^1(\Omega)$. Ainsi on définit les espaces de fonctions pour la vitesse, la pression et la pondération de la vitesse suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega)^d, \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_g\} \\ \mathcal{Q} &= \{p(\mathbf{x}, t) | p(\mathbf{x}, t) \in L^2(\Omega)\} \\ \mathcal{V}_0 &= \{\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \in H_0^1(\Omega)^d, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_g\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

La formulation variationnelle de Galerkin associée au système d'équations (1.8) est obtenue en multipliant cette équation par des fonctions tests $(\mathbf{w}, q) \in (\mathcal{V}_0, \mathcal{Q})$ et en intégrant les équations par parties sur le domaine de calcul Ω . Le problème peut alors être écrit sous forme faible de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\partial_t \mathbf{u}, \mathbf{w})_\Omega + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{w})_\Omega + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_\Omega - (p, \nabla \cdot \mathbf{w})_\Omega \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_\Omega + (\mathbf{h}, \mathbf{w})_{\Gamma_\Omega} & \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_0 \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_\Omega = 0 & \forall q \in \mathcal{Q} \end{array} \right. \quad (1.13)$$

où $(\varphi, \psi)_\Omega = \int_\Omega \varphi \psi d\Omega$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Soit Ω_h la discrétisation spatiale du domaine Ω en simplexe T tel qu'ils recouvrent la totalité du domaine Ω . Les espaces de fonctions $(\mathcal{V}, \mathcal{Q}, \mathcal{V}_0)$ définis ci-dessus sont alors approchés sur cette partition par les sous-espaces discrets de dimension finis constitués de fonctions continues par-morceaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_h &= \{\mathbf{u}_h | \mathbf{u}_h \in C^0(\Omega)^d, \mathbf{u}_h|_T \in P^1(T)^d, \forall T \in \Omega_h\} \\ \mathcal{Q}_h &= \{p_h | p_h \in C^0(\Omega)^d, p_h|_T \in P^1(T), \forall T \in \Omega_h\} \\ \mathcal{V}_{h,0} &= \{\mathbf{w}_h | \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h, \mathbf{w}_h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le problème discret de Galerkin consiste donc à résoudre le problème mixte suivant :

Trouver le couple $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (\mathcal{V}_h, \mathcal{Q}_h)$ tel que $\forall (\mathbf{w}_h, q_h) \in (\mathcal{V}_{h,0}, \mathcal{Q}_h)$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + \rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h))_{\Omega_h} - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + (\mathbf{h}, \mathbf{w}_h)_{\Gamma_\Omega} \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h)_{\Omega_h} = 0 \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Pour que le système (1.15) soit bien posé, il doit vérifier la condition inf-sup, aussi connue comme la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB) [Brezzi et Fortin, 1991] :

$$\inf_{q_h \in \mathcal{Q}_h} \sup_{\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_{h,0}} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h)_{\Omega_h}}{\|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}_{h,0}} \|q_h\|_{\mathcal{Q}_h}} \geq \beta > 0 \quad (1.16)$$

avec β une constante indépendante de la discrétisation. Cette condition impose la compatibilité des espaces éléments finis de vitesse et de pression.

Cependant la méthode de Galerkin standard (1.15) souffre d'instabilités numériques et laisse apparaître des oscillations parasites dues à la non linéarité du terme convectif, qui sont particulièrement gênantes dans le cas d'écoulements à convection dominante. Pour y remédier il existe de nombreuses méthodes de stabilisation, les plus connues sont les méthodes de Petrov Galerkin qui consistent à ajouter une perturbation [Brooks et Hughes, 1982], et la méthode des minis éléments qui consiste à enrichir les espaces de vitesse et de pression grâce à un espace de bulles [Arnold et al., 1984] qui amortit les oscillations parasites et les instabilités de pression.

1.3 Méthodes de résolution numérique du système d'équations de Navier-Stokes

Étant donné qu'aucune solution analytique au système d'équations de Navier Stokes n'a encore été déterminée à ce jour, la seule opportunité de résolution est de recourir à la simulation numérique pour résoudre le système de manière discrète avec une condition initiale et des conditions aux limites appropriées. L'approche la plus précise pour simuler la turbulence est la simulation numérique directe (DNS), c'est une méthode numérique très coûteuse qui nécessite de résoudre toutes les échelles de la turbulence. Elle n'est donc pour le moment pas adaptée à l'étude des écoulements aérodynamiques réels. Dans certains cas seul le comportement stationnaire du fluide nous intéresse, et il n'est pas nécessaire de simuler tous les champs fluctuants, ce qui réduit considérablement la charge de calcul. C'est le principe de l'approche moyennée (RANS) qui consiste à prendre la moyenne temporelle des équations de Navier-Stokes, ce qui permet d'obtenir une moyenne de la solution exacte rapidement et avec beaucoup moins de ressources de calculs. Une approche intermédiaire est la simulation des grandes échelles (LES) où les grandes échelles de la turbulence sont résolues tandis que les petites échelles, plus petites que la taille de maille, sont modélisées. C'est une approche bien

moins coûteuse que la DNS et bien plus précise que l'approche RANS (Figure 1.2). C'est l'approche la plus prometteuse pour apporter une solution relativement précise au système d'équations de Navier-Stokes à ce jour. Il en existe plusieurs variantes, dans ce travail on s'intéresse tout particulièrement à la méthode variationnelle multi-échelles (VMS), qualifiée de méthode LES implicite.

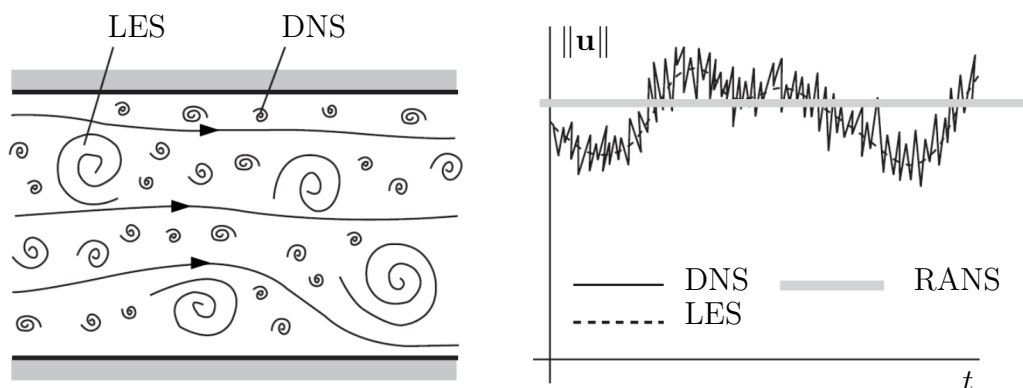


FIGURE 1.2 – Représentation des échelles de la turbulence et leur corrélation avec les méthodes numériques de résolution [Ferziger et Peric, 2002, Hachem, 2009]

1.3.1 Simulation numérique directe (DNS)

Lors d'une simulation numérique directe (DNS pour Direct Numerical Simulation), le système d'équations de Navier-Stokes est résolu à partir de sa formulation de Galerkin (1.15) sur un maillage suffisamment fin tel que toutes les échelles de longueurs et de temps soient entièrement résolues. C'est une approche qui n'utilise aucune modélisation de la turbulence mais résout toutes les quantités physiques. Lorsque la DNS est soigneusement réalisée, la solution obtenue est une excellente alternative à une solution analytique exacte.

Les dimensions caractéristiques du maillage nécessaire sont définies d'après les travaux d'Andrei N. Kolmogorov (1903-1987) qui a décrit en 1941 le phénomène de turbulence comme une cascade d'énergie tel que l'énergie des grandes échelles soit transmise aux plus petites échelles et ainsi de suite jusqu'à l'échelle où l'énergie est dissipée sous forme de chaleur par la viscosité [Kolmogorov, 1991]. Ainsi, il a défini la plus petite échelle de turbulence avant

dissipation η , en fonction de la viscosité ν et du taux de dissipation ϵ :

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.17)$$

Or le taux de dissipation est égal au taux d'énergie cinétique produit, ainsi on peut approximer ϵ en fonction des grandes échelles de turbulence L et de la vitesse moyenne de l'écoulement U :

$$\epsilon \sim \frac{U^3}{L} \quad (1.18)$$

Si bien que le rapport entre les grandes échelles L et les petites échelles η s'exprime en fonction uniquement du nombre de Reynolds :

$$\frac{L}{\eta} \sim \text{Re}^{\frac{3}{4}} \quad (1.19)$$

On constate de ce fait que l'écart entre les grandes et les petites échelles augmente à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Par conséquent une estimation du nombre de nœuds nécessaire à la résolution DNS est proportionnel au nombre de Reynolds tel que :

$$N \sim \text{Re}^{\frac{9}{4}} \quad (1.20)$$

De plus, sachant que le pas de temps doit rester du même ordre de grandeur que le pas d'espace, le problème à résoudre comporte environ Re^3 degrés de liberté, ce qui rend la résolution des problèmes turbulents qui nous entourent d'autant plus coûteuse. De telles résolutions requièrent d'énormes capacités de calculs et de stockage, or il n'existe pas à l'heure actuelle de supercalculateurs assez performants pour résoudre de telles problèmes. Il faut alors limiter le nombre de Reynolds ou étudier un cas présentant des simplifications du système. Étant donnée la progression actuelle des technologies, on estime obtenir des supercalculateurs suffisamment performants d'ici 2040.

Pour l'instant ce type de simulation est donc réservé à des écoulements académiques à des nombres de Reynolds inférieurs à 1000, pour servir de benchmark numérique.

1.3.2 Approche moyennée des équations de Navier-Stokes (RANS)

En attendant 2040, et la possibilité de résoudre par simulation numérique directe tous types d'écoulements dans un temps raisonnable, des approches

simplifiées ont été proposées; notamment à la fin du 19e siècle Osborne Reynolds s'intéresse à une description statistique de la turbulence. Il propose de considérer l'écoulement comme la superposition d'une partie moyenne et d'une partie fluctuante, tel que la turbulence soit évaluée comme une variable aléatoire. On parle alors des équations de Navier-Stokes moyennées (RANS pour Reynolds Averaged Navier-Stokes).

Dés lors on procède à la décomposition de Reynolds sur les inconnues du problème [Pope, 2000, Wervaecke, 2010], à savoir le champ de vitesse et de pression :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) &= \bar{p}(\mathbf{x}) + p'(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (1.21)$$

où la moyenne temporelle d'un champ quelconque f est calculée par la formule suivante :

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{x}, t) dt \quad (1.22)$$

De plus, elle satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\overline{f'} &= 0 \\ \overline{f'g'} &\neq 0 \\ \overline{\bar{f}} &= \bar{f} \\ \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{f \times g} &= \bar{f} \times \bar{g} + \overline{f'g'} \\ \overline{\bar{f} \times g} &= \bar{f} \times \bar{g} \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial \xi}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (1.23)$$

Par conséquent le système de Navier-Stokes (1.8) devient :

$$\begin{cases} \rho \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = \mathbf{f} - \nabla \bar{p} + \mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) - \nabla \cdot \overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

On remarque l'apparition d'un terme supplémentaire, $\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$, il s'agit du tenseur des contraintes de Reynolds qui représente la turbulence et modélise son influence sur le champ moyen. Ce terme introduit une inconnue supplémentaire, il est donc nécessaire d'ajouter une équation de fermeture pour résoudre le système (1.24). L'équation de fermeture choisie est en fait un modèle de turbulence, dans la plupart des cas on utilise l'approximation de Boussinesq :

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = 2\nu_T \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}}) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (1.25)$$

où ν_T représente la viscosité turbulente, et $k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$ l'énergie cinétique turbulente.

Ainsi sous l'approximation de Boussinesq, le système d'équations (1.24) devient :

$$\begin{cases} \rho \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = \mathbf{f} - \nabla \left(\bar{p} + \frac{2}{3}\rho k \right) + \nabla \cdot \left((\mu + \mu_T)\boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T \right) \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

Finalement, pour résoudre ce système il est donc nécessaire d'utiliser une évaluation de la viscosité turbulente et de l'énergie cinétique turbulente. De nombreux modèles de turbulence ont été développés au fil des années, nous nous intéresserons dans le cadre de ce travail au modèle de Spalart-Allmaras particulièrement approprié pour l'étude des écoulements proche paroi.

Modèle de turbulence de Spalart-Allmaras

Le modèle de Spalart-Allmaras introduit en 1992 dans [Spalart et Allmaras, 1992] est un modèle récent en constante évolution [Allmaras et al., 2012, Rumsey, 2013] composé d'une unique équation de transport pour la viscosité turbulente modifiée. C'est un modèle robuste qui converge rapidement et ne nécessite qu'un maillage modérément raffiné près des parois. Il est particulièrement adapté aux écoulements proche paroi à grands nombres de Reynolds, ce qui en fait un des modèles de prédilection pour l'étude de l'aérodynamique.

Toute grandeur scalaire transportable, et plus particulièrement la viscosité turbulente modifiée $\tilde{\nu}$, vérifiant les lois de conservation est solution de l'équation suivante :

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\tilde{\nu} = \text{Diffusion} + \text{Production} - \text{Destruction} \quad (1.27)$$

Le modèle de turbulence de Spalart-Allmaras repose sur cette équation, avec des expressions pour les termes de diffusion, de production et de destruction soigneusement définis en accord avec les données expérimentales.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\text{Diffusion} &= \frac{1}{\sigma} (\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}) + c_{b2} (\nabla \tilde{\nu})^2) \\
\text{Production} &= c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu} \\
\text{Destruction} &= (c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2}) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2
\end{aligned} \tag{1.28}$$

où d représente la distance à la paroi, et $\kappa = 0.41$ la constante de von Kármán.

La viscosité cinématique turbulente est ensuite déduite de la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\mu_T = f_{v1} \tilde{\nu} \quad \text{avec} \quad f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \\
\text{et} \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad c_{v1} &= 7.1
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Les constantes et fonctions constituant les termes de diffusion, production et destruction (1.28) ont été définies par calibrage suivant des données expérimentales et résultats numériques afin de reproduire fidèlement l'expérience.

Dans un premier temps, on présente les constantes :

$$\begin{aligned}
\sigma = 2/3, \quad c_{b1} = 0.1355, \quad c_{b2} = 0.622, \\
c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

La fonction f_{t2} est un correctif numérique apportée au modèle original pour rendre la solution nulle stable :

$$\begin{aligned}
f_{t2} = c_{t3} e^{-c_{t4} \chi^2} \\
\text{avec} \quad c_{t3} = 1.2, \quad c_{t4} = 0.5
\end{aligned} \tag{1.31}$$

On présente la fonction f_w intervenant dans le terme de destruction :

$$\begin{aligned}
f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right) \\
\text{avec} \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad \text{et} \quad r = \min \left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}, 10 \right)^{\frac{1}{6}} \\
c_{w2} = 0.3, \quad \text{et} \quad c_{w3} = 2
\end{aligned} \tag{1.32}$$

On définit également \tilde{S} comme la vorticité modifiée de l'écoulement [Allmaras

et al., 2012] :

$$\tilde{S} = \begin{cases} S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, & \text{si } \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} \geq -c_{v2} S \\ S \left(1 + \frac{c_{v2}^2 S + c_{v3} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}}{(c_{v3} - 2c_{v2}) S - \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}} \right), & \text{si } \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2} < -c_{v2} S \end{cases} \quad (1.33)$$

avec

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (1.34)$$

$$\text{et } S = \sqrt{2\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})}, \quad c_{v2} = 0.7, \quad c_{v3} = 0.9$$

Pour améliorer la convergence et la précision du modèle, et écarter les valeurs négatives pour la viscosité turbulente on peut utiliser la version *négative* [Allmaras et al., 2012]. Cette version consiste à remplacer (1.28) quand $\tilde{\nu} < 0$ par :

$$\text{Diffusion} = \frac{1}{\sigma} (\nabla \cdot [(\nu + f_n \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}] + c_{b2} (\nabla \tilde{\nu})^2)$$

$$\text{Production} = c_{b1} (1 - c_{t3}) \tilde{S} \tilde{\nu} \quad (1.35)$$

$$\text{Destruction} = -c_{w1} \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2$$

avec

$$f_n = \frac{c_{n1} + \chi^3}{c_{n1} - \chi^3}, \quad c_{n1} = 16 \quad (1.36)$$

De plus, la viscosité turbulente μ_t est fixée à zéro quand $\tilde{\nu}$ est négative.

L'équation complète (1.27) est résolue en réarrangeant les termes afin de faire apparaître une équation de Convection-Diffusion-Réaction [Hachem, 2009] :

Si $\tilde{\nu} \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \frac{c_{b2}}{\sigma} \nabla \tilde{\nu} \right) \cdot \nabla \tilde{\nu}}_{\text{Convection}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu})}_{\text{Diffusion}} \\ - \underbrace{\left(c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} + \left(\frac{c_{b1} f_{t2}}{\kappa^2} - c_{w1} f_w \right) \frac{\tilde{\nu}}{d^2} \right) \tilde{\nu}}_{\text{Reaction}} = 0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

Si non ($\tilde{\nu} < 0$),

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \frac{c_{b2}}{\sigma} \nabla \tilde{\nu} \right) \cdot \nabla \tilde{\nu}}_{\text{Convection}} - \underbrace{\frac{1}{\sigma} \nabla \cdot [(\nu + f_n \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu}]}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\left(c_{b1}(1 - c_{t3})S + c_{w1} \frac{\tilde{\nu}}{d^2} \right) \tilde{\nu}}_{\text{Reaction}} = 0 \quad (1.38)$$

1.3.3 La simulation des grandes échelles (LES)

La simulation des grandes échelles (LES pour Large Eddy Simulation), introduite en 1963 par Smagorinsky, est une approche intermédiaire entre la simulation numérique directe (DNS) et l'approche moyennée des équations de Navier-Stokes (RANS). La LES consiste à séparer les grandes et petites échelles de la turbulence par l'application d'un filtre passe-bas tel qu'au delà de la taille de coupure les grandes échelles sont résolues alors qu'en deçà l'action des petites échelles est modélisée. On parle alors de filtrage explicite. Ce filtrage réduit considérablement le coût du calcul par rapport à une DNS tout en assurant un résultat relativement proche de la solution exacte (cf Figure 1.2), contrairement à l'approche RANS qui consiste à modéliser toutes les échelles avec un unique modèle.

La simulation des grandes échelles est basée sur un filtrage spatial du système d'équations de Navier-Stokes, pour cela on introduit un opérateur de filtrage spatial noté \hat{f} tel que la vitesse \mathbf{u} se décompose de la façon suivante [Sagaut, 2002, Brun, 2008] :

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}''(t) \quad (1.39)$$

De plus, l'opérateur de filtrage spatial satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \alpha \\ f \hat{+} g &= \hat{f} + \hat{g} \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} \\ \hat{\hat{f}} &\neq \hat{f} \\ f \hat{\times} g &\neq \hat{f} \times \hat{g} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Ce filtrage spatial est en théorie le produit de convolution de la variable f et d'un filtre passe-bas en espace. En pratique ce filtrage est implicitement effectué par le maillage du calcul lui-même. Tout ce qui est plus petit que la

maille est par définition non résolu, et sera modélisé par une hypothèse de viscosité turbulente. Le modèle de turbulence utilisée est aussi dit modèle de sous-maille (SGS pour Sub-Grid Scale).

Le système d'équations de Navier-Stokes (1.8) ainsi filtré devient :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} &= 0 \\ \rho \frac{D\hat{\mathbf{u}}}{Dt} &= 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) - \nabla \hat{p} + \hat{\mathbf{f}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}}) \end{cases} \quad (1.41)$$

avec $\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{u}})$ le tenseur des contraintes de sous-maille tel que :

$$\sigma_{ij}(\hat{\mathbf{u}}) = \rho (u_i \hat{u}_j - \hat{u}_i \hat{u}_j) \quad (1.42)$$

Il représente l'effet des petites échelles non résolues sur les échelles résolues, et engendre une inconnue supplémentaire au système d'équations de Navier-Stokes, il est donc nécessaire d'introduire une équation de fermeture pour ce terme. En pratique, on utilise un modèle de sous-maille basé sur l'approximation de Boussinesq qui postule que le champ de vitesse de sous-maille se comporte comme un fluide avec une viscosité, dite de sous-maille, μ_t :

$$\sigma_{ij}(\hat{\mathbf{u}}) = -2\mu_t \varepsilon_{ij}(\hat{\mathbf{u}}) + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (1.43)$$

où $\sigma_{kk} = \hat{u}_i^2 - \hat{u}_i^2$ représente l'énergie cinétique de sous-maille.

Finalement le système d'équations de Navier-Stokes (1.8) pour la simulation des grandes échelles devient :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} &= 0 \\ \rho \frac{D\hat{\mathbf{u}}}{Dt} &= 2(\mu + \mu_t) \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}) - \nabla \hat{p}^* + \hat{\mathbf{f}} \end{cases} \quad (1.44)$$

avec \hat{p}^* la pression modifiée de la façon suivante :

$$\hat{p}^* = \hat{p} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (1.45)$$

Le modèle de sous-maille le plus utilisé qui exprime μ_t en fonction des variables résolues \hat{u}_i est le modèle de Smagorinsky (1963) :

$$\mu_t = \rho (C_S \Delta)^2 \sqrt{2\varepsilon_{ij}(\hat{\mathbf{u}})\varepsilon_{ij}(\hat{\mathbf{u}})} \quad (1.46)$$

où C_s est la constante de Smagorinsky qui dépend de l'écoulement étudié, elle vaut 0.18 en théorie mais est souvent fixée à 0.1 afin de réduire la dissipation près de la paroi, et Δ représente la taille du filtre spatial, la taille de maille :

$$\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}} \quad (1.47)$$

L'idée majeure de la méthode LES est de réduire le coût de résolution en ignorant les plus petites échelles, qui sont les plus coûteuses à résoudre, en utilisant un filtre passe-bas sur le système d'équations de Navier-Stokes. Un tel filtre passe bas peut être vu comme une moyenne spatiale et temporelle qui supprime les informations relative aux petites échelles de la solution numérique. Cependant les petites échelles jouent un rôle important dans l'étude de certains écoulements, notamment les écoulements proche paroi, il est donc nécessaire de modéliser au mieux leur effet sur l'écoulement, c'est encore un sujet de recherche actif. De nombreuses variantes à la méthode LES ont été proposées, notamment la méthode variationnelle multi-échelles (VMS) adoptée dans ce travail et développée dans la section suivante.

De plus on note la forte dépendance entre le maillage de calcul, qui opère le filtrage, et la solution obtenue, si bien que plus on raffine le maillage, plus il y a d'échelles de turbulence résolues et en continuant à raffiner on finit alors par réaliser une DNS.

1.4 La méthode variationnelle multi-échelles (VMS)

La spécificité de la méthode variationnelle multi-échelles (VMS pour Variational MultiScale) par rapport à la méthode LES est de prendre directement en compte par une méthode de stabilisation les effets des petites échelles sur les grandes, elle est ainsi référencée en tant que méthode LES implicite. Comme dans une méthode classique LES on procède à un filtrage implicite par le maillage des petites échelles, soit on nomme petites échelles les fluctuations de tailles inférieures à la taille de maille. On décompose alors la vitesse et la pression en une contribution grande échelle (\mathbf{u}_h, p_h) et une contribution petite échelle (\mathbf{u}', p') (voir Figure 1.3) tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_h + \mathbf{u}' \\ p &= p_h + p' \end{aligned} \quad (1.48)$$

Pour la discrétisation éléments finis, on opère une décomposition orthogonale des espaces de fonctions de vitesse, de pression et de pondération

[Hughes et al., 1998] telle que :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}} &= \mathcal{V}_h \oplus \mathcal{V}' \\ \tilde{\mathcal{Q}} &= \mathcal{Q}_h \oplus \mathcal{Q}' \\ \tilde{\mathcal{V}}_0 &= \mathcal{V}_{h,0} \oplus \mathcal{V}'_0\end{aligned}\tag{1.49}$$

si bien que $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}' \in \tilde{\mathcal{V}}$ et $\tilde{p} = p_h + p' \in \tilde{\mathcal{Q}}$, on décompose de la même manière les fonctions tests associées $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}_h + \mathbf{w}'$ et $\tilde{q} = q_h + q'$.

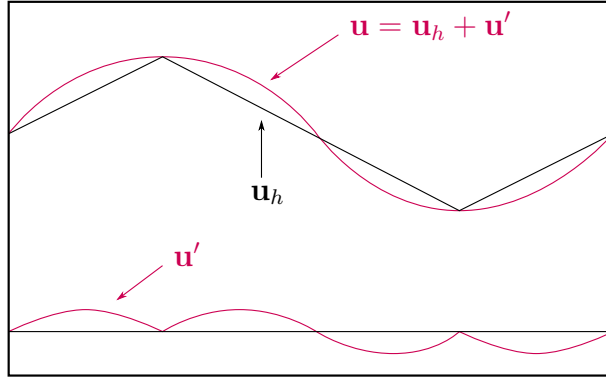


FIGURE 1.3 – Représentation de la décomposition multi-échelles opérée dans l'approche VMS, inspirée par [Hughes et al., 1998]

Par conséquent l'approximation du problème mixte (1.15) s'écrit :

Trouver le couple $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) \in (\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{Q}})$ tel que $\forall (\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{q}) \in (\tilde{\mathcal{V}}_0, \tilde{\mathcal{Q}})$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'), (\mathbf{w}_h + \mathbf{w}'))_{\Omega_h} + \rho ((\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') \cdot \nabla (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'), (\mathbf{w}_h + \mathbf{w}'))_{\Omega_h} \\ \quad + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') : \boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{w}_h + \mathbf{w}'))_{\Omega_h} - ((p_h + p'), \nabla \cdot (\mathbf{w}_h + \mathbf{w}'))_{\Omega_h} \\ \quad = (\mathbf{f}, (\mathbf{w}_h + \mathbf{w}'))_{\Omega_h} + (h, (\mathbf{w}_h + \mathbf{w}'))_{\Gamma_\Omega} \\ \\ (\nabla \cdot (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'), (q_h + q'))_{\Omega_h} = 0 \end{array} \right.\tag{1.50}$$

Pour maintenir la consistance de l'approche le système (1.50) doit être découplé en deux sous-systèmes, un pour les grandes échelles résolues, et un pour les petites échelles modélisées, relativement aux fonctions tests :

• **Système grande échelle**

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'), \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + \rho ((\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') \cdot \nabla (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'), \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon} (\mathbf{w}_h))_{\Omega_h} \\ \quad - ((p_h + p'), \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + (h, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} \\ \\ (\nabla \cdot (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'), q_h)_{\Omega_h} = 0 \end{array} \right.\tag{1.51}$$

• **Système petite échelle**

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t(\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'), \mathbf{w}')_{\Omega_h} + \rho ((\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') \cdot \nabla(\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'), \mathbf{w}')_{\Omega_h} + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}'))_{\Omega_h} \\ \quad - ((p_h + p'), \nabla \cdot \mathbf{w}')_{\Omega_h} = (\mathbf{f}, \mathbf{w}')_{\Omega_h} + (h, \mathbf{w}')_{\Gamma_h} \\ \\ (\nabla \cdot (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}'), q')_{\Omega_h} = 0 \end{array} \right. \quad (1.52)$$

La décomposition en petite et grande échelle réalisée étant orthogonale, les termes visqueux croisés ($\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h)$) dans (1.51) et ($\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}')$) dans (1.52) sont nuls. Afin d'obtenir une formulation stabilisée, on modélise dans un premier temps le système petite échelle (1.52) puis on substitue la solution pour les petites échelles dans le système grande échelle (1.51) produisant un terme de stabilisation instationnaire qui modélise les effets des petites échelles sur les grandes échelles sans les résoudre explicitement. Si bien que la précision et la stabilité de la formulation mixte soient améliorées.

1.4.1 Résolution du système petite échelle

Les petites échelles ont été définies telles qu'elles s'annulent sur les frontières de l'élément et soient discontinues d'un élément à un autre. Pour l'étude du système petite échelle, on se place donc au niveau de l'élément T , ainsi les intégrales sur les bords intérieurs des éléments s'annulent telles que $(h, \mathbf{w}')_{\Gamma_T} = 0$ et $((p_h + p'), \mathbf{w}')_{\Gamma_T} = 0$.

Le système petite échelle (1.52) se réécrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t \mathbf{u}', \mathbf{w}')_T + \rho ((\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') \cdot \nabla \mathbf{u}', \mathbf{w}')_T + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}'))_T - (\nabla p', \mathbf{w}')_T \\ \quad = (\mathbf{f} - \rho \partial_t \mathbf{u}_h - \rho (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') \cdot \nabla \mathbf{u}_h - \nabla p_h, \mathbf{w}')_T = (\mathcal{R}_m, \mathbf{w}')_T \\ \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}', q')_T = (-\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q')_T = (\mathcal{R}_c, q')_T \end{array} \right. \quad (1.53)$$

avec $(\mathcal{R}_m, \mathbf{w}')_T$ et $(\mathcal{R}_c, q')_T$ les résidus des équations du moment et de la continuité du système grande échelle projetés sur les petites échelles.

Afin d'approximer la solution des petites échelles, on introduit les simplifications suivantes sur la dépendance en temps et le terme non linéaire :

- La fine échelle est considérée quasi-statique ($\partial_t \mathbf{u}' = 0$), cependant le système de la fine échelle reste quasi-dépendant en temps par la présence dans \mathcal{R}_m d'une dépendance en temps de l'échelle grossière ($\partial_t \mathbf{u}_h \neq 0$)
- On admet que l'accélération convective est guidée par la vitesse grande échelle \mathbf{u}_h telle que : $(\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') \cdot \nabla(\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') \approx \mathbf{u}_h \cdot \nabla(\mathbf{u}_h + \mathbf{u}')$

Sous ces hypothèses le système (1.53) devient :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}', \mathbf{w}')_T + (2\mu \varepsilon(\mathbf{u}') : \varepsilon(\mathbf{w}'))_T - (\nabla p', \mathbf{w}')_T = (\mathcal{R}_m, \mathbf{w}')_T \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}', q')_T = (\mathcal{R}_c, q')_T \end{cases} \quad (1.54)$$

On note que la prise en compte de la pression des petites échelles permet d'assurer la continuité des petites échelles et d'ajouter un terme de stabilisation supplémentaire nécessaire à la résolution des écoulements à grands nombres de Reynolds [Wall et al., 2000, Tezduyar et Osawa, 2000]. Cependant il est ardu de résoudre le système petite échelle à la fois en vitesse et en pression, l'idée est donc de découpler la vitesse et la pression des petites échelles. A cet effet l'équation de continuité (1.55) est remplacée par une équation de Poisson modifiée (PPE) comme proposé dans [Franca et Nesliturk, 2001, Nesliturk, 1999]. Sachant que seul l'effet de la pression des petites échelles sur les grandes échelles est pris en compte, on peut approximer la solution en pression comme un terme de stabilisation [Codina, 2000, Franca et Oliveira, 2003] :

$$p' \approx \tau_c \mathcal{R}_c, \quad \text{avec} \quad \tau_c = \left(\left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{C_2 \|\mathbf{u}\|_T}{C_1 h_T} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (1.56)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes indépendantes de la taille caractéristique de l'élément h_T . De plus, Codina a montré dans [Codina, 2000] que la vitesse des petites échelles \mathbf{u}' est guidée par le résidu de l'équation du moment des grandes échelles \mathcal{R}_m et non par le résidu de l'équation de continuité \mathcal{R}_c . Par conséquent pour supprimer les effets de la pression des petites échelles dans l'équation du moment (1.54) on y impose $p' = 0$.

Ensuite, pour résoudre l'équation du moment du système petite échelle (1.54), on utilise le développement proposé par [Masud et Khurram, 2004] pour les variables petites échelles :

$$\mathbf{u}' = \sum_{T \in \Omega_h} \mathbf{u}'_T b_T \quad \text{et} \quad \mathbf{w}' = \sum_{T \in \Omega_h} \mathbf{w}'_T b_T \quad (1.57)$$

où b_T est la fonction de forme de la bulle, \mathbf{u}'_T est la vitesse petite échelle sur l'élément T , et \mathbf{w}'_T est la fonction de pondération associée.

En substituant (1.57) dans (1.54), on obtient pour l'équation du moment du système petite échelle :

$$\sum_{T \in \Omega_h} \rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla b_T \mathbf{u}'_T, b_T \mathbf{w}'_T)_T + (2\mu \varepsilon(b_T \mathbf{u}'_T) : \varepsilon(b_T \mathbf{w}'_T))_T = \sum_{T \in \Omega_h} (\mathcal{R}_m, b_T \mathbf{w}'_T)_T \quad (1.58)$$

Les fonctions bulles sont définies telles qu'elles s'annulent sur les frontières des éléments de maillage, ainsi l'expression précédente se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned} \forall T \in \Omega_h, \\ \rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla b_T \mathbf{u}'_T, b_T \mathbf{w}'_T)_T + (2\mu \varepsilon(b_T \mathbf{u}'_T) : \varepsilon(b_T \mathbf{w}'_T))_T = (\mathcal{R}_m, b_T \mathbf{w}'_T)_T \end{aligned} \quad (1.59)$$

Sachant que \mathbf{u}'_T et \mathbf{w}'_T sont constantes par élément on peut les sortir des intégrales, de plus l'équation précédente est vraie pour tout \mathbf{w}'_T , donc en particulier pour $\mathbf{w}'_T = 1$, si bien que :

$$\mathbf{u}'_T = \frac{(\mathcal{R}_m, b_T)_T}{\rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla b_T, b_T)_T + (2\mu \varepsilon(b_T) : \varepsilon(b_T))_T}, \quad \forall T \in \Omega_h \quad (1.60)$$

En supposant que le résidu de l'équation du moment \mathcal{R}_m est constant par élément, on peut également écrire la vitesse des petites échelles par élément sous la forme d'un terme de stabilisation :

$$\mathbf{u}'|_T = \tau_m \mathcal{R}_m \quad (1.61)$$

où τ_m est le paramètre de stabilisation tel que :

$$\tau_m = \frac{\int_T b_T d\Omega}{\rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla b_T, b_T)_T + (2\mu \varepsilon(b_T) : \varepsilon(b_T))_T}, \quad \forall T \in \Omega_h \quad (1.62)$$

On remarque que le paramètre de stabilisation τ_m dépend fortement du choix de la fonction bulle, de plus on note que le terme convectif s'annule lorsqu'on utilise la même fonction bulle pour la vitesse et la fonction de pondération. Afin de conserver le terme convectif, on utilise donc un ordre différent d'interpolation, soit une combinaison de bulles standards b_T et de bulles upwinds b_T^u pour la fonction de pondération, tandis qu'on garde une bulle standard b_T pour la vitesse comme proposé dans [Masud et Khurram, 2004, Hachem, 2009] tel que :

$$\mathbf{w}'|_T = \mathbf{w}'_T b_T^* = \mathbf{w}'_T (b_T + b_T^u) \quad (1.63)$$

Si bien que le paramètre de stabilisation se réécrit :

$$\tau_m = \frac{\int_T b_T^* d\Omega}{\rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla b_T, b_T^*)_T + (2\mu \varepsilon(b_T) : \varepsilon(b_T))_T}, \quad \forall T \in \Omega_h \quad (1.64)$$

On note que la fonction bulle upwind s'annule dans le terme visqueux, en effet cela s'explique par l'utilisation d'éléments linéaires.

1.4.2 Résolution du système grande échelle

Considérons à présent le problème grande échelle dans lequel nous allons ajouter les contributions des petites échelles, sous l'hypothèse de petite échelle quasi-statique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + (\rho \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + \underbrace{(\rho \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}', \mathbf{w}_h)_{\Omega_h}}_{[1]} + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h))_{\Omega_h} \\ - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} - (p', \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h)_{\Omega_h} + \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{u}', q_h)_{\Omega_h}}_{[2]} = 0 \end{array} \right. \quad (1.65)$$

Ensuite on intègre par parties les termes [1] et [2] et on substitue \mathbf{u}' et p' par leurs expressions (1.61) et (1.56) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho (\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + (\rho \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} - \sum_{T \in \Omega_h} (\boldsymbol{\tau}_m \mathcal{R}_m, \rho \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h)_T \\ + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h))_{\Omega_h} - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + \sum_{T \in \Omega_h} (\boldsymbol{\tau}_c \mathcal{R}_c, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_T = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h)_{\Omega_h} - \sum_{T \in \Omega_h} (\boldsymbol{\tau}_m \mathcal{R}_m, \nabla q_h)_T = 0 \end{array} \right. \quad (1.66)$$

Finalement, en substituant les résidus par leurs expressions exactes et en développant tous les termes additionnels, on obtient un système grande échelle uniquement en fonction des variables grandes échelles :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\rho (\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h))_{\Omega_h} - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_{\Omega_h} + (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h)_{\Omega_h} - (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_{\Omega_h}}_{\text{Termes de Galerkin}} \\ & + \underbrace{\sum_{T \in \Omega_h} \boldsymbol{\tau}_m (\rho (\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) + \nabla p_h - \mathbf{f}, \rho \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h)_T}_{\text{Termes de stabilisation upwind}} \\ & + \underbrace{\sum_{T \in \Omega_h} \boldsymbol{\tau}_m (\rho (\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) + \nabla p_h - \mathbf{f}, \nabla q_h)_T}_{\text{Termes de stabilisation de pression}} \\ & + \underbrace{\sum_{T \in \Omega_h} (\boldsymbol{\tau}_c \nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_T}_{\text{Terme de stabilisation grad-div}} = 0 \end{aligned} \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_{h,0}, \forall q_h \in \mathcal{Q}_h \quad (1.67)$$

Ce nouveau système grande échelle se décompose en quatre principaux termes : le premier correspond à la formulation standard de Galerkin, le second et le troisième correspondent à la contribution de la vitesse des petites échelles et le dernier modélise les effets de la pression des petites échelles sur les grandes

échelles. Cette formulation est beaucoup plus stable que la formulation standard de Galerkin, grâce aux contributions des petites échelles en vitesse et en pression, elle est particulièrement adaptée pour la résolution des écoulements à convection dominante. Un schéma Backward Euler est utilisé pour l'intégration en temps ($\theta = 1$).

En pratique les paramètres de stabilisation τ_m et τ_c choisis dans CIMLIB sont les suivants [Codina, 2000, Hachem et al., 2010] :

$$\begin{aligned}\tau_m &= \left(\left(\frac{2\rho}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\rho \|\mathbf{u}\|_T}{h_T} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{m_T h_T^2} \right)^2 \right)^{-1/2} \\ \tau_c &= \frac{h_T \|\mathbf{u}\|_T}{2} \min(1, \text{Re}_T)\end{aligned}\tag{1.68}$$

où ν est la viscosité cinématique, $\text{Re}_T = \frac{\rho \|\mathbf{u}\|_T h_T}{2\mu}$ est le nombre de Reynolds local, et m_T est une constante indépendante de h_T .

1.5 Méthode de volume immergé

La simulation des écoulements avec interaction fluide-structure (FSI), consiste en l'étude fine des interactions entre un corps solide et l'écoulement dans lequel il est plongé. En mécanique des fluides la modélisation d'un tel problème est dans le cas général réalisée à l'aide d'un domaine spatial dont les bords coïncident avec l'interface du corps solide, on parle alors de maillage adapté au corps (body-fitted). Dans le cas de géométries 3D complexes un maillage body-fitted est très difficile à réaliser, et peu adapté à l'étude de corps solides en mouvement. Une solution est d'utiliser une approche monolithique, soit un unique domaine spatial qui englobe tout le problème et notamment le corps solide, celui-ci est donc littéralement immergé à l'intérieur du domaine où l'écoulement se produit. Le corps solide est donc discrétisé par des éléments du maillage et non plus par des frontières (cf Figure 1.4).

La méthode de volume immergé utilisée dans ce travail [Hachem et al., 2013b] consiste à repérer l'interface entre le fluide et le corps solide à l'aide d'une fonction distance signée, afin de pouvoir se contenter d'un unique système à résoudre avec des propriétés mécanique différentes suivant qu'il s'agisse d'un nœud dans le fluide ou dans le solide. Une telle méthode rend l'étude des objets en mouvement beaucoup plus aisée, mais permet aussi l'étude des écoulements multi-phases.

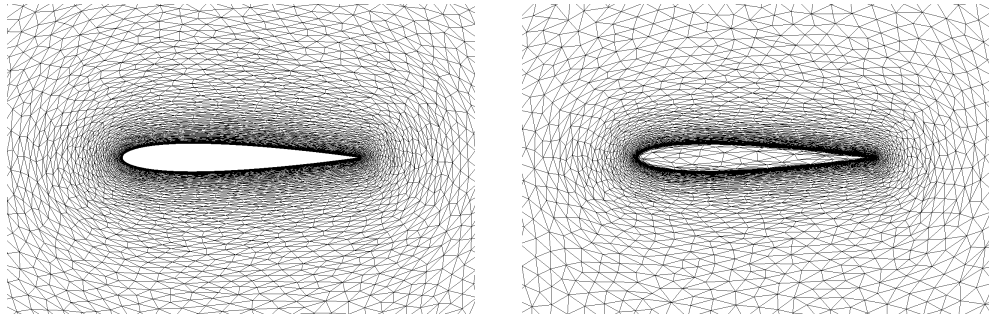


FIGURE 1.4 – A gauche : le maillage body fitted d’un profil d’aile ; A droite : le maillage immergé du même profil d’aile

1.5.1 Fonction levelset

Dans le cadre de l’approche monolithique, un unique maillage est utilisé pour décrire à la fois l’écoulement fluide et le corps solide. L’interface entre ces deux sous domaines est repérée à l’aide d’une fonction distance signée, nommée fonction levelset. Dans le cas de géométries simples dont on connaît une fonction analytique, on utilise cette dernière pour définir le corps solide. Dans le cas contraire et plus général, la géométrie est d’abord créée à l’aide d’un logiciel de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) puis le maillage de surface (STL pour stéréolithographie) est ensuite exporté afin d’être immergé dans le domaine monolithique (cf Figure 1.5). Une méthode alternative et plus précise consiste à définir la géométrie sous forme de NURBS [Hughes et al., 2005, Hachem et al., 2013b, Veysset, 2014].

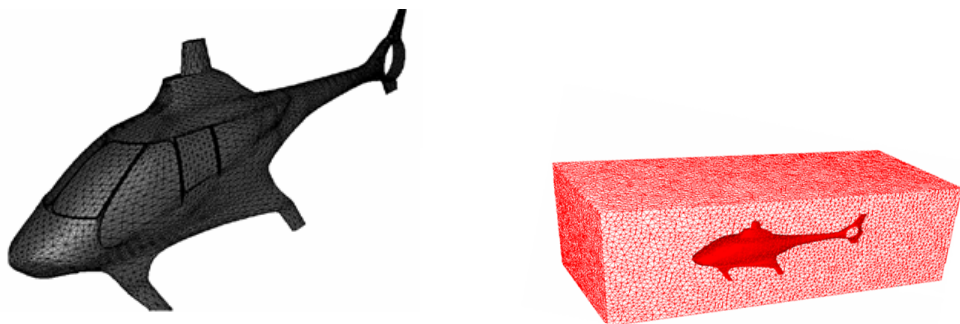


FIGURE 1.5 – A gauche : le maillage surfacique (STL) d’un hélicoptère ; A droite : l’hélicoptère immergé dans le maillage, l’hélicoptère est représenté par l’iso-valeur zéro de sa fonction levelset

La fonction levelset est ensuite calculée soit aisément à partir de la fonction analytique lorsqu'elle est connue, soit suivant un algorithme plus complexe à partir de la géométrie immergée [Bruchon et al., 2009], telle qu'on connaisse pour chaque nœud du domaine Ω_h sa distance minimum à l'interface entre le fluide et le corps solide. Si bien que l'interface entre le fluide et le corps solide Γ_{im} soit décrite par l'iso-valeur zéro de la fonction levelset. Afin de différencier plus aisément l'intérieur du corps solide de l'extérieur, cette distance est une distance signée, telle qu'elle prenne des valeurs positives à l'intérieur de l'objet et négatives à l'extérieur.

Soit un nœud \mathbf{X} de coordonnées (x, y, z) , on définit la fonction levelset ϕ telle que :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{X}) = d(\mathbf{X}, \Gamma_{im}), & \mathbf{X} \in \Omega_h \cap \Gamma_{im} \\ \phi(\mathbf{X}) = -d(\mathbf{X}, \Gamma_{im}), & \mathbf{X} \in \Omega_h \setminus \Gamma_{im} \\ \Gamma_{im} = \{\mathbf{X}, \phi(\mathbf{X}) = 0\} \end{cases} \quad (1.69)$$

1.5.2 Mélange des propriétés mécaniques

Le problème d'interaction fluide-structure est ensuite modélisé à l'aide d'un unique système d'équations de Navier-Stokes pour l'ensemble du domaine dont les propriétés mécanique varient suivant le sous-domaine dans lequel le nœud est situé. Pour cela on utilise une loi de mélange pour les propriétés mécaniques, celle-ci repose sur une fonction de Heaviside dépendant du signe de la fonction levelset :

$$H(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi \geq 0 \\ 0 & \text{si } \phi < 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

Cependant une telle fonction présente un changement brutale de valeur au niveau de l'interface, ce qui n'est pas adapté à une discrétisation spatiale monolithique et risque de faire diverger le solveur. Cette difficulté peut être surmontée en lissant la transition, ce qui correspond à imposer une épaisseur artificielle au niveau de l'interface. On définit alors une fonction de Heaviside lissé sur une épaisseur de 2ϵ [van der Pijl et al., 2005] :

$$H_\epsilon(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi > \epsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\phi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon}\right) \right) & \text{si } |\phi| \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } \phi < -\epsilon \end{cases} \quad (1.71)$$

avec ϵ supérieur à la taille de maille dans la direction normale h_n , en pratique on choisit $\epsilon = 2h_n$.

Approche VMS

La formulation faible associée au système d'équations de Navier-Stokes avec une contrainte de rigidité supplémentaire relative au corps solide immergé (1.75) est résolue par la méthode variationnelle multi-échelles (VMS) [Hachem et al., 2013a]. Ainsi on décompose la vitesse, la pression et le multiplicateur de Lagrange en une composante grande échelle et une composante petite échelle :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_h + \mathbf{u}' && \in \mathcal{V}_h \oplus \mathcal{V}' \\ p &= p_h + p' && \in \mathcal{Q}_h \oplus \mathcal{Q}' \\ \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{\lambda}_h + \boldsymbol{\lambda}' && \in \Lambda_h \oplus \Lambda' \end{aligned} \quad (1.76)$$

Si bien que le système grande échelle s'écrit : $\forall(\mathbf{w}_h, q_h, \boldsymbol{\xi}_h) \in \mathcal{V}_{h,0} \times \mathcal{Q}_h \times \Lambda_h$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\partial_t \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + \rho(\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - (p_h + p', \nabla \cdot \mathbf{w}_h) + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h)) \\ \quad + (\boldsymbol{\lambda}_h + \boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}_h)) + \sum_T (\mathbf{u}', -\rho \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h)))_T = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h) \\ (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) - \sum_T (\mathbf{u}', \nabla q_h)_T = 0 \\ -(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}_h)) + \sum_T (\mathbf{u}', \chi_s \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_h)_T = 0 \end{array} \right. \quad (1.77)$$

On en déduit les résidus des équations du moment, de continuité et de rigidité :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m &= \mathbf{f} - \rho \partial_t \mathbf{u}_h - \rho \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h - \nabla p_h + \chi_s \nabla \cdot \boldsymbol{\lambda}_h + \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)) \\ \mathcal{R}_c &= -\nabla \cdot \mathbf{u}_h \\ \mathcal{R}_r &= \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}_h) \end{aligned} \quad (1.78)$$

Les paramètres du système petite échelle $(\mathbf{u}', p', \boldsymbol{\lambda}')$ peuvent être modélisés sous la forme de termes de stabilisation tels que :

$$\mathbf{u}' = \tau_m \mathcal{R}_m, \quad p' = \tau_c \mathcal{R}_c, \quad \boldsymbol{\lambda}' = \tau_r \mathcal{R}_r \quad (1.79)$$

avec les paramètres de stabilisation :

$$\begin{aligned} \tau_m &= \left[\frac{1}{\alpha_0^2} + \left(\frac{c_1 \mu}{\rho h_T^2} \right)^2 + \left(\frac{c_2 \|\mathbf{u}_h\|_T}{h_T} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ \tau_c &= \left[\left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{c_2 \|\mathbf{u}_h\|_T h_T}{c_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ \tau_r &= c_3 \frac{h_T}{L} 2\mu_s \end{aligned} \quad (1.80)$$

où h_T est la taille d'un élément, L est la longueur caractéristique du problème, α_0 est le minimum de τ_m sur l'ensemble des éléments, et c_1, c_2, c_3 sont des constantes algorithmiques. Pour des éléments linéaires on prend $c_1 = 4, c_2 = 2, c_3 = 1$.

1.6 Conclusion

La mécanique des fluides est une science relativement récente, dont l'énoncé des équations régissant les écoulements de fluides réels remonte à 1845 par Navier et Stokes, cependant la résolution de ce système d'équations est toujours l'objet de nombreux sujets de recherche et représente l'un des problèmes du millénaire. En attendant de plus amples avancées du côté analytique, le système d'équations de Navier-Stokes est aujourd'hui résolu de manière discrète grâce à la simulation numérique, dans ce travail nous avons opté pour une discrétisation éléments finis du domaine spatial qui offre un bon compromis entre précision et efficacité pour la résolution de problèmes 3D complexes. Nous avons ensuite présenté les méthodes numériques classiques de résolution du système de Navier-Stokes avant de présenter la méthode variationnelle multi-échelles. Cette dernière se situe à mi-chemin entre une simulation numérique directe très coûteuse et une simulation moyennée peu précise, et permet en outre de stabiliser la formulation standard de Galerkin pour les écoulements à convection dominante. Finalement, nous avons présenté la méthode de volume immergé qui permet de travailler avec un domaine monolithique où un unique système d'équations est résolu pour l'ensemble du domaine grâce à l'ajout d'une contrainte de rigidité et à l'utilisation de lois de mélange pour les propriétés mécaniques.

Ce chapitre nous a permis de mettre en place le socle indispensable à la suite de ce travail, à savoir les méthodes de résolutions numériques adoptées pour la résolution des écoulements à grand nombre de Reynolds.

2

Génération et adaptation de maillage

Sommaire

2.1	Introduction	36
2.2	Métrie	36
2.2.1	Définition de l'espace métrique	37
2.2.2	Assemblage de la métrie	38
2.3	Génération de maillage	39
2.3.1	Méthode par arbre	39
2.3.2	Méthode frontale (Advancing front)	40
2.3.3	Méthode de Delaunay	40
2.3.4	Méthode topologique	40
2.3.5	Contrainte de volume minimal	41
2.3.6	Critère de classification	42
2.3.7	Optimisation topologique locale	44
2.3.8	Traitement de la frontière	47
2.4	Adaptation de maillage	47
2.4.1	Estimation de l'erreur d'interpolation sur les arêtes	48
2.4.2	Redimensionnement des arêtes	52
2.4.3	Tenseur de distribution des longueurs	53
2.4.4	Construction de la métrie	54
2.4.5	Comparaison numérique des trois méthodes présentées	63
2.4.6	Adaptation de maillage multi-critères	73
2.5	Conclusion	74

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons défini le système d'équations de Navier-Stokes qui régit les écoulements en mécanique des fluides. Cependant ces équations sont très complexes et ne peuvent être résolues analytiquement, i.e. la solution est une fonction dépendant de l'espace et du temps, que pour des écoulements simplifiés. Rappelons que la résolution analytique des équations de Navier-Stokes est un des problèmes du millénaire. Ainsi pour l'étude d'écoulements plus complexes, il est nécessaire d'adopter une autre approche pour la résolution du système d'équations. Premièrement l'espace physique où l'écoulement sera calculé doit être divisé en un certain nombre d'éléments géométriques, appelés éléments de maillage ou mailles, on parle alors de génération de maillage et de manière plus générale de discrétisation de l'espace. Cette discrétisation définit les lieux où sera résolu le système d'équations de Navier-Stokes. Il est donc évident que la précision de la solution numérique de l'écoulement est entièrement dépendante de la qualité du maillage en termes de tailles, de formes et de répartition des éléments. Pourtant aujourd'hui la génération de maillage est toujours un axe de recherche très important, en effet la génération de maillage pour des cas 3D complexes tant par la géométrie que par les caractéristiques de l'écoulement est encore un défi.

Dans ce chapitre nous allons dans un premier temps définir quelques notions de géométrie différentielle, puis expliciter la technique de génération de maillage employée dans ce travail, enfin nous verrons comment automatiser la génération de maillage.

2.2 Métrique

Dans cette partie nous rappelons la définition d'une métrique et de son espace associé nécessaire à la compréhension de ce manuscrit. Une métrique est un outil permettant de mesurer l'espace, c'est pourquoi elles sont souvent utilisées pour générer des maillages anisotropes non structurés [Dervieux et al., 2003, Castro-Díaz et al., 1995, Borouchaki et al., 1997a, Apel, 1999, Coupez, 2000, Huang, 2005, Mesri et al., 2006, Marcum et Alauzet, 2014]. L'adaptation de maillage basée sur les métriques est une technique permettant de générer un maillage unité (où tous les éléments sont isotropes avec une longueur d'arête unité) dans un espace métrique bien choisi. De telle sorte que le maillage puisse être créé par n'importe quel générateur de maillage uniforme non structuré. Ce maillage est ensuite converti en un maillage anisotrope par

l'application inverse vers l'espace physique.

2.2.1 Définition de l'espace métrique

Définition 2.1. Une métrique \mathbf{M} de $\mathbb{R}^{d \times d}$ est une matrice carré d'ordre d à valeurs réelles, symétrique et définie-positive, avec d la dimension de l'espace physique.

De ce fait, la métrique \mathbf{M} est diagonalisable sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} = {}^t\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R} \quad (2.1)$$

où \mathbf{R} est la matrice de rotation formée des vecteurs propres de \mathbf{M} (v_i) $_{i=1..d}$ et $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres correspondantes (λ_i) $_{i=1..d}$, strictement positives.

De plus, la fonction bilinéaire symétrique associée à \mathbf{M} définit le produit scalaire de deux vecteurs de \mathbb{R}^d :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{M}} = (\mathbf{u}, \mathbf{M}\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{u}\mathbf{M}\mathbf{v} \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Ainsi, la norme d'un vecteur \mathbf{u} de \mathbb{R}^d est définie par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{M}} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{M}}} \quad (2.3)$$

Sachant que \mathbf{R} est une matrice orthogonal, on a ${}^t\mathbf{R}\mathbf{R} = \mathbf{I}_d$, ainsi nous pouvons en déduire que l'application $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{R}$ définit la relation de passage de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^d, \mathbf{I}_d)$ vers l'espace métrique $(\mathbb{R}^d, \mathbf{M})$. Ainsi, nous retrouvons la forme bilinéaire (2.2) :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{M}} = \left((\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{R})\mathbf{u}, (\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{R})\mathbf{v} \right) = {}^t\mathbf{u}\mathbf{M}\mathbf{v} \quad (2.4)$$

L'interprétation géométrique d'une métrique est une ellipse représentant la boule unité pour le produit scalaire (Figure 2.1) :

$$\mathcal{E}_{\mathbf{M}} = \{ \mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{M}} = 1 \} \quad (2.5)$$

Le volume d'un élément T dans l'espace métrique est donné par la formule suivante :

$$|T|_{\mathbf{M}} = \sqrt{\det(\mathbf{M}_{\mathbf{T}})}|T|_{\mathbf{I}_d} \quad (2.6)$$

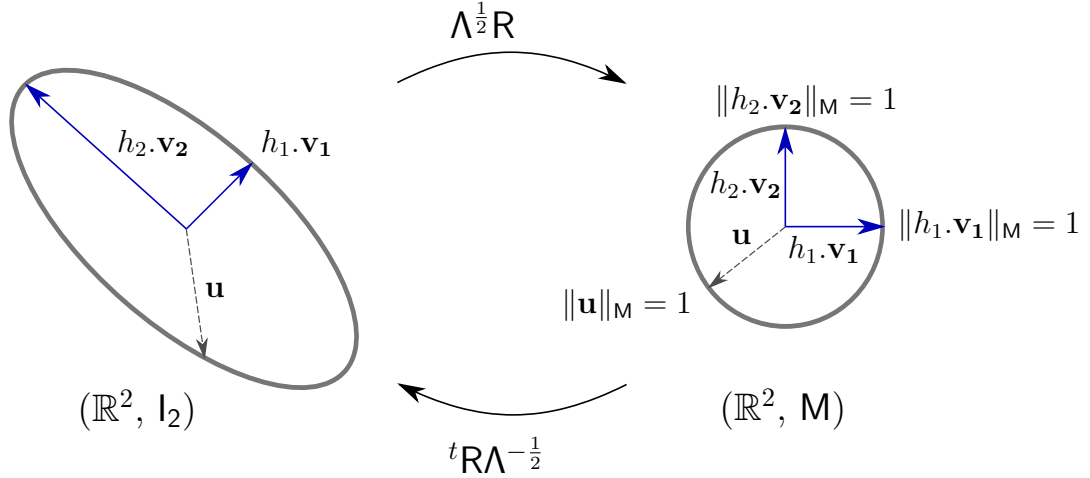


FIGURE 2.1 – Représentation géométrique d’une métrique en 2 dimensions, à gauche dans l’espace physique, à droite dans l’espace métrique

2.2.2 Assemblage de la métrique

Tout au long de ce travail nous utiliserons des maillages non structurés composés de triangles en 2D et de tétraèdres en 3D, soit des éléments formés de $d + 1$ sommets. Une métrique unité peut être construite pour n’importe quel maillage non structuré. En effet, on peut définir la métrique associée à un élément quelconque de la manière suivante [Guillard, 1993, Bottasso, 2004, Gruau, 2005, Li et al., 2005].

Proposition 2.1. Soit T un élément de volume non nul de \mathbb{R}^d de sommets X^0, \dots, X^d , il existe une unique métrique M_T pour laquelle T est équilatéral unité, on a alors :

$$M_T = {}^t A_T A_T \quad (2.7)$$

avec la matrice $A_T = (X^1 - X^0, \dots, X^d - X^0)^{-1}$

En répétant le processus pour tous les éléments du maillage, on obtient un champ de métrique constant par élément. Ainsi on sait construire, à partir de la donnée d’un élément, une métrique et son espace associé dans lequel cet élément est équilatéral unité. Dans le cadre de l’adaptation de maillage basée sur un champ de métrique nous souhaitons réaliser la procédure inverse. Ainsi à partir de la donnée d’une métrique nous souhaitons pouvoir créer un élément de maillage. Tel qu’un champ de métrique défini à chaque nœud du maillage initial permette de construire le maillage souhaité. Pour contrôler le maillage il suffit donc de remplir la métrique M de la manière suivante :

- On remplit \mathbf{R} avec les directions \mathbf{v}_i correspondants aux arêtes désirées ;
- puis on remplit Λ avec :

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i^2}$$

où h_i est la taille d'arête souhaitée dans la direction prédéfinie \mathbf{v}_i ;

- finalement il ne reste plus qu'à faire le produit $\mathbf{M} = \mathbf{R}\Lambda\mathbf{R}$

Le champ de métrique ainsi défini est envoyé au générateur de maillage. Un exemple d'utilisation est fournie sur la figure 2.2, où la métrique \mathbf{M} est appliquée sur le maillage initial représenté à gauche, cette métrique prescrit une taille de maille de 0.1 m suivant la direction x et 1 m suivant y , le maillage solution obtenu en sortie du mailleur est présenté sur la droite.

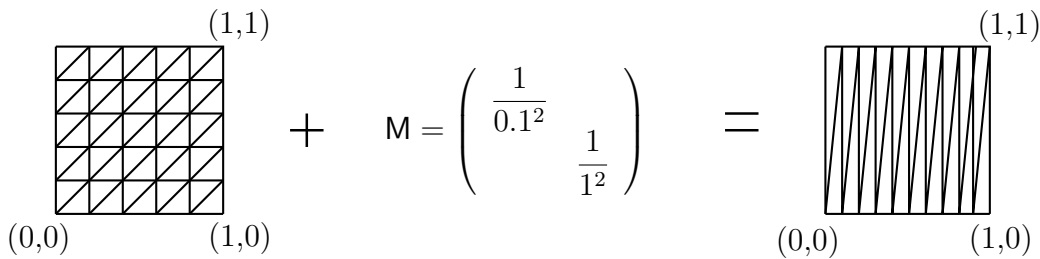


FIGURE 2.2 – Exemple d'utilisation d'une métrique

2.3 Génération de maillage

Il existe quatre principales méthodes pour la génération de maillage :

- Méthode par arbre
- Méthode frontale
- Méthode de Delaunay
- Méthode topologique

On présente ci-après les trois premières méthodes de manière succinctes, pour plus de détails voir références.

2.3.1 Méthode par arbre

Introduite en 1983 [Yerry et Shephard, 1983], la méthode consiste à définir une cellule mère (un rectangle en 2D et un parallélépipède en 3D) englobant l'objet à mailler, et à raffiner cette dernière récursivement. En pratique, la cellule mère est divisée en 4 cellules identiques (8 en 3D), chaque cellule est

marquée suivant sa position par rapport à l'objet à mailler : à l'intérieur, à l'extérieur ou alors elle coupe la frontière de l'objet. Seules les cellules coupant la frontière sont à nouveau subdiviser en 4 cellules (8 en 3D), et le processus est répété jusqu'à ce que le niveau de résolution désiré soit atteint. On obtient alors un arbre 2^d -aire appelé quadtree en 2D et octree en 3D. Cette méthode est robuste, rapide et facile à implémenter et paralléliser, cependant elle n'est pas adaptée à la génération d'éléments anisotropes et a tendance à générer un nombre d'éléments élevé.

2.3.2 Méthode frontale (Advancing front)

La méthode frontale a été introduite par [Lo, 1985, Löhner et Parikh, 1988]. Elle consiste à construire des éléments couche par couche à partir de la triangulation des faces frontières du domaine formant ainsi un front qui balaie progressivement tout le domaine. Le processus s'arrête quand le front est vide. La grande difficulté de cette méthode est la détection de collision, afin d'éviter que des éléments ne s'intersectent, celle-ci est très coûteuse. La méthode frontale reste la meilleure technique pour produire le plus d'éléments de bonne qualité, cependant elle pose un problème de convergence.

2.3.3 Méthode de Delaunay

Proposée par Delaunay en 1934 [Delaunay, 1934], la méthode repose sur la propriété suivante : la boule ouverte circonscrite de chaque élément ne doit contenir aucun autre nœud de maillage. En pratique une méthode de Delaunay consiste à trianguler une boîte qui englobe tous les nœuds puis à introduire les nœuds X les uns après les autres dans la triangulation par le noyau de Delaunay, finalement les éléments en dehors du domaine sont supprimés. Pour plus de détails voir [Weatherill et Hassan, 1994, George et Bouchaki, 1997, George et Bouchaki, 1998, Shewchuk, 1998]. Le principal inconvénient de la méthode de Delaunay porte sur la propriété de Delaunay qui ne correspond pas à un critère de qualité et la méthode peut ainsi engendrer des éléments de très mauvaise qualité notamment près des frontières. Une phase d'optimisation est donc indispensable à la génération d'un maillage. Finalement la méthode de Delaunay est très technique et requiert une grande expertise pour l'implémentation d'une version robuste et rapide.

2.3.4 Méthode topologique

Les trois précédentes méthodes sont dites classiques, la quatrième méthode, est celle initiée au CEMEF par Coupez en 1991 [Coupez, 1991]. Le

mailleur topologique MTC procède de manière itérative par des optimisations locales de la topologie du maillage. Il présente de grandes qualités telles que sa grande robustesse, son indépendance vis à vis de la dimension et sa facilité d'implémentation, cependant il est plus coûteux que les méthodes dites classiques. En effet la génération de maillage par optimisation topologique est un problème d'optimisation de maillage, dont l'unique contrainte porte sur le volume du maillage. D'autres variantes de méthode d'optimisations topologiques locales existent dans la littérature [Pain et al., 2001, Bottasso, 2004, Li et al., 2005].

2.3.5 Contrainte de volume minimal

Le maillage étant un objet très difficile à construire directement, nous introduisons la notion de topologie.

Définition 2.2. Soit \mathcal{N} un ensemble fini de nœuds de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, soit \mathcal{T} un ensemble d'éléments de maillage dont les sommets appartiennent à \mathcal{N} et notons \mathcal{F} l'ensemble des faces de ces éléments. \mathcal{T} est une topologie de maillage de Ω si et seulement si :

- (i) chaque face de \mathcal{F} partage un ou deux éléments de \mathcal{T} mais pas plus ;
- (ii) $(\mathcal{N}, \partial\mathcal{T})$ est un maillage de la frontière $\partial\Omega$.

Le générateur de maillage topologique résout un problème d'optimisation de maillage sous la contrainte du volume du domaine Ω . En effet, le mailleur ne doit pas déformer le domaine. Nous introduisons ici deux formulations pour le calcul du volume du maillage.

Proposition 2.2. Soit $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$ un maillage de Ω . La mesure de ce maillage est :

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \sum_{T \in \mathcal{T}} |T| \\ &= \frac{1}{d} \int_{\bigcup_{F \in \partial\mathcal{T}} F} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nous avons donc deux manières de calculer le volume du maillage, le mailleur topologique consiste à vérifier l'égalité entre ces deux formulations.

Grâce à la condition (ii) de la définition 2.2, on a bien :

$$|\Omega| = \frac{1}{d} \int_{\bigcup_{F \in \partial\mathcal{T}} F} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, dx \tag{2.9}$$

Cependant, cette définition ne suffit pas à vérifier $|\Omega| = \sum_{T \in \mathcal{T}} |T|$. D'où la nécessité de définir le théorème fondamental suivant :

Théorème 2.1. *Soit \mathcal{T} une topologie de maillage \mathcal{N} , un ensemble fini de nœuds de Ω . $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$ est un maillage de Ω si et seulement si les éléments de \mathcal{T} sont de volume non nul et si :*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |T| = |\Omega| \quad (2.10)$$

En d'autres termes, seules les topologies de maillage vérifiant (2.10) peuvent être considérées comme des maillages conformes, on parle du critère de volume minimal.

Les topologies de maillage sont générées à partir de l'opérateur d'étoilement qui consiste à connecter un nœud X à un ensemble de faces \mathcal{F} :

$$\mathcal{T}^*(X, \mathcal{F}) = \{\text{enveloppes convexes de } X \cup F \mid F \in \mathcal{F}, X \notin F\} \quad (2.11)$$

Autrement dit, l'opérateur d'étoilement construit effectivement une topologie de maillage dès lors que l'ensemble des faces décrit une surface qui renferme un volume.

2.3.6 Critère de classification

La méthode topologique consiste en des opérations locales de couper-coller. A partir d'un maillage initial conforme, et avec la donnée d'un champ de métrique, nous allons construire un nouveau maillage adapté sur le champ de métrique et conforme.

Sachant qu'il n'y a pas unicité de la topologie de maillage vérifiant le champ de métrique tout en conservant le volume minimal, nous devons définir un critère de sélection. Ce critère de sélection repose sur la qualité des éléments, mesurée par un critère de forme [Coupez, 1991, Dompierre et al., 2003].

Définition 2.3. Un critère de forme est une fonction scalaire continue c qui à un élément T de volume non nul associe $c(T)$ tel que :

- (i) $0 < c(T) \leq 1$;
- (ii) $c(T) = 1$ si et seulement si T est équilatéral ;
- (iii) $c(T) \rightarrow 0$ lorsque le volume de T tend vers zéro ;

- (iv) $c(T)$ est invariant par translation, rotation, homothétie et changement d'orientation.

On dénombre trois principaux critères de forme :

$$c(T) = c_0 \frac{h_T}{\rho(T)} \quad (2.12)$$

$$c(T) = c_0 \frac{|T|}{h_T^d} \quad (2.13)$$

$$c(T) = \frac{d}{\kappa_2(M_T)} \quad (2.14)$$

avec h_T la longueur de la plus grande arête de T (diamètre), $\rho(T)$ le rayon du cercle inscrit de T , M_T la métrique associée à T et κ_2 l'opérateur de conditionnement (rapport entre la plus grande valeur propre et la plus petite). La constante c_0 permet de rendre le critère de forme unitaire pour un élément équilatéral, il correspond à l'inverse du volume V_0 de l'élément équilatéral unitaire.

D'après [Knupp, 2001], tous les autres critères de formes existants sont équivalents à ces trois principaux.

Afin de sélectionner la meilleure topologie de maillage parmi toutes les topologies possibles, le meilleur topologique utilise le critère (2.13). Il s'agit également du critère recommandé par [Dompierre et al., 2003].

Ce critère se réécrit de la manière suivante pour un remaillage selon un champ de métrique. En effet, la qualité des éléments doit être évaluée dans le champ de métrique M à l'aide d'un critère de forme anisotrope [Do Carmo, 1976]. Ainsi (2.13) devient :

$$c_0 \frac{|T|_{M_T}}{h_{M_T}^d} \quad (2.15)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\text{la métrique sur l'élément } T \quad \mathbf{M}_T &= \frac{1}{d+1} \sum_{i=0}^d \mathbf{M}^i \\
\text{le volume euclidien} \quad |T|_{\mathbf{M}_T} &= |T| \sqrt{\det(\mathbf{M}_T)} \\
\text{la taille moyenne au sens } L^2 \quad h_{\mathbf{M}_T} &= \left(\frac{2}{d(d+1)} \sum_{0 \leq i < j \leq d} \|X^j - X^i\|_{\mathbf{M}_T}^2 \right)^{1/2} \\
\text{le facteur de normalisation} \quad c_0 &= \frac{1}{V_0} \\
\text{et le volume de référence} \quad V_0 &= \frac{\sqrt{d+1}}{2^{d/2} d!}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Nous noterons que la métrique sur l'élément \mathbf{M}_T est considérée constante sur l'élément ce qui revient à considérer localement le champ de métrique comme euclidien ; de plus le volume et les longueurs sont évaluées dans un cadre euclidien mais non canonique.

De plus, un critère portant sur la taille d'arête est utilisé afin d'introduire ou de retirer suffisamment de nœuds avant de commencer à optimiser la qualité des éléments :

$$\min \left(h_{\mathbf{M}_T}, \frac{1}{h_{\mathbf{M}_T}} \right)^d \tag{2.17}$$

Finalement le critère de qualité $c(T)$ retenu pour classer les éléments, est le minimum entre le critère de forme (2.15) et le critère de taille (2.17) :

$$c(T) = \min \left(c_0 \frac{|T|_{\mathbf{M}_T}}{h_{\mathbf{M}_T}^d}, h_{\mathbf{M}_T}^d, \frac{1}{h_{\mathbf{M}_T}^d} \right) \tag{2.18}$$

2.3.7 Optimisation topologique locale

Concrètement, une optimisation topologique locale du maillage est un enchaînement d'opération de couper/coller ou on échange une topologie locale (autour d'un nœud ou d'une arête) par une autre topologie respectant la métrique, de volume minimal et de meilleure qualité. L'ensemble des nœuds et des arêtes sont parcourus plusieurs fois avant d'arriver à convergence.

Algorithme 1 : Adaptation du maillage $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$ au champ de métrique M

Data : maillage $(\mathcal{N}, \mathcal{T})$, champ de métrique M

Result : nouveau maillage $(\mathcal{N}_{opt}, \mathcal{T}_{opt})$

```

while la topologie  $\mathcal{T}$  est modifiée do
  for chaque nœud et arête do
    • Retirer la topologie locale  $\mathcal{T}_x$  autour de ce nœud ou de cette arête;
    • Parmi tous les candidats  $\mathcal{T}_e$  de volume minimal (obtenus par
      l'opérateur d'étoilement) insérer une topologie maximale vis à
      vis de la relation d'ordre;
    [Coupez, 1991] • Transporter le champ  $M$  si nécessaire;
  end
end

```

La topologie locale \mathcal{T}_x autour d'un nœud X est composée des éléments de \mathcal{T} dont tous les sommets appartiennent à $\mathcal{X} = \{X\} \cup \mathcal{N}(X)$ l'ensemble des voisins de X (Figure 2.3, le triangle $X^1X^5X^6$ fait partie de \mathcal{T}_x). Dans cette configuration les topologies candidates pour réaliser un étoilement sont :

- Conserver X et supprimer X^6 (Figure 2.3 (a))
- Supprimer X et X^6 (5 topologies candidates, par exemple Figure 2.3 (b))
- Barycentrer X à l'intérieur de la topologie (entraîne la suppression de X^6), on note G l'isobarycentre (Figure 2.3 (c))

La topologie locale \mathcal{T}_x autour d'une arête $[X, X']$ est composée des éléments de \mathcal{T} dont tous les sommets appartiennent à $\mathcal{X} = \{X, X'\} \cup \mathcal{N}(X, X')$ avec $\mathcal{N}(X, X') = \mathcal{N}(X) \cap \mathcal{N}(X')$ (Figure 2.4). Dans ce cas les topologies candidates sont :

- Conserver $[X, X']$ et supprimer X^3 (Figure 2.4 (a))
- Basculer l'arête $[X, X']$ en $[X^1, X^2]$ (entraîne la suppression de X^3) (Figure 2.4 (b))
- Introduire un nœud C au milieu de l'arête $[X, X']$ et supprimer X^3 (Figure 2.4 (c))

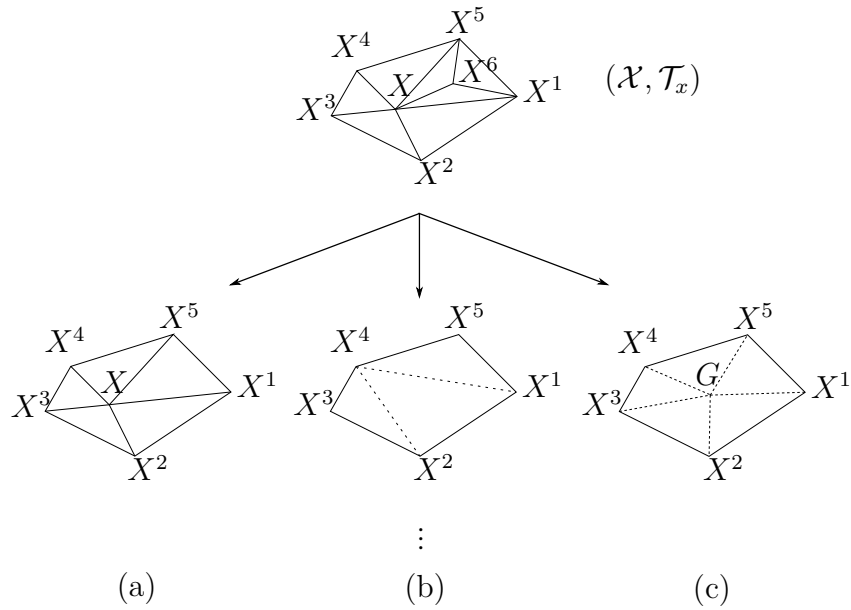


FIGURE 2.3 – Topologie locale \mathcal{T}_x remise en cause autour du nœud X et les topologies candidates (a, b, c)

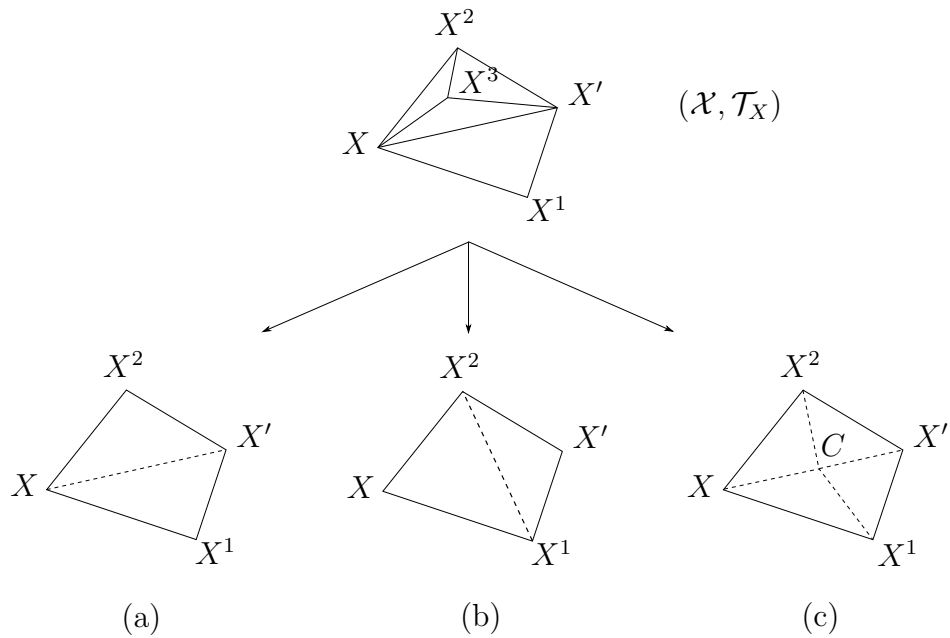


FIGURE 2.4 – Topologie locale \mathcal{T}_x remise en cause autour de l'arête $[X, X']$ et les topologies candidates (a, b, c)

2.3.8 Traitement de la frontière

Un traitement spécial est réservé aux nœuds appartenant à la frontière du maillage. En effet pour permettre la suppression d'un sommet $X \in \partial\mathcal{T}_x$, chaque face frontière est reliée à un nœud virtuel afin de former de nouveaux éléments qui ne participent pas directement au maillage (Figure 2.5). Ils sont qualifiés d'éléments virtuels. Dans ces conditions la topologie est sans frontière. Ainsi les nœuds et faces frontières peuvent être modifiés librement tant que cela n'induit pas de changement de volume.

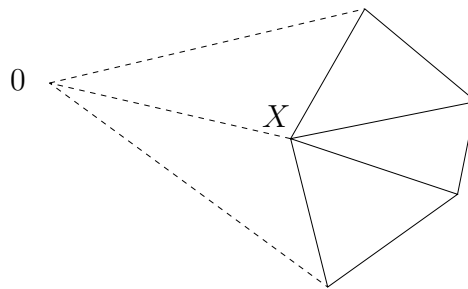


FIGURE 2.5 – Topologie sans frontière grâce au nœud virtuel 0

2.4 Adaptation de maillage

Les écoulements turbulents sont chaotiques, ils engendrent de nombreux phénomènes instationnaires dus principalement au développement de tourbillons. L'étude des écoulements turbulents est rendue très complexe par leur comportement instationnaire. En effet un maillage permettant une bonne précision de la solution tout au long de la simulation est un maillage très coûteux en termes d'entités de maillage avec des éléments isotropes très fins dans les zones d'apparition de ces phénomènes. Or ces maillages sont composés d'un très/trop grand nombre de degrés de liberté, la résolution des équations de Navier-Stokes sur un tel maillage est donc très longue et parfois même inabordable pour les clusters actuellement opérationnels. Deux options s'offrent alors à nous si nous ne souhaitons pas attendre 2030 [Slotnick et al., 2014] pour voir l'apparition de la nouvelle génération de super calculateurs, soit se contenter de résoudre une version simplifiée des équations de Navier-Stokes (RANS) qui ne nécessite pas une grande précision de maillage, soit adapter le maillage dynamiquement afin de résoudre avec précision ce type d'écoulement avec un minimum d'éléments de maillage.

Le concept d'adaptation de maillage remonte aux années 70 [Allgower et McCormick, 1978, Berger et Olinger, 1984], mais il a fallu attendre les années 90 pour voir émerger l'adaptation de maillage anisotrope [Peraire et al., 1987, Löhner, 1989, D'Azevedo et Simpson, 1991, Selmin et Formaggia, 1992, Peraire et al., 1992, Zienkiewicz et Wu, 1994] basée sur les métriques [Mavriplis, 1990, George et al., 1991, Vallet, 1992, Castro-Díaz et al., 1997]. L'adaptation de maillage permet de s'affranchir d'un maillage initial défini *a priori* pour permettre la reconstruction du maillage au fur et à mesure des itérations en fonction de l'erreur *a posteriori* [Becker et Rannacher, 2001, Dervieux et al., 2003, Picasso, 2003, Vallet et al., 2007, Loseille, 2008]. Aujourd'hui on voit apparaître une standardisation du processus d'adaptation de maillage qui est le fruit de nombreuses années de recherches [Alauzet et Loseille, 2016]. Premièrement, une analyse d'erreur *a posteriori* permet de localiser les zones de forts gradients de la solution. Ensuite on procède à la construction d'une métrique directionnelle qui est fournie au générateur de maillage, qui produit un maillage conforme, optimisé selon le champ de métrique fournie. L'adaptation de maillage anisotrope a déjà montré être un outil puissant pour améliorer l'efficacité des méthodes éléments finis et volumes finis. Elle présente l'avantage de diminuer le nombre d'éléments nécessaire et ainsi le temps de calcul par rapport à une technique de raffinement de maillage isotrope.

L'ambition est d'adapter le maillage dynamiquement sur les paramètres physiques les plus pertinents. Dès lors l'objectif est de construire une métrique qui prescrit l'orientation des éléments et les tailles de mailles optimales correspondantes. Diverses approches ont été proposées dans la littérature, notamment dans [Buscaglia et Dari, 1997, George et al., 2002, Remacle et al., 2005, Mesri et al., 2006, Bois et al., 2012], ces méthodes nécessitent toute la reconstruction de la hessienne. Dans ce travail nous poursuivons l'idée développée dans [Coupez, 2011], consistant à s'affranchir de la reconstruction de la hessienne en réalisant l'étude sur les arêtes. Cette procédure nécessite donc d'évaluer l'erreur d'interpolation sur chaque arête du domaine, puis de la minimiser sur l'ensemble des arêtes du maillage. Ces étapes sont décrites en suivant le cheminement initial de [Coupez, 2011], puis les améliorations apportées dans [Coupez et al., 2013, El Jannoun, 2014] avant de proposer une nouvelle procédure. Ces trois méthodes sont finalement comparées.

2.4.1 Estimation de l'erreur d'interpolation sur les arêtes

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine physique et Ω_h sa discrétisation spatiale (i.e. son maillage). Soit un champ $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ la solution exacte d'un problème

d'équations aux dérivées partielles, et u_h la solution calculée sur Ω_h par une méthode éléments finis, nous souhaitons construire un maillage minimisant l'erreur d'approximation $\|u - u_h\|$. Soit $\Pi_h u$ l'interpolée linéaire du champ u sur les nœuds du maillage Ω_h telle que :

$$\Pi_h u(X^i) = u(X^i) \quad (2.19)$$

Selon le lemme de Céa [Cea, 1964], il existe une constante c telle que :

$$\|u - u_h\| \leq c \|u - \Pi_h u\| \quad (2.20)$$

Ainsi, minimiser l'erreur d'interpolation permet de borner l'erreur d'approximation. L'adaptation de maillage développée ici consiste à trouver un maillage qui minimise l'erreur d'interpolation pour un nombre d'entités de maillage fixé. Le processus d'adaptation de maillage peut ainsi être reformulé comme un problème d'optimisation sous contrainte.

Pour simplifier les notations, on notera dorénavant la solution interpolée $u_h = \Pi_h u$. Nous introduisons également la notation suivante pour un nœud quelconque X^i , avec $\Gamma(i)$ l'ensemble des nœuds connectés à X^i (Figure 2.6) :

$$\forall j \in \Gamma(i), \mathbf{X}^{ij} = X^j - X^i, \text{ et } U^{ij} = U^j - U^i \text{ avec } U^i = u(X^i) \quad (2.21)$$

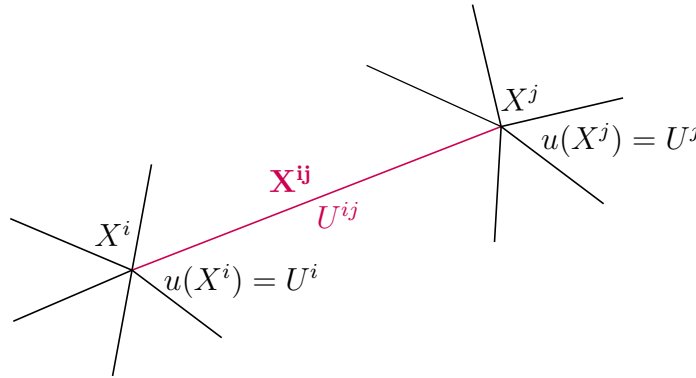


FIGURE 2.6 – Arête X^{ij} liant les nœuds X^i et X^j

Prenons le développement de Taylor à l'ordre 1 du champ u_h au nœud X^j :

$$U^j = U^i + \nabla u_h|_T \cdot \mathbf{X}^{ij} \Rightarrow U^{ij} = \nabla u_h|_T \cdot \mathbf{X}^{ij} \quad (2.22)$$

où T désigne un élément de maillage et $\nabla u_h|_T$ insiste sur le fait que le gradient est de nature P_0 .

La solution interpolée u_h étant un champ scalaire à valeur aux nœuds (P_1), le gradient de u_h est donc constant par élément (P_0), discontinu d'un élément à un autre. Cependant son projeté le long des arêtes est continu puisqu'il ne dépend que des valeurs nodales aux extrémités de chaque arête. Dans ce qui suit ∇u_h fera référence au gradient continu sur les arêtes. La continuité du gradient ainsi définie nous permet d'avancer que l'erreur d'interpolation le long des arêtes est du second ordre pour les éléments P_1 comme démontré dans la proposition suivante [Coupez, 2011].

Proposition 2.3. L'erreur du gradient de la solution interpolée par rapport au gradient de la solution exacte projeté sur l'arête est bornée par la hessienne de la solution :

$$|(\nabla u_h - \nabla u(X^i)) \cdot \mathbf{X}^{ij}| \leq \max_{Y \in [X^i, X^j]} |\mathbf{H}_u(Y) \mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}| \quad (2.23)$$

où $\mathbf{H}_u = \nabla^{(2)}u$ est la hessienne associée au champ u .

Démonstration. Rappelons que u est un champ scalaire $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Le théorème de la valeur moyenne appliquée à u entre les nœuds X^i et X^j , implique :

$$\exists A \in]X^i, X^j[, \quad U^{ij} = \nabla u(A) \mathbf{X}^{ij}, \quad \text{avec } A = X^i + s \mathbf{X}^{ij}, \quad s \in]0, 1[\quad (2.24)$$

Une seconde utilisation du théorème de la valeur moyenne appliqué cette fois à $\nabla u|_{\mathbf{X}^{ij}}$ entre X^i et A donne :

$$\exists B \in]X^i, A[, \quad (\nabla u(A) - \nabla u(X^i)) \cdot \mathbf{X}^{ij} = s \mathbf{H}_u(B) \mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij} \quad (2.25)$$

Ainsi, par substitution de (2.24) dans (2.25), on obtient :

$$U^{ij} - \nabla u(X^i) \cdot \mathbf{X}^{ij} = s \mathbf{H}_u(B) \mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij} \quad (2.26)$$

Finalement en utilisant (2.22), nous retrouvons la majoration proposée :

$$|(\nabla u_h - \nabla u(X^i)) \cdot \mathbf{X}^{ij}| = |s \mathbf{H}_u(B) \mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}| \leq \max_{Y \in [X^i, X^j]} |\mathbf{H}_u(Y) \mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}| \quad (2.27)$$

Pour plus de détail voir [Coupez, 2011]. □

Par conséquent l'erreur d'interpolation commise sur le gradient projeté sur l'arête est bornée par la hessienne de la solution. Afin de s'affranchir de la procédure coûteuse de reconstruction de la hessienne, nous proposons ici d'utiliser la relation (2.23) pour exprimer le projeté de la hessienne de la solution sur l'arête ($\mathbf{H}_u(Y) \mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}$) à partir du gradient projeté sur l'arête.

A cet effet, donnons le développement de Taylor du gradient de u au nœud X^j :

$$\nabla u(X^j) = \nabla u(X^i) + \mathbf{H}_u(X^i) \mathbf{X}^{ij} \quad (2.28)$$

On note $\mathbf{g}^{ij} = \nabla u(X^j) - \nabla u(X^i)$ la variation du gradient de u le long de l'arête X^{ij} . Nous utilisons cette projection comme une évaluation de l'erreur d'interpolation au second ordre le long de l'arête est donnée par :

$$e_{ij} = |\mathbf{g}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}| = |\mathbf{H}_u(X^i) \mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}| \quad (2.29)$$

Cependant l'erreur d'interpolation (2.29) ne peut pas être évaluée directement car elle nécessite la connaissance explicite de ∇u pour chaque nœud du maillage et donc de la solution exacte u . Or nous ne disposons que de la solution calculée u_h dont le gradient est P_0 , il est donc nécessaire de reconstruire le gradient de u_h sur les nœuds, pour donner une évaluation de ∇u .

Nous proposons de reconstruire le gradient de ∇u_h aux nœuds par la méthode des moindres carrés, tel que :

$$\mathbf{G}^i = \underset{\mathbf{G}}{\operatorname{argmin}} \sum_{j \in \Gamma(i)} |(\mathbf{G} - \nabla u_h) \cdot \mathbf{X}^{ij}|^2 \quad (2.30)$$

Le minimum est atteint lorsque la dérivée de (2.30) est nulle,

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} \left((\mathbf{G}^i - \nabla u_h) \cdot \mathbf{X}^{ij} \right) \mathbf{X}^{ij} = 0 \quad (2.31)$$

Ce qui est équivalent d'après (2.22) à :

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} (\mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij}) \mathbf{G}^i = \sum_{j \in \Gamma(i)} U^{ij} \mathbf{X}^{ij} \quad (2.32)$$

Ainsi le gradient reconstruit \mathbf{G}^i peut être calculé comme suit :

$$\mathbf{G}^i = \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right)^{-1} \sum_{j \in \Gamma(i)} U^{ij} \mathbf{X}^{ij} \quad (2.33)$$

Enfin, l'erreur d'approximation est évaluée en substituant \mathbf{G} , le gradient reconstruit de u_h sur les nœuds, à \mathbf{g} , le gradient exact de u sur les nœuds, dans (2.29), ainsi

$$e_{ij} = |\mathbf{G}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}| \quad (2.34)$$

2.4.2 Redimensionnement des arêtes

L'objectif de l'adaptation de maillage anisotrope est de réduire l'erreur d'approximation commise sur le maillage courant Ω_h en réarrangeant les éléments. Pour cela nous agissons sur les longueurs d'arêtes et leurs directions. Dans un premier temps, nous proposons d'agir sur les longueurs d'arêtes en étirant ou contractant chaque arête de Ω_h indépendamment de manière à équidistribuer l'erreur d'interpolation globale sur l'ensemble des arêtes. Par la suite, le symbole tilde fera référence aux quantités modifiées en vue de la génération du maillage optimal $\widetilde{\Omega}_h$.

Soit s_{ij} le facteur d'étirement associé à l'arête \mathbf{X}^{ij} permettant d'étirer ou de contracter l'arête dans sa propre direction pour un nœud X^i fixe (Figure 2.7), tel que :

$$\begin{cases} \widetilde{X}^j = X^i + s_{ij}\mathbf{X}^{ij}, \\ \widetilde{U}^j = u(\widetilde{X}^j) = U^i + s_{ij}\nabla u(X^i) \cdot \mathbf{X}^{ij} + \frac{s_{ij}^2}{2}H_u(X^i)\mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij} \end{cases} \quad (2.35)$$

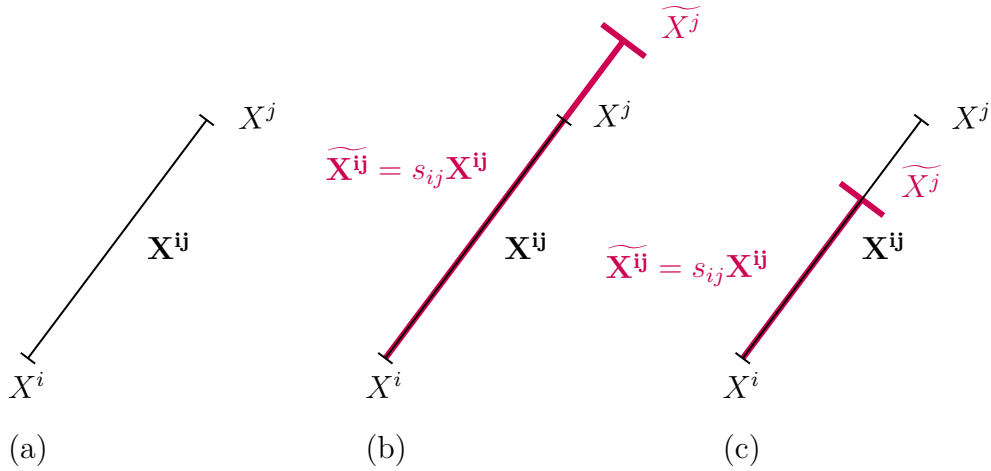


FIGURE 2.7 – (a) Arête X^{ij} sur le maillage Ω_h ;
 (b) Arête X^{ij} étirée en \widetilde{X}^{ij} sur le maillage optimal $\widetilde{\Omega}_h$;
 (c) Arête X^{ij} contractée en \widetilde{X}^{ij} sur le maillage optimal $\widetilde{\Omega}_h$

Par conséquent,

$$\widetilde{U}^{ij} = s_{ij}\nabla u(X^i) \cdot \mathbf{X}^{ij} + \frac{s_{ij}^2}{2}H_u(X^i)\mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij} \quad (2.36)$$

Or l'équation (2.22) prend la forme suivante pour le maillage optimal $\widetilde{\Omega}_h$:

$$\widetilde{U}^{ij} = \nabla u_h \cdot s_{ij} \mathbf{X}^{ij} \quad (2.37)$$

Par substitution de (2.37) dans (2.36) on obtient :

$$|\nabla u_h \cdot s_{ij} \mathbf{X}^{ij} - s_{ij} \nabla u(X^i) \cdot \mathbf{X}^{ij}| = \frac{s_{ij}^2}{2} |\mathbf{H}_u(X^i) \mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}| \quad (2.38)$$

Si bien que l'erreur induite par l'étirement de l'arête \mathbf{X}^{ij} est une fonction quadratique du facteur d'étirement s_{ij} :

$$\widetilde{e}_{ij} = |\widetilde{\mathbf{G}}^{ij} \cdot \widetilde{\mathbf{X}}^{ij}| \leq s_{ij}^2 |\mathbf{H}_u(X^i) \mathbf{X}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}| = s_{ij}^2 \cdot e_{ij} \quad (2.39)$$

2.4.3 Tenseur de distribution des longueurs

Dans un second temps, nous souhaitons déterminer les nouvelles directions optimales pour les arêtes connaissant leur facteur d'étirement correspondant à l'équidistribution de l'erreur globale. Pour cela, revenons à la définition d'une métrique. Soit \mathbf{M}^i la métrique unité associée au nœud X^i tel que :

$$(\mathbf{M}^i \mathbf{X}^{ij}, \mathbf{X}^{ij}) = 1 \quad (2.40)$$

En sommant l'équation (2.40) sur le voisinage du nœud X^i , il vient :

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} (\mathbf{M}^i \mathbf{X}^{ij}, \mathbf{X}^{ij}) = \sum_{j \in \Gamma(i)} 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^i : \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right) = |\Gamma(i)| \quad (2.41)$$

avec $|\Gamma(i)|$ le cardinal de l'ensemble des nœuds voisins de X^i . Par conséquent le tenseur de distribution des longueurs \mathbf{X}^i au nœud X^i est défini par :

$$\mathbf{X}^i = \frac{1}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \quad (2.42)$$

Tel que, $\mathbf{M}^i : \mathbf{X}^i = 1$. Ainsi \mathbf{X}^i correspond à la distribution statistique des longueurs par analogie avec les méthodes employées pour l'orientation des fibres en rhéologie. Notons que \mathbf{X}^i est une matrice symétrique à valeurs positives lorsqu'il existe au moins d arêtes non alignées. Ainsi :

$$\mathbf{M}^i = \frac{1}{d} (\mathbf{X}^i)^{-1} \quad (2.43)$$

La combinaison de (2.43) et (2.42) au nœud X^i sur les arêtes redimensionnées suivant le facteur d'étirement s_{ij} donne une nouvelle expression de la métrique :

$$\mathbf{M}^i = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} s_{ij}^2 \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right)^{-1} \quad (2.44)$$

2.4.4 Construction de la métrique

Nous souhaitons à présent construire le champ de métrique (2.44) permettant d'adapter le maillage sur l'erreur d'interpolation, pour cela il est nécessaire de déterminer le facteur d'étirement relatif à chaque arête du maillage. Ainsi le facteur d'étirement est le paramètre clef de l'adaptation de maillage basée sur les arêtes. Deux méthodes ont été proposées pour son calcul ces dernières années au sein du laboratoire, par minimisation de l'erreur globale pour un nombre d'arêtes fixé [Coupez, 2011], et par équidistribution de l'erreur pour un nombre de nœuds fixé [Coupez et al., 2013, El Jannoun, 2014], nous allons retracer ces méthodes avant d'en proposer une nouvelle qui repose sur l'équidistribution de l'erreur pour un nombre d'éléments fixé [Billon et al., 2017].

Minimisation de l'erreur globale pour un nombre d'arêtes fixé (a)

La première méthode, proposée dans [Coupez, 2011], repose sur la minimisation de l'erreur globale induite sous la contrainte d'un nombre fixe d'arêtes dans le maillage. Cette méthode est résumée dans le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit A un nombre d'arêtes prescrit, soit e_{ij} l'erreur calculée le long de l'arête \mathbf{X}^{ij} du maillage courant, soit s_{ij} le facteur d'étirement associé à \mathbf{X}^{ij} , et $p \in [1, d]$ une constante à définir. Ainsi le champ de métrique continu défini sur les nœuds minimisant l'erreur d'interpolation pour un nombre d'arêtes fixé est donné par :*

$$\mathbf{M}^i = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} s_{ij}^2 \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right)^{-1} \quad (2.45)$$

avec

$$s_{ij} = \left(\frac{p\lambda}{e_{ij}} \right)^{\frac{1}{p+2}} \quad (2.46)$$

et

$$\lambda = \frac{1}{p} \left(\frac{\sum_i \sum_{j \in \Gamma(i)} e_{ij}^{\frac{p}{p+2}}}{A} \right)^{\frac{p+2}{p}} \quad (2.47)$$

Démonstration. Soit la fonction $\varphi(s)$ évaluant l'erreur totale commise sur le maillage optimal $\tilde{\Omega}_h$ avec $s = \{s_{ij}, \forall(i, j)\}$. En raison du comportement

quadratique observé de l'erreur vis à vis du facteur d'étirement (2.39) on définit $\varphi(s)$ de la manière suivante :

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij}^2 e_{ij} \quad (2.48)$$

Une arête étant composée de 2 nœuds, le facteur $\frac{1}{2}$ est utilisé pour éviter de comptabiliser 2 fois la même arête (\mathbf{X}^{ij} et \mathbf{X}^{ji}).

L'idée est de minimiser $\varphi(s)$, pour éviter la solution évidente $s = 0$, nous introduisons une contrainte sur le nombre d'arêtes. Le problème d'optimisation est ensuite résolu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, soit λ un multiplicateur de Lagrange, on définit la nouvelle fonction à minimiser :

$$\mathcal{L}(\lambda, s) = \varphi(s) - \lambda(a_c - A) \quad (2.49)$$

où a_c est une évaluation du nombre d'arêtes créées sur l'ensemble du maillage. On note a_{ij} le nombre d'arêtes engendrées par le redimensionnement de l'arête \mathbf{X}^{ij} , [Coupez, 2011] propose le dénombrement suivant :

$$a_{ij} = s_{ij}^{-p} \quad (2.50)$$

Si bien que :

$$a_c = \sum_{i,j} a_{ij} = \sum_{i,j} s_{ij}^{-p} \quad (2.51)$$

Lorsque le minimum de (2.49) est atteint nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.52)$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \lambda \frac{\partial a_c}{\partial s} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= a_c - A \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ce qui se traduit pour chaque s_{ij} par :

$$\begin{aligned} s_{ij} e_{ij} - p \lambda s_{ij}^{-(p+1)} = 0 &\Rightarrow s_{ij} = \left(\frac{p \lambda}{e_{ij}} \right)^{\frac{1}{p+2}} \\ \sum_{i,j} s_{ij}^{-p} = A &\Rightarrow \lambda = \frac{1}{p} \left(\frac{\sum_i \sum_{j \in \Gamma(i)} e_{ij}^{\frac{p}{p+2}}}{A} \right)^{\frac{p+2}{p}} \end{aligned} \quad (2.54)$$

□

Notons que si l'erreur estimée e_{ij} est nulle sur une arête, le facteur d'étiement s_{ij} sera infiniment grand ce qui se traduit par des arêtes de longueur infinie (2.46). Et inversement une erreur estimée e_{ij} très grande engendrera des arêtes et donc des éléments très petits, trop petits et donc trop coûteux pour assurer une précision correcte sur tout le maillage. Ces cas pathologiques doivent absolument être évités, pour cela nous utilisons la régularisation de l'erreur le long des arêtes suivante :

$$\begin{cases} e_{ij} = \max \left(|\mathbf{G}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}|, \varepsilon_{\min} |\mathbf{X}^{ij}|^2 \right) \\ e_{ij} = \min \left(|\mathbf{G}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}|, \varepsilon_{\max} |\mathbf{X}^{ij}|^2 \right) \end{cases} \quad (2.55)$$

Remarque. En règle général, le coefficient p est choisi égal à d . Il permet de quantifier le nombre d'arêtes engendrées par le redimensionnement des arêtes existantes.

Cette méthode de minimisation de l'erreur globale sous contrainte fonctionnelle et donne des résultats corrects, cependant l'ambiguïté du choix du coefficient p , et l'utilisation d'une heuristique pour le dénombrement des arêtes laisse des possibilités d'améliorations.

Equidistribution de l'erreur pour un nombre de nœuds fixé (b)

Dans [El Jannoun, 2014], une nouvelle approche a été envisagée, cette approche repose sur l'équidistribution de l'erreur sur le maillage, telle que l'erreur équidistribuée soit minimale et constante sur le maillage. Afin de maintenir un nombre de degrés de libertés fixe dans le maillage, l'erreur équidistribuée est fonction du nombre de nœuds imposés.

Soit ε l'erreur équidistribuée uniformément sur le maillage optimal sous la contrainte d'un nombre de nœuds fixe N . L'équidistribution de l'erreur implique que sur toutes les arêtes du maillage optimal on a :

$$\widetilde{e}_{ij} = \varepsilon \quad (2.56)$$

Ainsi d'après (2.39), pour toute arête $\widetilde{\mathbf{X}}^{ij} \in \widetilde{\Omega}_h$ on a :

$$\varepsilon = s_{ij}^2 \cdot e_{ij} \quad (2.57)$$

Par conséquent le facteur d'étiement de chaque arête peut s'écrire de la façon suivante :

$$s_{ij} = \left(\frac{\varepsilon}{e_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.58)$$

On note n_{ij} le nombre de nœuds engendrés par le redimensionnement des arêtes, [El Jannoun, 2014] propose le dénombrement suivant :

$$n_{ij} = s_{ij}^{-1} = \left(\frac{\varepsilon}{e_{ij}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.59)$$

L'idée caractéristique de cette méthode est de construire un tenseur de distribution des nœuds \mathcal{N}^i pour chaque nœud X^i , dans le même esprit que le tenseur de distribution des longueurs, qui va répartir le nombre de nœuds dans les différentes directions des arêtes connectées à X^i tel que :

$$\mathcal{N}^i \mathbf{X}^{ij} = n_{ij} \mathbf{X}^{ij} \quad (2.60)$$

On détermine le tenseur de distribution des nœuds \mathcal{N}^i à l'aide de la méthode des moindres carrés :

$$\mathcal{N}^i = \operatorname{argmin}_{\mathcal{N} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d}} \sum_{j \in \Gamma(i)} |\mathcal{N} \mathbf{X}^{ij} - n_{ij} \mathbf{X}^{ij}|^2 \quad (2.61)$$

Proposition 2.4. Le tenseur de distribution des nœuds est défini au sens des moindres carrés par :

$$\mathcal{N}^i = \frac{1}{d} (\mathbf{X}^i)^{-1} \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} n_{ij} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right) \quad (2.62)$$

Démonstration. Sachant que le minimum de (2.61) est atteint lorsque sa dérivée est nulle, on a :

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} \mathcal{N} \mathbf{X}^{ij} \mathbf{X}^{ij} = \sum_{j \in \Gamma(i)} n_{ij} \mathbf{X}^{ij} \mathbf{X}^{ij} \quad (2.63)$$

ce qui selon [El Jannoun, 2014] est équivalent à :

$$\mathbf{X}^i : \mathcal{N}^i = \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} n_{ij} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right) \quad (2.64)$$

Sachant que pour une matrice symétrique définie positive \mathbf{A} d'ordre d , on a : $\mathbf{A} : \mathbf{A}^{-1} = d$, on peut en déduire l'expression proposée pour \mathcal{N}^i :

$$\mathcal{N}^i = \frac{1}{d} (\mathbf{X}^i)^{-1} \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} n_{ij} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right) \quad (2.65)$$

□

Ainsi la métrique qui équadistribue l'erreur sur le maillage afin de minimiser l'erreur d'interpolation pour un nombre de nœuds fixé est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Soit N le nombre de nœuds prescrit, soit e_{ij} l'erreur calculée le long de l'arête \mathbf{X}^{ij} du maillage courant, soit ε l'erreur équadistribuée uniformément sur le maillage optimal. Ainsi le champ de métrique continu défini sur les nœuds minimisant l'erreur d'interpolation pour un nombre de nœuds fixé est donné par :*

$$\mathbf{M}^i = \left(\frac{d}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} s_{ij}^2 \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right)^{-1} \quad (2.66)$$

avec

$$s_{ij} = \left(\frac{\varepsilon}{e_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.67)$$

et

$$\varepsilon = \left(\frac{N}{\sum_i n^i(1)} \right)^{-\frac{4}{d}} \quad (2.68)$$

où $n^i(1)$ représente le nombre de nœuds créés autour du nœud X^i pour une erreur globale égale à 1 et se calcule par la formule suivante :

$$n^i(1) = \sqrt{\det \left(\frac{1}{d} (\mathbf{X}^i)^{-1} \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} \left(\frac{1}{e_{ij}} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right) \right)} \quad (2.69)$$

Démonstration. La densité de maillage local s'écrit :

$$\begin{aligned} n^i(\varepsilon) &= \sqrt{\det \left(\frac{1}{d} (\mathbf{X}^i)^{-1} \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} n_{ij} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right) \right)} \\ &= \sqrt{\det \left(\frac{1}{d} (\mathbf{X}^i)^{-1} \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} \left(\frac{\varepsilon}{e_{ij}} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right) \right)} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Par conséquent, nous avons :

$$n^i(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{d}{4}} \sqrt{\det \left(\frac{1}{d} (\mathbf{X}^i)^{-1} \left(\sum_{j \in \Gamma(i)} \left(\frac{1}{e_{ij}} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right) \right)} \quad (2.71)$$

$$\Leftrightarrow n^i(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{d}{4}} n^i(1)$$

On en déduit la relation suivante pour l'erreur équilibrée ε :

$$\varepsilon = \left(\frac{N}{\sum_i n^i(1)} \right)^{-\frac{4}{d}} \quad (2.72)$$

Ainsi nous pouvons déterminer les facteurs d'étirements pour un nombre de nœuds fixé N :

$$s_{ij} = \left(\frac{\varepsilon}{e_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sum_i n^i(1)}{N} \right)^{\frac{2}{d}} e_{ij}^{-1/2} \quad (2.73)$$

□

La même régularisation (2.55) est utilisée pour borner les tailles d'arêtes.

Le principe d'équidistribution qui caractérise cette méthode est très intéressant et donne de bons maillages, avec une anisotropie accrue. Cependant, ici aussi, le dénombrement du nombre de nœuds engendré (2.59) reste approximatif. De plus, un problème de dimensions dans l'équation (2.64), nous incite à pousser le raisonnement un peu plus loin et proposer une nouvelle méthode.

Equidistribution de l'erreur pour un nombre d'éléments fixé (c)

La nouvelle approche proposée dans cette thèse s'inspire des méthodes précédentes, (a) et (b), et propose deux améliorations majeures que sont un bon dénombrement du nombre d'entités engendrées et la possibilité de maîtriser les tailles de mailles minimales et maximales de manière transparente. Ainsi, la nouvelle approche du calcul des facteurs d'étirements repose également sur l'équidistribution de l'erreur d'interpolation sur le maillage. Ainsi la relation suivante qui lie les facteurs d'étirements à l'erreur équilibrée reste valide :

$$s_{ij} = \left(\frac{\varepsilon}{e_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.74)$$

Si bien que la métrique \mathbf{M}^i se réécrit :

$$\mathbf{M}^i = \left(\frac{d}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{\varepsilon}{e_{ij}} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right)^{-1} \quad (2.75)$$

Par conséquent le nombre d'éléments induit par le champ de métrique doit être calculé de façon à minimiser ε sous la contrainte de N éléments. A

cet effet nous proposons de regarder de plus près un élément T quelconque du maillage Ω_h de dimension d . Notons \mathbf{M} l'espace métrique où chaque élément est isotrope, contrairement à l'espace physique noté \mathbf{l}_d , puis le volume d'un élément dans l'espace métrique $|T|_{\mathbf{M}}$ est égal au volume de référence V_0 [Do Carmo, 1976] :

$$V_0 = \frac{\sqrt{d+1}}{2^{d/2}d!} \quad (2.76)$$

De ce fait, soit N le nombre total d'éléments dans le maillage Ω_h , on a exactement :

$$\sum_{T \in \Omega_h} |T|_{\mathbf{M}} = N \times V_0 \quad (2.77)$$

De plus rappelons que, de manière plus générale, (2.6) devient [Mesri et al., 2012] :

$$\sum_{T \in \Omega_h} |T|_{\mathbf{M}} = \sum_{T \in \Omega_h} \int_T \sqrt{\det(\mathbf{M}_{\mathcal{T}})} dT \quad (2.78)$$

où $\mathbf{M}_{\mathcal{T}}$ représente la métrique sur l'élément T , contrairement à \mathbf{M}^i qui représente la métrique au nœud X^i . Puis, en utilisant une quadrature de Gauss sur les nœuds de l'élément, nous pouvons relier le nombre d'éléments N à la métrique nodale comme ceci :

$$N = \frac{\omega}{V_0} \sum_{T \in \Omega_h} |T|_{\mathbf{l}_d} \sum_{i \in T} \det(\mathbf{M}^i)^{1/2} \quad (2.79)$$

où $\omega = \frac{1}{d+1}$ est le poids affecté aux points de quadrature.

Afin de calculer le nombre d'éléments engendrés par le champ de métrique, il est donc nécessaire de calculer le déterminant de la métrique (2.75) pour chaque nœud :

$$\det(\mathbf{M}^i) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \times \det \left(\frac{d}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{1}{e_{ij}} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right)^{-1} \quad (2.80)$$

D'où le nombre d'éléments calculé :

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d/2} \underbrace{\frac{\omega}{V_0} \sum_{T \in \Omega_h} |T|_{\mathbf{l}_d} \sum_{i \in T} \det \left(\frac{d}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{1}{e_{ij}} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right)^{-1/2}}_{N_0} \quad (2.81)$$

L'erreur équilibrée est déterminée sous la contrainte d'un nombre d'éléments préalablement fixé N , nous cherchons donc à déterminer ε tel que $N = N(\varepsilon)$, ou encore :

$$N = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{d/2} N_0 \quad (2.82)$$

Par conséquent l'expression finale de l'erreur équilibrée est donnée par :

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{N} \frac{\omega}{V_0} \sum_{T \in \Omega_h} |T|_{\text{Id}} \sum_{i \in T} \det \left(\frac{d}{|\Gamma(i)|} \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{1}{e_{ij}} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij} \right)^{-1/2} \right)^{2/d} \quad (2.83)$$

Finalement, l'équation (2.83) est réinjectée dans (2.75) pour calculer la métrique qui est ensuite fournie au mailleur topologique.

Dans cette nouvelle approche nous avons opté pour une régularisation plus transparente, en effet l'utilisateur fixe des tailles de mailles maximum H_{\max} et minimum H_{\min} . La longueur des arêtes doit donc être contrôlée afin de les garder dans l'intervalle $[H_{\min}, H_{\max}]$. L'équation (2.35) se réécrit :

$$\|\widetilde{\mathbf{X}}^{ij}\| = s_{ij} \|\mathbf{X}^{ij}\| \quad (2.84)$$

Or en utilisant l'expression de s_{ij} (2.74) :

$$\|\widetilde{\mathbf{X}}^{ij}\| = \left(\frac{\varepsilon}{e_{ij}} \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{X}^{ij}\| \quad (2.85)$$

Ainsi, contrôler la longueur des arêtes revient à contrôler l'erreur d'interpolation e_{ij} telle que :

$$\varepsilon \left(\frac{\|\mathbf{X}^{ij}\|}{H_{\max}} \right)^2 \leq e_{ij} \leq \varepsilon \left(\frac{\|\mathbf{X}^{ij}\|}{H_{\min}} \right)^2 \quad (2.86)$$

On remarque que l'équation (2.86) dépend de ε et inversement. Dans ce travail nous avons choisi d'itérer jusqu'à convergence. Il existe certainement une méthode d'optimisation beaucoup moins coûteuse.

Cependant ce contrôle n'est pas suffisant pour éviter le cas pathologique d'un élément quasi-dégénéré, qui engendrerait un échec du mailleur. Les éléments aplatis sont prévenus en vérifiant les composantes diagonales de la métrique finale et en les bornant. Cette procédure doit elle aussi être réalisée de façon itérative. Cette nouvelle approche et son implémentation sont résumées étape par étape dans l'algorithme 2 présenté ci-après.

Algorithme 2 : Construction du champ de métrique \mathbf{M} pour une adaptation de maillage sur le champ u

Data : maillage Ω_h , champ u , nombre d'éléments souhaité N , les tailles d'arêtes $\min H_{\min}$ et $\max H_{\max}$

Result : champ de métrique \mathbf{M}

```

for chaque nœud  $i \in \Omega_h$  do
   $\mathbf{X}\mathbf{X}^i = \sum_{j \in \Gamma(i)} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij};$ 
   $\mathbf{G}^i = (\mathbf{X}\mathbf{X}^i)^{-1} \sum_{j \in \Gamma(i)} U^{ij} \mathbf{X}^{ij};$ 
  for chaque voisin  $j \in \Gamma(i)$  do
     $e_{ij} = |\mathbf{G}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}|;$ 
     $\mathbf{M}^i_+ = \frac{1}{e_{ij}} \mathbf{X}^{ij} \otimes \mathbf{X}^{ij};$ 
  end
   $\mathbf{M}^i_\times = \frac{d}{|\Gamma(i)|};$ 
end

 $V_0 = \frac{\sqrt{d+1}}{2^{d/2} d!};$ 
 $N_0 = \frac{1}{V_0} \sum_{T \in \Omega_h} \frac{|T|_{\mathcal{I}}}{d+1} \sum_{i \in T} \det(\mathbf{M}^i)^{\frac{1}{2}};$ 
 $\varepsilon = \left(\frac{N_0}{N}\right)^{\frac{2}{d}};$ 
while  $\varepsilon$  varie do
  for chaque nœud  $i \in \Omega_h$  do
     $\mathbf{M}^i = \mathbf{0};$ 
    for chaque voisin  $j \in \Gamma(i)$  do
       $e_{ij} = \min \left( \max \left( e_{ij}, \varepsilon \left( \frac{\|\mathbf{X}^{ij}\|}{H_{\max}} \right)^2 \right), \varepsilon \left( \frac{\|\mathbf{X}^{ij}\|}{H_{\min}} \right)^2 \right);$ 
       $\mathbf{M}^i_+ = \frac{1}{e_{ij}} \mathbf{X}\mathbf{X}^{ij};$ 
    end
     $\mathbf{M}^i_\times = \frac{d}{|\Gamma(i)|};$ 
  end
   $N_0 = \frac{1}{V_0} \sum_{T \in \Omega_h} \frac{|T|_{\mathcal{I}}}{d+1} \sum_{i \in T} \det(\mathbf{M}^i)^{\frac{1}{2}};$ 
   $\varepsilon = \left(\frac{N_0}{N}\right)^{\frac{2}{d}};$ 
end
for chaque nœud  $i \in \Omega_h$  do
   $\mathbf{M}^i = \frac{(\mathbf{M}^i)^{-1}}{\varepsilon};$ 
end

```

2.4.5 Comparaison numérique des trois méthodes présentées

Dans cette partie nous proposons de comparer les trois méthodes présentées pour l'adaptation de maillage sur l'erreur *a posteriori* en utilisant diverses fonctions régulières 2D et 3D.

Diagonale

On définit la fonction f_1 sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$:

$$f_1(x, y) = \tanh(50(y - 0.2x - 0.5)) \quad (2.87)$$

Cette fonction 2D représente une ligne diagonale (Figure 2.8), elle permet de tester l'anisotropie, soit l'étirement des éléments et son bon alignement. Cinq tests ont été réalisés avec un nombre d'éléments croissant (2000, 5000, 10000, 20000, 50000) pour chacune des trois méthodes d'adaptation de maillage. Le maillage initial est composé de deux éléments, et le maillage final est obtenu en 30 itérations de remaillage.

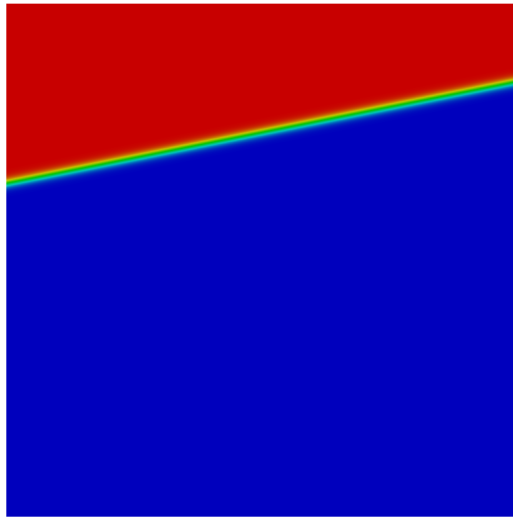


FIGURE 2.8 – Iso-valeur de la fonction diagonale f_1

Dans un premier temps, on présente le processus itératif sur la fonction diagonale avec une contrainte équivalente à 2000 éléments pour les trois méthodes (Figure 2.10). Le maillage initial étant arbitrairement grossier, le calcul d'erreur sur celui-ci ne donne pas d'informations utiles. Si bien que

la seule adaptation logique est de générer un maillage isotrope comportant le maximum d'éléments afin de calculer un champ d'erreur sur celui-ci permettant d'identifier les zones à raffiner. Or après la première itération, la méthode (a) ne contient que 153 éléments, la méthode (b) en contient 590, tandis que la méthode (c) en contient 2173. Il est donc évident que la méthode (c) va converger plus rapidement comme on peut l'observer sur la figure 2.9. De plus, on remarque sur les itérations 3 et 4 que la méthode (c) raffine uniformément sur toute la diagonale contrairement aux deux autres méthodes. Un zoom sur l'itération 30, présenté sur la figure 2.11, permet de montrer que la méthode (c) produit un maillage beaucoup plus anisotrope avec un rapport d'aspect maximum de 4962 contrairement au maillage (a) avec un rapport d'aspect maximum de 86 et le maillage (b) avec un rapport d'aspect maximum de 312. Finalement on présente une comparaison globale de la convergence des 3 méthodes en fonction de la contrainte sur le nombre d'éléments (Figure 2.12). La méthode (c) permet donc une adaptation de maillage plus rapide, plus précise et convergeant à l'ordre 2.

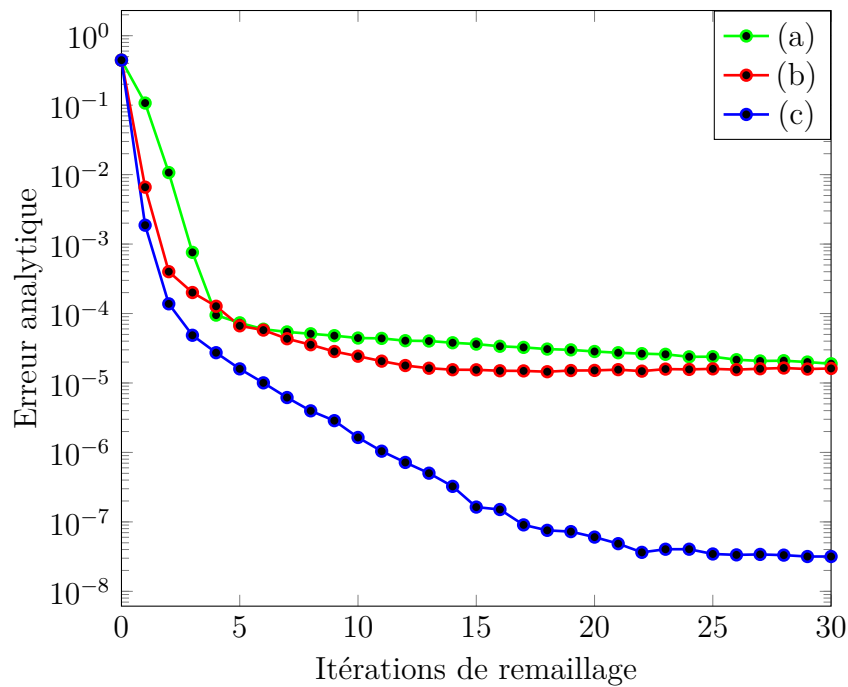


FIGURE 2.9 – Erreur analytique sur la fonction diagonale f_1 avec une contrainte équivalente à 20000 éléments pour les trois méthodes au fur et à mesure des itérations de remaillage

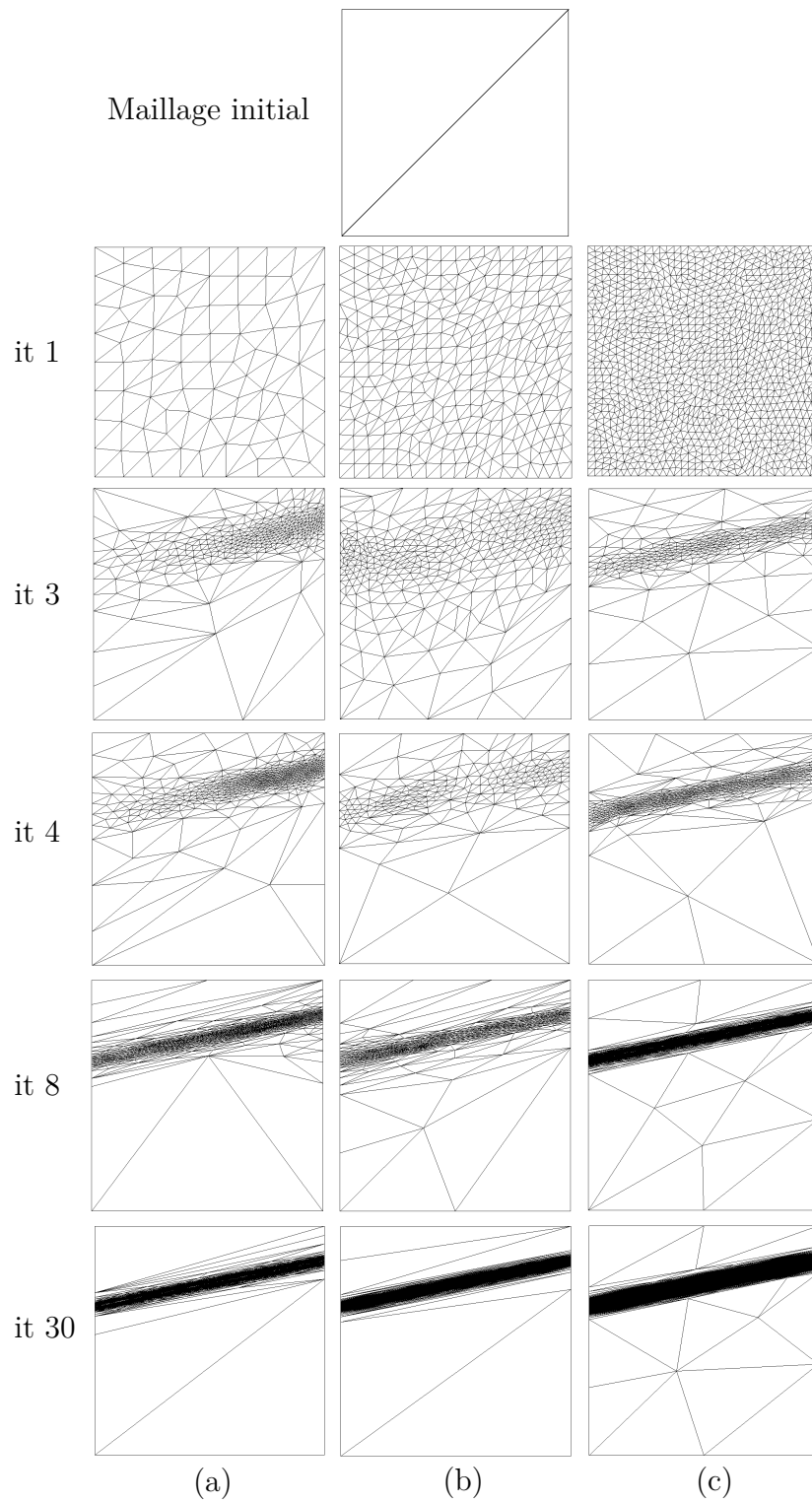


FIGURE 2.10 – Itérations de maillage sur la fonction diagonale avec une contrainte équivalente à 2000 éléments pour les méthodes basées sur les arêtes (a), sur les nœuds (b) et sur les éléments (c)

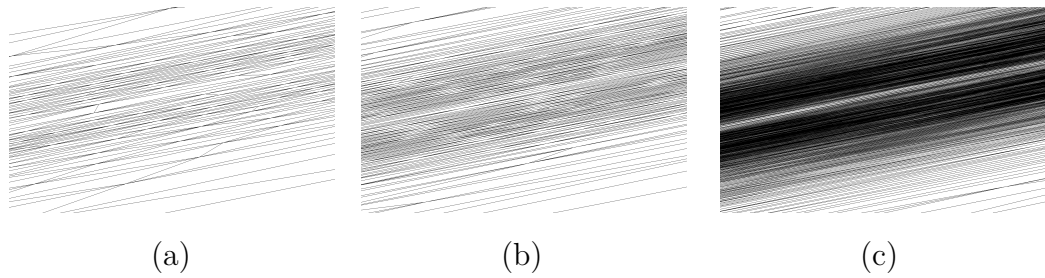


FIGURE 2.11 – Zoom sur la diagonale pour l'itération 30 représentée Fig. 2.10 pour les trois méthodes

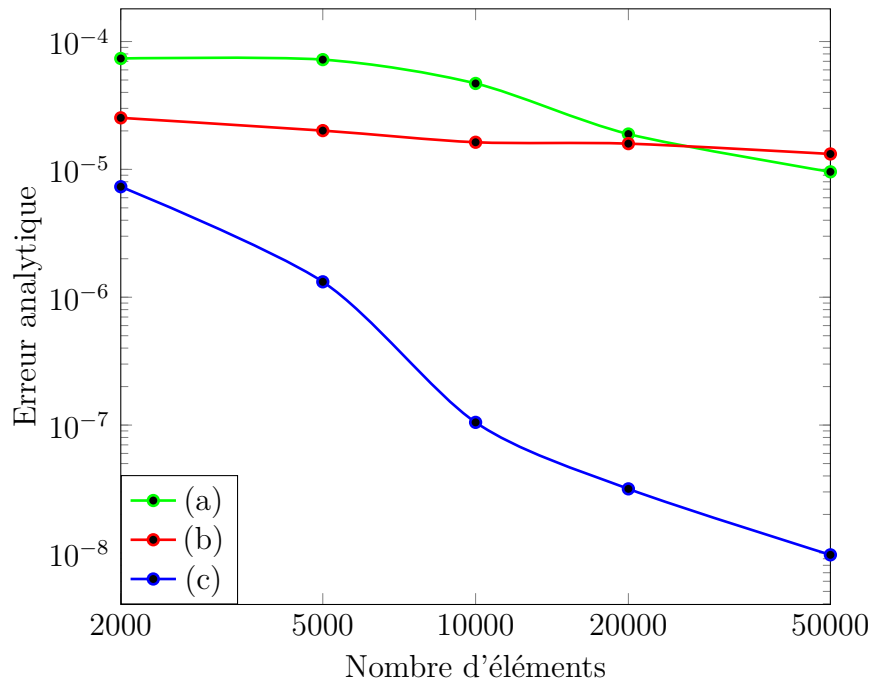


FIGURE 2.12 – Erreur analytique sur la fonction diagonale f_1 suivant le nombre d'éléments de maillage

Sinusoïde

Considérons à présent la fonction f_2 sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$:

$$f_2(x, y) = \tanh(100y - 50 + 20 \sin(-4x + 4)) \quad (2.88)$$

Cette fonction 2D représente une sinusoïde (Figure 2.13), elle permet de tester l'adaptation de maillage lorsque la direction du gradient n'est pas constante, ce qui est le cas dans la plupart des cas d'intérêts.

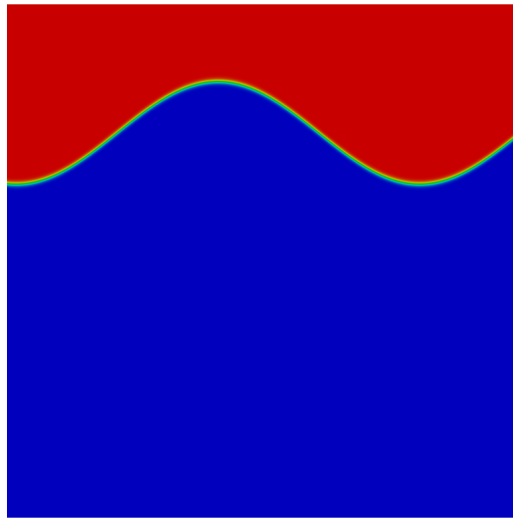


FIGURE 2.13 – Iso-valeur de la fonction sinusoïde f_2

On présente sur les figures 2.14 et 2.15 l'évolution de l'erreur analytique pour chacune des trois méthodes d'adaptation de maillage au fur et à mesure des itérations de remaillages pour une contrainte équivalente à 2000 et 50000 éléments respectivement. Alors que pour 50000 éléments on observe des courbes de convergence équivalente pour les trois méthodes, on remarque que pour 2000 éléments la nouvelle méthode (c) proposée dans ce travail présente une convergence bien plus rapide et plus forte, ce qui s'explique au regard de la figure 2.16 par la très mauvaise description de la fonction sinusoïde en maillage par les méthodes (a) et (b). On en déduit que la nouvelle méthode proposée (c) est capable de capter et décrire plus rapidement, plus précisément et avec moins d'éléments une fonction complexe. Il vient de même que la méthode proposée (c) gère beaucoup mieux l'anisotropie pour la description de fonction complexe.

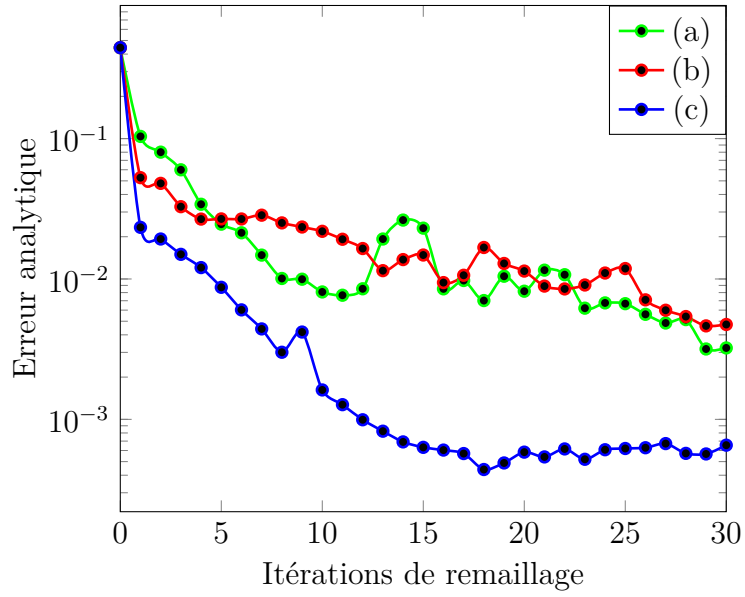


FIGURE 2.14 – Erreur analytique sur la fonction sinus f_2 avec une contrainte équivalente à 2000 éléments pour les trois méthodes au fur et à mesure des itérations de remaillage

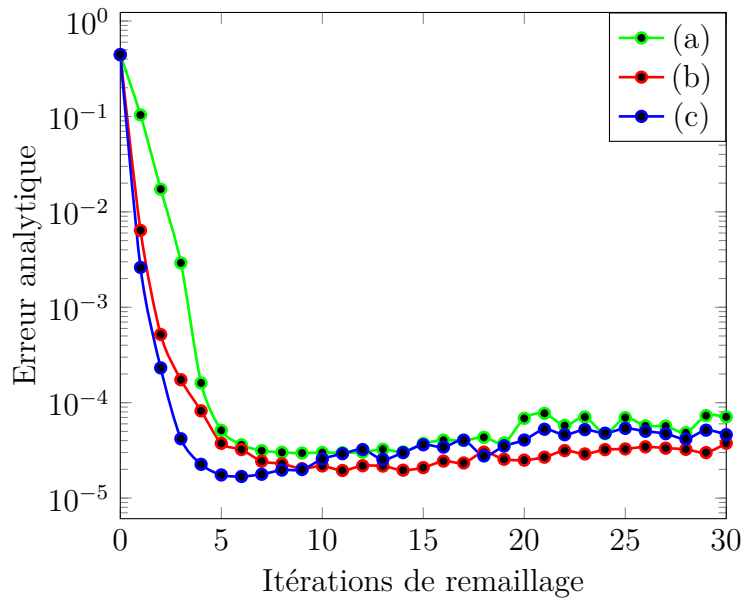


FIGURE 2.15 – Erreur analytique sur la fonction sinus f_2 avec une contrainte équivalente à 500000 éléments pour les trois méthodes au fur et à mesure des itérations de remaillage

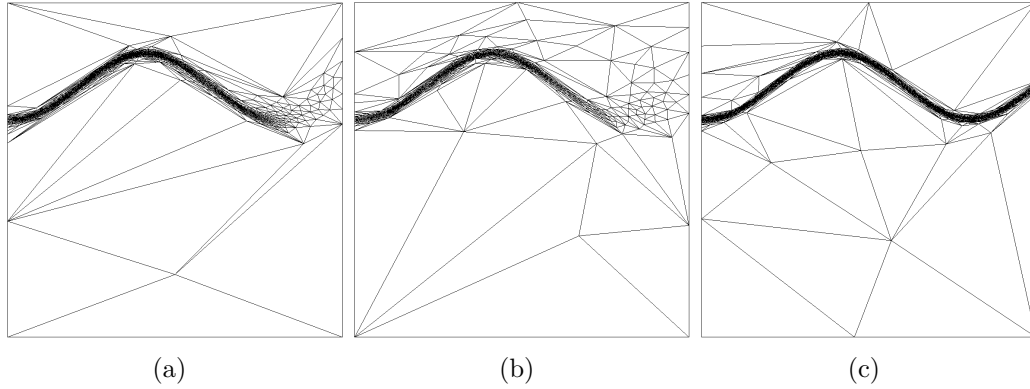


FIGURE 2.16 – Maillage à 2000 éléments de la sinusoïde à l’itération 30 pour les trois méthodes

Étoile 2D

Considérons à présent la fonction f_3 sur le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$:

$$f_3(x, y) = \begin{cases} 0.01 \sin(50xy) & \text{si } xy \leq \frac{\pi}{50} \\ \sin(50xy) & \text{ou si } xy \leq 2\frac{\pi}{50} \\ 0.01 \sin(50xy) & \end{cases} \quad (2.89)$$

Cette fonction présentée dans [Loseille, 2008] et reprise dans [El Jannoun, 2014] est très intéressante car elle permet d’observer à la fois des oscillations de grandes et de petites amplitudes respectivement 1 et 0.01 (Figure 2.17). Réussir à capturer de telles oscillations est un enjeu majeur pour l’étude des écoulements turbulents qui présentent à la fois un écoulement moyen de très grande magnitude et des phénomènes de turbulence de très faible magnitude.

Les trois méthodes d’adaptation ont été testées, on présente l’évolution de l’erreur analytique en fonction du nombre d’éléments sur la figure 2.18 et on rappelle sur la figure 2.19 les résultats obtenus par [Loseille, 2008]. Sur la figure 2.18 on peut dissocier 3 zones de comportement, une première zone de convergence d’ordre 1 lorsque le maillage est composé de moins de 5000 éléments, dans cette zone seules les oscillations de grandes amplitudes sont capturées ; une seconde zone présentant une convergence inférieure à l’ordre 1 pour un nombre d’éléments compris entre 5000 et 20000 éléments, c’est

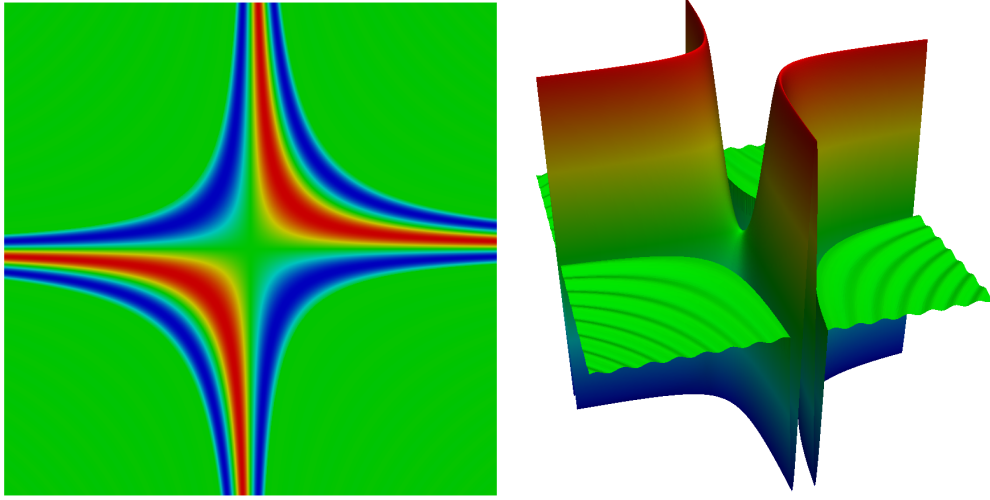


FIGURE 2.17 – Iso-valeur de la fonction multi-échelles 2D f_3 pour l'intervalle $[-1,1]$ à gauche, représentation 3D de la valeur de f_3 à droite

la transition où les mailles sont suffisamment fines pour voir les oscillations de petites amplitudes mais pas suffisamment pour les capturer ; finalement dans une troisième zone on obtient une convergence moyenne d'ordre 2 pour les maillages composés de plus de 20000 éléments, dans cette zone toutes les oscillations sont capturées. Les maillages caractéristiques de ces trois zones pour chacune des trois méthodes sont présentés sur la figure 2.20. Sur la figure 2.19, Adrien Loseille propose une comparaison de l'erreur analytique commise en fonction du nombre d'éléments de maillage pour trois estimateurs d'erreur associés respectivement aux normes L_1 , L_2 et L_4 , on remarque également les trois zones, cependant on note que toutes les normes ne sont pas équivalentes sur le nombre d'éléments nécessaires pour atteindre l'ordre deux asymptotique. En effet plus on tend vers la norme infinie plus le nombre d'éléments nécessaire pour capturer les oscillations de petites amplitudes est grand et plus la zone de perte de convergence est étendue. Si on compare nos résultats à ceux de Loseille, on remarque que nos résultats ont un comportement qui s'approchent plus de la norme infinie que de la norme L_1 , ce qui laisse une piste d'amélioration de l'estimateur d'erreur que l'on calcule aujourd'hui sur les arêtes par la formule (2.34) : $e_{ij} = |\mathbf{G}^{ij} \cdot \mathbf{X}^{ij}|$ proposée dans [Coupez, 2011].

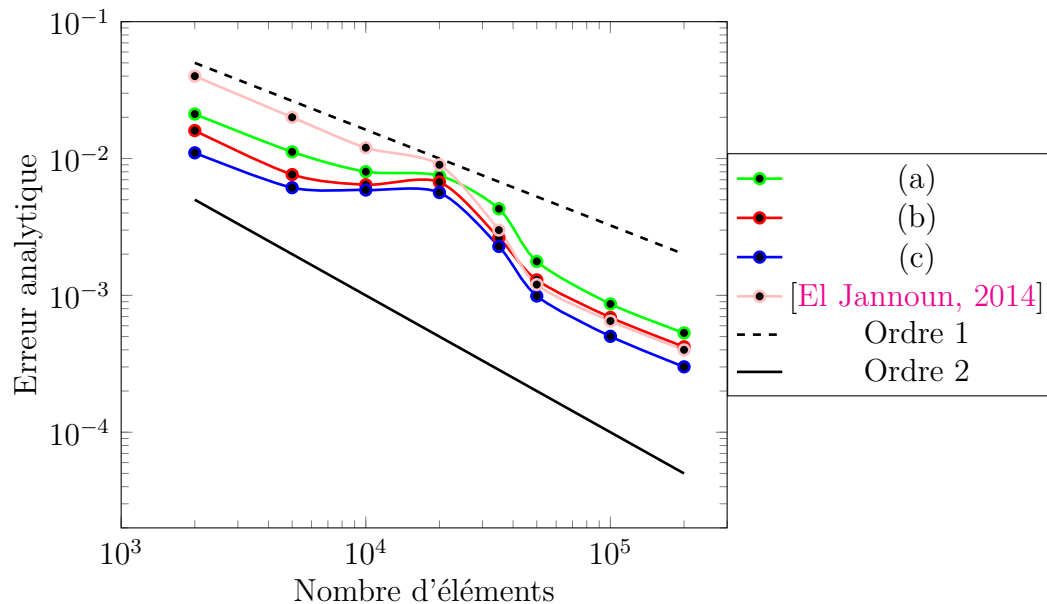


FIGURE 2.18 – Erreur analytique sur la fonction multi-échelles f_3 suivant le nombre d'éléments de maillage

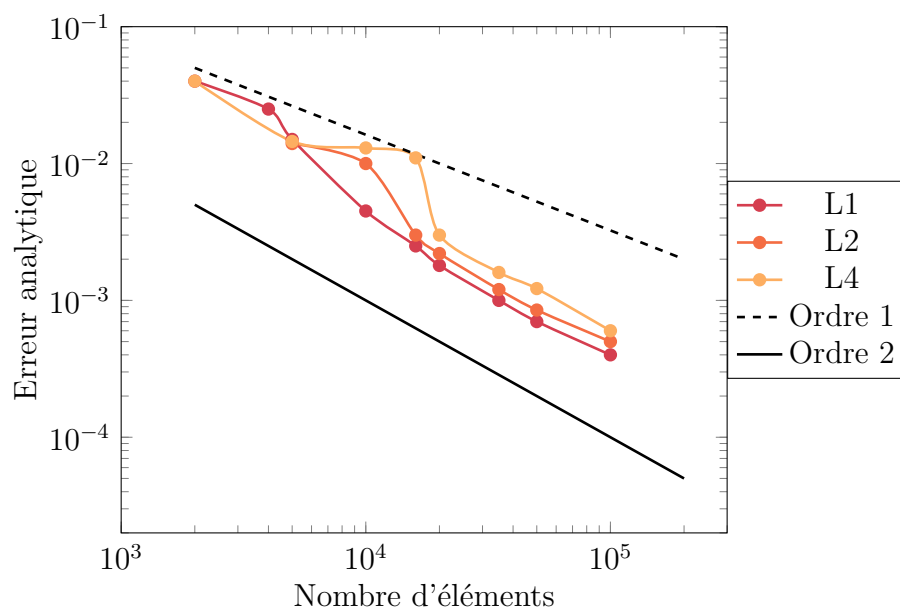


FIGURE 2.19 – Erreur analytique sur la fonction multi-échelles f_3 suivant le nombre d'éléments de maillage par [Loseille, 2008]

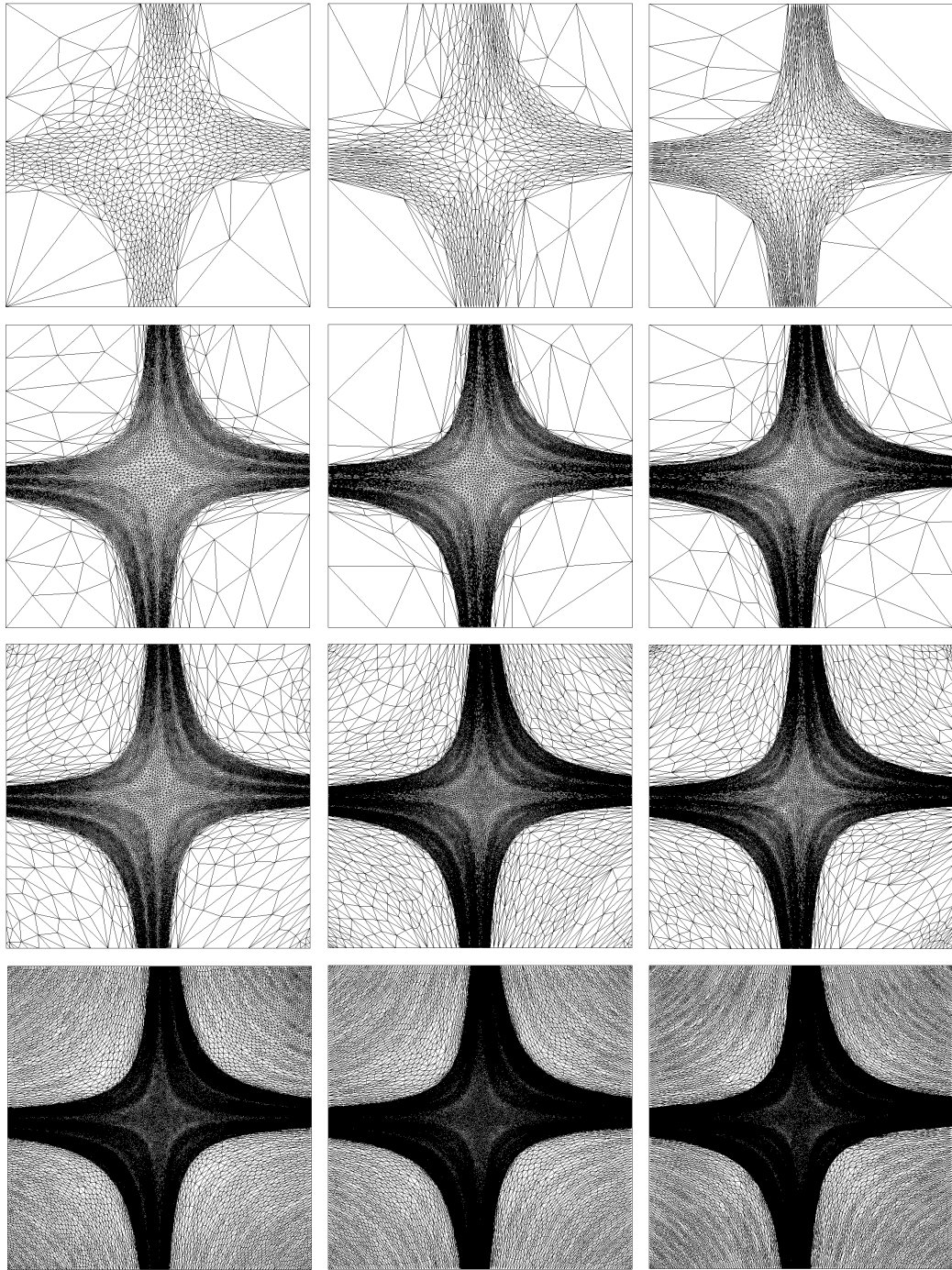


FIGURE 2.20 – Maillages sur la fonction multi-échelles pour une contrainte équivalente à 2000, 20000, 35000 et 200000 éléments (de haut en bas) pour les méthodes basées sur les arêtes (a), sur les nœuds (b) et sur les éléments (c) (de gauche à droite)

2.4.6 Adaptation de maillage multi-critères

Lors de la simulation d'un phénomène physique complexe tel que la turbulence, l'utilisation de l'adaptation de maillage dynamique précédemment définie nécessite le choix d'un champ physique sur lequel calculer l'erreur *a posteriori*. Il est souvent difficile de se limiter à un unique champ, notamment lorsque l'on souhaite étudier à la fois l'écoulement de fluide mais également la variation de température, ou encore le déplacement et la déformation de l'interface. En effet un unique champ est bien souvent insuffisant pour la description complète d'un écoulement physique complexe. L'utilisation de plusieurs critères est dans la plupart des cas réalisée de manière séquentielle, i.e. une métrique est construite par adaptation de maillage pour chaque champ puis l'ensemble des métriques obtenues est ensuite intersecté [Borouchaki et al., 1997a, Laug et Borouchaki, 2015]. Cependant l'intersection de métrique n'est pas une opération commutative, la métrique résultante n'est donc pas unique. Dans ce travail, on s'affranchit de l'intersection de métriques en construisant directement une unique métrique qui représente tous les champs [Coupez et al., 2013]. Pour ce faire, l'ensemble des critères est réuni dans un vecteur \mathbf{v} , et l'estimateur d'erreur e_{ij} est à présent considéré comme un vecteur dont les composantes correspondent aux estimateurs d'erreurs relatifs à chacun des champs.

Soit le vecteur \mathbf{v} composé de l'ensemble des champs d'intérêts :

$$\mathbf{v}(X^i) = \left(\frac{\mathbf{u}^i}{\|\mathbf{u}^i\|} \quad \frac{\|\mathbf{u}^i\|}{\max_j \|\mathbf{u}^j\|} \quad \frac{\alpha}{\max(\alpha)} \quad \dots \right) \quad (2.90)$$

où \mathbf{u} est la vitesse du fluide, $\frac{\|\mathbf{u}^i\|}{\max_j \|\mathbf{u}^j\|}$ fait référence à la magnitude de la vitesse normalisée sur l'ensemble des nœuds, et α correspond à un champ quelconque tel que la température etc.

Par conséquent, l'estimateur d'erreur devient :

$$\mathbf{e}_{ij} = \left(e_{ij}^1 \quad e_{ij}^2 \quad \dots \quad e_{ij}^n \right) \quad (2.91)$$

Ainsi en définissant une norme L_p adaptée, le facteur d'étirement s_{ij} devient :

$$s_{ij} = \left(\frac{\|\mathbf{e}(N)\|_p}{\|\mathbf{e}_{ij}\|_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.92)$$

Cette approche permet de réaliser une adaptation de maillage portant sur plusieurs champs à la fois de manière peu coûteuse et directe. La majorité des cas nécessitent une adaptation de maillage multi-critères, l'adaptation de maillage sur les écoulements présentés dans les chapitres suivants porte sur la norme de la vitesse et ses directions.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé les notions élémentaires pour l'étude des maillages et décrit le fonctionnement du mailleur MTC issu des travaux de [Coupez, 1991, Coupez, 2000, Gruau et Coupez, 2005] sur lequel repose cette thèse. Nous avons ensuite approfondi les travaux de [Coupez, 2011] et [El Jannoun, 2014] sur l'adaptation de maillage dynamique sur l'erreur *a posteriori* basée sur les arêtes afin de proposer des améliorations pour la construction de maillages anisotropes. L'approche proposée suit les travaux de [Coupez, 2011] en utilisant un estimateur d'erreur basé sur les arêtes dépendant du gradient reconstruit sur celles-ci, et en s'appuyant sur le tenseur de distribution des longueurs pour définir l'orientation des arêtes. En revanche comme dans [El Jannoun, 2014] on propose d'équidistribuer l'erreur sur l'ensemble du maillage afin de déterminer le facteur d'étirement nécessaire sur chaque arête. Cependant la méthode proposée dans cette thèse diffère sur le dénombrement des éléments qui est réalisé de manière plus exacte comme cela a été démontré, et par conséquent l'approche proposée se différencie sur le calcul du facteur d'étirement. De plus, l'erreur y est bornée afin d'éviter la création d'éléments dont la taille de maille est trop grande ou trop petite suivant les recommandations de l'utilisateur. Ces trois méthodes ont été comparées et les qualités de la nouvelle approche proposée sont nombreuses, on remarque notamment que la direction de l'anisotropie est bien mieux calculée, de manière à proposer un maillage décrivant au mieux le phénomène étudié même avec très peu d'éléments contrairement aux méthodes précédentes.

La nouvelle méthode proposée pour l'adaptation de maillage dynamique sera utilisée pour la valorisation du couplage avec la métrique couche limite, développée au chapitre 3, à partir du chapitre 4 section 4.4. Autrement, nous utiliserons la méthode proposée dans [Coupez, 2011].

3

Maillage couche limite

Sommaire

3.1	Introduction	76
3.2	Théorie de la couche limite	77
3.2.1	Grandeurs utiles	77
3.2.2	Phénomène de décollement	82
3.2.3	Couche limite laminaire	84
3.2.4	Couche limite turbulente	85
3.2.5	Résultats numériques	91
3.3	Maillage de la couche limite	94
3.3.1	Taille de maille	96
3.3.2	Directions des éléments	102
3.3.3	Courbure	104
3.4	Maillage couche limite : applications	107
3.4.1	Exemples élémentaires	108
3.4.2	Profil d'aile NACA0012	114
3.4.3	Ahmed body	116
3.4.4	Vers des géométries plus complexes	118
3.5	Calculs sur le maillage de couche limite	122
3.5.1	Plaque plane	122
3.5.2	Profil d'aile NACA0012	125
3.6	Conclusion	131

3.1 Introduction

Pour tout écoulement à grand nombre de Reynolds autour d'un profil, on a généralement apparition d'un phénomène de turbulence à la suite d'une instabilité dans l'écoulement laminaire. Le fluide considéré n'étant pas parfait, il possède une viscosité non nulle. Cette viscosité impose l'adhérence du fluide à la paroi, soit une vitesse de l'écoulement nulle sur le profil. La vitesse du fluide augmente en s'éloignant de la paroi jusqu'à atteindre celle de l'écoulement libre. Cette zone près de la paroi où la vitesse du fluide est inférieure à 99% de la vitesse de l'écoulement extérieur $u_e(x, \infty)$ est appelée la couche limite (Figure 3.1). Le concept fondamental de couche limite a été introduit par Prandtl en 1904, qui suggéra de diviser le domaine en deux régions, une proche paroi où la viscosité est prédominante et une autre plus loin de la paroi où le fluide est considéré comme parfait. Cette approche a permis de livrer une interprétation à bon nombre de phénomènes que la théorie des fluides parfaits ne suffisait pas à expliquer.

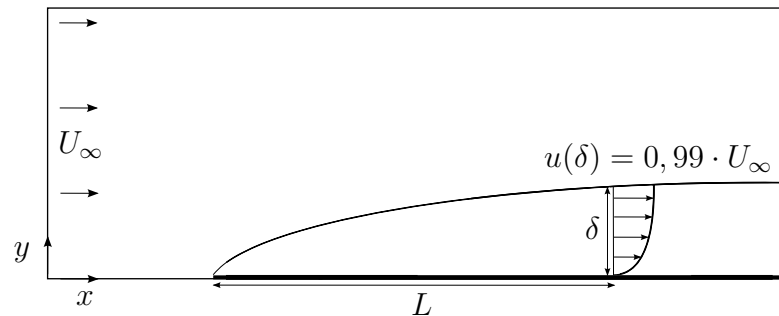


FIGURE 3.1 – Couche limite sur une plaque plane d'épaisseur δ à une distance L du bord d'attaque

La couche limite est un élément clé dans l'étude d'écoulements à haut Reynolds, c'est le lieu où la turbulence survient, où les tourbillons prennent naissance et où on observe des détachements. De telle sorte que la précision de la simulation dépende essentiellement de la qualité du maillage dans la couche limite. Le maillage dans la couche limite doit être suffisamment fin selon le solveur utilisé pour capturer toutes les échelles du phénomène de turbulence. Pour cela, revenons à la théorie des couches limites [Schlichting, 1979, Cousteix, 1989] et plus particulièrement à sa structure afin d'élaborer un maillage satisfaisant pour l'étude de la couche limite.

3.2 Théorie de la couche limite

Dans cette section, nous allons reprendre la théorie des couches limites et nous appliquer à définir les grandeurs essentielles à sa caractérisation. Nous étudierons ensuite les phénomènes physiques mis en jeu et décrirons le profil de vitesse associé. Finalement, nous mettrons en exergue les difficultés associées à la simulation numérique des couches limites.

3.2.1 Grandeurs utiles

Équations de couche limite

Dans un premier temps, reprenons les équations qui régissent la couche limite, à savoir les équations de Navier-Stokes incompressibles appliquées à un fluide newtonien non pesant (cf 1.2) :

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}_{\text{accélération due à la convection}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \nabla P}_{\text{forces de pression}} + \underbrace{\nu \Delta \mathbf{u}}_{\text{forces visqueuses}} \quad (3.1)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}|_{\text{paroi}} &= 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\text{paroi}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ce système d'équations paraboliques est non-linéaire et ouvert.

La couche limite est la zone près de la paroi où les effets visqueux du fluide sont prédominants, on parle même de cisaillement. Regardons alors de plus près le terme des forces visqueuses, pour cela plaçons nous dans le cadre d'un écoulement bidimensionnel tel que la tension visqueuse devienne :

$$\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (3.3)$$

Or si la direction x est alignée avec la direction de l'écoulement libre (comme sur la figure 3.1), alors (3.3) se simplifie de la manière suivante :

$$\mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (3.4)$$

De plus le terme de convection apporte une contribution à la tension totale de l'écoulement, on parle de tension turbulente dénommée tension de Reynolds et qui s'écrit :

$$-\rho \langle u'_x u'_y \rangle \quad (3.5)$$

où le *prime* dénote la partie fluctuante du champ et $\langle \rangle$ est l'opérateur faisant référence à la moyenne temporelle du champ.

Ainsi on définit la tension totale τ :

$$\tau = -\rho \langle u'_x u'_y \rangle + \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (3.6)$$

Remarquons que les deux composantes de τ sont complémentaires et ont des domaines de prépondérance bien distincts. En effet la tension de Reynolds (3.5) s'annule sur la paroi, tandis que la tension visqueuse (3.4) diminue au fur et à mesure que la distance à la paroi augmente. Ainsi la tension de Reynolds est dominante dans tout l'écoulement excepté à proximité de la paroi.

Sur la paroi, on définit la contrainte pariétale (contrainte de frottement à la paroi) :

$$\tau_p = \mu \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (3.7)$$

On définit également le coefficient de frottement pariétal, comme la contrainte pariétale normalisée par la pression dynamique :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_e^2} \quad (3.8)$$

De plus, la contrainte pariétale nous permet de définir la vitesse de frottement u_τ qui correspond à la vitesse du fluide à proximité immédiate de la paroi :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (3.9)$$

Finalement, rappelons que le paramètre essentiel à l'étude des écoulements fluide-structure et plus particulièrement de leur couche limite, est le nombre de Reynolds local défini par la relation suivante :

$$Re_x = \frac{\rho x U_\infty}{\mu} \quad (3.10)$$

avec x la distance au bord d'attaque le long du profil.

Épaisseurs de couche limite

On définit conventionnellement l'épaisseur de la couche limite δ comme la distance à la paroi tel que :

$$\frac{u(x, \delta)}{u_e(x)} = 0.99 \quad (3.11)$$

Cette définition n'est pas satisfaisante dans la mesure où elle ne traduit pas un caractère physique de l'écoulement. Ainsi, deux autres quantités beaucoup plus significatives du point de vue physique ont été développées : l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de quantité de mouvement.

L'épaisseur de déplacement δ^* caractérise la perte de débit-masse au travers d'une section de la couche limite par rapport au cas de l'écoulement de fluide parfait incompressible.

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (3.12)$$

L'épaisseur de quantité de mouvement θ caractérise la perte de quantité de mouvement dans la couche limite par rapport au cas d'écoulement de fluide parfait.

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (3.13)$$

On définit également le facteur de forme $H = \frac{\delta^*}{\theta}$ comme le rapport de ces deux grandeurs, il permet de décrire l'évolution de la couche limite. De plus on définit un nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$Re_{\theta} = \frac{U_{\infty}\theta}{\nu} \quad (3.14)$$

von Kármán a établi une équation mettant en relation le coefficient de frottement, les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement et la distribution de vitesse extérieure u_e :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (3.15)$$

Structure de la couche limite

La couche limite est composée de plusieurs couches de fluides, les unes au dessus des autres, dans lesquelles le comportement du fluide diffère. On distingue deux types d'écoulements, les écoulements laminaires qui sont des écoulements réguliers avec des lignes de courants parallèles à la paroi, tandis que les écoulements turbulents sont chaotiques, il s'agit en effet d'une superposition de tout un ensemble de mouvements d'échelles très variées. A l'intérieur des mouvements de grande échelle se forment des mouvements de plus petites échelles qui eux-même renferment des mouvements d'échelles encore plus petites. Il existe une limite inférieure à la taille des tourbillons, en

effet la viscosité dissipe les plus petites structures et leur énergie cinétique sous forme de chaleur. L'échelle de longueur caractéristique associée aux plus petites structures est la suivante :

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.16)$$

où $\epsilon = v^3/l$ par analyse dimensionnelle, avec $v = \sqrt{k}$ l'échelle de vitesse caractéristique fonction de l'énergie cinétique et l l'échelle de longueur caractéristique pour les plus grosses structures.

La formation de ces tourbillons d'échelles variées s'explique grâce au concept de cascade d'énergie introduit par Kolmogorov [Kolmogorov, 1991]. Les forts gradients de vitesse à proximité de la paroi engendrent des structures turbulentes par un transfert d'énergie du mouvement moyen vers le mouvement turbulent, ce sont les plus grosses structures rencontrées dans l'écoulement. Ces structures soumises aux phénomènes d'étirement tourbillonnaire donnent naissance à des structures plus petites tout en leur transférant de l'énergie. Les grosses structures ont un champ de vitesse propre et elles produisent des structures plus petites qui leur extraient de l'énergie. Ce processus se répète jusqu'à ce que les structures deviennent si petites que la viscosité puisse agir et détruire leur énergie en chaleur. Ainsi les écoulements turbulents favorisent le mélange ce qui engendre un gradient de vitesse d'autant plus intense au niveau de la paroi comme on peut l'observer sur la figure 3.2.

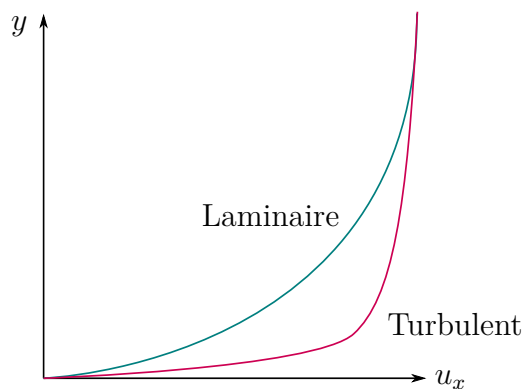


FIGURE 3.2 – Comparaison des profils de vitesse pour un écoulement laminaire et un écoulement turbulent

Revenons à la définition de la couche limite comme une superposition de couches de fluides renfermant des tourbillons de tailles de plus en plus petites à mesure que la distance à la paroi diminue. De ce fait, dans une première sous-couche l'écoulement est laminaire c'est ici que la dissipation s'opère, et progressivement d'une couche à la suivante l'écoulement retrouve un caractère pleinement turbulent, et on rencontre des tourbillons de taille de plus en plus grande. Ainsi pour capturer précisément le comportement physique du fluide dans la couche limite, le maillage doit respecter cette structure. Autrement dit, le maillage est organisé en strates, où la première couche de mailles a une épaisseur h_{\min} et l'épaisseur des couches augmente à mesure que la distance à la paroi augmente suivant un facteur de croissance α , et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'épaisseur globale de la couche limite δ soit atteinte (Figure 3.3).

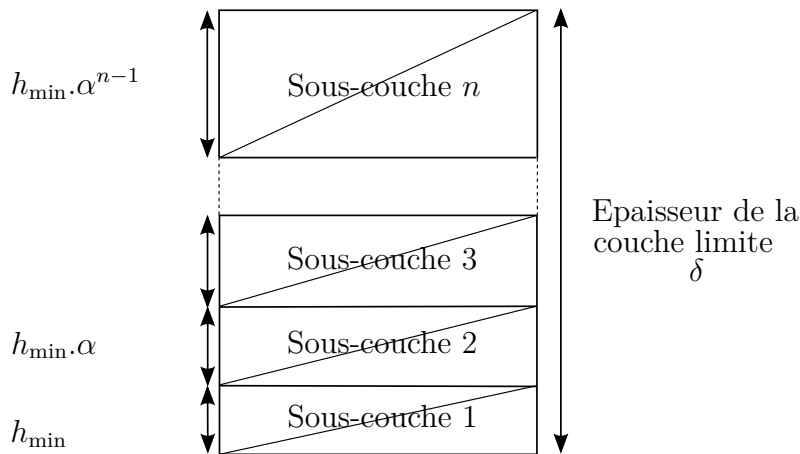


FIGURE 3.3 – Structure de la couche limite

L'épaisseur de la première couche de mailles h_{\min} est définie par :

$$h_{\min} = \frac{y_0^+ \nu}{u_\tau} \quad (3.17)$$

où y_0^+ représente la distance adimensionnée à la paroi pour la première maille, qui est fixée en fonction de la précision attendue et des ressources de calcul disponibles.

En combinant (3.9) et (3.8) dans (3.17) nous pouvons réécrire l'expression de la taille de maille minimum dans la couche limite h_{\min} en fonction du

nombre de Reynolds $Re_L = \frac{\rho L U_\infty}{\mu}$ de l'écoulement étudié à une longueur caractéristique du bord d'attaque L , suivant le coefficient de frottement pariétal C_f et avec la précision souhaitée pour le maillage y_0^+ :

$$h_{\min} = \frac{Ly_0^+}{Re_L \sqrt{\frac{C_f}{2}}} \quad (3.18)$$

De plus, la loi empirique de Blasius donne, pour un écoulement laminaire, une approximation de l'épaisseur de couche limite δ_{lam} [Cousteix, 1989, Schlichting, 1979] :

$$\frac{\delta_{\text{lam}}}{L} = \frac{5}{Re_L^{1/2}} \quad (3.19)$$

alors qu'en turbulent on a :

$$\frac{\delta_{\text{turb}}}{L} = \frac{0.38}{Re_L^{1/5}} \quad (3.20)$$

Finalement, le dernier paramètre nécessaire pour pleinement déterminer la structure de la couche limite est le facteur de croissance α , tel que la taille de maille augmente à mesure que la distance à la paroi augmente, α est conventionnellement pris égal à 1.2.

De plus, on déduit des paramètres précédemment définis le nombre de strates composant la couche limite en utilisant la relation suivante :

$$n = \ln \left(1 - \delta \frac{1 - \alpha}{h_{\min}} \right) \times \frac{1}{\ln(\alpha)} \quad (3.21)$$

3.2.2 Phénomène de décollement

En aérodynamique, la couche limite est la source de tous les phénomènes de turbulence développée, nous allons étudier un peu plus en détails ces phénomènes et le profil de l'écoulement associé.

Considérons l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre (Figure 3.4). Dans le cas d'un écoulement sans frottement, les particules de fluides accélèrent de D à E et décélèrent de E à F telles qu'elles aient la même vitesse en F qu'en D. Cependant, dans la couche limite les frottements sont non négligeables, ainsi une telle particule perd tellement d'énergie cinétique pour aller de D à E qu'elle n'en a plus assez pour aller de E à F. Ainsi la particule tend à s'arrêter et repartir dans le sens inverse dans cette région où la pression augmente fortement, c'est ce qu'on appelle le décollement de la couche limite

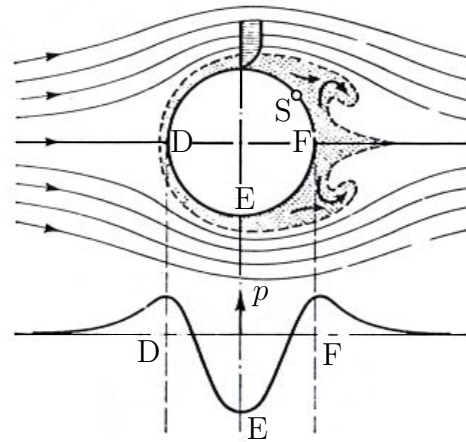


FIGURE 3.4 – Décollement de la couche limite [Schlichting, 1979]

[Schlichting, 1979].

En effet, le phénomène de décollement se produit lorsqu'une couche limite se développe en présence d'un gradient de pression adverse, c'est à dire tel que la pression croît dans le sens de l'écoulement. Si ce gradient de pression est suffisamment intense, la vitesse des particules de fluides va diminuer jusqu'à s'annuler et devenir négative : on dit que la couche limite décolle. On définit l'abscisse de décollement S comme la position à laquelle la contrainte pariétale s'annule : $\tau_p = 0$ (cf Figure 3.5).

Dans la zone dite de recirculation qui suit le décollement, on a en général un développement d'instabilités et l'écoulement devient turbulent. Le décollement de la couche limite joue un rôle très important en aéronautique. En effet pour une valeur critique de l'incidence, la couche limite décolle du profil, entraînant la formation d'une zone de recirculation tourbillonnaire et d'un sillage épais, qui conduisent à une chute brutale de la portance et à une augmentation de la traînée : c'est le phénomène de décrochage. Ainsi la prédiction du décollement est un enjeu crucial en aérodynamique.

Notons que la turbulence accroît la capacité de mélange de l'écoulement, ainsi dans une couche limite turbulente l'énergie cinétique est plus grande que dans une couche limite laminaire. Par conséquent, une couche limite turbulente est beaucoup plus résistante au phénomène de décollement, elle ne décolle que pour des gradients de pression beaucoup plus intenses.

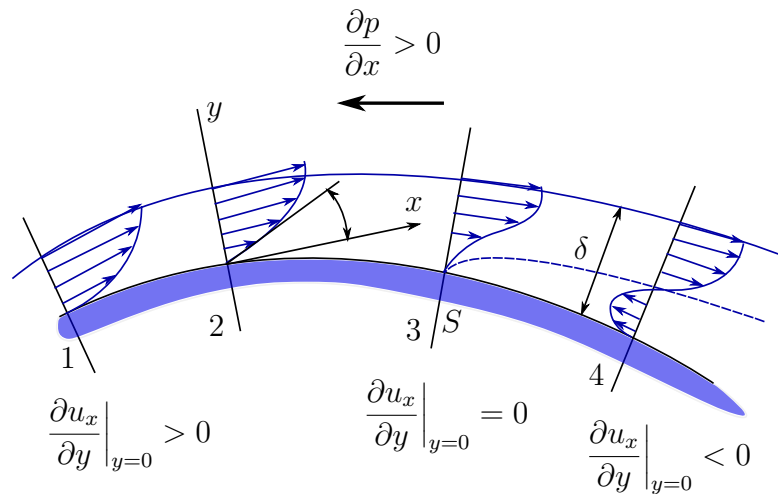


FIGURE 3.5 – Profil de vitesse dans la couche limite lors du décollement

Ainsi en aérodynamique toute la subtilité vient du choix du profil tel que l'écoulement soit laminaire pour minimiser la traînée mais devienne turbulent près du bord de fuite pour éviter tout phénomène de décollement et par conséquent décrochage.

3.2.3 Couche limite laminaire

Revenons plus en détails sur le profil de vitesse dans la couche limite. Le cas de référence pour l'étude des couches limites est le cas de plaque plane à incidence nulle dans un écoulement de fluide visqueux incompressible. C'est un cas simple car la pression statique reste constante dans tout l'écoulement, ainsi il n'y a pas de décollement. Ce cas est parfaitement documenté et la solution exacte est connue pour un écoulement laminaire sans gradient de pression (solution de Blasius).

Soit une couche limite laminaire sur une plaque plane (Figure 3.1), l'écoulement dans la couche limite est très régulier, formé de lamelles de fluide glissant les unes sur les autres. Les lignes de courant sont parfaitement parallèles à la plaque. La plaque plane est un cas très stable, ainsi les écoulements sur la plaque plane restent laminaires jusqu'à un nombre de Reynolds d'environ 10^5 . Pour les nombres de Reynolds inférieurs, on comparera le profil de vitesse à la solution de Blasius obtenue en 1908 (Figure 3.6).

Où la variable de Blasius η est définie par la relation suivante :

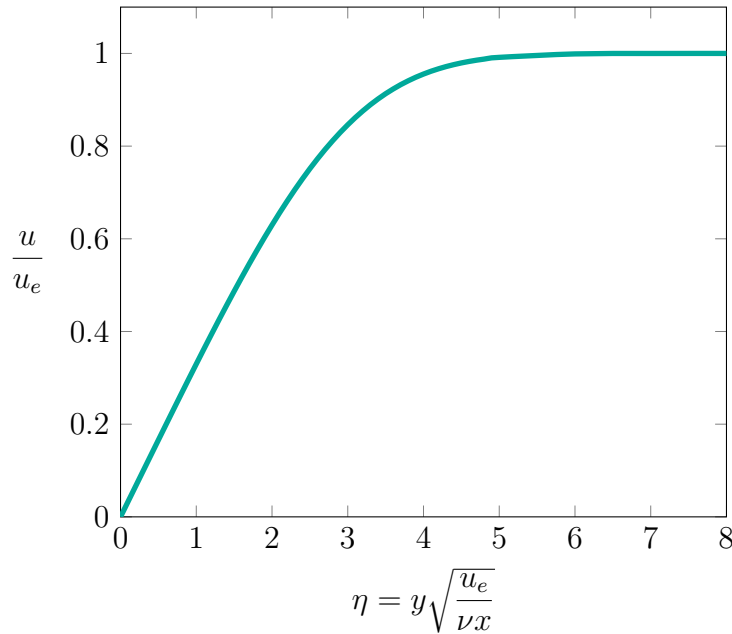


FIGURE 3.6 – Solution de Blasius $\left(\frac{u}{u_e} = f(\eta)\right)$

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} \quad (3.22)$$

3.2.4 Couche limite turbulente

Les écoulements aéronautiques, éoliens, etc., atteignent rapidement des nombres de Reynolds supérieurs à 10^6 . Ces écoulements sont donc sans aucun doute de type turbulent. En effet, la plupart des écoulements rencontrés en pratique ne présentent pas les propriétés idéales laminaires. A grande vitesse, des instabilités surviennent du fait d'imperfections (par exemple la rugosité de la paroi), ainsi l'écoulement devient instationnaire, on parle de régime transitoire instable, avant de devenir pleinement turbulent. L'écoulement de couche limite turbulente est schématisé sur la figure 3.7.

En régime turbulent, le profil de vitesse croît beaucoup plus rapidement avec la distance à la paroi (Figure 3.7) et par conséquent la tension visqueuse (3.4) est bien plus élevée en régime turbulent. Ainsi la couche limite turbulente résiste beaucoup mieux aux gradients de pression adverses : elle est donc plus difficile à faire décoller. De plus, elle est plus épaisse que son homologue laminaire.

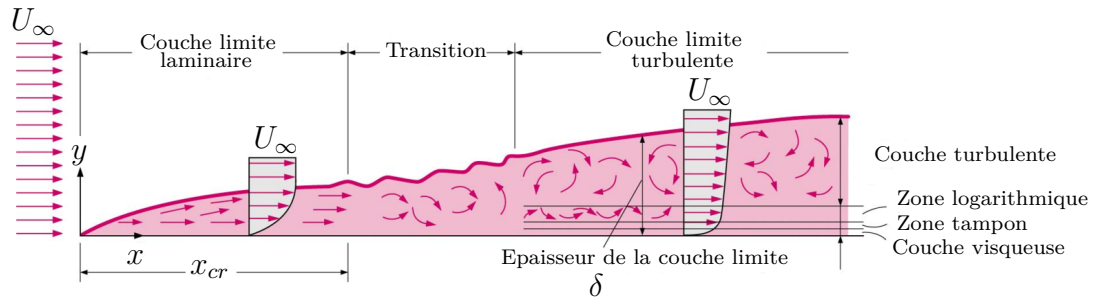


FIGURE 3.7 – Couche limite turbulente sur une plaque plane

Profil de vitesse dans la couche limite turbulente

Contrairement à la couche limite laminaire, il n'existe pas de solution exacte pour le profil de vitesse sur le cas de plaque plane pour une couche limite turbulente. Il n'est pas possible de résoudre exactement les équations de Navier-Stokes telles quelles car il s'agit d'un système indéterminé du fait de la présence de la tension de Reynolds, qui correspond à l'inconnue supplémentaire. Cependant un profil de vitesse approché [Corre, 2005] est détaillé ci-dessous.

On cherche le profil de vitesse dans la couche limite turbulente, elle est composée de deux régions, la région interne proche de la paroi où les effets de la viscosité sont importants et la région externe où la contrainte turbulente prend l'ascendant.

Région interne

Près de la paroi la contrainte visqueuse est dominante, car les vitesses moyennes et les fluctuations de vitesse tendent vers zéro, ainsi :

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (3.23)$$

Les grandeurs cinématiques sont reliées aux paramètres internes de la couche limite, à savoir u_τ , la vitesse de frottement à la paroi et ν la viscosité cinématique du fluide à l'aide de grandeurs adimensionnelles. On définit la vitesse adimensionnée u^+ comme le rapport de la vitesse u_x par la vitesse à la paroi u_τ .

$$u^+ = \frac{u_x}{u_\tau} \quad (3.24)$$

De la même manière on définit la distance à la paroi adimensionnée y^+ comme

le rapport de la distance au profil y par une échelle de longueur caractéristique, la longueur visqueuse :

$$\frac{h_{\min}}{y_0^+} = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (3.25)$$

Tel que :

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu} \quad (3.26)$$

Soit la fonction $f(y^+)$, appelée loi de paroi, une fonction universelle indépendante en particulier de l'épaisseur de couche limite, de la vitesse extérieure et du gradient de pression. Dans la région interne on cherche le profil de vitesse sous la forme :

$$u^+ = f(y^+) \quad (3.27)$$

Cette région se décompose en trois zones principales décrites ci-dessous.

- **Sous couche visqueuse** $y^+ < 5$

Quand y tend vers zéro on a :

$$\tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \simeq \mu \frac{u_x}{y} \quad (3.28)$$

Soit en introduisant l'échelle caractéristique de vitesse dans cette zone (u_τ) définie par (3.9), on obtient :

$$u^+ = y^+ \quad (3.29)$$

On admet que la loi de paroi s'étend sur une distance suffisante pour que la contrainte visqueuse devienne négligeable devant la contrainte turbulente. On parle de sous couche visqueuse.

- **Zone logarithmique** $50 < y^+ < 500$

Dans cette zone le frottement entre les filets de l'écoulement est essentiellement dû à l'agitation turbulente ($-\rho < u'v' > \gg \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$). On se trouve à la transition entre les régions interne et externe.

Dans la région interne loin de la paroi, $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ ne dépend que de y , τ_p et ρ , ainsi :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} y \tau_p^{-\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} = \text{cste} \quad (3.30)$$

En variable de paroi, cette formule devient :

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} y^+ = \frac{1}{\kappa} \quad (3.31)$$

Par intégration on obtient :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (3.32)$$

Cette loi est valable dans la région interne loin de la paroi. Elle fait partie de la loi de paroi et est donc, de même, universelle. La constante de von Kármán κ vaut 0,41, et la constante d'intégration B est voisine de 5.

La loi logarithmique est l'une des propriétés les plus importantes de la couche limite et des écoulements turbulents en général.

- **Zone tampon - Spalding (1961)**

Le raccordement de la loi linéaire valable dans la sous-couche visqueuse et du profil logarithmique valable dans la partie supérieure de la couche interne se fait progressivement dans une région tampon suivant le profil de vitesse suivant :

$$y^+ = u^+ + e^{-\kappa B} \left(e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{1}{2}(\kappa u^+)^2 - \frac{1}{6}(\kappa u^+)^3 \right) \quad (3.33)$$

Région externe

Dans la région externe de la couche limite, la structure de l'écoulement est entièrement contrôlée par la turbulence. Le terme de frottement turbulent devient progressivement prépondérant par rapport à la contrainte visqueuse à mesure que la distance à la paroi augmente. Si bien que lorsque l'on s'approche de la frontière de la région interne, la contrainte visqueuse devient négligeable.

- **Couche extérieure $y^+ > 500$**

La différence entre la vitesse moyenne dans cette zone et la vitesse extérieure u_e est de l'ordre de grandeur de la vitesse de frottement u_τ .

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = -\frac{1}{\kappa} \ln(\eta) + A \quad (3.34)$$

avec $\eta = \frac{y}{\delta}$ et la constante d'intégration A proche de 2.35. Cette relation exprime la loi de vitesse déficitaire.

- **Loi de recouvrement**

Il est nécessaire de s'assurer que la zone logarithmique et la couche extérieure se recouvre correctement. Ceci est un peu délicat vu l'indépendance

des profils de vitesse (3.32) et (3.34) l'un vis à vis de l'autre. Une telle approche est possible que s'il existe une région intermédiaire où les deux profils sont simultanément valables.

Suivant cette théorie on veut avoir simultanément $y^+ \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow 0$. Or on remarque que :

$$\frac{y^+}{\eta} = \frac{u_\tau \delta}{\nu} = \mathcal{R}_\tau \quad (3.35)$$

D'où le raccord n'est possible que si \mathcal{R}_τ tend vers l'infini. Dans ce cas là, le profil de vitesse est donné par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y u_\tau}{\nu} \right) + B \\ \frac{u_e - u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{\delta} \right) + A \end{cases} \quad (3.36)$$

Par combinaison, on obtient :

$$\frac{u_e}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_\tau \delta}{\nu} \right) + A + B \quad (3.37)$$

Or par définition on a :

$$u_\tau = u_e \left(\frac{C_f}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

D'où :

$$\left(\frac{C_f}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\delta}{\nu} \left(\frac{C_f}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) + A + B \quad (3.39)$$

La comptabilité de la loi de paroi et de la loi de vitesse déficitaire est donc assurée si le coefficient de frottement satisfait l'équation (3.39).

• Zone de sillage

Lorsque l'on s'éloigne de la paroi dans la région externe, le déficit de vitesse ne dépend plus seulement de η mais varie également en fonction du gradient de pression extérieure. Coles a proposé en 1952 d'introduire une correction additive à la loi (3.34) [Coles, 1956], ce profil de vitesse a ensuite été peaufiné par Simpson (1970) et Purtell (1981) pour obtenir la forme suivante :

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = -\frac{1}{\mathcal{K}} \ln(\eta) - \frac{\Pi}{\mathcal{K}} W(\eta) + 2 \frac{\Pi}{\mathcal{K}} \quad (3.40)$$

avec la fonction correctrice $W(\eta) = 2 \sin^2(\frac{\pi}{2}\eta)$ et le paramètre de sillage $\Pi = \Pi(\beta)$ où β dépend du gradient de pression extérieur. Une approximation expérimentale a été donnée par White tel que : $\Pi \approx 0.8(\beta + 0.5)^{0.75}$

Le profil de vitesse pour la couche limite turbulente est tracé en variable interne avec une échelle logarithmique (Figure 3.8), ce qui donne un effet loupe sur la région interne. Bien qu'établis sur le cas de plaque plane, ce profil est souvent utilisé pour approcher le profil de vitesse sur une géométrie quelconque. On note également la validité de ce profil pour tout nombre de Reynolds associé à un régime turbulent.

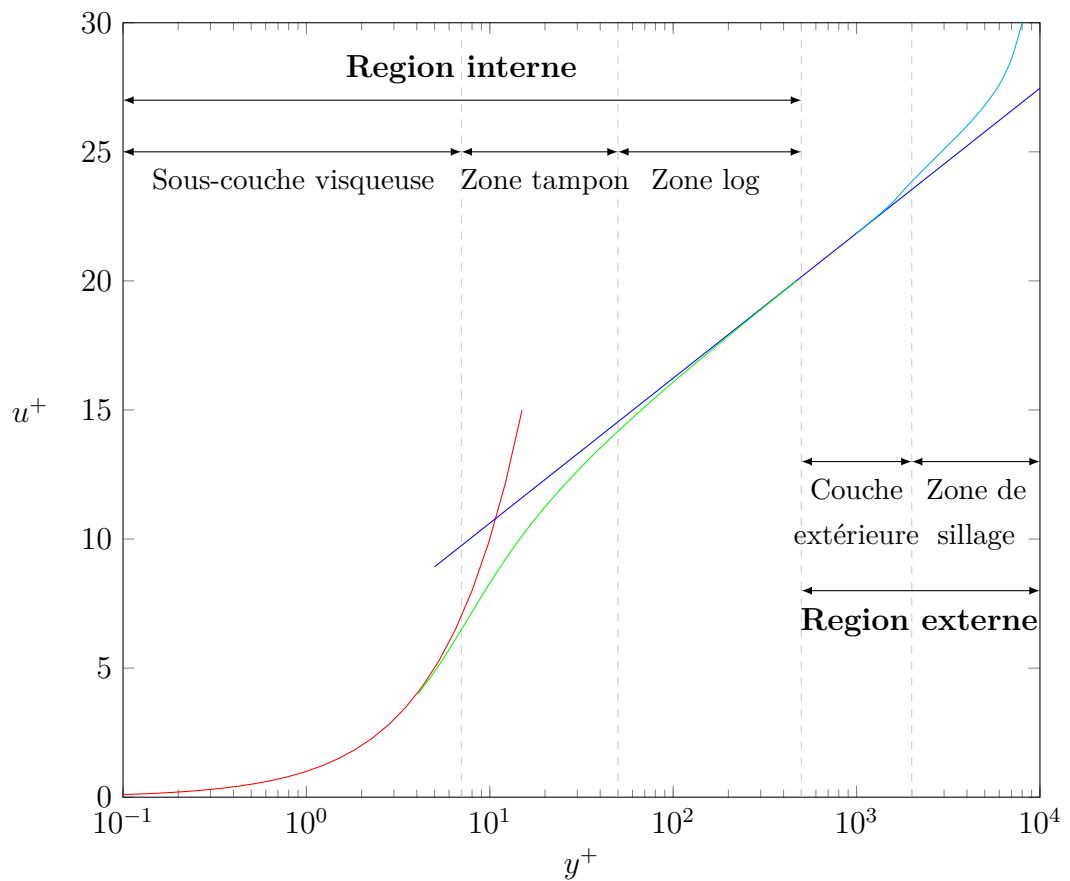


FIGURE 3.8 – Profil de vitesse à travers la couche limite turbulente d'une plaque plane

3.2.5 Résultats numériques

Dans cette partie nous allons tenter de reproduire les profils théoriques de plaque plane pour un écoulement laminaire et un écoulement turbulent avec le solveur éléments finis VMS (voir section 1.4 pour plus de détails) et l'adaptation de maillage proposée par Thierry Coupez (décrite en section 2.4 (a)). Nous mettrons ainsi en évidence la grande influence du maillage sur la résolution et montrerons les limites de l'adaptation de maillage.

Pour ce faire on met en place le cas de plaque plane présenté sur la figure 3.9 conformément au benchmark proposé par la NASA [Rumsey, 2016].

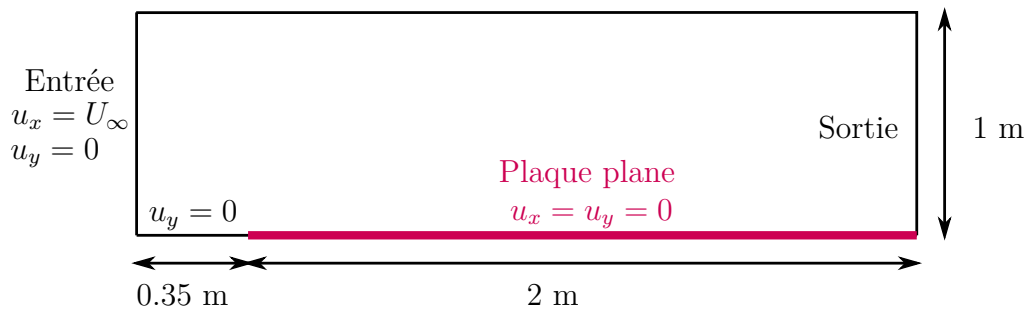


FIGURE 3.9 – Configuration du cas de plaque plane

On effectue une simulation pour le régime laminaire avec un nombre de Reynolds $Re_L = 10^4$ pour une longueur caractéristique $L = 1$ m, ce qui se traduit par une vitesse d'entrée $U_\infty = 1$ m·s⁻¹, et une viscosité cinématique $\nu = 10^{-4}$ m²·s⁻¹. La simulation est lancée avec un pas de temps $dt = 0.01$ s pour un temps total de 4 s. On présente le champ de vitesse solution et le maillage adapté sur cette dernière composé de 10000 éléments sur la figure 3.11. On compare le profil de vitesse obtenu pour une contrainte sur le nombre d'éléments croissante au profil théorique de Blasius sur la figure 3.10. On observe bien une convergence en maillage vers le profil de vitesse théorique de Blasius. Le tableau 3.1 recense les épaisseurs de couche limite et les coefficients de frottement pour les différents maillages, celle-ci semble converger vers $\delta = 4 \cdot 10^{-2}$ ce qui est très proche de la valeur théorique attendue $\delta = 5 \cdot 10^{-2}$. Ainsi l'adaptation de maillage associée au solveur VMS permet bien une résolution précise de l'écoulement laminaire sur une plaque plane.

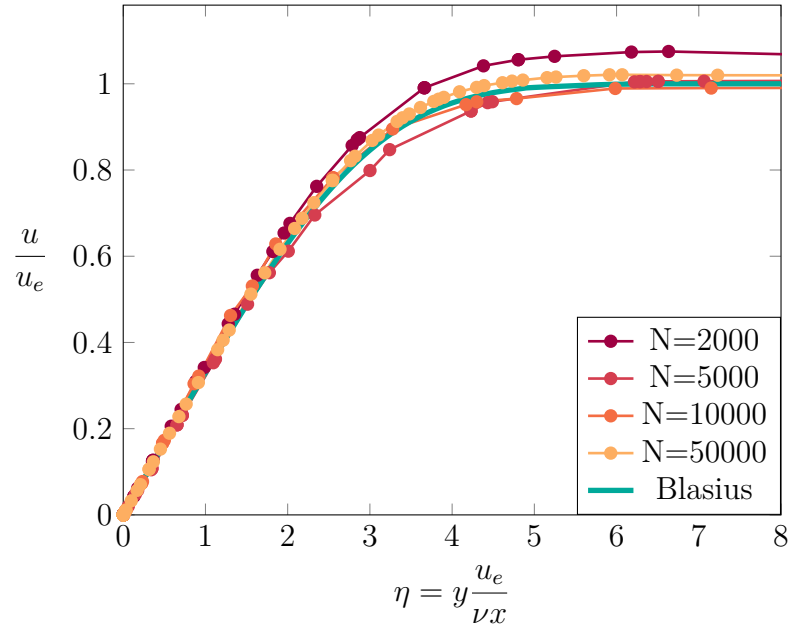


FIGURE 3.10 – Convergence en maillage vers la solution de Blasius $\left(\frac{u}{u_e} = f(\eta)\right)$

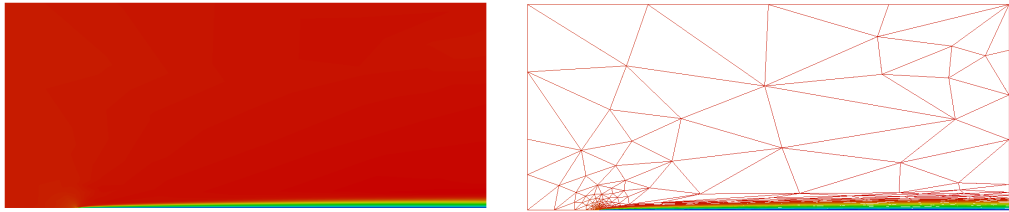


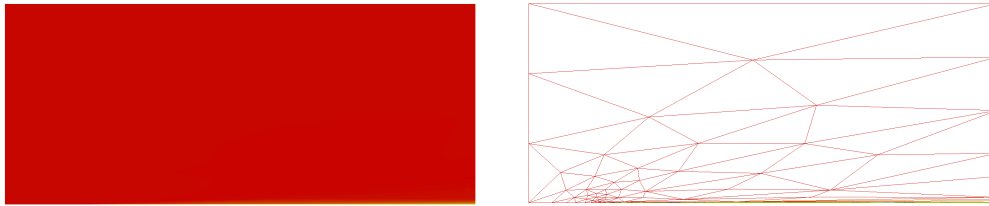
FIGURE 3.11 – Champ de vitesse pour l'écoulement laminaire pour le cas de plaque plane ($Re_L = 10^4$) à gauche et le maillage à 10000 éléments à droite

On effectue ensuite une simulation pour le régime turbulent avec un nombre de Reynolds $Re_L = 5 \cdot 10^6$, seule la viscosité cinématique change, on prend cette fois $\nu = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Il s'agit d'un problème difficile, afin de soulager le solveur et les conditions aux limites, on ajoute une paroi glissante de 1 m derrière la plaque. On présente sur la figure 3.12 la solution du champ de vitesse et le maillage correspondant pour une adaptation de maillage comportant 100000 éléments. La couche limite est très fine et les éléments sont

	Épaisseur couche limite δ	Coefficient de frottement C_f
Théorie	$5 \cdot 10^{-2}$	$6.64 \cdot 10^{-3}$
$N_e = 2000$	$4.03 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
$N_e = 5000$	$3.98 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$
$N_e = 10000$	$4.18 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$
$N_e = 50000$	$4.07 \cdot 10^{-2}$	$8.83 \cdot 10^{-3}$

TABLE 3.1 – Épaisseur couche limite laminaire $Re_L = 10^4$

concentrés dans cette zone. Pour évaluer un peu plus finement le champ de vitesse, on le trace en variable de paroi comme présenté sur la figure 3.13. On remarque que la sous-couche visqueuse manque cruellement de nœuds ce qui se traduit par une mauvaise évaluation du coefficient de frottement comme on peut l'observer dans le tableau 3.2. De plus, l'épaisseur de couche limite est très supérieure à celle attendue.

FIGURE 3.12 – Champ de vitesse pour l'écoulement turbulent pour le cas de plaque plane ($Re_L = 5 \cdot 10^6$) à gauche et le maillage à 100000 éléments à droite

	Épaisseur couche limite δ	Coefficient de frottement C_f
Théorie	$1.75 \cdot 10^{-2}$	$2.69 \cdot 10^{-3}$
$N_e = 100000$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$

TABLE 3.2 – Épaisseur couche limite turbulente $Re_L = 5 \cdot 10^6$

Finalement, on en déduit que même avec un nombre d'éléments relativement élevé (100000), le maillage n'est pas bien adapté dans la couche limite ce qui engendre une erreur colossale sur le coefficient de frottement et sur l'épaisseur de la couche limite. Il est donc évident qu'un soin particulier doit être apporté au maillage de la couche limite. De ce fait nous proposons une nouvelle méthode de construction pour le maillage de couche limite basée sur la théorie et non plus sur l'erreur.

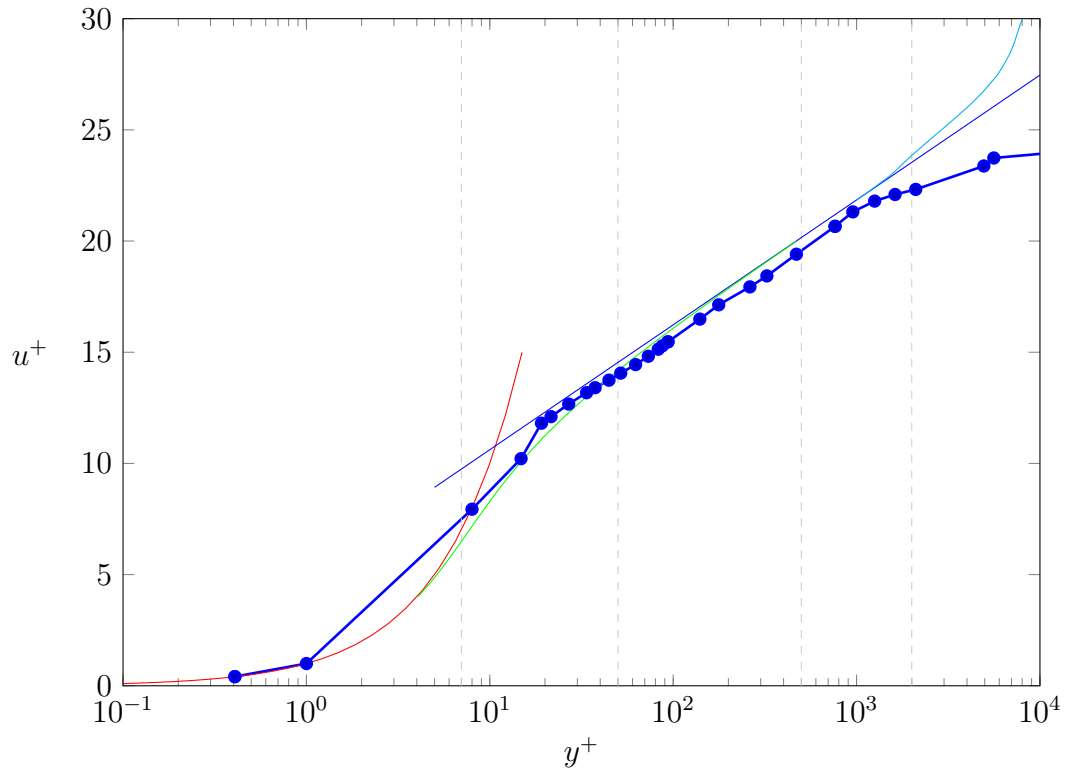


FIGURE 3.13 – Profil de vitesse à travers la couche limite turbulente d’une plaque plane pour une adaptation avec 100000 éléments par rapport au profil théorique

La génération de maillage de couche limite pour un écoulement visqueux est nécessaire pour mesurer avec précision le profil de vitesse proche des parois. Le maillage est donc adapté pour capter cette particularité. En effet, si la taille de maille est trop grande au départ, il sera impossible par la suite de retrouver l’intégralité des perturbations et le calcul pourra être amené à converger vers une mauvaise solution.

3.3 Maillage de la couche limite

La couche limite est la zone la plus importante lors de la résolution d’un écoulement fluide-structure à grand nombre de Reynolds autour d’une géométrie complexe. Sa discrétisation est un point clé de la convergence de la solution du calcul. En effet la taille des éléments, leur rapport d’aspect et les directions correspondantes ont un impact sur la précision et l’efficacité

du calcul autant que leur variation progressive de forme. Il est clair que tel que proposée l'adaptation de maillage ne suffit pas à résoudre précisément la couche limite (3.2), nous proposons ici de construire un maillage *a priori* à partir de la théorie des couches limites. Si bien que le maillage soit correctement raffiné dès le début de la simulation dans la couche limite et permette de capter l'intégralité des perturbations qui s'y produisent. De plus, ce maillage a vocation à satisfaire toute l'étendue de la simulation sans remaillage.

La construction d'un maillage est une tâche difficile, d'autant plus lorsqu'une géométrie complexe est impliquée, et grande consommatrice de temps humain. Un des enjeux majeurs de ces dernières années est donc d'automatiser cette construction de telle sorte que l'utilisateur n'ait plus à intervenir. La méthode la plus couramment utilisée pour automatiser la construction de maillage est une variante de la méthode frontale (advancing front), dénommée advancing layer [Pirzadeh, 1994, Hassan et al., 1996, Garimella et Shephard, 2000, Bottasso et Detomi, 2002, Loseille et Löhner, 2011, Alauzet et Marcum, 2015]. Cette méthode est intéressante car elle permet de construire le maillage volumique de la couche limite strate par strate à partir de l'extrusion du maillage de la surface de la géométrie et ainsi d'obtenir une couche limite parfaitement structurée. Elle est souvent couplée avec des techniques de maillages hybrides qui permettent de limiter le nombre d'éléments et d'assurer une parfaite orthogonalité des éléments à la surface [Marcum, 1995, Connell et Braaten, 1995, Ito et Nakahashi, 2002, Sahni et al., 2006]. Cependant, la méthode advancing layer nécessite de réaliser avec précaution un grand nombre de vérifications de proximité et de non-intersection lors de la création d'une nouvelle couche, ce qui est très coûteux et complexe à mettre en œuvre. De plus, une fois le maillage de couche limite réalisé, il est encore nécessaire de mailler le reste du volume avec une méthode classique, cependant l'existence de ce maillage n'est pas assurée. Dans ce travail nous souhaitons construire la couche limite le plus simplement possible, c'est à dire sans intervention au niveau du mailleur et en se contentant d'un maillage non structuré. Ainsi une nouvelle méthode est proposée, celle-ci repose sur l'adaptation de maillage basée sur les métriques et leur assemblage est fonction de la distance à la surface de la géométrie et de sa courbure.

Cette partie s'organise autour de l'assemblage de la métrique permettant la construction du maillage couche limite, dans un premier temps on va déterminer les tailles de mailles à appliquer et leur répartition, dans un second temps on va s'appliquer à définir les directions correspondantes, et finalement s'intéresser à la courbure pour parfaire la métrique. Dans un dernier paragraphe, on présentera les maillages obtenus sur diverses géométries, et

quelques résultats de simulations associées.

3.3.1 Taille de maille

Géométrie immergée

Ce travail s'inscrit dans le cadre général des domaines monolithiques, où des géométries sont immergées dans le domaine en utilisant un maillage de surface (STL stereolithography format), ou directement via un NURBS [Hachem et al., 2013b, Veysset, 2014] (voir détails en section 1.5). La première étape de l'algorithme d'adaptation de maillage proposé est la construction d'un champ levelset ϕ sur le maillage de calcul Ω_h pour repérer la géométrie immergée Ω_{im} . Il est obtenu par le calcul de la distance minimum entre la géométrie immergée et les nœuds du maillage de calcul [Bruchon et al., 2009]. Ainsi l'interface Γ_{im} est définie comme l'iso-valeur zéro de la fonction levelset :

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{X}) = d(\mathbf{X}, \Gamma_{im}), & \mathbf{X} \in \Omega_h \cap \Gamma_{im} \\ \phi(\mathbf{X}) = -d(\mathbf{X}, \Gamma_{im}), & \mathbf{X} \in \Omega_h \setminus \Gamma_{im} \\ \Gamma_{im} = \{\mathbf{X}, \phi(\mathbf{X}) = 0\} \end{cases} \quad (3.41)$$

Notons que le même algorithme peut être utilisé sur un maillage body-fitted, maillage où l'interface de la géométrie est concourante avec les bords du domaine. L'utilisation de géométries immergées présente un grand intérêt pour faciliter et automatiser la génération de maillage autour de géométries complexes. Le principal inconvénient de la méthode immergée repose sur la difficulté de représenter l'interface de la géométrie de manière continue [Quan et al., 2014]. En effet il est nécessaire de soigner le maillage pour représenter fidèlement l'interface entre le fluide et le corps immergé comme le montre la figure 3.14. On s'appliquera donc dans ce travail, en plus de construire la couche limite, à discrétiser convenablement l'interface quelle que soit sa complexité.

Le maillage initial est choisi arbitrairement grossier, il peut donc être difficile de repérer l'interface de la géométrie notamment quand la dimension caractéristique de la géométrie est plus petite que la taille d'un élément de maillage. Nous proposons dans ce cas d'utiliser une procédure de pré-maillage itérative qui consiste à insérer des nœuds supplémentaires autour de la géométrie comme décrit sur la figure 3.15.

Cette procédure consiste à calculer la taille de maille initiale dénotée h_{back} , puis à raffiner les éléments qui se trouvent à une distance inférieure à

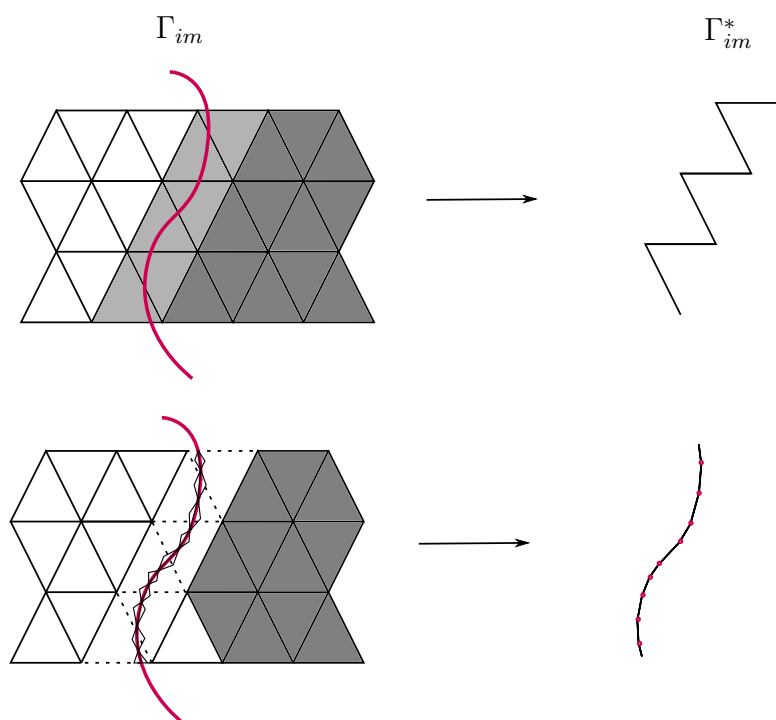


FIGURE 3.14 – Illustration de l'interface Γ_{im} en rose sur un maillage isotrope grossier en haut et un maillage anisotrope adapté en bas, et la représentation discrète obtenue Γ_{im}^* à gauche

$2 \times h_{\text{back}}$ de l'interface de la géométrie. Cette procédure est répétée autant de fois que nécessaire.

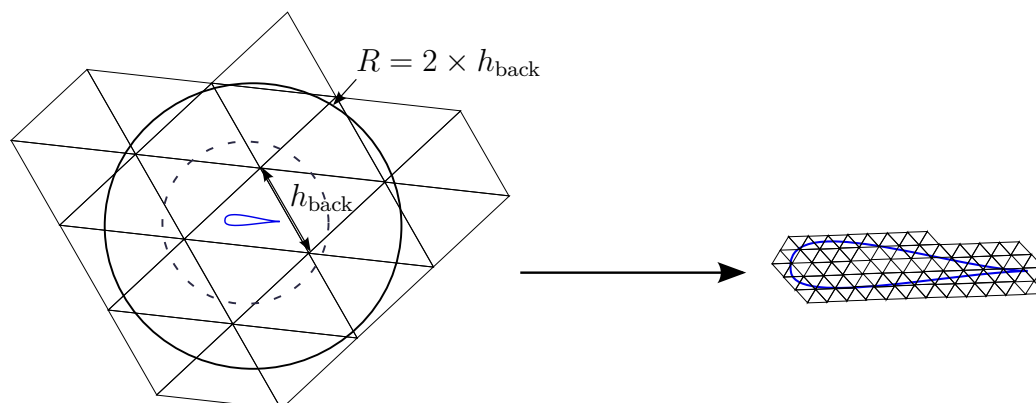


FIGURE 3.15 – Procédure de pré-maillage pour un maillage initial grossier

Rappel taille de maille théorique

Les tailles de mailles dans la couche limite sont déterminées à l'aide de la théorie des couches limites et détaillées dans la section 3.2.1. On rappelle l'expression simplifiée de la taille de maille minimum h_{\min} :

$$h_{\min} = \frac{Ly_0^+}{Re_L \sqrt{\frac{C_f}{2}}} \quad (3.42)$$

où le coefficient de frottement pariétal C_f est défini comme suit en fonction de la contrainte pariétale τ_p :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_e^2} \quad \text{avec} \quad \tau_p = \mu \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (3.43)$$

Or, la contrainte de frottement pariétale dépend de la dérivée de la vitesse perpendiculairement à la paroi, à son voisinage. Il suffit donc de mesurer le champ de vitesse pour en déduire la valeur de τ_p . Cependant, la vitesse variant très rapidement au voisinage de la paroi, il est très délicat d'estimer correctement cette dérivée. En revanche, on peut plus raisonnablement utiliser la loi (3.34), où la solution du champ de vitesse est plus stable, sous la formulation suivante pour déterminer C_f :

$$\frac{u}{u_e} = \frac{1}{\mathcal{K}} \ln \left(\frac{yu_e}{\nu} \gamma \right) + B\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma = \left(\frac{C_f}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.44)$$

Cependant, nous avons vocation à construire un maillage *a priori*, c'est à dire avant la résolution de l'écoulement et donc sans aucune connaissance sur le

champ de vitesse. Une approximation du coefficient de frottement pariétal C_f a été proposée par Schlichting [Schlichting, 1979] pour tout écoulement ayant un nombre de Reynolds inférieur à 10^9 :

$$C_f = [2 \log_{10}(\text{Re}_L) - 0.65]^{-2.3} \quad (3.45)$$

Cette approximation a été développée sur le cas de plaque plane mais reste applicable pour une grande variété de cas. Nous utiliserons par la suite cette approximation pour déterminer la taille de maille minimum h_{\min} dans la couche limite.

Rappelons également que le facteur de croissance α est conventionnellement fixé à 1.2.

Multi-levelset

Afin de construire le maillage de la couche limite strate par strate de manière structurée avec des éléments non structurés, la seconde étape de l'algorithme d'adaptation de maillage proposé est de localiser, en utilisant la méthode multi-levelset, toutes les sous-couches nécessaires dans l'épaisseur de la couche limite comme schématisé sur la figure 3.16. L'extrémité externe de chaque sous-couche est repérée par l'iso-valeur zéro de la fonction levelset associée à celle-ci telle qu'une maille soit prescrite dans la direction normale à la surface entre chaque fonction levelset. Ainsi les sommets à l'intérieur de chaque strate sont bien identifiés et les tailles de mailles correspondantes peuvent y être imposées. Cette technique est très intéressante car elle dirige le maillage et le structure en même temps.

La première sous-couche est située entre l'iso-valeur zéro de la fonction levelset associée à la géométrie immergée $Level[0]$ et l'iso-valeur zéro de la fonction levelset associée à la première strate $Level[1]$, qui correspond en fait à l'iso-valeur h_{\min} de $Level[0]$. Où h_{\min} est également la taille de maille imposée dans cette strate. De même, la k -ième strate est située entre l'iso-valeur zéro de la fonction levelset associée à la $(k-1)$ -ième strate, $Level[k-1]$, et l'iso-valeur h_n de $Level[k-1]$, où $h_n = h_{\min} \cdot \alpha^{k-1}$ est la taille de maille imposée dans la direction normale dans la k -ième strate. De plus, la levelset de la k -ième strate, $Level[k]$, est également égale à la levelset de l'objet, $Level[0]$, au même sommet plus l'épaisseur des $k-1$ premières strates. Tel que :

$$\begin{aligned} Level[k] &= Level[k-1] + h_{\min} \cdot \alpha^{k-1} \\ &= Level[0] + h_{\min}(1 - \alpha^k)/(1 - \alpha) \end{aligned} \quad (3.46)$$

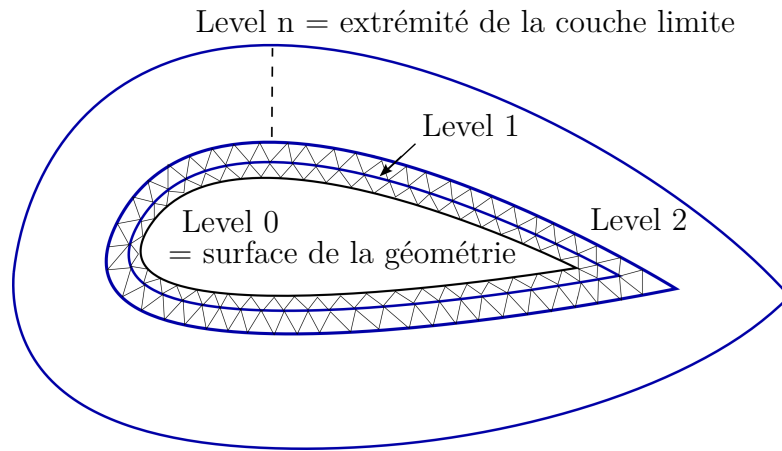


FIGURE 3.16 – Représentation de l'iso-valeur zéro de la fonction levelset associée à chaque strate de la couche limite

Et ainsi de suite jusqu'à l'extrémité de la couche limite, représentée par la n -ième strate (voir Figure 3.3).

Remarque. Dans certaines applications, la physique à l'intérieur de la géométrie immergée n'est pas étudiée il est alors intéressant de minimiser autant que possible le nombre de sommets à l'intérieur de la géométrie en utilisant un grand facteur de croissance à mesure que la distance à l'interface augmente. Cependant pour assurer un calcul précis près de la paroi nous devons garantir que l'interface soit toujours bien discrétisée. Pour cela nous dupliquons les trois premières strates de la couche limite en termes de tailles de maille dans la direction normale du côté interne de l'interface. Cela permet d'économiser un grand nombre de degrés de libertés et ainsi du temps de calcul.

Évolution de la taille de maille sur le reste du domaine

Pour résoudre précisément les champs d'intérêts (i.e la vitesse, la pression, la température etc.), un maillage fin est nécessaire à proximité de l'interface (à l'extérieur de la couche limite) et dans le sillage. Par une approche similaire, il est possible de prescrire la distribution de taille de maille sur le reste du domaine en couplant une loi d'évolution de taille de maille à une fonction distance. Il est ainsi possible de contrôler la taille des éléments à proximité de la géométrie et dans le sillage aussi bien que d'augmenter progressivement la taille de maille loin de l'interface et ainsi minimiser le nombre total d'éléments. La qualité du maillage, et de fait la précision de la solution, dépendent

fortement de l'évolution progressive de la taille de maille sur le domaine.

Pour cela, nous proposons simplement de définir deux boîtes virtuelles sur les bords desquelles nous allons définir une fonction levelset. La première boîte couvre tout le domaine, notée Box1, tandis que la seconde englobe la zone d'interface immergée et les zones à maintenir relativement raffinées (i.e. le sillage), notée Box2, (Figure 3.17). La position et les dimensions de la Box2 sont définies par l'utilisateur final en fonction de l'écoulement étudié et du maillage souhaité.

Finalement, pour assurer une transition progressive à travers ces zones, on impose une loi d'évolution linéaire de la taille de maille telle qu'elle évolue de la taille de maille maximum de la couche limite, $h_{\min} \cdot \alpha^{n-1}$, à la taille de maille maximum définie sur Box2 (H_2) linéairement en fonction de la distance. Puis une loi d'évolution logarithmique est appliquée de Box2 à Box1.

Jusqu'ici toutes les tailles de mailles obtenues h_n ont été calculées dans la direction normale à la paroi, et peuvent ainsi être rassemblées pour construire un maillage isotrope grâce à la métrique suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_n^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_n^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{h_n^2} \mathbf{I}_d \quad (3.47)$$

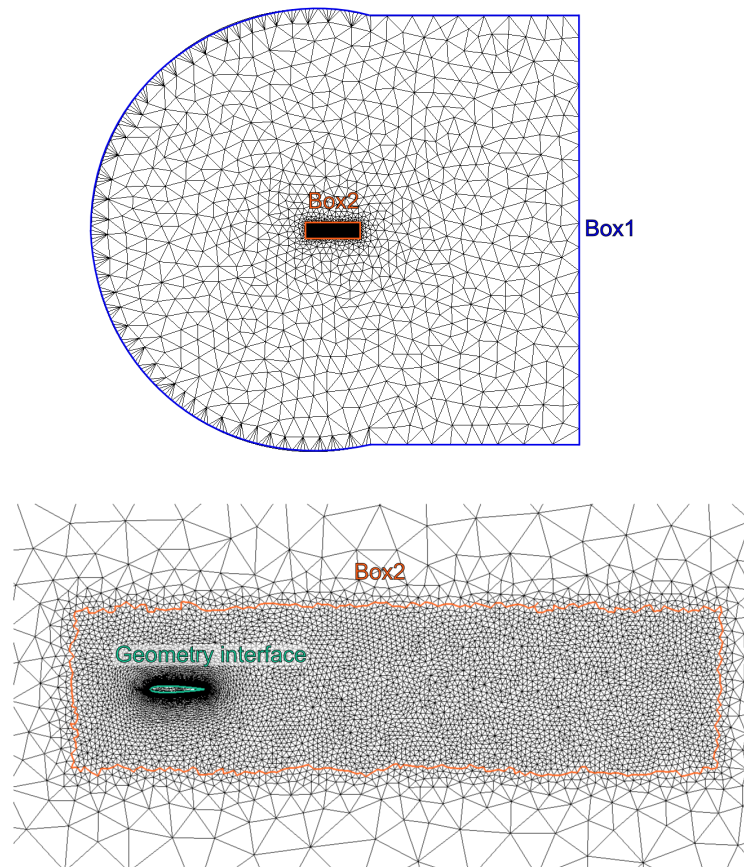


FIGURE 3.17 – Représentation de la subdivision du domaine en boîtes

3.3.2 Directions des éléments

Remarquons que pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, la taille de maille minimum dans les premières strates tend vers des valeurs infiniment petites ce qui, dans le cas d'un maillage isotrope, engendre un nombre extrêmement important d'éléments de maillage et demande d'énormes ressources de calcul. Or la couche limite est caractérisée par un fort gradient de vitesse dans la direction normale à la paroi, ce qui engendre un comportement très anisotrope. De plus, les éléments anisotropes sont particulièrement intéressants pour améliorer l'efficacité de calcul. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser des éléments anisotropes dans la couche limite avec de grands rapports d'aspect R_a dans la direction tangente à la surface. Si bien que la taille

de maille dans la direction tangente h_t est définie de la manière suivante :

$$h_t = R_a \times h_n \quad (3.48)$$

Cependant il est nécessaire d'assurer une transition progressive des éléments fortement anisotropes sur l'interface vers les éléments quasi-isotropes à l'extérieur de la couche limite afin de garantir une bonne qualité de maillage. Pour ce faire, nous allons mettre à profit la méthode multi-levelset et ainsi diminuer progressivement le rapport d'aspect à mesure que la distance à l'interface de la géométrie augmente jusqu'à l'extrémité de la couche limite. Le ratio d'anisotropie est fixé tel que h_t soit égale à la taille de maille maximum dans Box2 (H_2) en utilisant l'expression suivante :

$$R_a = \frac{H_2}{h_n} \quad (3.49)$$

Nous montrerons qu'une telle continuité dans la taille de maille tangente produit le maillage pseudo-structuré souhaité.

La dernière étape pour construire la métrique pour le maillage de couche limite anisotrope, consiste à définir précisément les directions associées aux tailles de mailles précédemment définies. Par conséquent, soit P un sommet du maillage près de l'interface de la géométrie immergée, soit \mathbf{N} le vecteur normal à la surface, avec ϕ la fonction levelset associée à la surface :

$$\mathbf{N} = -\frac{\nabla\phi(P)}{|\nabla\phi(P)|} \quad (3.50)$$

Le plan tangent à la surface en P est défini par $\mathbf{I}_d - \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T$, tel qu'une solution pour la métrique soit :

$$\mathbf{M} = \begin{cases} \frac{1}{h_n^2} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T + \frac{1}{h_t^2} (\mathbf{I}_d - \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T) & \text{à l'intérieur de Box2, où } h_t = H_2 \\ \frac{1}{h_t^2} \mathbf{I}_d & \text{à l'extérieur de Box2} \end{cases} \quad (3.51)$$

Il y a de nombreux inconvénients à cette formulation. Premièrement, la taille de maille dans la direction tangente à la surface ne dépend pas de la forme de la géométrie, de sa courbure, ni de sa complexité. Deuxièmement, cette méthode ne permet la définition que d'une seule direction tangente et n'est donc pas adaptée aux cas 3D. En effet une géométrie peut avoir une forme complètement différente dans ses deux directions tangentes. Finalement, les directions tangentes ne sont pas bien définies, si bien que l'interface

de la géométrie n'est pas précisément recouverte par des faces d'éléments de maillage en 3D, et l'interface n'est donc pas continument représentée. Néanmoins, cette formulation pour la métrique est exacte en terme de directions en 2D.

3.3.3 Courbure

Dans cette partie, nous allons étudier la courbure d'une géométrie quelconque en trois dimensions pour définir convenablement les directions tangentes et les tailles de mailles associées afin d'en assurer une représentation fidèle. De plus, l'objectif est d'en déduire un ratio d'anisotropie approprié en fonction de la forme de la géométrie et de nous assurer que l'interface est discrétisée de manière précise.

Dans un premier temps, on définit l'opérateur de forme \mathbf{S} au nœud P :

$$\mathbf{S}(P) = \nabla_T \mathbf{N}(P) = \frac{1}{|\nabla \phi(P)|} (1 - \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T) \text{Hes}(\phi)(P) \quad (3.52)$$

La matrice hessienne $\text{Hes}(\phi)$ mesure la variation au second ordre de la fonction distance ϕ tandis que $1 - \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^T$ la projette sur le plan tangent. Par conséquent, il est clair que $\mathbf{S} \cdot \mathbf{N} = 0$, tel que \mathbf{N} est un vecteur propre de \mathbf{S} associé à la valeur propre zéro.

Les deux autres valeurs propres de \mathbf{S} et leurs vecteurs propres correspondants sont exactement les courbures principales (κ_{\min} et κ_{\max}) et les directions principales associées à la surface de la géométrie en P .

Pour déterminer ces valeurs propres, cherchons les racines de :

$$\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}_d) = 0 \quad (3.53)$$

En trois dimensions, on sait que :

$$\begin{cases} \det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}_3) = \lambda^3 - \text{tr}(\mathbf{S})\lambda^2 + Z(\mathbf{S})\lambda - \det(\mathbf{S}) \\ Z(\mathbf{S}) = -\frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{S}^2) - \text{tr}(\mathbf{S})^2) \end{cases} \quad (3.54)$$

Comme zéro est valeur propre de \mathbf{S} , $\det(\mathbf{S})$ est nécessairement nul. De plus,

$$\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}_3) = \lambda(\lambda - \kappa_{\max})(\lambda - \kappa_{\min}) \quad (3.55)$$

Tel que,

$$\lambda^2 - (\kappa_{\max} + \kappa_{\min})\lambda + \kappa_{\max}\kappa_{\min} = 0 \quad (3.56)$$

Finalement,

$$\begin{cases} \kappa_{\max} = \text{tr}(\mathbf{S}) + \sqrt{\left(\frac{\text{tr}(\mathbf{S})}{2}\right)^2 - Z(\mathbf{S})} \\ \kappa_{\min} = \text{tr}(\mathbf{S}) - \sqrt{\left(\frac{\text{tr}(\mathbf{S})}{2}\right)^2 - Z(\mathbf{S})} \end{cases} \quad (3.57)$$

Les vecteurs propres associés $(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)$ sont calculés à partir d'un pivot de Gauss, tels que $(\mathbf{N}, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)$ soit une base orthonormale en P .

Une fois les directions et leurs courbures associées déterminés, les courbures doivent être reliées aux tailles de mailles tangentes. Étant donnée que la courbure correspond à l'inverse du rayon du cercle \mathcal{C} qui décrirait au mieux la surface en P , la taille de maille tangente peut être déduite d'une approche géométrique 2D comme illustré sur la figure 3.18, puisque en termes de courbure un problème 3D peut être réduit à deux problèmes 2D indépendants.

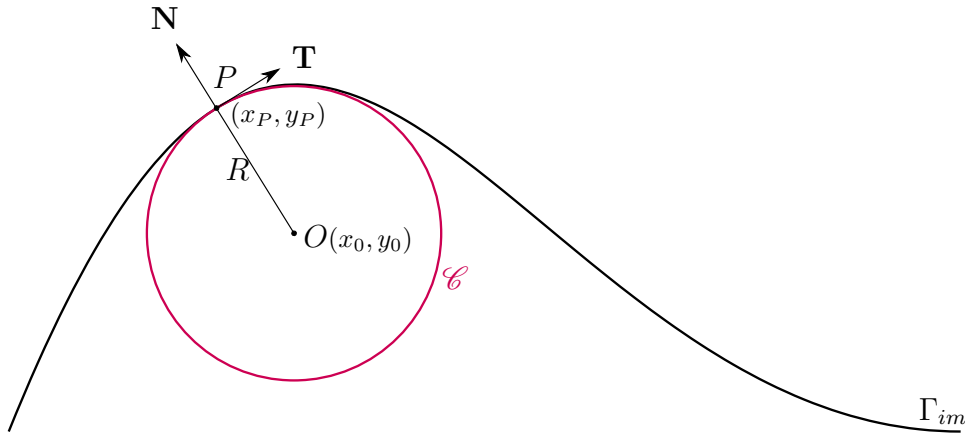
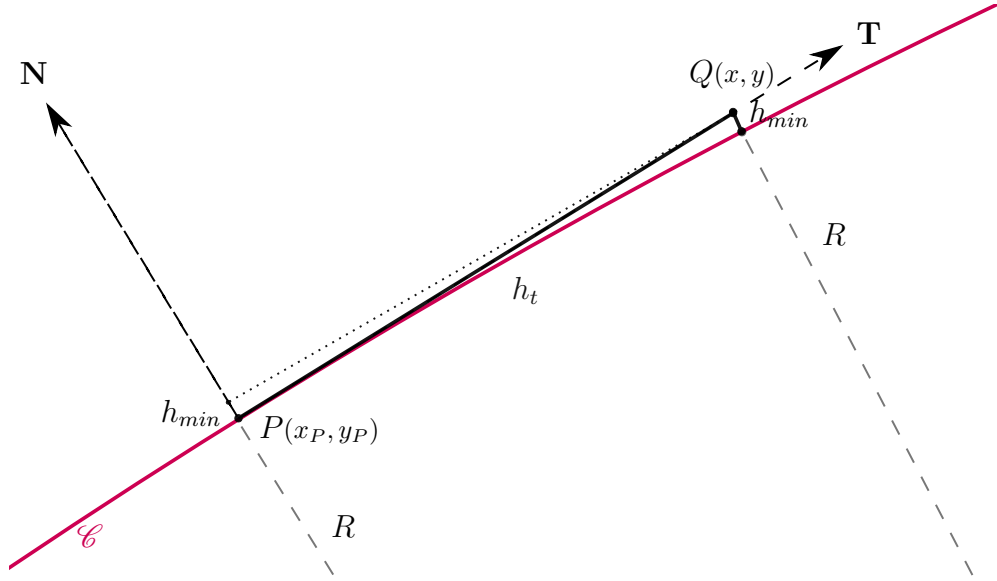


FIGURE 3.18 – L'interface Γ_{im} est représentée en noir, tandis que le cercle qui correspond au mieux en $P \in \Gamma_{im}$ est tracé en rouge

Soit (x_P, y_P) les coordonnées du sommet P , soit h_{\min} la taille de maille dans la direction normale \mathbf{N} à la surface et h_t la taille de maille dans la direction tangente \mathbf{T} . L'objectif est de déterminer une relation entre h_t , la courbure κ et la taille de maille suivant \mathbf{N} . Soit Q le sommet relié à P tel que $\|PQ\| = h_t$. Afin d'assurer une discrétisation continue de l'interface avec une précision de h_{\min} , nous imposons $d(Q, \mathcal{C}) = h_{\min}$ tel que les sommets du maillage restent près de l'interface, où \mathcal{C} est le cercle de rayon R et centré en $O(x_0, y_0)$ (Figure 3.19).

Ainsi $Q(x, y)$ est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon $R + h_{\min}$ et de la droite passant par P et dirigée par \mathbf{T} . Par conséquent, les

FIGURE 3.19 – Zoom de la figure 3.18 autour du sommet P

coordonnées de Q sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_P \\ y_P \end{vmatrix} + h_t \cdot \mathbf{T} \\ &= \begin{vmatrix} x_P + \frac{h_t}{R} (y_0 - y_P) \\ y_P + \frac{h_t}{R} (x_P - x_0) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.58)$$

De plus, le sommet Q appartient au cercle de centre O et de rayon $R + h_{\min}$, de telle sorte que :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (R + h_{\min})^2 \quad (3.59)$$

Par substitution de (3.58) dans (3.59), on obtient :

$$\begin{aligned} \left(h_t \frac{y_0 - y_P}{R} + (x_P - x_0) \right)^2 + \left(h_t \frac{x_P - x_0}{R} + (y_P - y_0) \right)^2 \\ = (R + h_{\min})^2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Par développement et factorisation, il vient :

$$\left((y_0 - y_P)^2 + (x_0 - x_P)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{h_t}{R} \right)^2 \right) = (R + h_{\min})^2 \quad (3.61)$$

Sachant que P appartient à \mathcal{C} , l'équation (3.61) se simplifie comme suit :

$$R^2 \left(1 + \left(\frac{h_t}{R} \right)^2 \right) = (R + h_{\min})^2 \quad (3.62)$$

Ainsi,

$$h_t = \sqrt{2Rh_{\min} + h_{\min}^2} \quad (3.63)$$

Finalement, pour éviter le cas pathologique de la surface plane où la courbure $\kappa = 0$ et de ce fait $h_t = +\infty$, un maximum et un minimum sont définis pour la taille de maille. La taille de maille tangente minimum est égale à la taille de maille normale h_n calculée à partir de la théorie des couches limites et le maximum est égal à H_2 , la taille de maille maximum sur Box2 définie par l'utilisateur.

La métrique couche limite s'écrit donc de la manière suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h_n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{t1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_{t2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Jusqu'ici nous nous sommes intéressés au cas trois dimensions, en deux dimensions le problème est plus simple. La direction tangente est directement déduite de la direction normale telle que :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

Sachant qu'en 2D, on a :

$$\det(S - \lambda I_3) = \lambda^2 - \text{tr}(S)\lambda + \det(S) \quad (3.66)$$

De plus, zéro est la valeur propre associée à \mathbf{N} . Si bien que la valeur propre associée à la direction tangente est :

$$\kappa = \text{tr}(S) \quad (3.67)$$

3.4 Maillage couche limite : applications

Dans cette section, nous présentons plusieurs exemples numériques 2D et 3D illustrant l'efficacité de la procédure d'adaptation de maillage proposée pour produire un maillage *a priori* adapté sur la couche limite de la géométrie

immergée. Le maillage est ajusté à la couche limite grâce à ses éléments très anisotropes agencés de manière semi-structurée comme prescrit par la métrique. Le remaillleur parallèle MTC décrit en section 2.3 [Gruau et Coupez, 2005, Mesri et al., 2009] génère les maillages à partir de la métrique couche limite fournie.

3.4.1 Exemples élémentaires

Dans un premier temps on considère des géométries simples immergées dans un domaine de dimensions $8.5 \times 2.75 \text{ m}^2$, afin d'assurer que la surface de la géométrie est bien décrite et que les angles pointus sont bien maillés.

Plaque plane

La méthode est itérative si bien que le maillage est raffiné progressivement à partir de la taille de maille grossière de fond jusqu'à la taille de maille attendue pour la première sous-couche h_{\min} , ainsi les sommets sont ajoutés au fur et à mesure dans la couche limite. La procédure itérative de construction du maillage *a priori* de couche limite est mise en relief sur le cas de référence de la plaque plane. Le bord d'attaque est placé à une distance $x = 0.5 \text{ m}$ de l'entrée, la longueur caractéristique de la plaque plane est de 4 m , ainsi le nombre de Reynolds vaut 10^4 et $y_0^+ = 1$. Ainsi, la taille de maille minimum à atteindre est $h_{\min} = 5.61 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. La taille de maille sur le maillage initial vaut $H_{\text{back}} = 0.45 \text{ m}$, la taille de maille maximum sur Box2 est fixée à $H_2 = 0.1 \text{ m}$ et à $H_1 = 0.5 \text{ m}$ sur Box1. Cela induit une couche limite finale composée de 7 sous-couches avec un ratio d'anisotropie maximum de 18.

La figure 3.20 décrit la procédure itérative étape par étape, en commençant par le maillage grossier arbitraire jusqu'à l'obtention du maillage de couche limite. La taille de maille minimum décroît progressivement de H_{back} à h_{\min} d'une itération à l'autre.

Le maillage initial est composé de 140 éléments et le maillage final obtenu atteint 1882 éléments. La taille de maille minimum, le nombre d'éléments dans le maillage et leur distribution sur le domaine pour chaque maillage est décrite dans le tableau 3.3.

Comme prévu, le maillage obtenu respecte bien la métrique calculée. On remarque que la plupart des éléments se trouvent dans la couche limite. Le nombre d'éléments dans Box2 est contrôlé et la taille de maille dans la région éloignée est grossière.

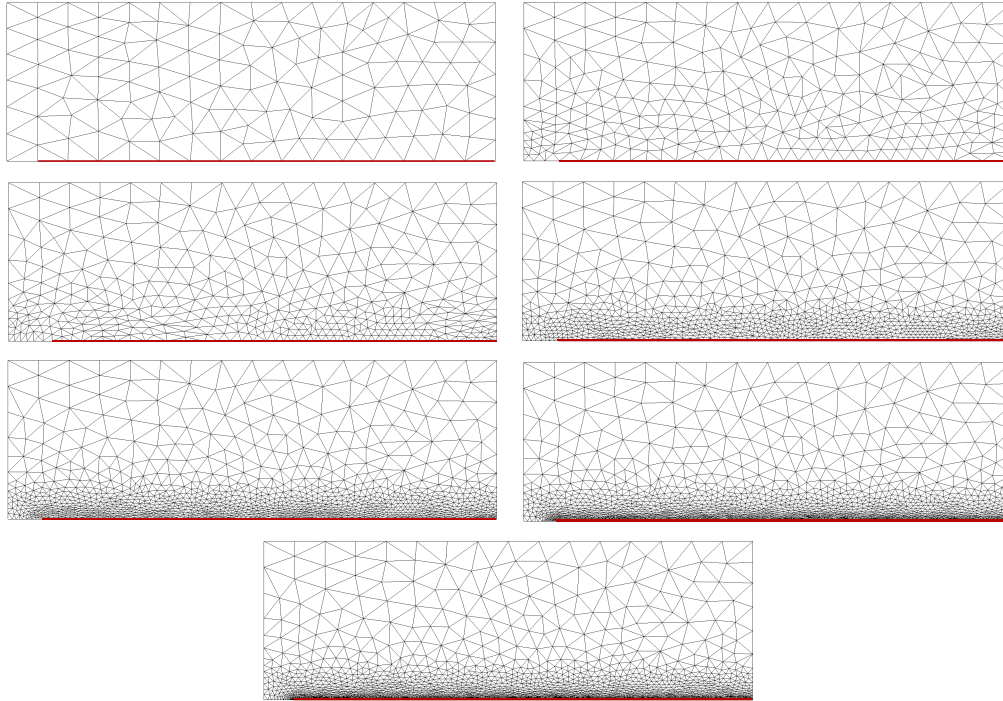


FIGURE 3.20 – Procédure itérative pour générer un maillage de couche limite sur une plaque plane (rouge) à partir d'un maillage de fond arbitrairement grossier

TABLE 3.3 – Distribution des éléments pour le maillage de plaque plane

h_{\min} (m)	# d'éléments total	Box2	Couche limite
0.45	140	33 (23.6%)	17 (12.1%)
0.13	279	100 (35.8%)	68 (24.4%)
$6.4 \cdot 10^{-2}$	434	226 (52.1%)	164 (37.8%)
$3.2 \cdot 10^{-2}$	989	747 (75.5%)	486 (49.1%)
$1.6 \cdot 10^{-2}$	1310	1063 (81.1%)	745 (56.9%)
$8.1 \cdot 10^{-3}$	1663	1416 (85.1%)	1122 (67.5%)
$5.61 \cdot 10^{-3}$	1882	1637 (87.0%)	1330 (70.7%)

Cercle

Dans cet exemple, on considère un cercle immergé de rayon 0.3m. Le maillage couche limite est généré pour l'étude d'un écoulement turbulent avec un nombre de Reynolds $Re = 10^5$, avec une précision $y_0^+ = 1$ et une longueur caractéristique $L = 0.6$ m égale au diamètre du cercle. Si bien que, la taille de maille minimum dans la couche limite vaut $h_{\min} = 1.11 \cdot 10^{-4}$ m. La taille de maille maximum sur Box2 est fixée à $H_2 = 0.05$ m et celle sur le domaine est fixée à $H_1 = 0.5$ m. Cela engendre une couche limite finale composée de 24 sous-couches avec un ratio d'anisotropie maximum de 74.

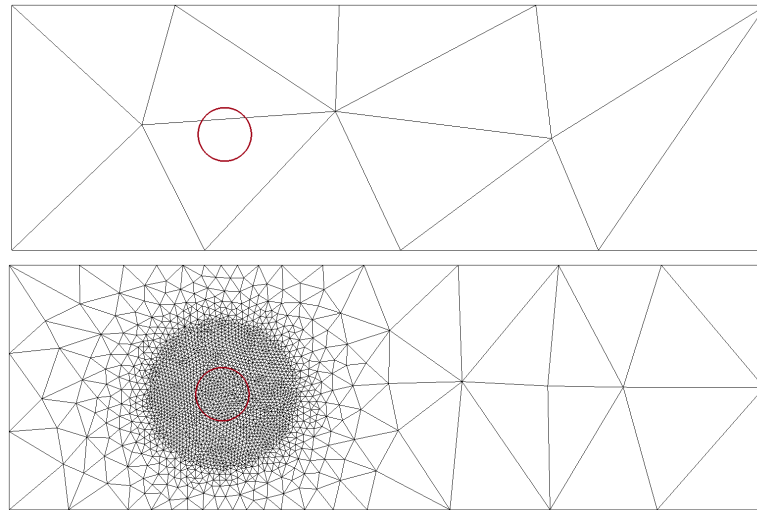


FIGURE 3.21 – Pré-maillage sur un cercle (bas), représenté en rouge, quand le maillage initial est trop grossier (haut)

Comme expliqué dans la section 3.3.1, la figure 3.21 montre la procédure de pré-maillage développée utile dans le cas où la taille des éléments sur le maillage initial est plus grande que la taille caractéristique de la géométrie. Cette procédure permet d'insérer automatiquement des noeuds supplémentaires autour de la géométrie afin de mieux décrire son interface, l'iso-valeur zéro de la fonction distance associée à la géométrie. La taille de maille prescrite dans la procédure de pré-maillage est choisie égale à H_2 .

Le maillage final de couche limite obtenu est présenté sur la figure 3.22, il contient 7023 éléments dont 93.7% sont situés à l'intérieur de Box2. Les éléments sont distribués comme suit : 3451 éléments dans la couche limite

soit 49.1% du nombre total d'éléments sur le maillage, et 1593 éléments à l'intérieur de la géométrie ce qui correspond à 22.7%. Ces éléments sont nécessaires à la bonne description de l'interface du cercle. Ainsi, il y a trois fois plus d'éléments à l'intérieur de la géométrie qu'entre Box1 et Box2, cependant la taille de maille à l'intérieur du cercle est grossière loin de l'interface et l'aire y est moins étendue.

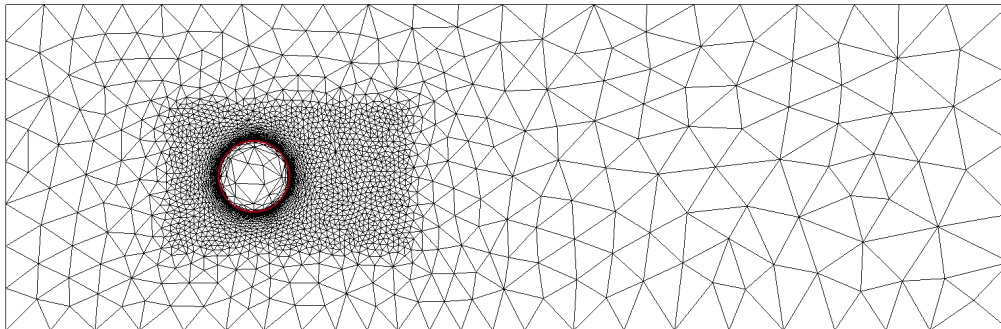


FIGURE 3.22 – Maillage de couche limite sur un cercle, l'interface est représentée en rouge

La figure 3.23 présente un zoom sur un quart du cercle. L'interface du cercle est tracée en rouge tandis que la zone de couche limite est délimitée en bleu. Comme attendu, les éléments de maillage suivent très bien la courbure du cercle avec une taille de maille appropriée, qui augmente progressivement à mesure que la distance à l'interface augmente et en assurant une transition progressive. On remarque que la forme et l'orientation des éléments coïncident avec la courbure du cercle. La qualité du maillage résultant reflète encore le potentiel de la méthode proposée pour représenter la couche limite.

Les figures 3.22 et 3.23 montrent bien la variation progressive de taille des éléments de maillage, qui est nécessaire pour assurer une solution numérique précise. Cette observation peut être étendue à la distribution de taille de maille sur tout le domaine comme représenté sur la figure 3.24. De plus, notons que même sur cette figure on discerne clairement l'interface du cercle. Cela garantit la précision de la méthode pour représentée fidèlement l'interface.

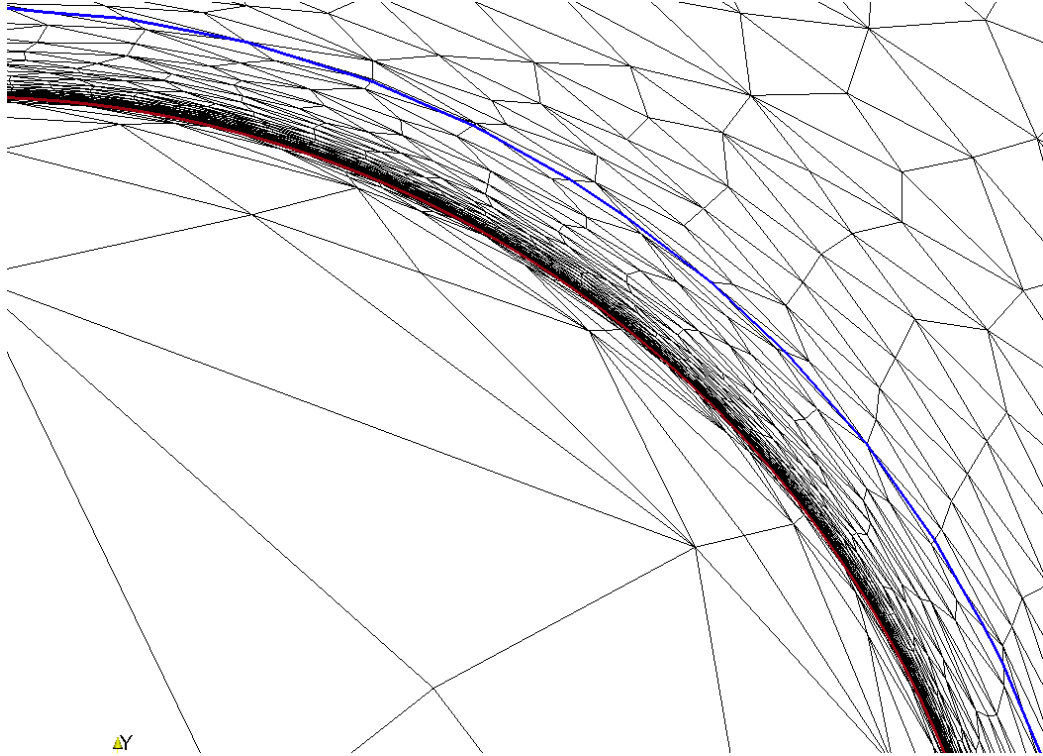


FIGURE 3.23 – Zoom sur un quart du cercle, l'interface est représentée en rouge et la frontière de la couche limite est tracée en bleu



FIGURE 3.24 – Distribution de la taille de maille sur le domaine

Carré

Dans ce dernier cas test élémentaire, on considère un carré de 0.6 m. Les caractéristiques de l'écoulement sont identiques à celles du cas test précédent sur le cercle. Ainsi, $h_{\min} = 1.11 \cdot 10^{-4}$ m, rappelons que $H_2 = 0.05$ m et $H_1 = 0.5$ m. Dans ce cas cela engendre un maillage de couche limite final composé de 24 sous-couches avec un ratio d'anisotropie maximum de 455. Le maillage de couche limite final est présenté sur la figure 3.25, où l'interface du carré est tracée en rouge.

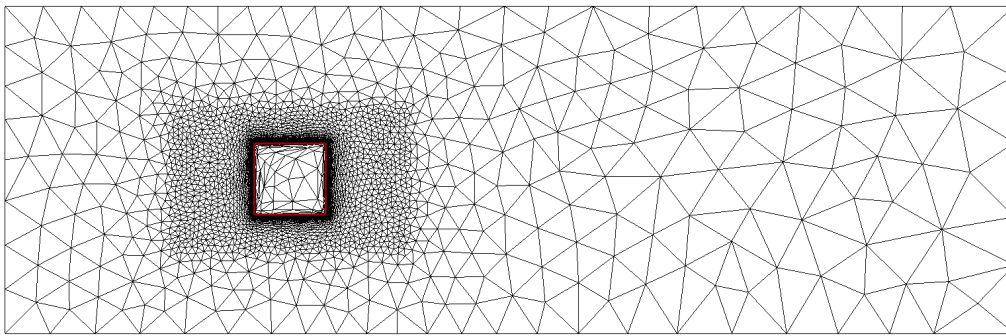


FIGURE 3.25 – Maillage de couche limite sur un carré, l'interface est représentée en rouge

Le maillage est composé de 3562 éléments, dont 3113 éléments sont situés à l'intérieur de Box2 ce qui représente 87.4% du nombre total d'éléments de maillage. En fait les éléments dans Box2 sont répartis comme suit, 1096 éléments dans la couche limite (30.8% du nombre total d'éléments) et 395 éléments à l'intérieur du carré (11.1%). Malgré des caractéristiques identiques d'écoulement on obtient dans ce cas une distribution des tailles de mailles et des éléments totalement différente. Cela met en relief l'interaction entre le ratio d'anisotropie et la courbure. En effet, le ratio d'anisotropie permis sur le carré est bien plus grand que sur le cercle, ce qui permet d'économiser un grand nombre d'éléments pour une même précision de maillage.

La figure 3.26 présente un zoom sur un des coins du carré où un changement brutal de courbure intervient. On remarque que l'angle est relativement bien représenté par le maillage et que ce genre d'angle est décrit à l'aide d'éléments isotropes de taille h_{\min} . De plus, les 6 premières levelsets résultant de la méthode multi-levelset sont tracées en vert, l'interface du carré est tracé en rouge alors que la couche intérieure assurant une bonne description de l'interface est tracée en orange. On remarque que les éléments de maillage

suivent bien les couches prescrites par la méthode multi-levelset, ce qui engendre comme souhaité un maillage pseudo-structuré. Par ailleurs, les trois premières sous-couches de la couche limite sont parfaitement reproduites à l'intérieur de la couche limite, dans la couche intérieure.

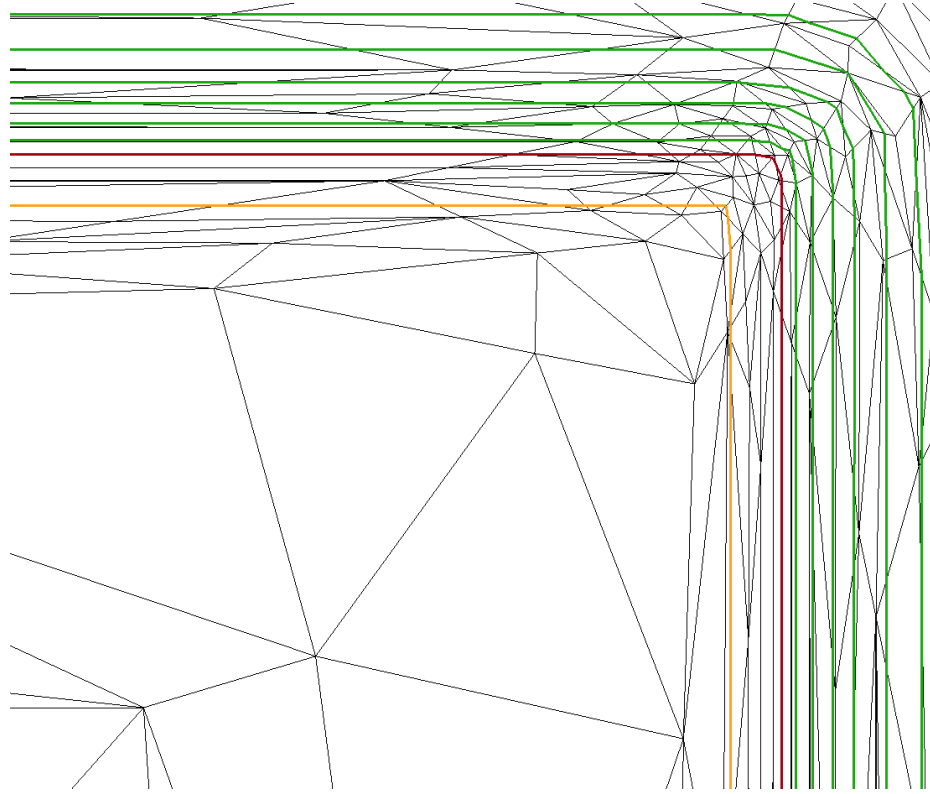


FIGURE 3.26 – Zoom sur le coin du carré représenté en rouge, les premières levelsets de la méthode multi-levelset sont tracés en vert et la couche intérieure est délimitée en orange

3.4.2 Profil d'aile NACA0012

Considérons maintenant un des cas de référence parmi les plus connus pour l'étude des écoulements de fluides visqueux, le profil d'aile théorique symétrique NACA0012 [Rumsey, 2015]. Ce cas est intéressant car il est bien documenté et est utilisé pour valider les codes numériques, de plus sa géométrie est intéressante car sa courbure varie le long du profil. La formule exacte permettant de tracer le profil NACA0012 (figure 3.27) est la suivante :

$$y = \pm 0.6 \left(0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4 \right) \quad (3.68)$$

Cette formule réalise un profil ayant une corde de 1.008930411365, dans cette étude nous allons utiliser une version normalisée pour obtenir une corde de 1 m.

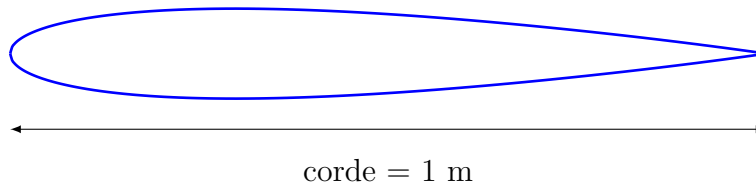


FIGURE 3.27 – Profil NACA0012

Les paramètres de l'écoulement sont choisis en accord avec le cas de référence proposé par la NASA, soit le nombre de Reynolds est fixé à $Re = 6 \cdot 10^6$ (turbulent), $y_0^+ = 1$, tel que $h_{\min} = 4.46 \cdot 10^{-6}$ m. Ainsi le maillage de couche limite final est composé de 36 sous-couches avec un ratio maximum d'anisotropie de 1773. La Box2 de dimensions 5.2×0.3 m² dont le coin bas gauche est ancré en $(-0.2, -0.15)$ est choisie volontairement longue pour résoudre le sillage. Par conséquent, le maillage de couche limite est réalisé pour une taille de maille $H_2 = 0.01$ m. Un zoom autour du profil NACA0012 sur le maillage de couche limite final est présenté sur la figure 3.28, avec en rouge l'interface du NACA0012. Le maillage est composé de 88107 éléments, dont 75033 éléments se situent à l'intérieur de Box2 ce qui représente 85.2% du nombre total d'éléments. De plus, la couche limite est composée de 28729 éléments (32.6%) et il y a 10096 éléments (11.5%) à l'intérieur de la géométrie. Ici aussi, on remarque que le maillage est structuré en strates, ainsi que la bonne orientation des éléments et de leur anisotropie. Par ailleurs, on observe encore une fois sur la figure 3.28 des éléments isotropes au niveau du bord de fuite qui décrivent relativement bien la géométrie et son changement abrupte de courbure. De même, la qualité du maillage résultant reflète le potentiel de la méthode proposée pour l'adaptation du maillage sur la couche limite pour traiter les écoulements de fluide visqueux à grand nombre de Reynolds.

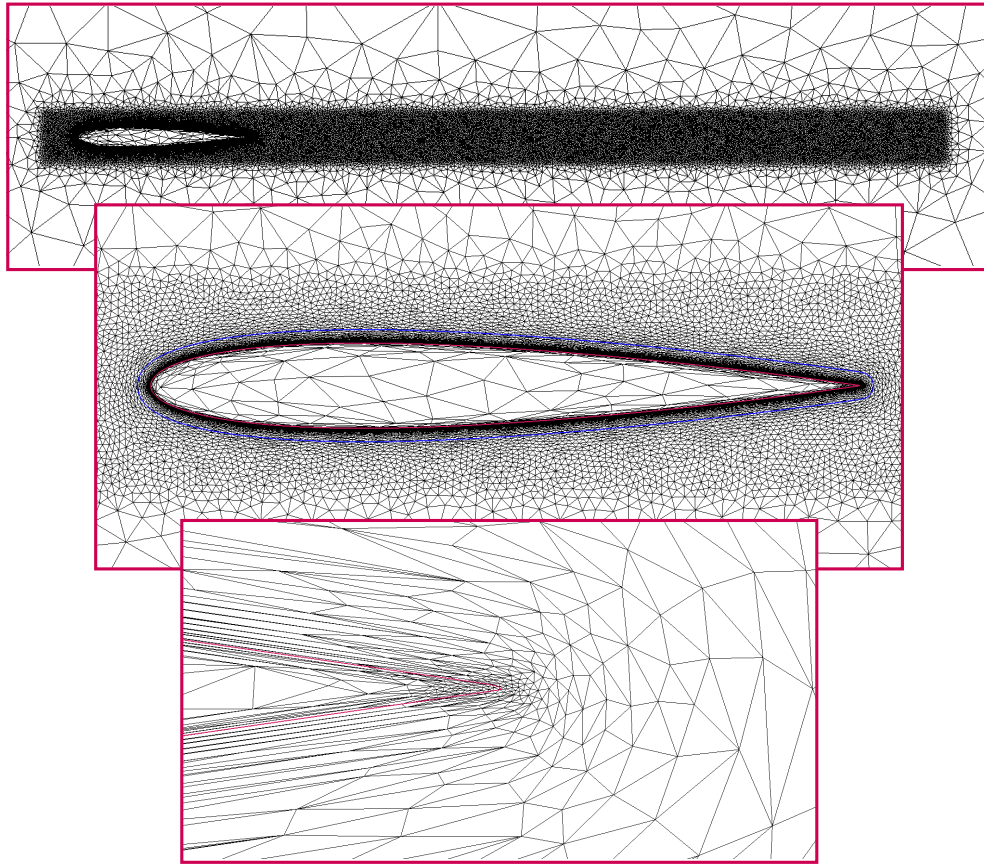


FIGURE 3.28 – Maillage couche limite du NACA0012 : Vue d'ensemble du profil à l'intérieur de la Box2 ; Zoom autour de l'interface du NACA0012 (rouge), la frontière externe de la couche limite est tracée en bleu ; Zoom sur le bord de fuite du profil

3.4.3 Ahmed body

Cet exemple a pour objectif de prouver la robustesse de la méthode d'adaptation de maillage proposée pour générer un maillage de couche limite autour de géométries 3D. Dans ce cas nous considérons la géométrie 3D simplifiée d'une voiture, connue sous le nom de Ahmed body [Ahmed et al., 1984, Franck et al., 2009, Strachan et al., 2005, Fares, 2006]. Cette géométrie simplifiée est caractéristique de l'écoulement autour d'un véhicule, elle permet d'étudier la corrélation entre l'angle d'inclinaison arrière et le degré de turbulence engendré. Dans cet exemple, nous utiliserons la géométrie avec un angle d'inclinaison arrière de 25° , qui est connu pour être l'angle le plus turbulent. Le maillage de surface correspondant a été réalisé à l'aide du logiciel

Gmsh [Geuzaine et Remacle, 2009, Marchandise et al., 2012]. Conformément aux références, le Ahmed body est immergé dans une soufflerie 3D de dimensions $10 \times 2 \times 1.5 \text{ m}^3$, la longueur caractéristique du Ahmed body est $L = 1 \text{ m}$, et l'écoulement à un nombre de Reynolds $Re = 4.25 \cdot 10^6$, l'écoulement est clairement turbulent. Afin de limiter le nombre d'éléments dans le maillage, y_0^+ est choisi relativement grand, $y_0^+ = 5$. La taille de maille minimum est fixée à $h_{\min} = 3.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Ce qui induit un maillage de couche limite final comportant 27 sous-couches avec un ratio maximum d'anisotropie de 3226.

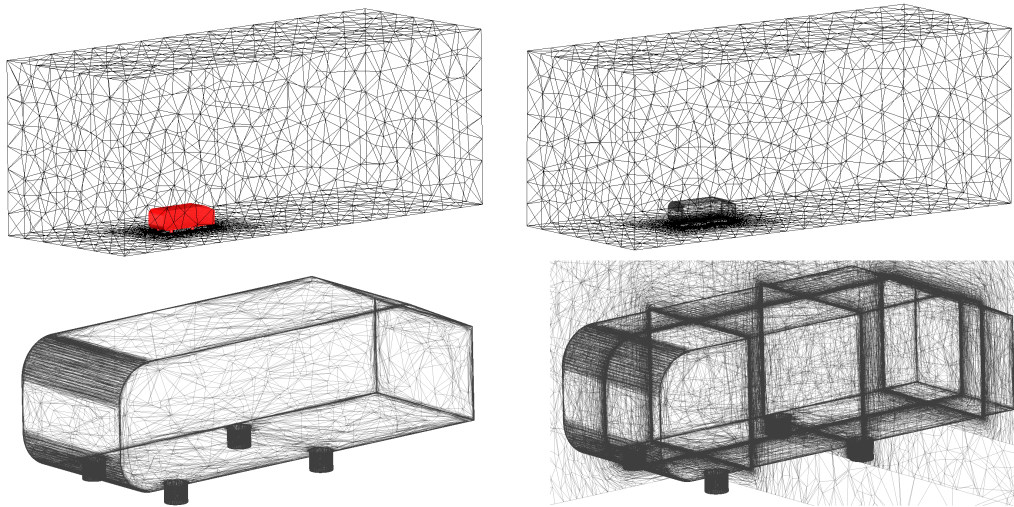


FIGURE 3.29 – L'iso-valeur zéro de la fonction levelset du Ahmed body immergé est représentée sur les différentes vues grâce au maillage de couche limite

Le maillage obtenu est composé de 2167057 éléments et 378259 sommets. La figure 3.29 donne un aperçu du maillage dans le domaine et autour de l'iso-valeur zéro de la fonction levelset, ce qui prouve son aptitude à représenter précisément la forme du Ahmed body. De plus, un zoom sur l'interface coupée suivant le plan Y est présenté sur la figure 3.30. On remarque l'étirement important des éléments près de l'interface induit par le fort gradient de la levelset et la courbure de la géométrie. Cela reflète bien la précision de la méthode et les détails de la géométrie. Comme on peut le remarquer sur ces figures, la génération de maillage anisotrope s'est montrée très efficace pour retrouver et décrire toutes les caractéristiques de la géométrie, à nombre d'éléments égal le maillage anisotrope présenté est beaucoup plus précis qu'un maillage isotrope.

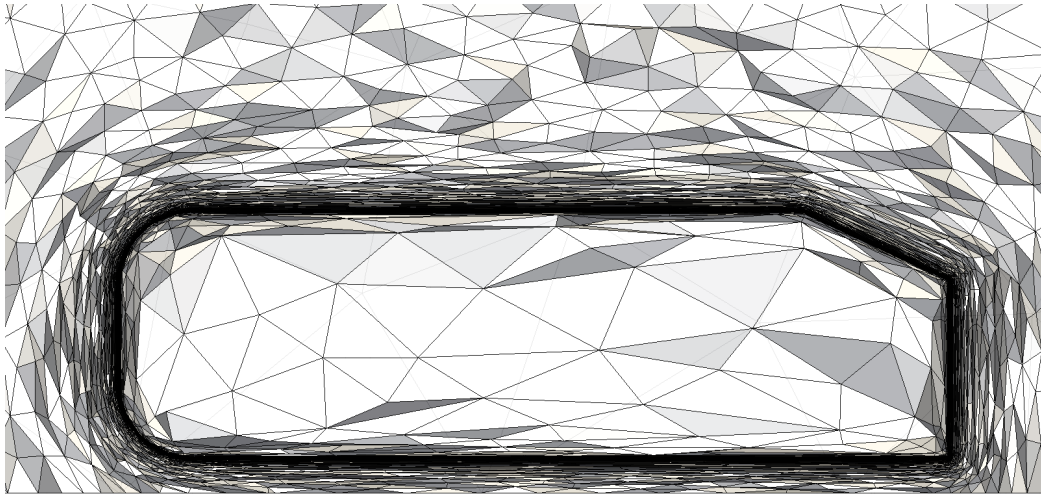


FIGURE 3.30 – Zoom autour de l’interface du Ahmed body immergé sur une coupe suivant le plan Y

3.4.4 Vers des géométries plus complexes

Pour aller plus loin, on considère cette fois la géométrie 3D très complexe d’une voiture de Formule 1 immergée dans une soufflerie numérique. Le maillage a été créé pour une taille de maille minimum $h_{\min} = 6 \cdot 10^{-4}$ m. Ce qui engendre un maillage de couche limite final comportant 10 sous-couches avec un ratio maximum d’anisotropie de 167. Rappelons que l’étude de l’écoulement d’air autour d’une Formule 1 est très délicat et très convoité ; i.e. cela permet l’étude de l’influence des différents ailerons et pièces aérodynamique et leurs positions pour optimiser les performances de la voiture. Par conséquent, un maillage de couche limite précis est requis.

Les figures 3.31 et 3.32 présentent le maillage obtenu pour la F1 immergée à l’intérieur d’une soufflerie numérique. Le maillage est composé de 21026520 éléments et 3602483 sommets. On remarque la grande concentration de sommets près de l’interface, dans la couche limite, qui permet de parfaitement décrire la géométrie dans ces moindres détails.

Regardons de plus près le maillage avec la figure 3.33, on observe la précision du maillage et la bonne orientation des éléments anisotropes. Cela prouve la capacité de l’algorithme à construire un maillage de couche limite qui décrit précisément l’interface et à contrôler efficacement la taille des élé-

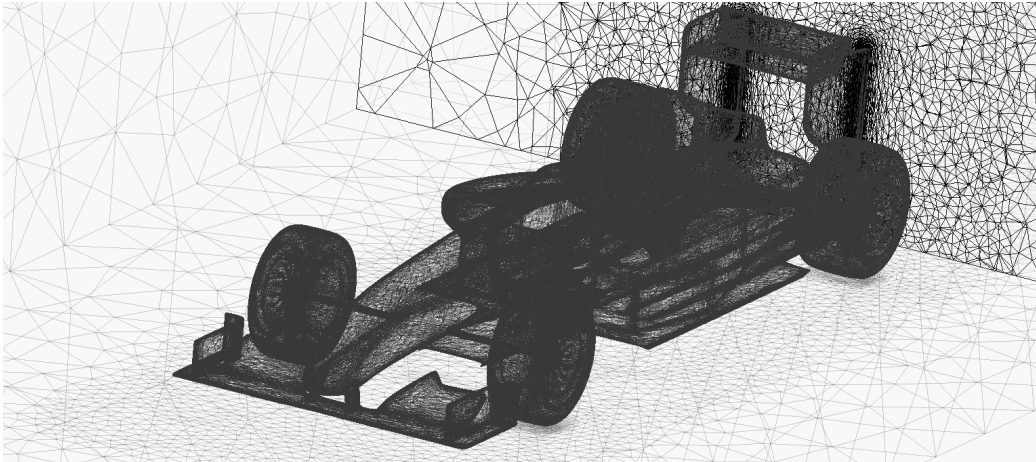


FIGURE 3.31 – Maillage de couche limite pour la F1 immergée

ments, leurs orientations et leur distribution.

Finalement, nous observons clairement sur la figure 3.34 la qualité de l'interface rendue par l'iso-valeur zéro de la fonction levelset. Une telle précision est nécessaire pour la simulation d'un écoulement à grand nombre de Reynolds autour de la géométrie immergée.

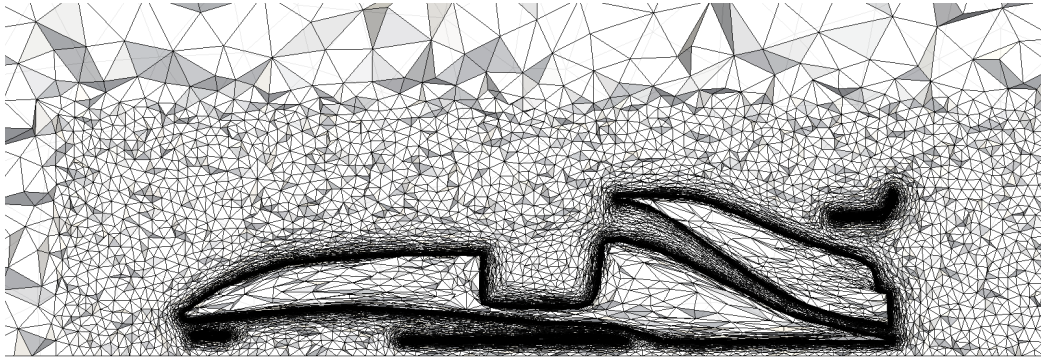


FIGURE 3.32 – Zoom autour de l'interface pour une coupe suivant le plan Y

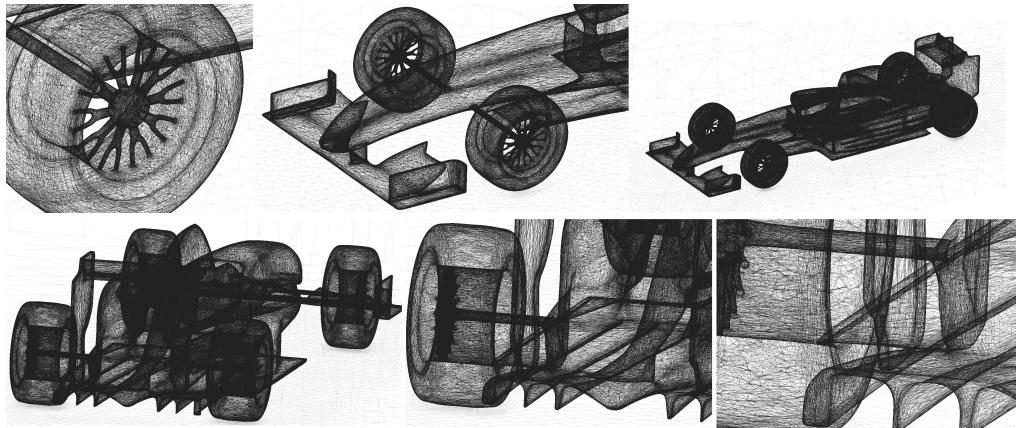


FIGURE 3.33 – Quelques vues du maillage de couche limite sur l'iso-valeur zéro de la fonction levelset associée à la F1

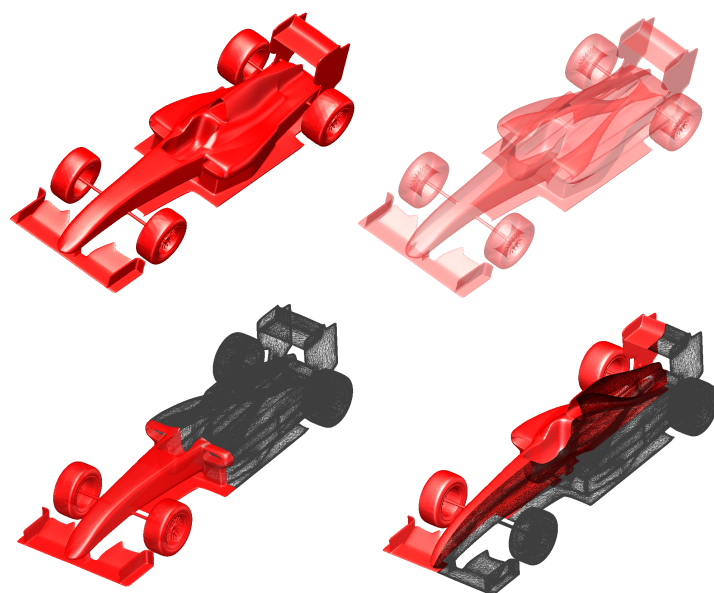


FIGURE 3.34 – L'iso-valeur zéro de la levelset soulignant la complexité de la géométrie

3.5 Calculs sur le maillage de couche limite

Dans cette partie nous allons réaliser quelques calculs sur les maillages de couches limites précédemment réalisés. Dans un premier temps nous allons constater l'intérêt du maillage de couche limite sur la plaque plane, nous nous intéresserons ensuite au cas un peu plus complexe du NACA0012.

3.5.1 Plaque plane

Les conditions de calcul du cas de plaque plane sont strictement identiques à celles des tests effectués en début de chapitre (section 3.2.5) à l'aide de l'adaptation de maillage (a), à l'exception du fait que le maillage est cette fois-ci constant au cours de la simulation et initialisé avec un maillage de couche limite. On rappelle la configuration du cas test 3.35,

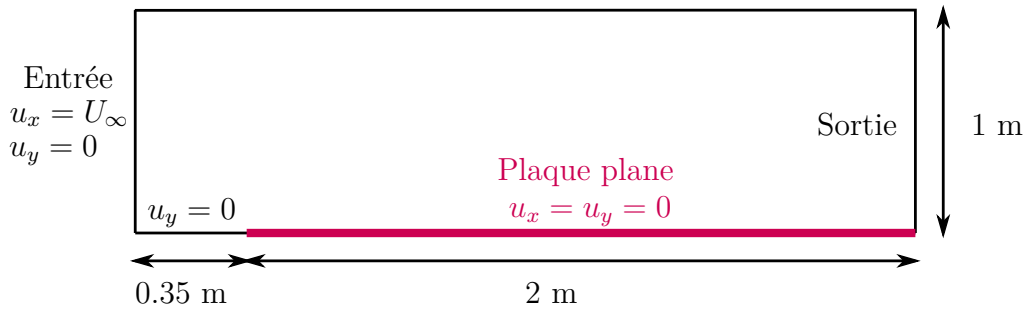


FIGURE 3.35 – Configuration du cas de plaque plane

Ainsi, on effectue de même une simulation pour le régime laminaire avec un nombre de Reynolds $Re_L = 10^4$ pour une longueur caractéristique $L = 1$ m, ce qui se traduit par une vitesse d'entrée $U_\infty = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, et une viscosité cinématique $\nu = 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. On présente le maillage de couche limite généré sous la condition de précision $y_0^+ = 1$, avec une Box2 de dimensions 2.5×0.2 dont le coin bas gauche est ancré en $(-0.35, -0.1)$ avec une taille de maille maximum $H_2 = 0.01$ m, et une taille de maille maximum $H_1 = 0.2$ m sur le reste du domaine 3.36. Ainsi la taille de maille minimum vaut $h_{\min} = 1.4 \cdot 10^{-3}$ m, et le maillage est composé de 9320 éléments.

La simulation est lancée avec un pas de temps $dt = 0.01$ s pour un temps total de 20 s. On trace la fonction $\frac{u}{u_e} = f(\eta)$ au cours du temps, que l'on

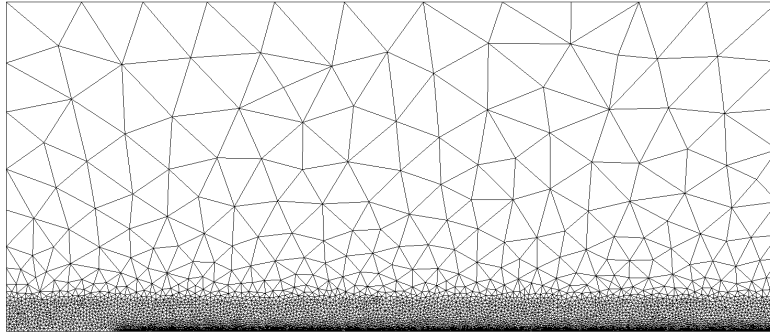


FIGURE 3.36 – Maillage de couche limite de la plaque plane

compare à la solution de Blasius 3.37. On observe qu'au bout de 4 s la simulation a convergé, la solution obtenue est très proche de la solution de Blasius.

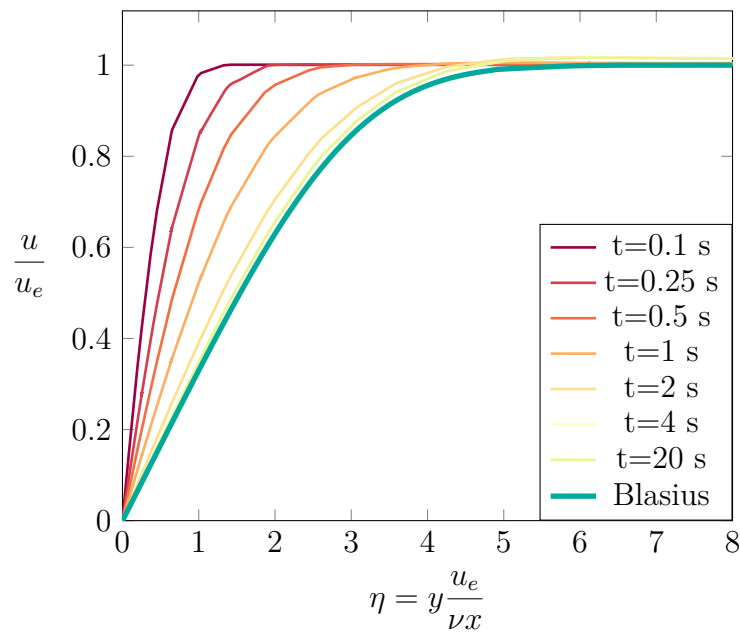


FIGURE 3.37 – Convergence du cas laminaire de plaque plane au cours du temps

L'épaisseur de couche limite relevée vaut $\delta_L = 4.1 \cdot 10^{-2}$ m, alors que la théorie annonce une épaisseur de $5 \cdot 10^{-2}$ m. On peut donc décemment avancer que le maillage de couche limite est beaucoup plus précis pour un nombre d'éléments bien inférieur.

On effectue ensuite une simulation pour le régime turbulent avec un nombre de Reynolds $Re_L = 5 \cdot 10^6$, seule la viscosité cinématique change, on prend cette fois $\nu = 2 \cdot 10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. On présente le maillage de couche limite généré sous la condition de précision $y_0^+ = 1$, avec une Box2 de dimensions 2.5×0.4 dont le coin bas gauche est ancré en $(-0.35, -0.2)$ avec une taille de maille maximum $H_2 = 0.01$ m, et une taille de maille maximum $H_1 = 0.2$ m sur le reste du domaine (Figure 3.38). Ainsi la taille de maille minimum vaut $h_{\min} = 5.3 \cdot 10^{-6}$ m, et le maillage est composé de 41240 éléments.

On présente le profil de vitesse tracé en variable de paroi sur la figure 3.39, on remarque la précision avec laquelle est décrite la sous-couche visqueuse. Cette bonne description permet un excellent calcul du coefficient de frottement présenté dans le tableau 3.4 et une épaisseur cohérente de la couche limite. Le maillage couche limite a donc prouvé être en mesure de résoudre précisément l'écoulement dans la couche limite et plus particulièrement dans la sous-couche visqueuse.

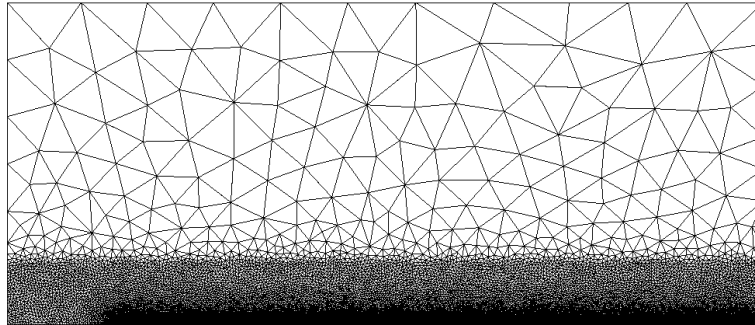


FIGURE 3.38 – Maillage couche limite de la plaque plane pour un écoulement turbulent à $Re = 5 \cdot 10^6$

	Épaisseur couche limite δ	Coefficient de frottement C_f
Théorie	$1.75 \cdot 10^{-2}$	$2.69 \cdot 10^{-3}$
Maillage couche limite	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$2.71 \cdot 10^{-3}$

TABLE 3.4 – Épaisseur couche limite turbulente $Re_L = 5 \cdot 10^6$

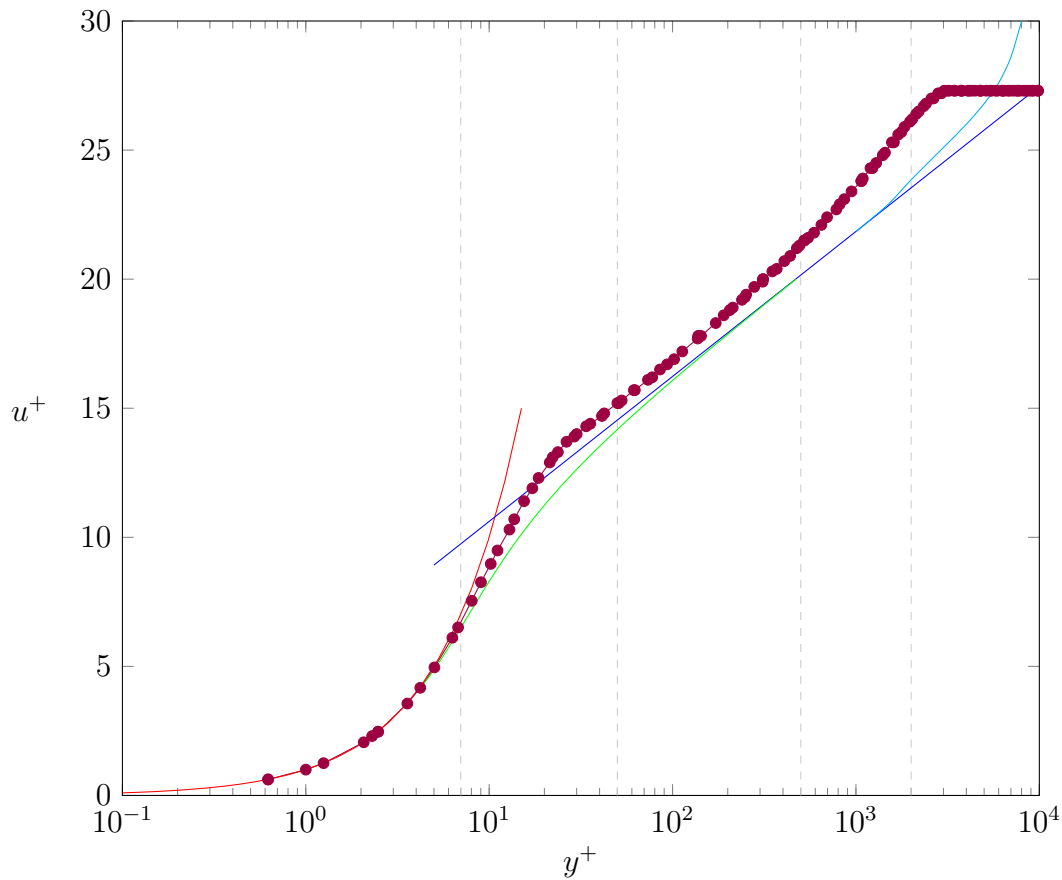


FIGURE 3.39 – Profil de vitesse à travers la couche limite turbulente ($Re = 5 \cdot 10^6$) d'une plaque plane sur le maillage couche limite par rapport au profil théorique

3.5.2 Profil d'aile NACA0012

Le profil d'aile NACA0012 est un benchmark très connu et parfaitement documenté [Rumsey, 2015], il est utilisé notamment pour la validation des codes numériques. On présente la configuration de calcul du NACA0012 à angle d'incidence nul sur la figure 3.40. Conformément au benchmark proposé par la NASA, le domaine est l'assemblage d'un demi-cercle en entrée de rayon 500 m et d'un rectangle en sortie de dimensions $470 \times 1000 \text{ m}^2$. Le domaine est très grand comparé à la longueur de la corde du profil NACA0012 de 1 m pour éviter toute perturbation qui pourrait être induite par les conditions aux limites.

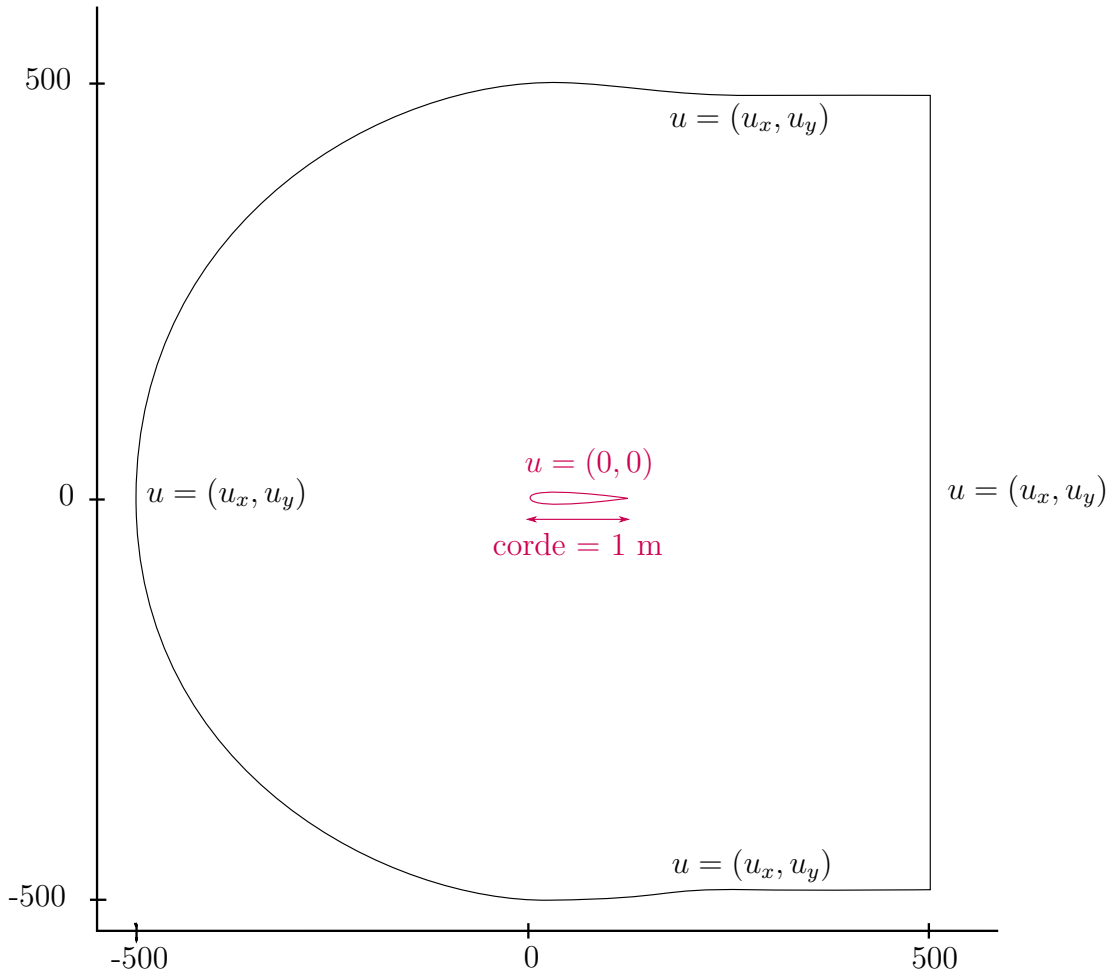


FIGURE 3.40 – Configuration du cas NACA0012 (pas à l'échelle)

La simulation est effectuée en suivant le benchmark proposé par la NASA, soit pour un nombre de Reynolds $Re_L = 6 \cdot 10^6$, un nombre de Mach $M = 0.15$ et une longueur de corde $L = 1 \text{ m}$, ce qui se traduit par une vitesse d'entrée $U_\infty = 51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, et une viscosité cinématique $\nu = 8.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Ce cas génère un sillage derrière le profil, afin de calculer précisément le champ de vitesse dans cette zone, le maillage couche limite est généré avec une Box2 de dimensions $22.2 \times 0.6 \text{ m}^2$ dont le coin bas gauche est ancré en $(-0.2, -0.3)$ avec une taille de maille maximum $H_2 = 0.002 \text{ m}$ et une taille de maille maximum $H_1 = 20 \text{ m}$ sur le reste du domaine. On présente sur la figure 3.41 le maillage de couche limite généré sous la condition de précision $y_0^+ = 1$, ainsi la taille de maille minimum vaut $h_{\min} = 4.46 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, et le maillage est composé de 88000 éléments.

Le calcul est exécuté à l'aide du solveur VMS pour un temps physique de 5 secondes avec un pas de temps $dt = 0.001$ s. Le coefficient de pression moyenné en temps le long du profil est tracé sur la figure 3.42 avec la solution théorique fournie par la NASA. On constate une oscillation du coefficient de pression autour de la solution théorique, cette oscillation est causée par la présence de tourbillons dans la solution contrairement à la solution théorique réalisée avec un solveur RANS couplé au modèle de turbulence de Spalart-Allmaras. On relève également les coefficients de traînée et de portance en fonction du temps sur les figures 3.43 et 3.44, où leurs valeurs moyennes sont $C_D = 7.8 \cdot 10^{-3}$ et $C_L = -5 \cdot 10^{-3}$, ce qui est en accord avec la théorie : $C_D = 8 \cdot 10^{-3}$ et $C_L \approx 0$.

La solution du champ de vitesse, représentée sur la figure 3.45, montre un étirement artificiel des recirculations. Cet étirement est dû à l'anisotropie du maillage couche limite qui ne convient pas à la description de tourbillons, le rapport d'aspect maximum sur ce maillage est de 1800. En effet la description d'un tourbillon nécessite un maillage isotrope puisque l'écoulement change de direction sur un intervalle d'espace très restreint. Cependant il serait très coûteux de produire un maillage couche limite isotrope. Il serait donc judicieux d'utiliser l'adaptation de maillage pour s'assurer de résoudre proprement les recirculations tout en conservant la structure du maillage couche limite.

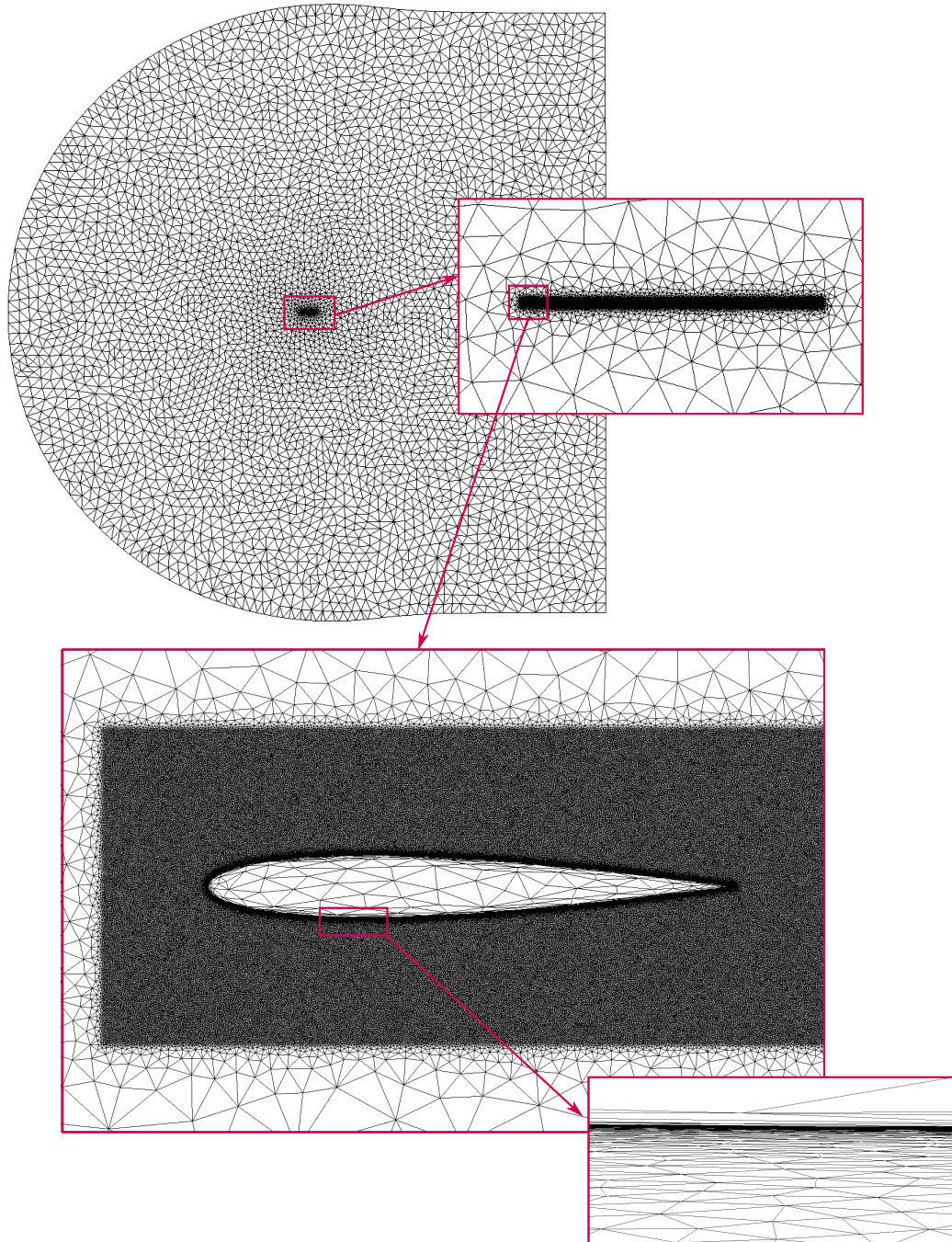


FIGURE 3.41 – Maillage couche limite pour le NACA0012

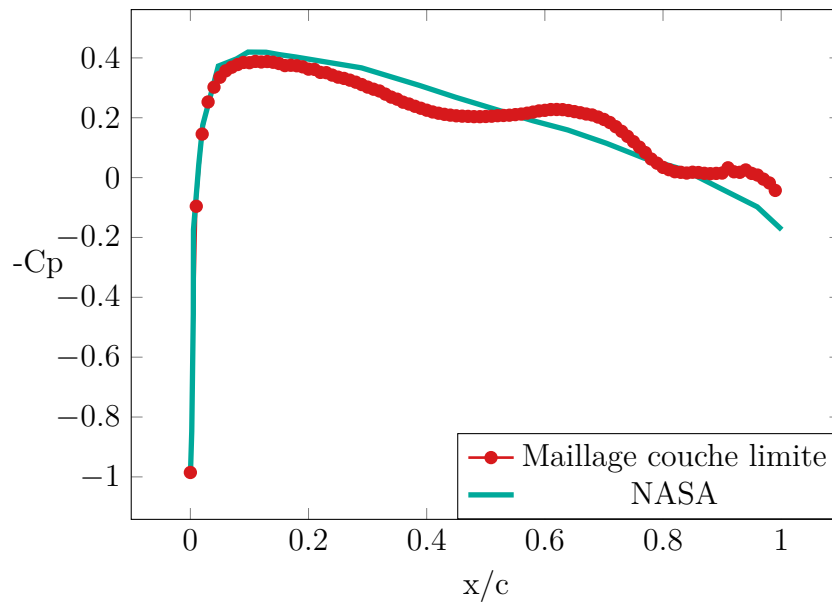


FIGURE 3.42 – Coefficient de pression le long du profil d’aile NACA0012 pour une simulation sur le maillage couche limite, et la solution de référence proposée par la NASA

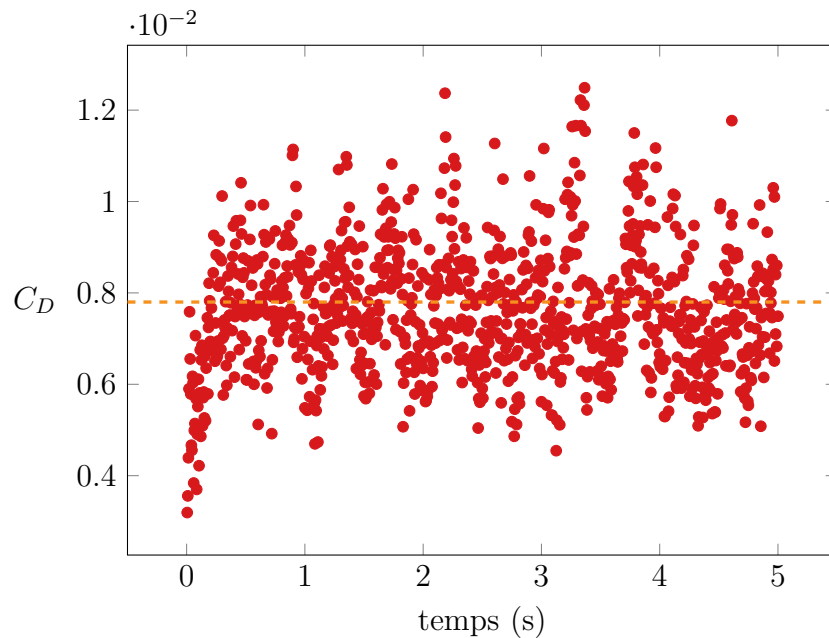


FIGURE 3.43 – Évolution du coefficient de traînée sur le profil d’aile NACA0012 pour une simulation sur le maillage couche limite

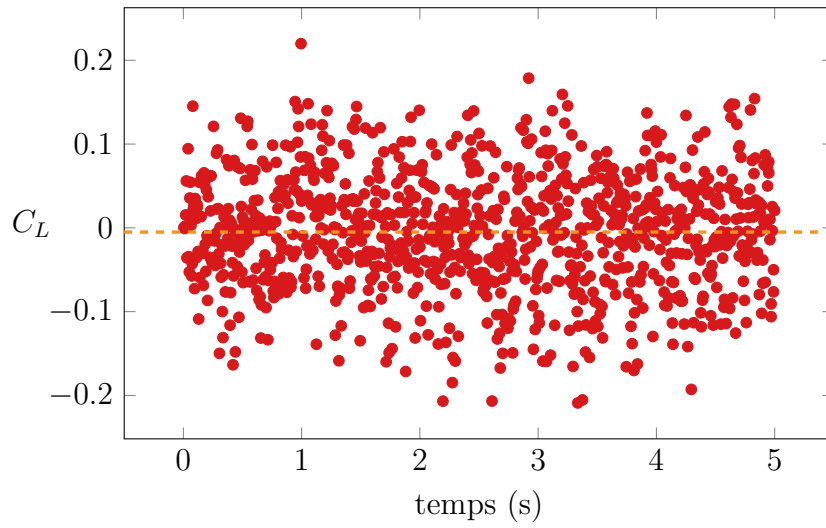


FIGURE 3.44 – Évolution du coefficient de portance sur le profil d'aile NACA0012 pour une simulation sur le maillage couche limite

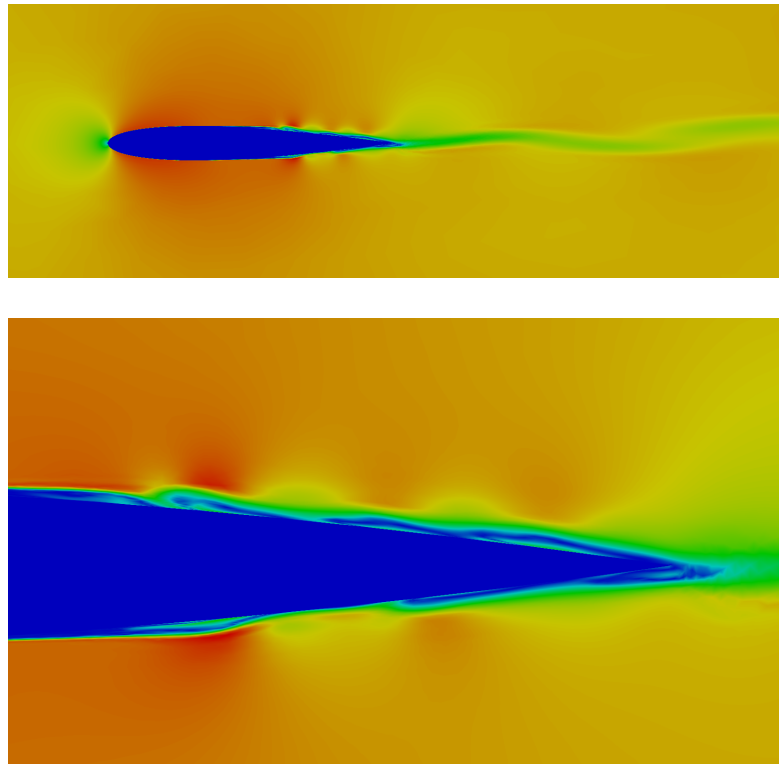


FIGURE 3.45 – Champ de vitesse solution pour le NACA0012 avec maillage couche limite; suivi d'un zoom sur la deuxième moitié du profil

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle procédure permettant de générer des maillages *a priori*, i.e. en amont de la simulation, adaptés sur la couche limite tels que prescrit par la théorie. Cette procédure, particulièrement adaptée aux géométries immergées, repose sur une approche multi-levelset permettant de localiser chacune des strates composant la couche limite et ainsi de contrôler la taille et l'orientation des éléments. Cela permet d'assurer une variation progressive de la taille de maille, indispensable au solveur pour assurer une résolution précise. De plus, le contrôle sur la taille et l'orientation des éléments permet de décrire au mieux l'interface entre le fluide et le solide immergé.

Ainsi à partir des paramètres physiques caractéristiques de l'écoulement et de la fonction distance associée à l'interface fluide-structure, un maillage couche limite précis représentant fidèlement l'interface peut être généré itérativement quelle que soit la complexité de la géométrie *2D* ou *3D* immergée [Billon et al., 2016].

Nous avons constaté sur la plaque plane ainsi que sur le profil d'aile NACA0012 une bonne description de l'écoulement notamment dans la sous-couche visqueuse. Cependant on a relevé que l'anisotropie du maillage couche limite pouvait être à l'origine de diffusion altérant la solution. L'utilisation d'un maillage couche limite isotrope étant beaucoup trop coûteuse, nous nous intéresserons dans ce qui suit au couplage du maillage couche limite avec les méthodes d'adaptation de maillage dynamique. Finalement, le maillage couche limite *a priori* est un bon maillage pour l'initialisation d'une simulation qui permet de faciliter la convergence du solveur, cependant il ne suffit pas à la description d'écoulements pleinement turbulents avec un solveur VMS. On note également que l'utilisateur n'a aucun contrôle explicite sur le nombre d'éléments engendrés par le maillage couche limite et qu'un problème de précision machine peut être rencontré au niveau du calcul de qualité du maillage lorsque les éléments prescrits sont trop petits.

4

Couplage du maillage couche limite et de l'adaptation dynamique

Sommaire

4.1 Introduction	133
4.2 Initialisation par un maillage couche limite	135
4.3 Intersection de métriques	142
4.3.1 Réduction simultanée	142
4.3.2 Diagonalisation simultanée	144
4.3.3 Résultats numériques	145
4.4 Couplage avancé - Adaptation de maillage volume-couche limite	149
4.4.1 Zone interne	149
4.4.2 Zone couche limite	150
4.4.3 Domaine restant	151
4.5 Adaptation volume-couche limite : applications	152
4.5.1 Profil d'aile NACA0012	152
4.5.2 Ahmed body	156
4.5.3 Profil d'aile NHLP L1T2	159
4.6 Conclusion	162

4.1 Introduction

Les chapitres précédents nous ont permis d'introduire deux techniques d'adaptation de maillage dédiées à la simulation d'écoulements turbulents.

D'une part l'adaptation de maillage basée sur l'estimation de l'erreur *a posteriori* dont la principale qualité est sa capacité à adapter le maillage

dynamiquement sur un champ physique donné. Mais présente l'inconvénient pratique de suivre l'évolution de ce champ et donc de ne plus garantir une description appropriée de la couche limite à tout instant. C'est particulièrement problématique lorsque la géométrie est immergée. Si les éléments prescrits sur la paroi sont trop grossiers compte tenu de la loi de paroi utilisée, il est possible de manquer l'émergence de tourbillons, leurs évolutions ou même de les diffuser. Cela aura pour effet de converger vers une solution non physique. C'est pour cela qu'il est important de considérer la couche limite avec beaucoup de précautions.

D'autre part, nous avons proposé une méthode de construction de maillage adapté sur la couche limite théorique. Ainsi le choix de la taille de maille sur la paroi est en accord avec la loi de paroi appliquée et les caractéristiques de l'écoulement étudié. Si bien que les éléments de maillage suivent au mieux la courbure de la géométrie, et que le maillage est construit en strates comme prescrit par la théorie des couches limites. Cependant l'inconvénient de cette méthode est que le maillage se concentre uniquement sur la couche limite et ne suit pas le sillage, ni les détachements ou encore une quelconque discontinuité dans un champ, le maillage est constant tout au long de la simulation. Par conséquent, si le maillage n'est pas suffisamment raffiné dans le sillage alors le sillage va se diffuser et encore une fois le calcul va converger vers une solution non physique.

L'objectif de ce chapitre est donc de coupler ces deux méthodes pour en proposer une nouvelle qui profite de leurs avantages respectifs et minimise leurs inconvénients. Le couplage d'une méthode d'adaptation de maillage dynamique avec un maillage couche limite théorique est encore un sujet peu répandu et pourtant crucial pour la résolution des écoulements à grands nombres de Reynolds. La plupart des auteurs utilisent un maillage structuré fixe tout au long de la simulation dans la zone de couche limite et adapte le maillage dynamiquement à l'extérieur de celle-ci uniquement [Park et Carlson, 2010, Hassan et Picasso, 2015, Alauzet et Marcum, 2015]. Une approche différente est proposée dans [Sahni et al., 2008] pour coupler l'adaptation de maillage avec une couche limite structurée. Celle-ci consiste à décomposer la couche limite en une succession de plans reliés par une épaisseur et ainsi d'adapter le maillage en deux étapes. D'une part dans le plan, d'autre part dans l'épaisseur suivant les informations de tailles obtenues de l'adaptation de maillage sur l'erreur *a posteriori*. C'est une approche intéressante qui semble donner de bons résultats mais qui nécessite beaucoup de post-traitements des informations reçues de l'adaptation de maillage. Nous souhaitons pour ce travail opter pour une méthode plus automatique, comme celle proposée dans [Michal et Krakos, 2012] qui repose sur l'intersection des deux métriques

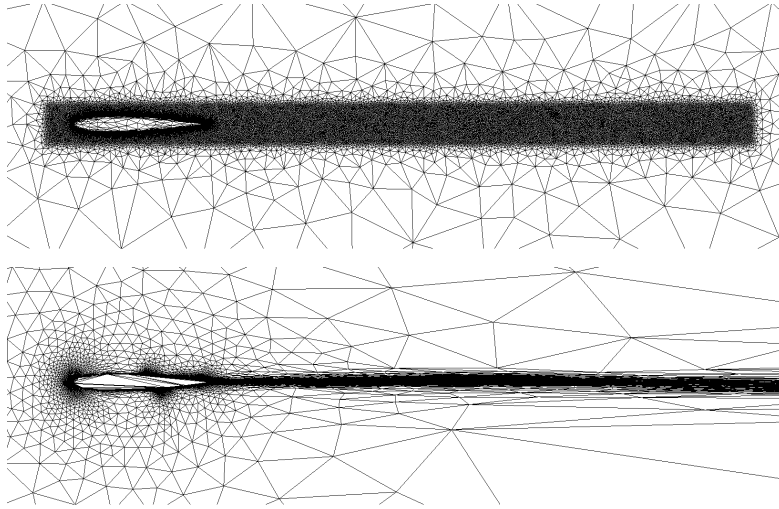


FIGURE 4.1 – Comparaison des maillages obtenus sur un profil d'aile NACA0012 avec chacune des deux méthodes, le maillage de couche limite en haut et le maillage adapté sur l'erreur *a posteriori* du champ de vitesse en bas

obtenues.

Dans un premier temps nous allons étudier les différentes possibilités de couplage et puis nous proposerons une méthode avancée. Nous utiliserons tout au long de ce chapitre la géométrie du profil d'aile NACA0012, dont le cas est détaillé en section 3.5.2, pour comparer et illustrer les diverses méthodes.

4.2 Initialisation par un maillage couche limite

Le premier couplage envisagé est une méthode élémentaire, qui consiste à utiliser le maillage couche limite *a priori* pour initialiser la simulation avec adaptation de maillage dynamique. En effet le maillage initial a un fort impact sur la répartition des éléments après remaillage, en particulier lorsque le nombre d'éléments alloués pour le remaillage est restreint. En effet, d'une part lorsque les éléments sont trop grossiers sur le maillage initial, très peu de nœuds de calcul se situent dans la couche limite, ainsi l'erreur *a posteriori* calculée sur ce maillage est altérée et ne donne pas beaucoup de poids à la couche limite. Si de plus le nombre d'éléments est restreint, les autres zones

du maillage vont être drastiquement déraffinées. Si bien que cette zone ne sera pas aussi finement résolue que nécessaire, il faudra de nombreuses itérations afin de reconstruire une couche limite correcte. Cependant au cours de cette phase d'adaptation la solution aura été corrompue, des informations auront été loupées et ne pourront pas être retrouvées par la suite, en conséquence de quoi la solution ne correspondra pas exactement à la réalité. D'autre part, lorsque les éléments sont trop grossiers sur le maillage initial, la géométrie est mal décrite. L'écoulement calculé sur ce maillage est donc perturbé par les irrégularités de la géométrie, une fois encore la solution aura été corrompue et ne correspondra pas exactement à la réalité. Ainsi, avec un bon maillage initial les champs proche paroi sont mieux résolus, l'erreur y est alors mieux évaluée et le maillage reste donc relativement fin dans la couche limite pour converger vers la solution physique.

On compare sur la figure 4.2 les premiers remaillages pour l'adaptation de maillage avec un maillage initial grossier par rapport à une initialisation avec le maillage couche limite *a priori*. Les champs de vitesses sont tracés sur les maillages. Après la première itération de remaillage, l'adaptation de maillage classique effectue un remaillage excessif au niveau de l'interface fluide-structure se traduisant par un amas d'éléments et génère un maillage relativement fin et isotrope sur le reste du domaine faute d'erreur sur laquelle remailler. Tandis qu'avec le maillage couche limite en initialisation, après le premier remaillage on observe un résidu de la structure du maillage couche limite, le champ de vitesse est beaucoup plus fin et précis.

Au fur et à mesure des itérations de remaillage la "mauvaise" solution du champ de vitesse calculée initialement avec la méthode classique est convectée et évacuée. Cependant, la solution finale restera perturbée par cette mauvaise initialisation. En ce qui concerne le cas initialisé avec le maillage couche limite, on remarque que le maillage bouge peu et s'adapte sur le sillage.

La solution finale obtenue après 5 secondes de calculs pour les deux méthodes est présentée sur la figure 4.3. On note des tourbillons beaucoup plus intenses sur la méthode classique, certainement dus à la perturbation initiale, et une zone étendue de recirculation sous le profil d'aile. Les profils de vitesse ne coïncident donc pas après 5 s de calculs et 1000 itérations de remaillages.

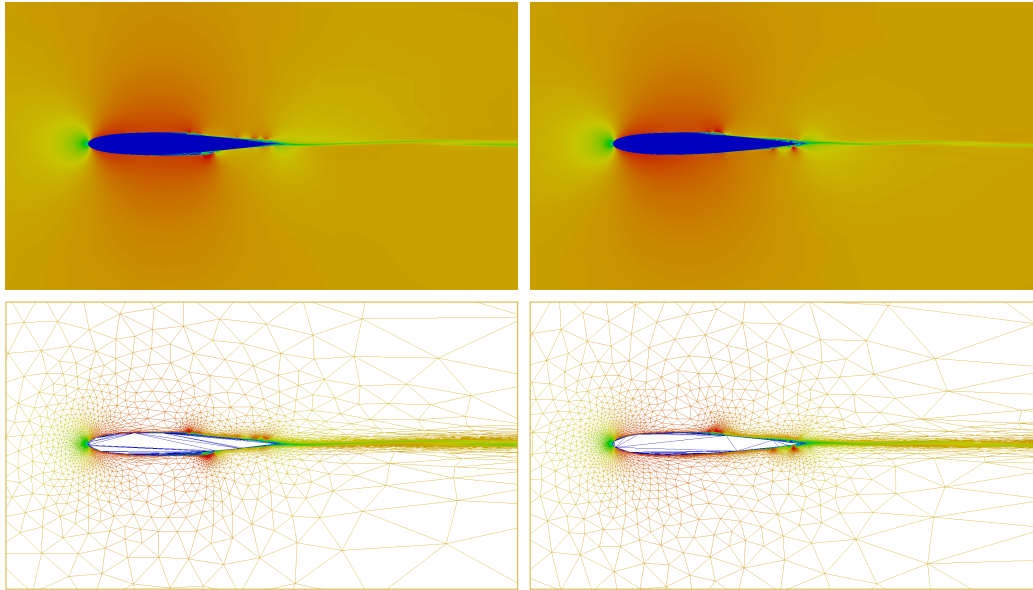


FIGURE 4.3 – Comparaison du champ de vitesse solution ($t = 5$ s) pour le cas d’adaptation de maillage classique à gauche et le même cas avec le maillage couche limite en maillage initial à droite

On compare également les coefficients de pression le long du profil sur la figure 4.4 à la solution proposée par la NASA [Rumsey, 2015]. On rappelle que la solution de la NASA a été obtenue pour une résolution moyennée des équations de Navier-Stokes (RANS) couplée au modèle de turbulence de Spalart-Allmaras qui ne laisse pas apparaître de tourbillons. Tandis que dans ce travail nous utilisons une méthode variationnelle multi-échelles (VMS) qui résout les grandes échelles et modélise les petites, la solution laisse donc apparaître des tourbillons. Ceci explique l’oscillation des courbes présentées autour de la solution de la NASA, puisqu’un tourbillon est le lieu d’une surpression et qu’il engendre une dépression en aval. Les courbes présentées sont le résultat d’une moyenne temporelle sur la partie supérieure du profil, mais ces oscillations subsistent puisqu’une zone de recirculation constante se situe juste après la zone de plus grande épaisseur (cf. figure 4.3). On remarque que les deux courbes oscillent autour de la solution NASA et se superposent assez bien. Cependant, elles présentent une légère sous pression sur l’avant du profil et une surpression près du bord de fuite par rapport à la solution de référence. De plus, on remarque que le coefficient de pression associé à la simulation classique est beaucoup moins lisse et présente de nombreuses petites oscillations.

Finalement, on compare les coefficients de traînée et de portance au cours du temps sur les figures 4.5 et 4.6. On rappelle que les valeurs de références pour le profil d'aile NACA0012 à $Re = 6 \cdot 10^6$ sont $C_D = 8 \cdot 10^{-3}$ et $C_L \approx 0$.

Pour le cas initialisé avec un maillage quelconque, on a un coefficient de portance moyen $C_L = -6.84 \cdot 10^{-3}$ représenté en pointillés orange tandis que le cas initialisé avec un maillage couche limite présente un coefficient de portance moyen $C_L = 4.1 \cdot 10^{-3}$. Les deux simulations sont réparties autour de la valeur de référence, on peut considérer que la valeur de référence est validée dans les deux cas puisqu'elle vaut approximativement zéro. On remarque un très mauvais coefficient de portance sur les premières itérations du cas classique, celui-ci est dû à la mauvaise description par le maillage initial de la géométrie.

En conclusion, l'initialisation de l'adaptation de maillage dynamique par le maillage couche limite est très intéressante, elle permet de réaliser un calcul précis et d'éviter toute perturbation de la solution, cependant on remarque que la structure de la couche limite se perd au fur et à mesure des itérations et que l'initialisation avec un maillage couche limite ne suffit pas à assurer une taille de maille minimum le long de l'interface. Des résultats plus précis serait donc attendu en conservant cette structure. De plus, ces deux calculs concentrent 90% du nombre d'éléments alloués pour le maillage dans la couche limite ce qui laisse très peu de ressources pour le reste du maillage, et nuit à la description du sillage.

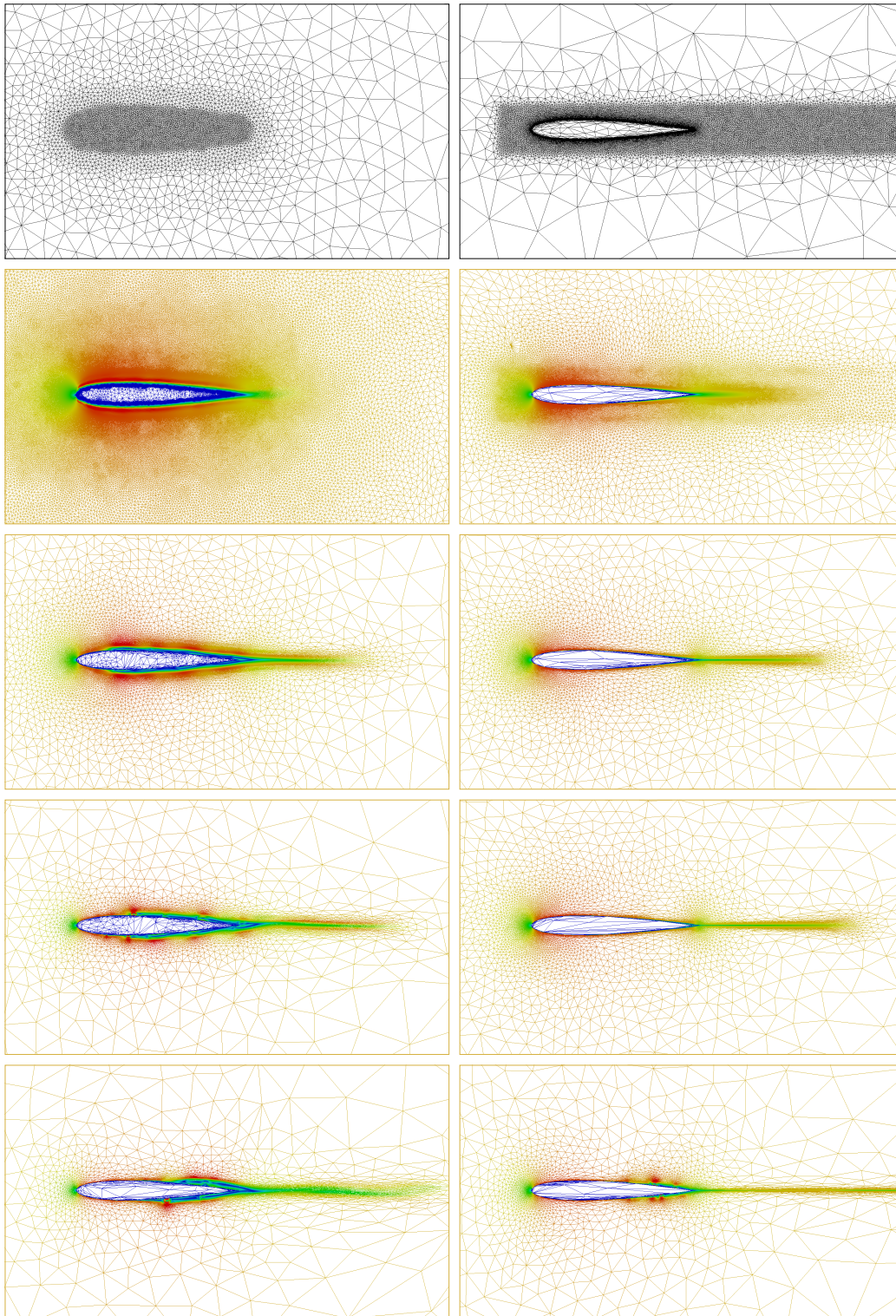


FIGURE 4.2 – Comparaison des premières itérations (0, 5, 15, 25, 50) de calculs/adaptation de maillage pour le cas d'adaptation de maillage classique à gauche et le même cas avec le maillage couche limite en maillage initial à droite

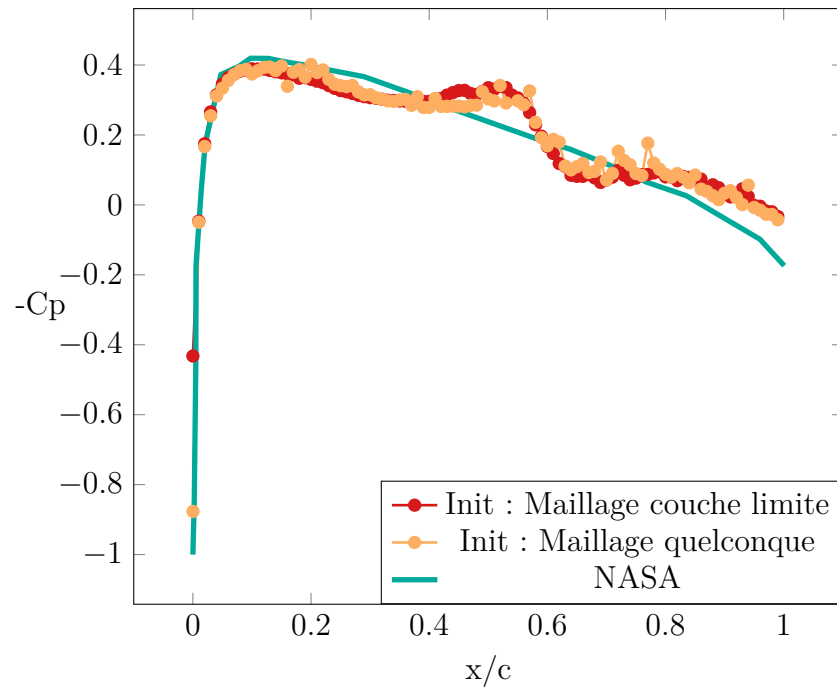


FIGURE 4.4 – Coefficient de pression le long du profil d’aile NACA0012 pour un maillage initial quelconque (orange), pour une initialisation avec le maillage couche limite (rouge), et la solution de référence proposée par la NASA

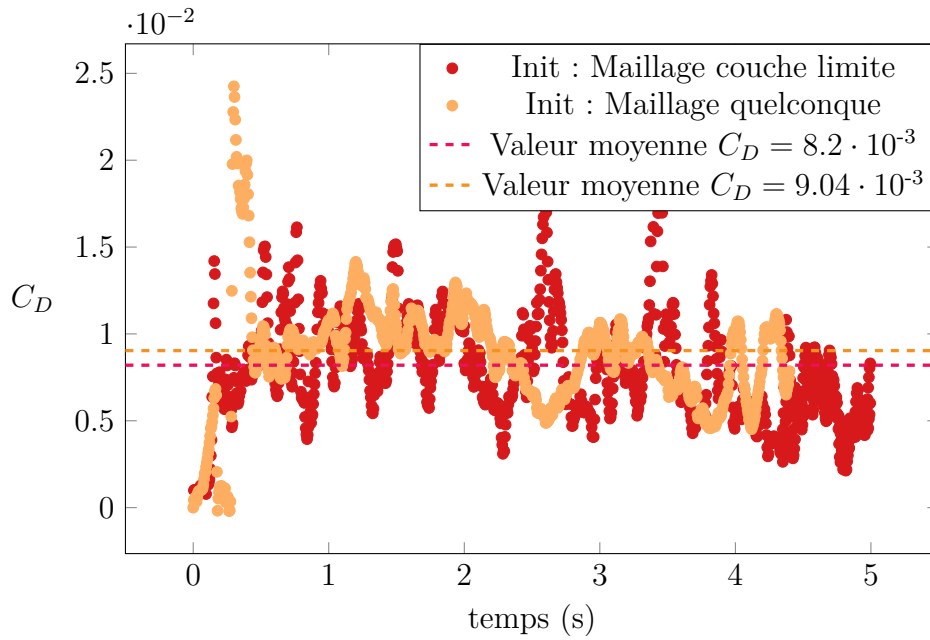


FIGURE 4.5 – Évolution du coefficient de traînée sur le profil d’aile NACA0012 au cours du temps pour un maillage initial quelconque (orange), pour une initialisation avec le maillage couche limite (rouge)

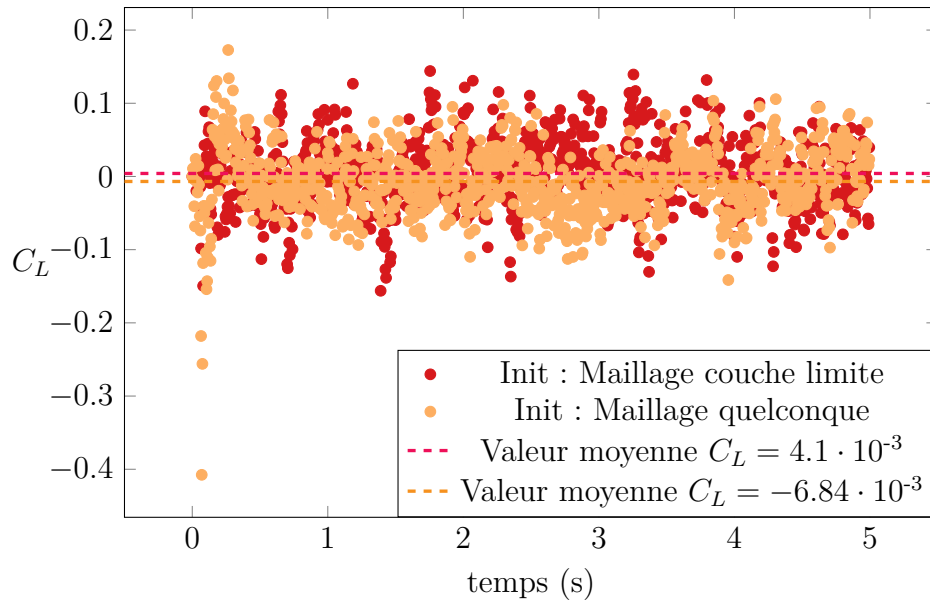


FIGURE 4.6 – Évolution du coefficient de portance sur le profil d’aile NACA0012 au cours du temps pour un maillage initial quelconque (orange), pour une initialisation avec le maillage couche limite (rouge)

4.3 Intersection de métriques

Dans un second temps, on envisage cette fois le couplage des deux méthodes d'adaptation de maillage de manière à conserver une taille de maille minimum dans la couche limite et sa structure en strates, tout en profitant des indications de l'adaptation de maillage lorsque celle ci suggère de réduire le rapport d'aspect ou la taille de maille. En effet, ce sont des informations très importantes pour décrire précisément les tourbillons, et assurer un maillage adapté sur le sillage. La solution proposée dans cette partie est l'intersection de leurs métriques respectives, de manière à profiter des avantages de chaque méthode et à compenser leurs défauts respectifs.

Pour définir l'intersection de deux métriques, on utilise la représentation géométrique d'un tenseur de métrique, soit une ellipse en dimension deux ou un ellipsoïde en dimension trois. On note que l'intersection de deux métriques n'est pas une intersection géométrique car l'intersection de deux ellipses n'est pas nécessairement une ellipse. Or, on souhaite obtenir une métrique résultante de l'intersection de deux métriques et donc une ellipse ou un ellipsoïde. Afin de construire une métrique qui satisfait les exigences de chacune des deux méthodes, nous devons déterminer la métrique qui correspond à la plus grande boule unité incluse dans leur intersection géométrique.

4.3.1 Réduction simultanée

En pratique, soient M_1 et M_2 deux métriques, et \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 leurs ellipses respectives, on cherche la métrique de volume maximum tel que $M = M_1 \cap M_2$. Par une approche géométrique [Pope, 2008] cela revient à chercher $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Or, soit c le centre de l'ellipse \mathcal{E}_i , on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \{x | (x - c)^T M_i (x - c) \leq 1\} \\ &= \{x | \|M_i^{\frac{1}{2}}(x - c)\| \leq 1\}\end{aligned}\tag{4.1}$$

La métrique M_i est par définition symétrique définie positive il existe donc une matrice triangulaire inférieure L_i telle que : $M_i = L_i L_i^T$ par factorisation de Cholesky. Si bien que,

$$\mathcal{E}_i = \{x | \|L_i^T(x - c)\| \leq 1\}\tag{4.2}$$

La transformation $y = L_1^T(x - c)$, représentée sur la figure 4.7, transforme l'ellipse \mathcal{E}_1 en boule unité notée \mathcal{E}'_1 , et transforme l'ellipse \mathcal{E}_2 en l'ellipse \mathcal{E}'_2 avec le facteur de Cholesky :

$$L_2' = L_1^{-1} L_2\tag{4.3}$$

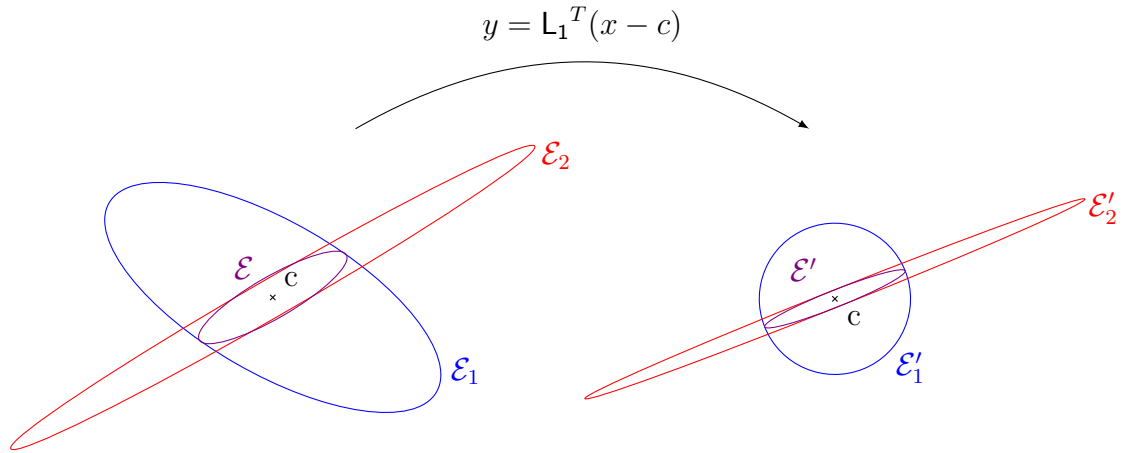


FIGURE 4.7 – Représentation de la transformation $y = \mathbf{L}_1^T(x - c)$ appliquée à \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}

On remarque que \mathcal{E}'_1 partage les directions principales de \mathcal{E}'_2 . Ainsi \mathcal{E}' (la transformation de \mathcal{E} par $y = \mathbf{L}_1^T(x - c)$) possède les mêmes directions principales que \mathcal{E}'_2 et ses axes ont une longueur inférieure à ceux de \mathcal{E}'_1 (qui sont unitaires) et de \mathcal{E}'_2 .

Par suite, si on pose :

$$\mathbf{M}'_2 = \mathbf{L}'_2 \mathbf{L}'_2{}^T = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \quad (4.4)$$

On a donc la métrique suivante pour l'ellipse \mathcal{E}' :

$$\mathbf{M}' = \mathbf{L}' \mathbf{L}'^T = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{V}^T \quad (4.5)$$

où $\tilde{\mathbf{D}} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_i)$ est la matrice diagonale des valeurs propres de \mathbf{M}' , et ses valeurs propres valent $\tilde{\lambda}_i = \max(\lambda_i, 1)$, avec λ_i les valeurs propres de \mathbf{M}'_2 telles que $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_i)$.

Finalement, la matrice de Cholesky associée à l'ellipse \mathcal{E} est obtenue en inversant la transformation, soit :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}' \quad (4.6)$$

Si bien que la métrique associée à \mathcal{E} , l'ellipse de volume maximum comprise dans l'intersection des ellipses \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 , est donnée par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T = \mathbf{L}_1 \mathbf{V} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{V}^T \mathbf{L}_1^T \quad (4.7)$$

Cette procédure réalise une réduction simultanée, qui produit des résultats similaires à celle proposée dans [Alauzet et Frey, 2003]. On propose de comparer cette méthode d'intersection à la diagonalisation simultanée proposée dans [Gruau, 2005] et disponible dans la solution CIMLIB.

4.3.2 Diagonalisation simultanée

La diagonalisation simultanée consiste à diagonaliser chacune des métriques afin de retrouver leurs valeurs propres et directions associées respectives tel que $M_i = V_i D_i V_i^T$ avec V_i la matrice des vecteurs propres et D_i la matrice diagonale composée des valeurs propres de M_i . Puis, on cherche les valeurs propres de M_1 dans la base de M_2 et vis versa, si bien qu'on définit les matrices diagonales :

$$D_{12} = V_2 M_1 V_2^T \quad \text{et} \quad D_{21} = V_1 M_2 V_1^T \quad (4.8)$$

Ainsi, on reconstruit deux métriques représentées sur la figure 4.8 :

$$M'_1 = V_1 \max(D_1, D_{12}) V_1^T \quad \text{et} \quad M'_2 = V_2 \max(D_2, D_{21}) V_2^T \quad (4.9)$$

Finalement la métrique solution de l'intersection $M = M_1 \cap M_2$, représentée sur la figure 4.8, est donnée par :

$$M = \frac{M'_1 + M'_2}{2} \quad (4.10)$$

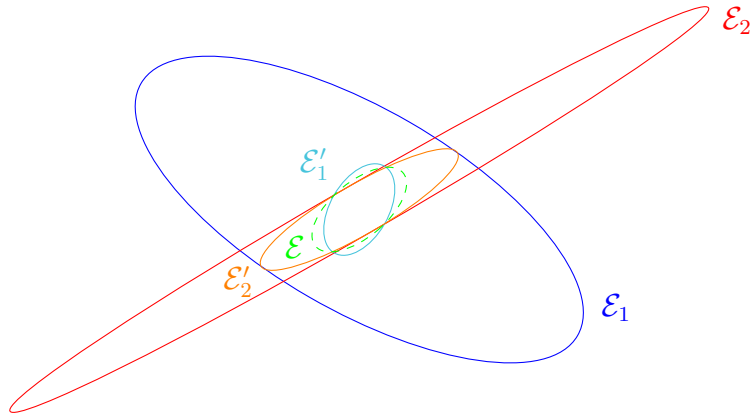


FIGURE 4.8 – Intersection de métriques par diagonalisation simultanée

La métrique résultante obtenue par chacune de ces deux méthodes est représentée sur la figure 4.9. On remarque que la diagonalisation simultanée ne permet pas de maximiser le volume de l'ellipse résultante, contrairement à la réduction simultanée qui de plus oriente parfaitement l'ellipse. De tels résultats étaient attendus étant donné la construction moyennée de la méthode de diagonalisation simultanée. Nous retiendrons donc la réduction simultanée telle que présentée ci-dessus pour la suite de cette étude.

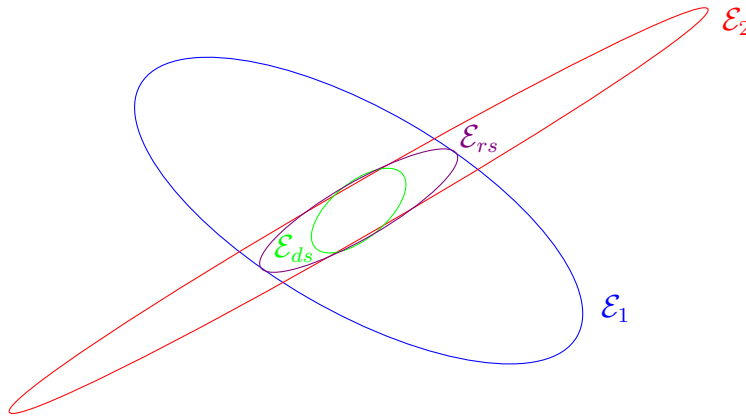


FIGURE 4.9 – Comparaisons des méthodes d'intersection de métriques : réduction simultanée en violet \mathcal{E}_{rs} , et diagonalisation simultanée en vert \mathcal{E}_{ds}

4.3.3 Résultats numériques

On présente sur la figure 4.10 le champ de vitesse solution et le maillage associé, on remarque que la couche limite est conservée et que le sillage est également maillé. Le coefficient de pression le long du profil, présenté sur la figure 4.11, montre cette fois une sous-pression un peu plus légère à l'avant du profil par rapport à la solution de référence et conserve une surpression près du bord de fuite. On remarque également que les oscillations dues à la simulation VMS sont repoussées un peu plus loin sur le profil et sont de plus petite amplitude, ce que l'on peut constater sur la figure 4.10 par un déplacement et un amincissement de la zone de recirculation. On relève une valeur moyenne du coefficient de traînée $C_D = 8.6 \cdot 10^{-3}$ (cf. figure 4.12), sachant que la valeur de référence est $C_D = 8 \cdot 10^{-3}$, ce qui est plus précis que le cas classique avec adaptation de maillage à partir d'un maillage initial quelconque ($C_D = 9 \cdot 10^{-3}$) mais est moins précis que le cas avec le maillage couche limite en initialisation. On suppose que cette erreur de traînée est le résultat d'une

mauvaise discrétisation du sillage dû à l'intersection de maillage dans la zone de sillage avec le maillage couche limite *a priori*. Le coefficient de portance est présenté sur la figure 4.13 sa valeur moyenne est $C_L = 3.2 \cdot 10^{-3}$ ce qui est en accord avec la valeur de référence.

Les résultats obtenus sont très intéressants et montrent bien l'intérêt de conserver la couche limite. Cependant cette méthode présente deux inconvénients majeurs, nous n'avons aucun contrôle direct sur le nombre d'éléments générés par l'intersection, celui-ci peut donc rapidement exploser en fonction des paramètres de la couche limite, de plus nous nous encombrons encore des indications de taille de maille *a priori* sur Box1 et Box2 qui n'ont plus lieu d'être puisque l'adaptation de maillage dynamique est plus à même de définir le maillage dans ces zones, il serait donc plus judicieux de se contenter d'une intersection uniquement dans l'épaisseur de la couche limite et de laisser l'adaptation de maillage dynamique gérer le reste du domaine avec un contrôle sur le nombre d'éléments total du maillage résultant.

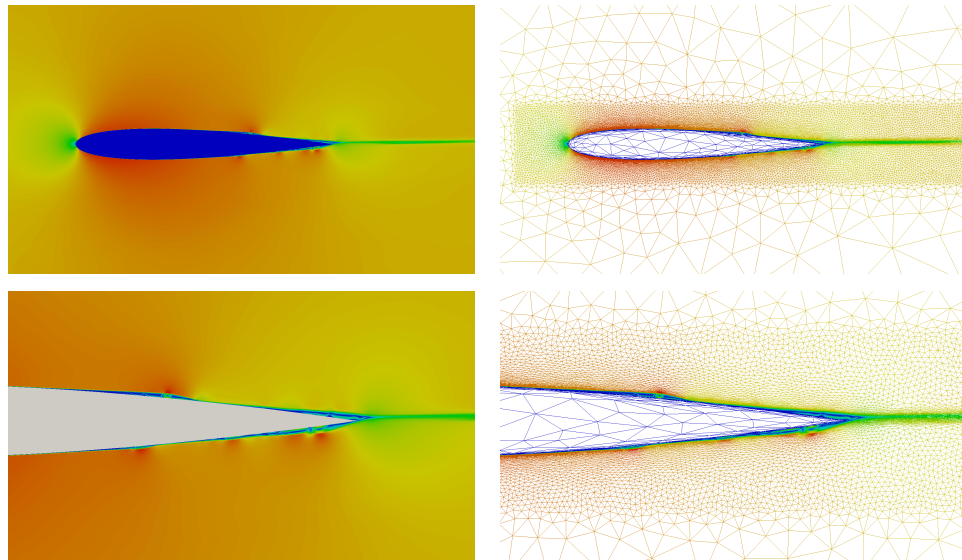


FIGURE 4.10 – Champ de vitesse solution et le maillage associé; Zoom sur la deuxième moitié du profil en bas

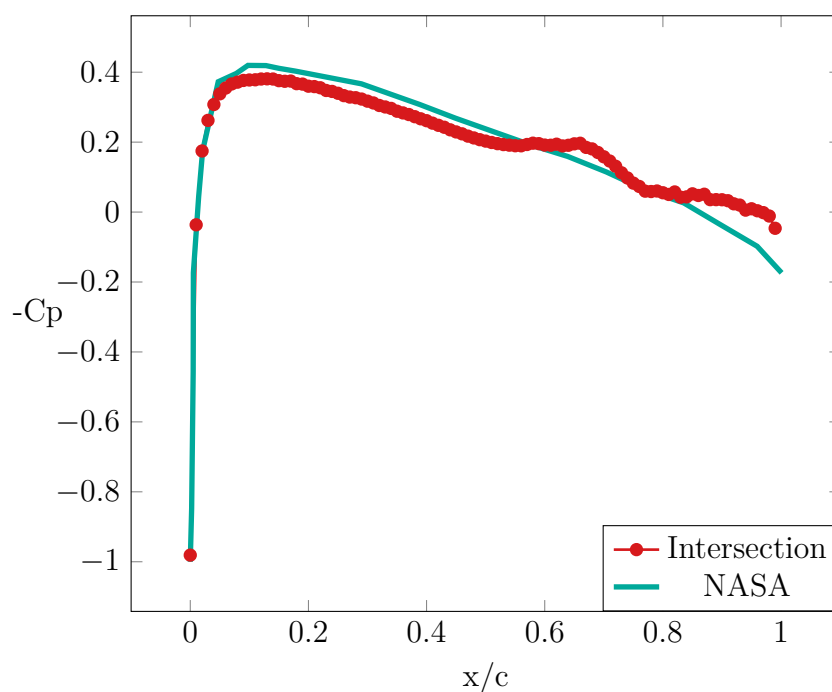


FIGURE 4.11 – Coefficient de pression le long du profil d'aile NACA0012 pour une simulation avec intersection de métrique par réduction simultanée, et la solution de référence proposée par la NASA

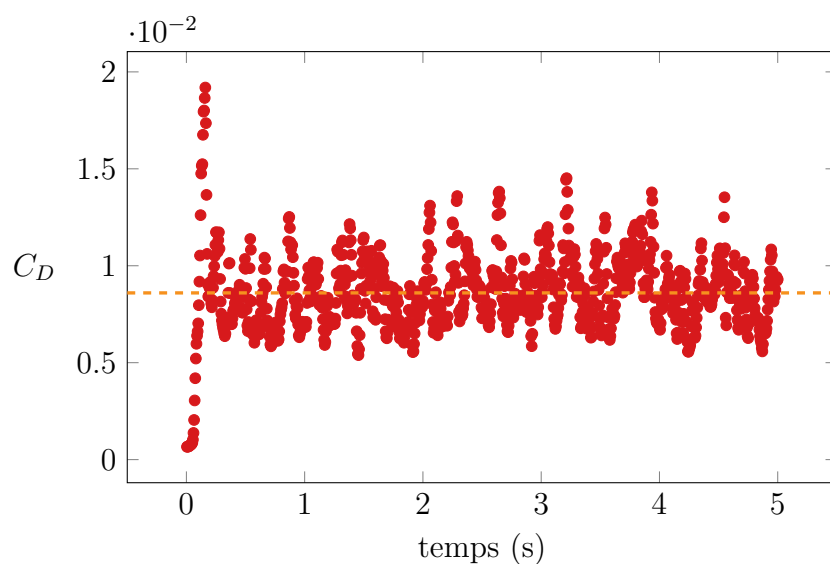


FIGURE 4.12 – Évolution du coefficient de traînée sur le profil d'aile NACA0012 pour une simulation avec intersection de métrique par réduction simultanée

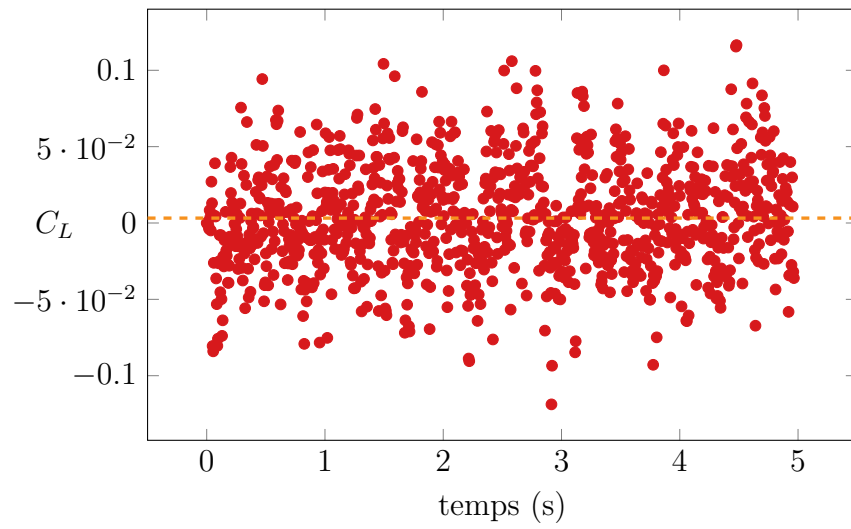


FIGURE 4.13 – Évolution du coefficient de portance sur le profil d'aile NACA0012 pour une simulation avec intersection de métrique par réduction simultanée

4.4 Couplage avancé - Adaptation de maillage volume-couche limite

Dans cette partie on propose un couplage avancé du maillage couche limite *a priori* et de l'adaptation de maillage dynamique. Pour cette méthode uniquement nous utilisons la nouvelle méthode d'adaptation de maillage proposée en section 2.4.4(c). De plus, nous proposons de séparer le domaine en trois zones d'intérêts, l'intérieur de la géométrie immergée (zone 0), la couche limite (zone 1) et le reste du domaine (zone 2) représentées sur la figure 4.14.

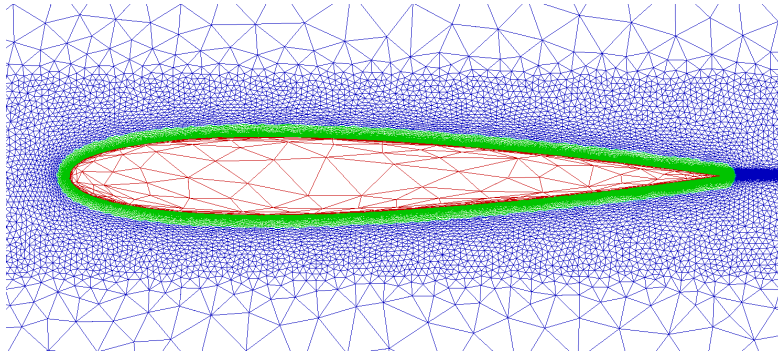


FIGURE 4.14 – Représentation des zones d'intérêts : zone interne (zone 0) en rouge, zone de couche limite (zone 1) en vert, et le domaine restant (zone 2) en bleu

4.4.1 Zone interne

Lors de la simulation de l'écoulement d'air sur le profil d'aile NACA0012, comme pour tous les cas d'écoulements externes, aucun phénomène physique ne se produit à l'intérieur de la géométrie (zone 0) il n'y a alors aucune variation des champs physiques à l'intérieur de celle-ci et l'erreur d'interpolation sur les nœuds de cette zone est quasiment nulle. L'adaptation de maillage prescrit donc des éléments de taille maximale à l'intérieur de la géométrie comme on peut l'observer sur la figure 4.15. Cette taille maximale est souvent bien supérieure au volume intérieur de la géométrie, ainsi un tel maillage ne permet pas de garantir que l'interface immergée soit correctement décrite à chaque remaillage contrairement à la métrique couche limite qui assure que l'interface soit parfaitement décrite grâce à la reproduction des trois premières strates de la couche limite à l'intérieur de la géométrie et à une

évolution progressive et continue de la taille de maille loin de l'interface. Si bien qu'il est préférable de conserver le maillage couche limite à l'intérieur de la géométrie, par conséquent la métrique couche limite sera injectée telle quelle dans la métrique final pour cette zone.

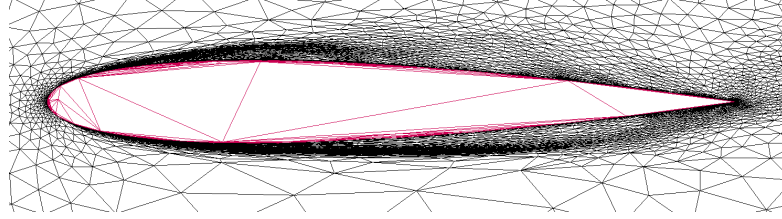


FIGURE 4.15 – Maillage de la zone interne, représentée en rose, par adaptation de maillage sur l'erreur *a posteriori*

4.4.2 Zone couche limite

La méthode consiste à intersecter les deux métriques uniquement dans la zone de couche limite. Le maillage de la zone 2, représentant le reste du domaine, dépendant quant à lui uniquement de l'adaptation de maillage sur l'erreur *a posteriori* pour mailler le sillage. De plus, nous proposons de fixer la répartition optimale du maillage telle que la couche limite soit composée de 60% du nombre d'éléments alloués pour le maillage final. Rappelons que le nombre d'éléments dans chaque zone est évalué en utilisant la formule de dénombrement des éléments (2.79) :

$$N = \frac{\omega}{C_0} \sum_{T \in \Omega_h} |T|_I \sum_{i \in T} \det(\mathbf{M}^i)^{\frac{1}{2}}$$

Cette méthode est le juste prolongement de l'intersection de la métrique couche limite *a priori* avec la métrique d'adaptation de maillage dynamique basée sur l'erreur *a posteriori* présentée précédemment. Nous allons cette fois l'appliquer uniquement dans la zone couche limite en gardant le contrôle sur le nombre d'éléments engendrés. L'idée de l'intersection de métriques est toujours de chercher la plus grande boule unité incluse dans l'intersection géométrique des deux métriques, qui est réalisée par une réduction simultanée (voir détails au paragraphe 4.3). L'intérêt de cette procédure d'intersection, est de conserver la structure de la couche limite et de garantir une précision minimum conforme à la théorie de la couche limite. De plus, l'adaptation de

maillage sur l'erreur *a posteriori* apporte des éléments d'informations supplémentaires concernant le comportement du fluide, notamment sur les directions et rapport d'aspect. L'intersection nous permet donc de construire un maillage à la fois suffisant pour la résolution de la couche limite et adapté sur le comportement réel du fluide.

Cependant l'intersection telle que réalisée dans la section 4.3 ne donne aucun contrôle sur le nombre d'éléments engendrés. Or dans cette méthode nous souhaitons limiter le nombre d'éléments dans la couche limite à 60% du nombre total d'éléments alloués pour le maillage final, afin de garder suffisamment de ressources pour résoudre précisément le sillage.

Soit N_{CL} le nombre d'éléments composant la zone 1 du maillage couche limite *a priori*. En pratique, la métrique relative à l'estimateur d'erreur est calculée pour la zone 1 exclusivement avec une contrainte sur le nombre d'éléments égale à $0.6N - N_{CL}$. Ensuite on effectue l'intersection des deux métriques, puis on évalue le nombre d'éléments engendrés par la métrique résultante, noté $N(1)$.

4.4.3 Domaine restant

Le maillage de la zone 2, représentant le reste du domaine, dépend quant à lui uniquement de l'adaptation de maillage sur l'erreur *a posteriori* pour mailler le sillage. L'estimateur d'erreur est calculé sur les nœuds étiquetés comme appartenant à la zone 2 pour un nombre d'éléments :

$$N(2) = N - (N(0) + N(1))$$

La seule complexité de cette zone consiste à assurer une transition continue entre la zone 1 et la zone 2. En effet, une transition trop brutale en termes de taille d'éléments est très problématique pour la précision des résultats. Pour cela, on transporte la taille de maille sur la frontière de la zone couche limite pour chaque élément dans la direction normale sur le reste du domaine. Cette taille est ensuite utilisée comme taille de maille minimale en paramètre de l'estimateur d'erreur sur la zone 2 et assure ainsi la continuité de la taille de maille à l'interface entre la zone de couche limite et le reste du domaine. Cela complète la procédure de couplage, nous avons donc construit une métrique sur l'ensemble du domaine qui peut être fournie au mailleur topologique MTC.

4.5 Adaptation de maillage volume-couche limite dynamique : applications

Dans cette section on présente plusieurs applications du couplage proposé à des écoulements 2D et 3D de la littérature illustrant le succès de la méthode à produire des solutions précises. Dans un premier temps on conclut l'étude de l'écoulement sur le profil d'aile NACA0012. Puis on présente l'écoulement 3D sur le modèle simplifié de véhicule Ahmed body. Dans un second temps, on s'intéresse au profil d'aile NACA L1T2 en deux dimensions faisant intervenir des interfaces instationnaires.

4.5.1 Profil d'aile NACA0012

On clos l'étude du profil d'aile NACA0012 en réalisant la simulation sur le maillage résultant du couplage proposé dans ce travail entre le maillage couche limite et l'adaptation de maillage dynamique. La solution du champ de vitesse sur la paroi est très proche de celle obtenue pour l'intersection comme attendu (voir figure 4.16), on remarque également l'excellente description du sillage assurée par l'adaptation dynamique et une meilleure répartition des éléments.

Le couplage permet donc de décrire beaucoup plus précisément le sillage qu'avec uniquement la technique d'intersection, notamment en générant des éléments beaucoup plus anisotropes et parfaitement alignés avec l'écoulement. Le sillage étant un phénomène anisotrope, il est donc mieux décrit par un maillage également anisotrope. De ce fait on peut observer sur la figure 4.17 que le coefficient de pression sur le bord de fuite s'aligne pour la première fois avec le résultat de référence établi par la NASA. On constate également que le coefficient de pression solution est bien mieux aligné avec le résultat de référence sur toute la longueur du profil. On observe toujours la zone de sur-pression et de sous-pression relative à la zone de recirculation engendrée par le modèle VMS employé.

On présente les coefficients de traînée et de portance en fonction du temps sur les figures 4.18 et 4.19, on relève la valeur moyenne du coefficient de traînée $C_D = 8.03 \cdot 10^{-3}$ et la valeur moyenne du coefficient de portance $C_L = 2.5 \cdot 10^{-3}$, ce qui correspond exactement aux valeurs attendues selon le cas de référence.

Les résultats obtenus nous permettent donc d'affirmer que le couplage

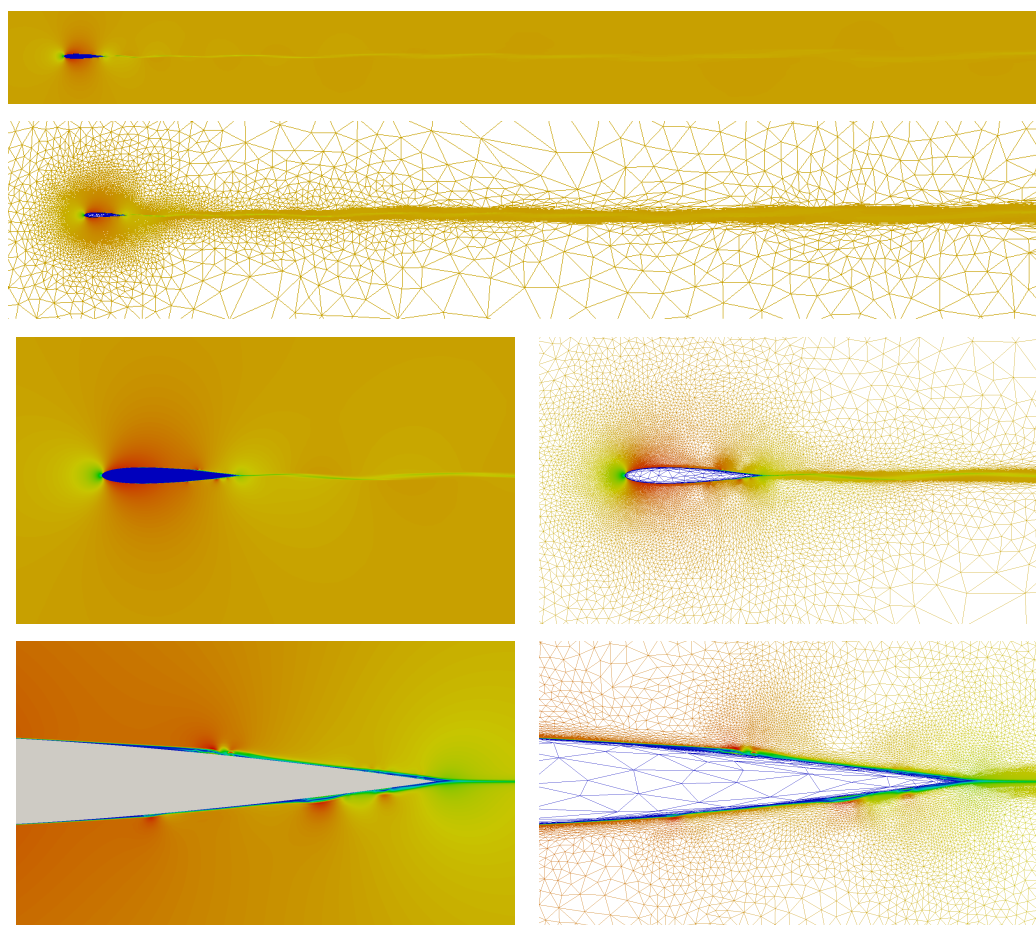


FIGURE 4.16 – Champ de vitesse solution et le maillage associé pour différents niveaux de zoom

proposé entre le maillage couche limite et l'adaptation de maillage dynamique permet une résolution précise des écoulements turbulents.

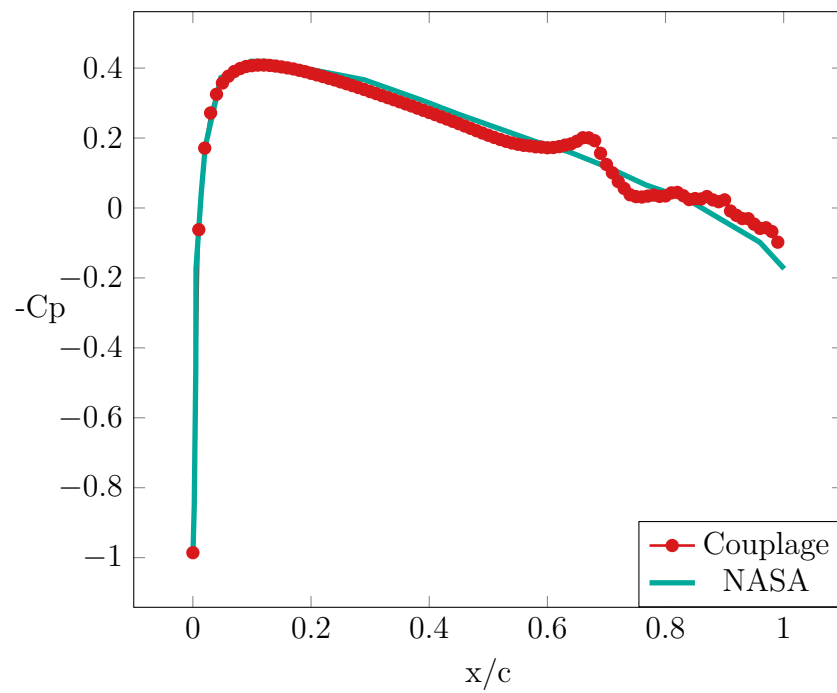


FIGURE 4.17 – Coefficient de pression le long du profil d’aile NACA0012 pour une simulation avec couplage avancé des métriques, et la solution de référence proposée par la NASA

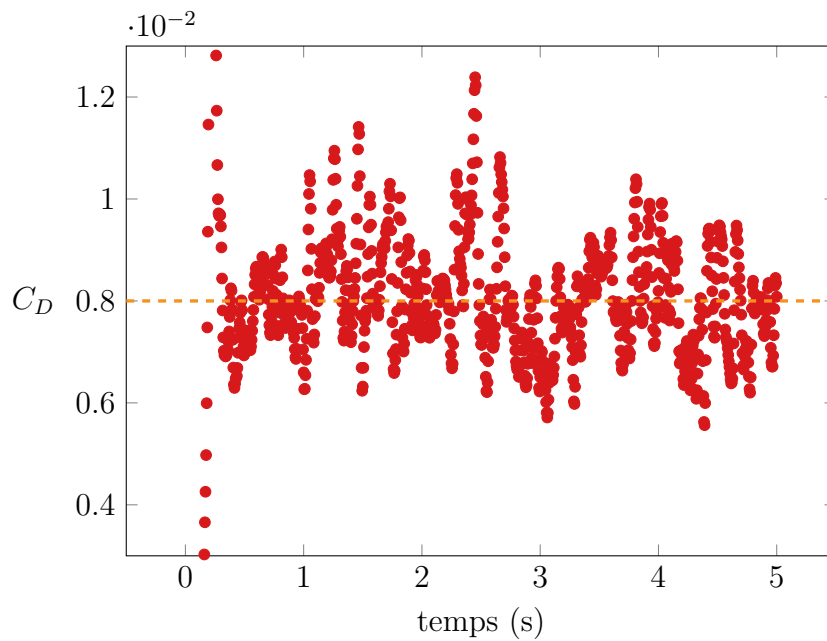


FIGURE 4.18 – Évolution du coefficient de traînée sur le profil d’aile NACA0012 pour une simulation avec couplage avancé des métriques

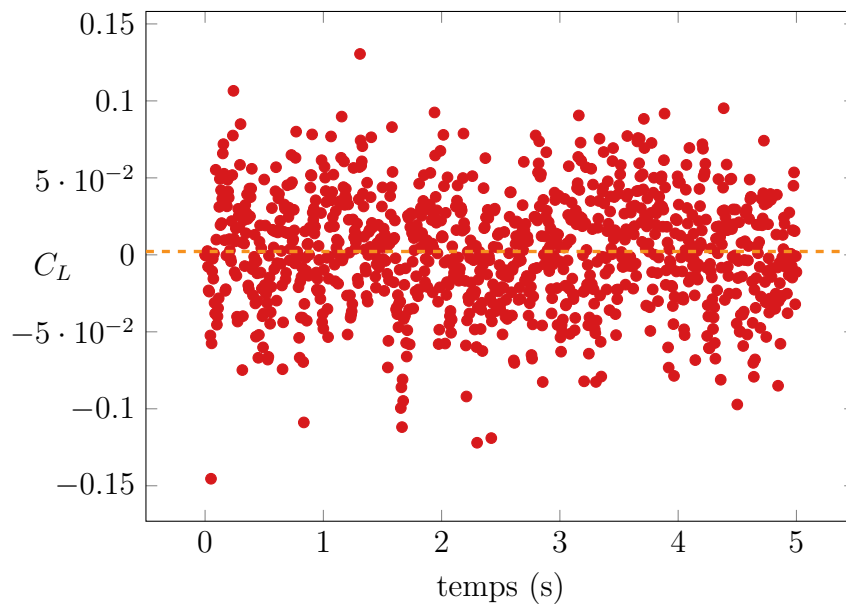


FIGURE 4.19 – Évolution du coefficient de portance sur le profil d’aile NACA0012 pour une simulation avec couplage avancé des métriques

4.5.2 Ahmed body

On propose l'étude du modèle de voiture simplifié 3D proposé par Ahmed [Ahmed et al., 1984] avec la méthode d'adaptation de maillage volume-couche limite dynamique. Cette géométrie simplifiée est caractéristique de l'écoulement autour d'un véhicule, c'est un écoulement très complexe et intéressant qui permet d'étudier la corrélation entre l'angle d'inclinaison arrière et le degré de turbulence engendrée pour optimiser l'aérodynamique [Franck et al., 2009, Strachan et al., 2005, Fares, 2006]. Cet exemple permet de montrer le fonctionnement de la méthode d'adaptation volume-couche limite dynamique en trois dimensions.

Dans cet exemple, nous utilisons la géométrie avec un angle d'inclinaison arrière de 25° , qui est connu pour être l'angle le plus turbulent. Conformément aux références, le Ahmed body est immergé dans une soufflerie 3D de dimensions $10 \times 2 \times 1.5 \text{ m}^3$, la longueur caractéristique du Ahmed body est $L = 1 \text{ m}$, et l'écoulement à un nombre de Reynolds $Re = 4.25 \cdot 10^6$, l'écoulement est clairement turbulent. Le maillage couche limite est présenté en section 3.4.3. L'adaptation de maillage volume-couche limite dynamique a été contrainte à $5 \cdot 10^6$ éléments, le calcul 3D a été exécuté en parallèle sur 120 processeurs. On observe une zone de recirculation à l'arrière du véhicule composée d'un grand nombre de tourbillons. Ces observations sont représentées par des lignes de courants sur les figures 4.20 et 4.21. De plus, les coupes à travers le maillage présentées sur la figure 4.22 laissent bien apparaître le maillage couche limite et une description précise de l'interface ainsi qu'une adaptation sur le champ de vitesse.

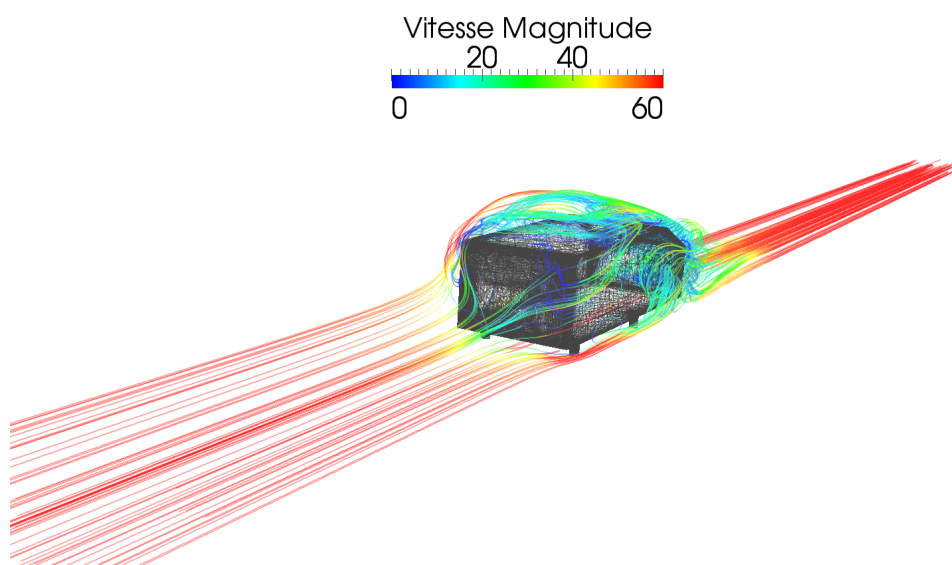


FIGURE 4.20 – Représentation du champ de vitesse sur le Ahmed body vue de face

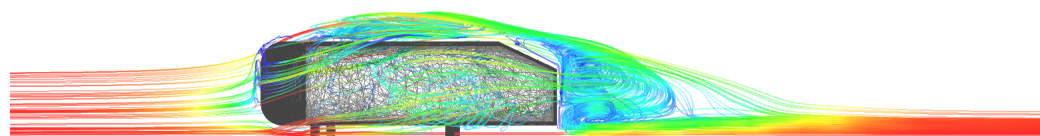


FIGURE 4.21 – Représentation du champ de vitesse sur le Ahmed body vue de côté

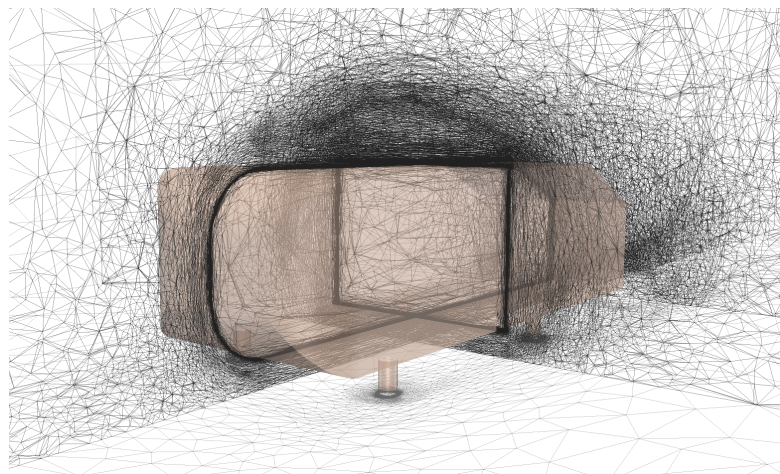
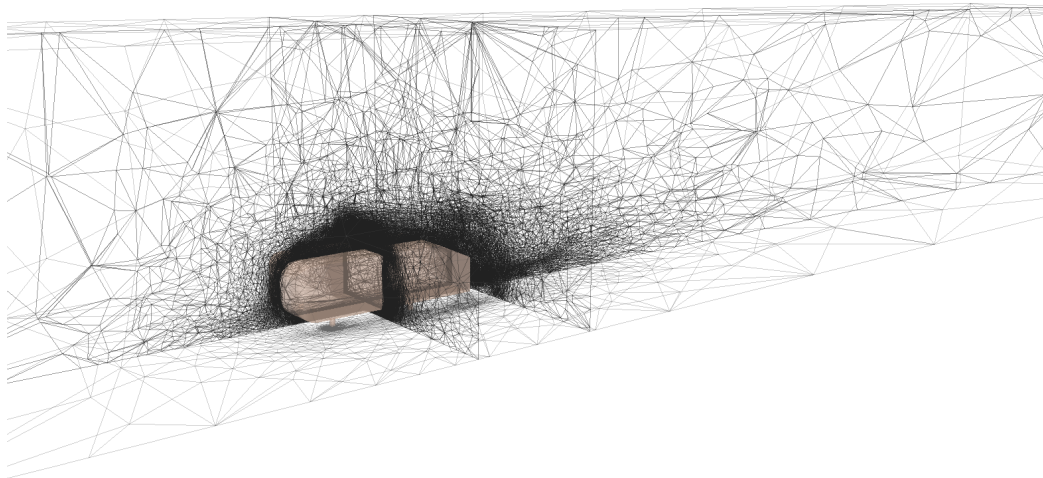


FIGURE 4.22 – Maillage pour la résolution du Ahmed body

4.5.3 Profil d'aile NHLP L1T2

Le profil d'aile NHLP L1T2 est issu du programme britannique pour le développement de dispositifs hypersustentateurs, à grande portance. C'est un profil d'aile à 3 volets constitué d'un corps principal (main), d'un volet avant (slat) et d'un volet arrière (flap) représentés sur la figure 4.23. Le slat et le flap sont des volets mobiles ajustés au profil en vol de croisière et formant un angle respectif de 25° et -20° avec le corps principal en phase de décollage et d'atterrissage pour donner plus de portance à basse vitesse [Soulat et al., 2012]. En pratique les volets sont mis en mouvement à l'aide d'opérations de translations et de rotations opérées sur leurs fonctions levelset respectives.

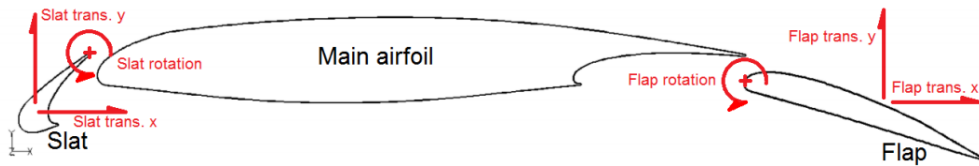


FIGURE 4.23 – Géométrie du profil d'aile NHLP L1T2 [Soulat et al., 2012]

On présente sur la figure 4.24 le maillage couche limite réalisé pour un écoulement à $Re = 2 \cdot 10^5$ (turbulent), $y_0^+ = 1$, tel que $h_{\min} = 9.93 \cdot 10^{-5}$ m. On effectue ensuite la simulation du vol de croisière suivi d'une ouverture et d'une fermeture des volets. On observe en haut à gauche de la figure 4.25 le vol de croisière, un écoulement stationnaire présentant une faible traînée $C_D = 0.05$. En haut à droite, les volets commencent à s'ouvrir on observe la création d'une zone de recirculation immédiatement derrière le slat et le flap. Sur la figure suivante les volets viennent de s'ouvrir totalement on constate le développement de tourbillons. Sur la dernière figure, l'écoulement avec les volets ouverts a convergé, on note une augmentation importante de la portance et de la traînée. Ces résultats étaient attendus, l'importante recirculation sous le profil d'aile crée une surpression qui fait augmenter la portance mais engendre une augmentation de la traînée.

Ce cas test nous permet donc de montrer que l'adaptation de maillage volume-couche limite dynamique fonctionne sur des interfaces instationnaires, ce qui met également en relief l'intérêt de travailler avec des géométries immergées.

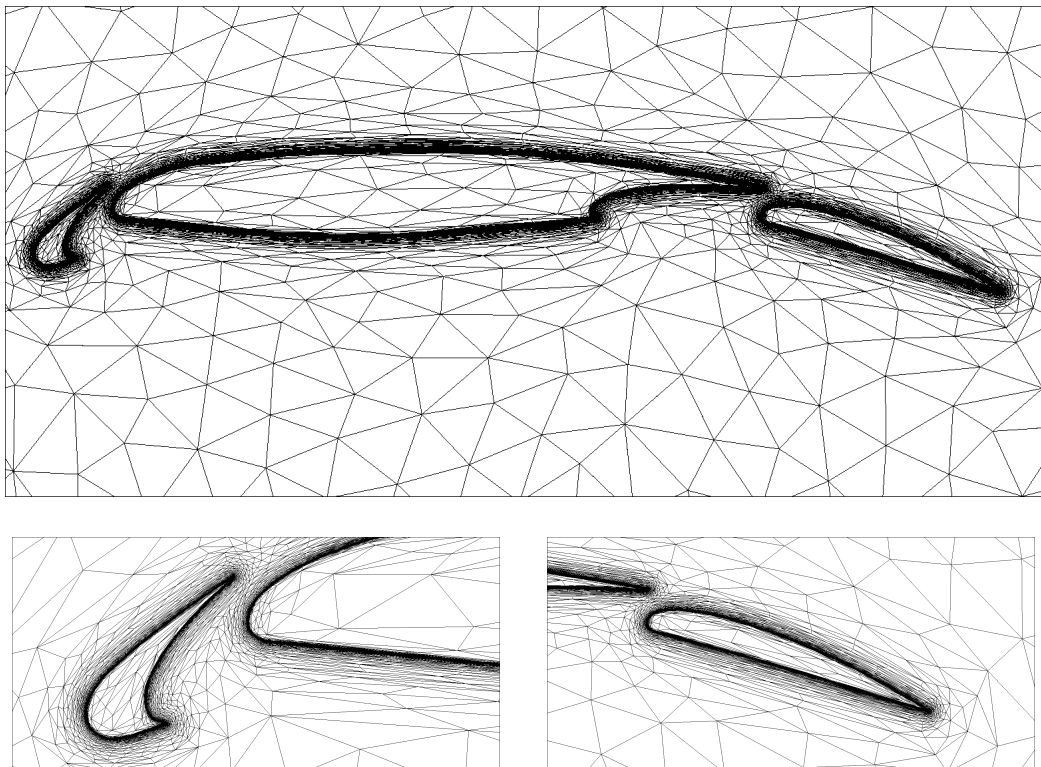


FIGURE 4.24 – Maillage couche limite du profil d'aile NHLP L1T2

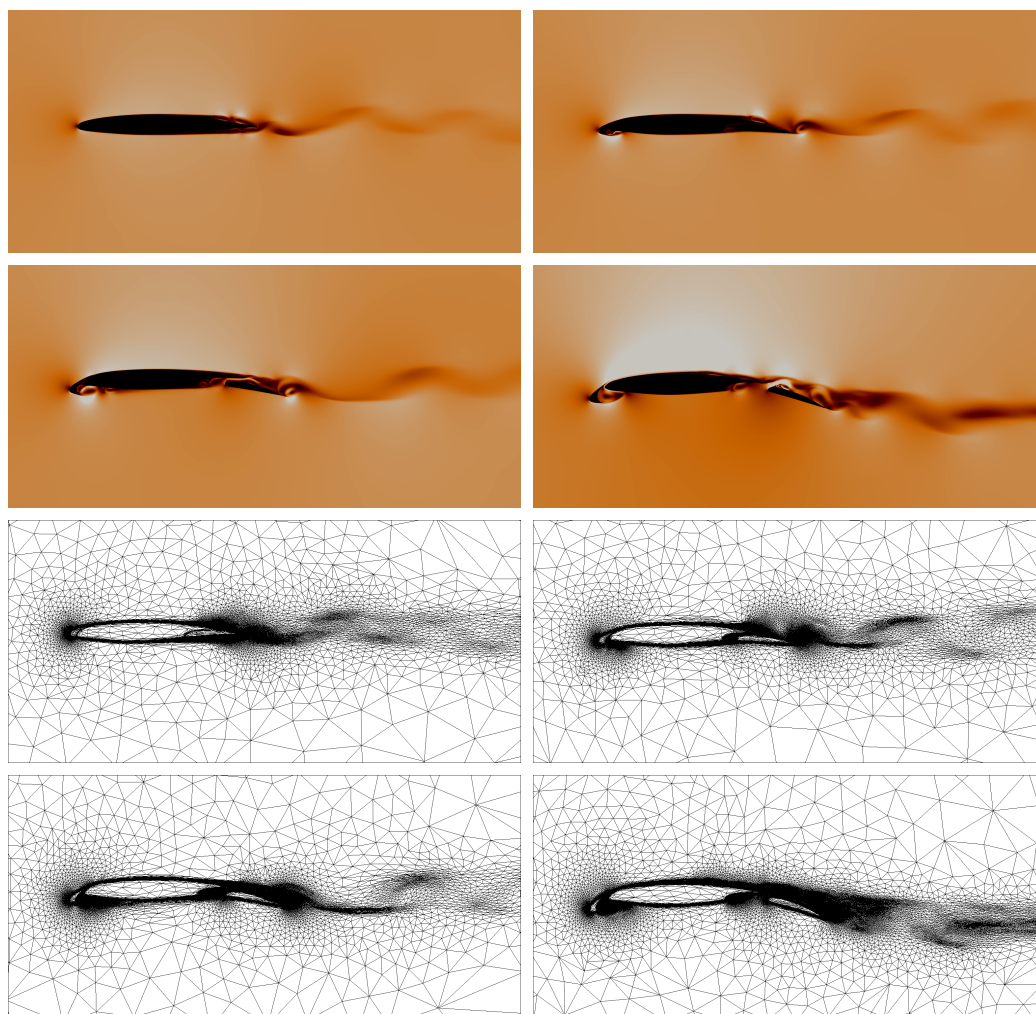


FIGURE 4.25 – Écoulement autour du profil d'aile NHLP L1T2 et maillages associés

4.6 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de coupler le maillage couche limite et l'adaptation de maillage dynamique décrits dans les précédents chapitres afin de proposer une méthode d'adaptation de maillage respectant la couche limite. La littérature est relativement faible sur ce sujet et la solution souvent retenue est de construire dans un premier temps la couche limite qui restera figée au cours de la simulation et d'adapter le maillage dynamiquement sur le reste du domaine en utilisant un opérateur de gradation pour la jonction entre ces deux zones. Dans ce travail nous souhaitons proposer un couplage plus pointu qui nous permette de profiter des avantages de l'adaptation de maillage dynamique sur l'estimateur d'erreur *a posteriori* également dans la couche limite et qui assure une meilleur répartition des éléments.

Dans ce chapitre nous avons présenté différentes techniques permettant de coupler le maillage couche limite et l'adaptation de maillage dynamique et finalement proposé une méthode d'adaptation de maillage volume-couche limite dynamique. Cette méthode consiste à décomposer le domaine en trois zones d'intérêts assurant respectivement une description fidèle de l'interface entre le fluide et le solide immergé, un maillage pseudo-structuré adapté à l'écoulement de couche limite et un suivi précis du sillage [Billon et al., 2017]. La méthode d'adaptation de maillage volume-couche limite dynamique a montré sur les différentes applications 2D et 3D sa capacité à résoudre précisément les écoulements turbulents.

Conclusion et perspectives

Cette thèse est motivée par la nécessité de rendre la génération de maillage pour l'étude de géométries complexes à la fois automatique, robuste et adaptée à la résolution précise des écoulements associés. Le maillage est la pierre angulaire de la simulation numérique mais aussi un des principaux freins à son développement. A ce jour, la génération de maillage passe largement par l'utilisation de logiciels de CAO séquentiels pour générer un maillage isotrope adapté à toute la simulation. Cela demande une grande expertise et une longue analyse du problème à étudier, et représente le plus grand coût en temps d'intervention humaine. Afin de permettre de grandes avancées en simulation numérique et de généraliser sa diffusion et son utilisation dans l'industrie, la génération de maillage a besoin d'évoluer vers une méthode plus automatique, robuste et parallélisable. C'est précisément l'objectif de cette thèse, en parfait accord avec la Vision 2030 avancée dans [Slotnick et al., 2014, Park et al., 2016].

"The mesh generation process should be invisible to the CFD user or engineer. Given a suitable geometry representation and a desired level of solution accuracy, a fully automated meshing capability would construct a suitable mesh and adaptively refine the mesh throughout the solution process with minimal user intervention until the final accuracy levels are met." - CFD Vision 2030 [Slotnick et al., 2014]

Ce travail s'intéresse tout particulièrement aux écoulements turbulents aérodynamiques et à la description et résolution précise de leurs couches limites. Dans cette thèse nous avons proposé une méthode de génération de maillage automatique autour de géométries complexes, ainsi qu'une méthode d'adaptation de maillage dynamique basée sur un estimateur d'erreur sur les arêtes. On propose finalement un couplage pointu de ces méthodes de générations et d'adaptation de maillage pour donner naissance à une nouvelle forme d'adaptation de maillage volume-couche limite dynamique assurant

une résolution beaucoup plus précise.

Résumé des principaux résultats

Dans le chapitre 1, nous nous sommes appliqués à définir les équations de la mécanique des fluides et mettre en relief leur complexité. Nous avons ensuite rappelé les différentes méthodes numériques classiques de résolution du système de Navier-Stokes avant de détailler la méthode variationnelle multi-échelles adoptée dans ce travail et son extension aux géométries immergées.

Adaptation de maillage dynamique

Dans le chapitre 2, nous sommes revenus à la définition d'un maillage et à la notion de métrique pour détailler la méthode topologique employée dans ce travail pour la génération effective de maillage. La technique d'adaptation de maillage dynamique sur l'erreur *a posteriori* basée sur les arêtes a ensuite été présentée et analysée dans sa version initiale [Coupez, 2011] et dans sa version équidistribuée [El Jannoun, 2014]. A la lumière de ce bilan nous avons proposé dans cette thèse une nouvelle version tirant le meilleur parti des versions précédentes et apportant des améliorations majeures. Celles-ci portent notamment sur le dénombrement, en amont, des éléments engendrés par l'adaptation de maillage et sur la régularisation de la métrique en bornant la taille de maille. La nouvelle version de l'adaptation de maillage dynamique permet de capturer les champs d'intérêts de manière beaucoup plus précise, pour un nombre d'éléments inférieur et avec moins d'itérations de remaillage.

Maillage couche limite

La couche limite est une des spécificités des écoulements turbulents autour de corps solides. Dans le chapitre 3, nous avons réalisé l'étude théorique des couches limites afin de déterminer rigoureusement la structure du maillage nécessaire à sa résolution précise. Compte tenu de cette étude nous avons proposée dans cette thèse une procédure permettant de générer des maillages *a priori*, i.e. en amont de la simulation, adaptés sur la couche limite tels que prescrit par la théorie. Cette procédure, particulièrement adaptée aux géométries immergées, repose sur une approche multi-levelset permettant de localiser chacune des strates composant la couche limite et ainsi de contrôler la taille et l'orientation des éléments. La taille est définie conformément à la théorie des couches limites et aux paramètres physiques caractéristiques de l'écoulement, tandis que l'orientation est déterminée relativement à la

courbure de la géométrie. En plus de construire un maillage adapté pour la résolution de la couche limite, cette procédure permet de décrire fidèlement l'interface entre le fluide et le solide immergé quel que soit sa complexité [Billon et al., 2016].

Adaptation de maillage volume-couche limite dynamique

L'aspiration du chapitre 4 est d'associer le maillage couche limite *a priori* et l'adaptation de maillage dynamique sur l'erreur *a posteriori* afin d'obtenir une adaptation de maillage dynamique assurant une résolution précise de la couche limite. Nous avons donc présenté différentes techniques permettant un tel couplage et convergé vers la méthode d'adaptation de maillage volume-couche limite dynamique [Billon et al., 2017]. Cette méthode consiste à décomposer le domaine en trois zones d'intérêts assurant respectivement une description fidèle de l'interface entre le fluide et le solide immergé, un maillage pseudo-structuré adapté à l'écoulement de couche limite et un suivi précis du sillage. Cette nouvelle méthode est très prometteuse et a montré sa capacité à résoudre précisément les écoulements turbulents sur les différentes applications 2D et 3D.

Perspectives

Cette thèse a permis de progresser sur le traitement du maillage dans la couche limite pour la simulation des écoulements turbulents, mais il y a encore du chemin à parcourir pour atteindre la résolution exacte des équations de la mécanique des fluides.

Pour le mailleur et le maillage couche limite

Pour aller plus loin en ce qui concerne le maillage couche limite, il est nécessaire de renforcer la structure des éléments près de la paroi afin d'utiliser des éléments présentant des angles droits. Ce travail doit être réalisé au niveau du mailleur et du critère de qualité tel que celui-ci aligne les arêtes avec les vecteurs propres de la métrique [Mesri et al., 2012, Loseille, 2014]. Le rapport d'aspect choisi peut également être amélioré selon les recommandations formulées dans [Shewchuk, 2002].

On peut également s'intéresser aux maillages fitted [Shakoor et al., 2015, Daldoul, 2019], c'est-à-dire un maillage où aucune arête ne traverse l'interface de la géométrie immergée mais celle-ci est recouverte de nœuds. Cette

méthode permettrait en plus d'une description fidèle de l'interface, de s'affranchir des lois de mélanges présentées dans le chapitre 1, dont le calibrage est relativement délicat dans la couche limite.

Pour les estimateurs d'erreur

Du travail est encore nécessaire au niveau de l'estimateur d'erreur pour en améliorer la précision. En effet comme on l'a constaté dans le second chapitre, un nombre très élevé de nœuds est nécessaire pour capturer des oscillations de petites amplitudes. Un calibrage de l'estimateur d'erreur est certainement nécessaire pour permettre à moindres coûts de résoudre précisément des problèmes présentant des phénomènes de différentes d'amplitudes. De plus, l'estimateur d'erreur repose aujourd'hui sur des variables primaires, i.e. la vitesse, la pression, la température, etc., on pourrait envisager de développer un estimateur d'erreur orienté vers la solution (goal-oriented) en l'occurrence en aérodynamique sur la traînée et la portance [Hoffman, 2004, Hoffman, 2005]. Pour aller plus loin, on peut également envisager la construction d'un estimateur d'erreur espace-temps en temps réel [Hoffman et al., 2013].

Pour le solveur

La méthode variationnelle multi-échelles présentée dans le chapitre 1 et utilisée tout au long de cette thèse pour résoudre le système d'équations de Navier-Stokes est prometteuse, et en combinaison avec l'adaptation de maillage pourrait donner accès à la solution DNS à moindres coûts.

Cependant deux hypothèses majeures apparaissent dans la formulation VMS adoptée, la première concerne l'indépendance des petites échelles vis à vis du temps et la seconde porte sur la linéarisation du terme convectif des petites échelles. Ces hypothèses peuvent certainement être réduites [Codina et Blasco, 2002, Codina, 2002, Codina et al., 2007] pour permettre une résolution encore plus précise.

Pour l'adaptation de maillage volume-couche limite dynamique

L'adaptation de maillage volume-couche limite développée est très intéressante mais relativement coûteuse. Le couplage le plus efficace entre le maillage couche limite et l'adaptation dynamique serait de construire un champ à ajouter à l'adaptation de maillage dynamique traduisant le maillage couche limite. Cela peut être réalisé de deux manières : la première consiste à

convertir la métrique produisant le maillage couche limite en un champ d'erreur sur le maillage, tandis que la seconde consiste à déterminer un champ sur lequel adapter qui permettrait de construire automatiquement et *a posteriori* la couche limite. La seconde méthode est très intéressante car elle permettrait encore de minimiser l'intervention humaine et l'expertise nécessaire dans la procédure de génération de maillage pour les écoulements visqueux mais aussi car elle serait moins coûteuse. Pour trouver de tels champs il faudra s'intéresser de plus près à la contrainte pariétale, à la vitesse à la paroi ou encore à la viscosité turbulente. Une thèse est actuellement en cours pour l'adaptation sur le champ de vitesse des petites échelles [Bazil, 2019].

Bibliographie

- [Ahmed et al., 1984] Ahmed, S., Ramm, G., and Faltin, G. (1984). Some Salient Features Of The Time-Averaged Ground Vehicle Wake. SAE Technical Paper 840300.
- [Alauzet et Frey, 2003] Alauzet, F. and Frey, P. (2003). Estimateur d’erreur géométrique et métriques anisotropes pour l’adaptation de maillage. Partie I : aspects théoriques. Technical report, INRIA.
- [Alauzet et Loseille, 2016] Alauzet, F. and Loseille, A. (2016). A decade of progress on anisotropic mesh adaptation for computational fluid dynamics. *Computer-Aided Design*, 72 :13–39.
- [Alauzet et Marcum, 2015] Alauzet, F. and Marcum, D. (2015). A closed advancing-layer method with connectivity optimization-based mesh movement for viscous mesh generation. *Engineering with Computers*, 31(3) :545–560.
- [Allgower et McCormick, 1978] Allgower, E. L. and McCormick, S. F. (1978). Newton’s method with mesh refinements for numerical solution of nonlinear two-point boundary value problems. *Numerische Mathematik*, 29(3) :237–260.
- [Allmaras et al., 2012] Allmaras, S. R., Johnson, F. T., and Spalart, P. R. (2012). Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model. In *ICCFD7-1902*, Big Island, Hawaii.
- [Apel, 1999] Apel, T. (1999). *Anisotropic finite elements : local estimates and applications*, volume 3 of *Book Series : Advances in Numerical Mathematics*. Teubner.
- [Arnold et al., 1984] Arnold, D. N., Brezzi, F., and Fortin, M. (1984). A stable finite element for the stokes equations. *CALCOLO*, 21(4) :337–344.
- [Babuška et Aziz, 1976] Babuška, I. and Aziz, A. (1976). On the Angle Condition in the Finite Element Method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2) :214–226.

- [Bazil, 2019] Bazil, A. (2019). *Adaptive variational finite element formulation and massively parallel computations for aerothermal industry*. PhD thesis, MINES ParisTech, France.
- [Becker et Rannacher, 2001] Becker, R. and Rannacher, R. (2001). An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods.
- [Berger et Olinger, 1984] Berger, M. J. and Olinger, J. (1984). Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 53(3) :484–512.
- [Billon et al., 2017] Billon, L., Hachem, E., and Mesri, Y. (2017). Toward Monolithic Boundary-Volume Mesh Adaptation. *in preparation*.
- [Billon et al., 2016] Billon, L., Mesri, Y., and Hachem, E. (2016). Anisotropic boundary layer mesh generation for immersed complex geometries. *Engineering with Computers*, pages 1–12.
- [Bois et al., 2012] Bois, R., Fortin, M., and Fortin, A. (2012). A fully optimal anisotropic mesh adaptation method based on a hierarchical error estimator. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209–212 :12–27.
- [Borouchaki et al., 1996] Borouchaki, H., Castro-Díaz, M. J., George, P. L., Hecht, F., and Mohammadi, B. (1996). Anisotropic adaptive mesh generation in two dimensions for CFD. Mississippi State University.
- [Borouchaki et al., 1997a] Borouchaki, H., George, P. L., Hecht, F., Laug, P., and Saltel, E. (1997a). Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I. Algorithms. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25(1–2) :61–83.
- [Borouchaki et al., 1997b] Borouchaki, H., George, P. L., and Mohammadi, B. (1997b). Delaunay mesh generation governed by metric specifications Part II. Applications. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25(1–2) :85–109.
- [Borouchaki et al., 1998] Borouchaki, H., Hecht, F., and Frey, P. J. (1998). Mesh gradation control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(6) :1143–1165.
- [Bottasso, 2004] Bottasso, C. L. (2004). Anisotropic mesh adaptation by metric-driven optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(3) :597–639.
- [Bottasso et Detomi, 2002] Bottasso, C. L. and Detomi, D. (2002). A Procedure for Tetrahedral Boundary Layer Mesh Generation. *Engineering with Computers*, 18(1) :66–79.

- [Brezzi et Fortin, 1991] Brezzi, F. and Fortin, M. (1991). *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag.
- [Brooks et Hughes, 1982] Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R. (1982). Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32 :199–259.
- [Bruchon et al., 2009] Bruchon, J., Dignonnet, H., and Coupez, T. (2009). Using a signed distance function for the simulation of metal forming processes : Formulation of the contact condition and mesh adaptation. From a Lagrangian approach to an Eulerian approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(8) :980–1008.
- [Brun, 2008] Brun, J.-M. (2008). Cours de Mécanique des fluides.
- [Buscaglia et Dari, 1997] Buscaglia, G. C. and Dari, E. A. (1997). Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(22) :4119–4136.
- [Cao, 2005] Cao, W. (2005). On the Error of Linear Interpolation and the Orientation, Aspect Ratio, and Internal Angles of a Triangle. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(1) :19–40.
- [Castro-Díaz et al., 1995] Castro-Díaz, M. J., Hecht, F., and Mohammadi, B. (1995). New Progress in Anisotropic Grid Adaptation for Inviscid and Viscous Flows Simulations. Technical Report 2671, Inria.
- [Castro-Díaz et al., 1997] Castro-Díaz, M. J., Hecht, F., Mohammadi, B., and Pironneau, O. (1997). Anisotropic unstructured mesh adaptation for flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(4) :475–491.
- [Cea, 1964] Cea, J. (1964). Approximation variationnelle des problèmes aux limites. *Annales de l'institut Fourier*, 14(2) :345–444.
- [Codina, 2000] Codina, R. (2000). Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(13–14) :1579–1599.
- [Codina, 2002] Codina, R. (2002). Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(39–40) :4295–4321.
- [Codina et Blasco, 2002] Codina, R. and Blasco, J. (2002). Analysis of a stabilized finite element approximation of the transient convection-diffusion-reaction equation using orthogonal subscales. *Computing and Visualization in Science*, 4(3) :167–174.

- [Codina et al., 2007] Codina, R., Principe, J., Guasch, O., and Badia, S. (2007). Time dependent subscales in the stabilized finite element approximation of incompressible flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(21–24) :2413–2430.
- [Coles, 1956] Coles, D. (1956). The law of the wake in the turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 1 :191–226.
- [Compère et al., 2010] Compère, G., Remacle, J.-F., Jansson, J., and Hoffman, J. (2010). A mesh adaptation framework for dealing with large deforming meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82(7) :843–867.
- [Connell et Braaten, 1995] Connell, S. and Braaten, M. (1995). Semi-structured mesh generation for 3d Navier-Stokes calculations. *12th Computational Fluid Dynamics Conference*.
- [Corre, 2005] Corre, C. (2005). La couche limite en aérodynamique. In *Aérodynamique Fondamentale*. ENSAM - SINUMEF.
- [Coupez, 1991] Coupez, T. (1991). *Grandes transformations et remaillage automatique*. PhD thesis, EMP.
- [Coupez, 2000] Coupez, T. (2000). Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 9(4) :403–423.
- [Coupez, 2011] Coupez, T. (2011). Metric construction by length distribution tensor and edge based error for anisotropic adaptive meshing. *Journal of Computational Physics*, 230(7) :2391–2405.
- [Coupez et al., 2013] Coupez, T., Jannoun, G., Nassif, N., Nguyen, H., Digonnet, H., and Hachem, E. (2013). Adaptive time-step with anisotropic meshing for incompressible flows. (241) :195–211.
- [Cousteix, 1989] Cousteix, J. (1989). *Aérodynamique : turbulence et couche limite*. Cépaduès-editions.
- [Daldoul, 2019] Daldoul, W. (2019). *Moving and conformal mesh for heat transfer problems*. PhD thesis.
- [D’Azevedo et Simpson, 1991] D’Azevedo, E. F. and Simpson, R. B. (1991). On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. *Numerische Mathematik*, 59(1) :321–348.
- [Delaunay, 1934] Delaunay, B. (1934). Sur la sphère vide. 6 :793–800.
- [Dervieux et al., 2003] Dervieux, A., Leservoisier, D., George, P.-L., and Coudière, Y. (2003). About theoretical and practical impact of mesh adaptation on approximation of functions and PDE solutions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 43(5) :507–516.

- [Dignonnet et Coupez, 2003] Dignonnet, H. and Coupez, T. (2003). Object-oriented programming for "fast and easy" development of parallel applications in forming processes simulation. In *2nd MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, pages p.1922–1924 – ISBN 0–08–044046–0, Cambridge, United Kingdom.
- [Do Carmo, 1976] Do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall.
- [Dompierre et al., 2003] Dompierre, J., Vallet, M.-G., Labbé, P., and Guibault, F. (2003). On Simplex Shape Measures With Extension For Anisotropic Meshes. In *Proceedings of Workshop on Mesh Quality and Dynamic Meshing*, pages 46–71, SNL-Livermore, CA.
- [El Jannoun, 2014] El Jannoun, G. (2014). *Adaptation anisotrope précise en espace et temps et méthodes d'éléments finis stabilisées pour la résolution de problèmes de mécanique des fluides instationnaires*. PhD thesis, Paris, ENMP.
- [Fares, 2006] Fares, E. (2006). Unsteady flow simulation of the Ahmed reference body using a lattice Boltzmann approach. *Computers & Fluids*, 35(8–9) :940–950.
- [Ferziger et Peric, 2002] Ferziger, J. H. and Peric, M. (2002). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 3 edition.
- [Franca et Nesliturk, 2001] Franca, L. P. and Nesliturk, A. (2001). On a two-level finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(4) :433–453.
- [Franca et Oliveira, 2003] Franca, L. P. and Oliveira, S. P. (2003). Pressure bubbles stabilization features in the Stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(16–18) :1929–1937.
- [Franck et al., 2009] Franck, G., Nigro, N., Storti, M. A., and D'Elía, J. (2009). Numerical simulation of the flow around the Ahmed vehicle model. *Latin American applied research*, 39(4) :295–306.
- [Gallagher, 2014] Gallagher, I. (2014). Enjeux et difficultés mathématiques pour la résolution des équations de Navier-Stokes.
- [Garimella et Shephard, 2000] Garimella, R. V. and Shephard, M. S. (2000). Boundary layer mesh generation for viscous flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(1-2) :193–218.
- [George et Borouchaki, 1997] George, P.-L. and Borouchaki, H. (1997). *Triangulation de Delaunay et maillage : Applications aux éléments finis*. Hermes Science Publications, Paris.

- [George et Borouchaki, 1998] George, P.-L. and Borouchaki, H. (1998). Delaunay Triangulation and Meshing.
- [George et al., 2002] George, P. L., Borouchaki, H., and Laug, P. (2002). An efficient algorithm for 3d adaptive meshing. *Advances in Engineering Software*, 33(7–10) :377–387.
- [George et al., 1991] George, P. L., Hecht, F., and Vallet, M. G. (1991). Creation of internal points in Voronoi’s type method. Control adaptation. *Advances in Engineering Software and Workstations*, 13(5) :303–312.
- [Geuzaine et Remacle, 2009] Geuzaine, C. and Remacle, J.-F. (2009). Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331.
- [Gruau, 2005] Gruau, C. (2005). *Génération de métriques pour adaptation anisotrope de maillages, applications à la mise en forme des matériaux*. PhD thesis, Ecole Nationale supérieure des Mines de Paris.
- [Gruau et Coupez, 2005] Gruau, C. and Coupez, T. (2005). 3d tetrahedral, unstructured and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and multidomain metric. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(48–49) :4951–4976.
- [Guilbaud, 2007] Guilbaud, A. (2007). *L’hydrodynamique dans l’œuvre de D’Alembert 1766-1783 : histoire et analyse détaillée des concepts pour l’édition critique et commentée de ses "Œuvres complètes" et leur édition électronique*. phdthesis, Université Claude Bernard - Lyon I.
- [Guillard, 1993] Guillard, H. (1993). Node-nested multi-grid method with Delaunay coarsening. Technical report, Inria.
- [Hachem et al., 2013a] Hachem, E., Feghali, S., Codina, R., and Coupez, T. (2013a). Anisotropic adaptive meshing and monolithic Variational Multiscale method for fluid–structure interaction. *Computers & Structures*, 122 :88–100.
- [Hachem et al., 2013b] Hachem, E., Feghali, S., Codina, R., and Coupez, T. (2013b). Immersed stress method for fluid–structure interaction using anisotropic mesh adaptation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(9) :805–825.
- [Hachem et al., 2010] Hachem, E., Rivaux, B., Kloczko, T., Digonnet, H., and Coupez, T. (2010). Stabilized finite element method for incompressible flows with high Reynolds number. *Journal of Computational Physics*, 229(23) :8643–8665.

- [Hachem, 2009] Hachem, M. E. (2009). *Stabilized finite element method for heat transfer and turbulent flows inside industrial furnaces*. PhD thesis, MINES ParisTech, France.
- [Hassan et al., 1996] Hassan, O., Morgan, K., Probert, E. J., and Peraire, J. (1996). Unstructured Tetrahedral Mesh Generation for Three-Dimensional Viscous Flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(4) :549–567.
- [Hassan et Picasso, 2015] Hassan, W. and Picasso, M. (2015). An anisotropic adaptive finite element algorithm for transonic viscous flows around a wing. *Computers & Fluids*, 111 :33–45.
- [Hoffman, 2004] Hoffman, J. (2004). On Duality-Based A Posteriori Error Estimation in Various Norms and Linear Functionals for Large Eddy Simulation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(1) :178–195.
- [Hoffman, 2005] Hoffman, J. (2005). Computation of Mean Drag for Bluff Body Problems Using Adaptive DNS/LES. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(1) :184–207.
- [Hoffman et al., 2014] Hoffman, J., Jansson, J., Abreu, R. V. d., and Jansson, N. (2014). Time-resolved adaptive FEM simulation of the DLR-F11 aircraft model at high Reynolds number. In *52nd Aerospace Sciences Meeting*.
- [Hoffman et al., 2013] Hoffman, J., Jansson, J., Vilela de Abreu, R., Degirmenci, N. C., Jansson, N., Müller, K., Nazarov, M., and Spühler, J. H. (2013). Unicorn : Parallel adaptive finite element simulation of turbulent flow and fluid–structure interaction for deforming domains and complex geometry. *Computers & Fluids*, 80 :310–319.
- [Hoffman et Johnson, 2006] Hoffman, J. and Johnson, C. (2006). A new approach to computational turbulence modeling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(23–24) :2865–2880.
- [Huang, 2005] Huang, W. (2005). Metric tensors for anisotropic mesh generation. *Journal of Computational Physics*, 204(2) :633–665.
- [Hughes et al., 2005] Hughes, T., Cottrell, J., and Bazilevs, Y. (2005). Iso-geometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(39–41) :4135–4195.
- [Hughes et al., 1998] Hughes, T. J. R., Feijóo, G. R., Mazzei, L., and Quincy, J.-B. (1998). The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(1) :3–24.

- [Ito et Nakahashi, 2002] Ito, Y. and Nakahashi, K. (2002). Unstructured Mesh Generation for Viscous Flow Computations. In *IMR*, pages 367–377.
- [Knupp, 2001] Knupp, P. M. (2001). Algebraic mesh quality metrics. *SIAM journal on scientific computing*, 23(1) :193–218.
- [Kolmogorov, 1991] Kolmogorov, A. N. (1991). Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 434 :15–17.
- [Laug et Borouchaki, 2015] Laug, P. and Borouchaki, H. (2015). Metric tensor recovery for adaptive meshing. *Mathematics and Computers in Simulation*.
- [Leray, 1934] Leray, J. (1934). Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta mathematica*, (63) :193–248.
- [Löhner, 1989] Löhner, R. (1989). Adaptive remeshing for transient problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 75(1) :195–214.
- [Löhner et Parikh, 1988] Löhner, R. and Parikh, P. (1988). Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing-front method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8(10) :1135–1149.
- [Li et al., 2005] Li, X., Shephard, M. S., and Beall, M. W. (2005). 3d anisotropic mesh adaptation by mesh modification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(48–49) :4915–4950.
- [Lo, 1985] Lo, S. H. (1985). A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(8) :1403–1426.
- [Loseille, 2008] Loseille, A. (2008). *Adaptation de maillage anisotrope 3D multi-échelles et ciblée à une fonctionnelle pour la mécanique des fluides : Application à la prédiction haute-fidélité du bang sonique*. PhD thesis, Paris 6.
- [Loseille, 2014] Loseille, A. (2014). Metric-orthogonal Anisotropic Mesh Generation. *Procedia Engineering*, 82 :403–415.
- [Loseille et Löhner, 2011] Loseille, A. and Löhner, R. (2011). Boundary layer mesh generation and adaptivity. *AIAA Paper*, 894 :2011.
- [Marchandise et al., 2012] Marchandise, E., Remacle, J.-F., and Geuzaine, C. (2012). Optimal parametrizations for surface remeshing. *Engineering with Computers*, 30(3) :383–402.
- [Marcum, 1995] Marcum, D. (1995). Generation of unstructured grids for viscous flow applications. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

- [Marcum et Alauzet, 2014] Marcum, D. and Alauzet, F. (2014). Aligned Metric-based Anisotropic Solution Adaptive Mesh Generation. *Procedia Engineering*, 82 :428–444.
- [Masud et Khurram, 2004] Masud, A. and Khurram, R. (2004). A multiscale/stabilized finite element method for the advection–diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(21–22) :1997–2018.
- [Mavriplis, 1990] Mavriplis, D. J. (1990). Adaptive Mesh Generation for Viscous Flows Using Delaunay Triangulation. *J. Comput. Phys.*, 90(2) :271–291.
- [Mesri, 2007] Mesri, Y. (2007). *Gestion et contrôle des maillages non structurés anisotropes, applications en aérodynamique*. PhD thesis, Université de Nice.
- [Mesri et al., 2006] Mesri, Y., Alauzet, F., Loseille, A., Hascoët, L., Koobus, B., and Dervieux, A. (2006). Continuous mesh adaptation models for CFD. *CFD Journal*.
- [Mesri et al., 2009] Mesri, Y., Digonnet, H., and Coupez, T. (2009). Advanced parallel computing in material forming with CIMLib. *European Journal of Computational Mechanics*, 18(7–8) :669–694.
- [Mesri et al., 2012] Mesri, Y., Guillard, H., and Coupez, T. (2012). Automatic coarsening of three dimensional anisotropic unstructured meshes for multigrid applications. *Applied Mathematics and Computation*, 218(21) :10500–10519. WOS :000304903000015.
- [Michal et Krakos, 2012] Michal, T. and Krakos, J. (2012). Anisotropic Mesh Adaptation Through Edge Primitive Operations. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Nesliturk, 1999] Nesliturk, A. I. (1999). *Approximating the incompressible Navier–Stokes equation using a two-level finite element method*. PhD thesis.
- [Pain et al., 2001] Pain, C. C., Umpheby, A. P., de Oliveira, C. R. E., and Goddard, A. J. H. (2001). Tetrahedral mesh optimisation and adaptivity for steady-state and transient finite element calculations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(29–30) :3771–3796.
- [Park et Carlson, 2010] Park, M. A. and Carlson, J.-R. (2010). Turbulent output-based anisotropic adaptation. *AIAA Paper*, 168 :2010.
- [Park et al., 2016] Park, M. A., Loseille, A., Krakos, J., Michal, T. R., and Alonso, J. J. (2016). Unstructured Grid Adaptation : Status, Potential Impacts, and Recommended Investments Towards CFD 2030. In *46th*

- AIAA Fluid Dynamics Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Peraire et al., 1992] Peraire, J., Peiró, J., and Morgan, K. (1992). Adaptive remeshing for three-dimensional compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, 103(2) :269–285.
- [Peraire et al., 1987] Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K., and Zienkiewicz, O. C. (1987). Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, 72(2) :449–466.
- [Picasso, 2003] Picasso, M. (2003). An Anisotropic Error Indicator Based on Zienkiewicz–Zhu Error Estimator : Application to Elliptic and Parabolic Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(4) :1328–1355.
- [Pirzadeh, 1994] Pirzadeh, S. (1994). Unstructured viscous grid generation by the advancing-layers method. *AIAA Journal*, 32(8) :1735–1737.
- [Pope, 2000] Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- [Pope, 2008] Pope, S. B. (2008). Algorithms for ellipsoids. *Cornell University Report No. FDA*, pages 08–01.
- [Quan et al., 2014] Quan, D.-L., Toulorge, T., Marchandise, E., Remacle, J.-F., and Bricteux, G. (2014). Anisotropic mesh adaptation with optimal convergence for finite elements using embedded geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 268 :65–81.
- [Remacle et al., 2005] Remacle, J.-F., Li, X., Shephard, M. S., and Flaherty, J. E. (2005). Anisotropic adaptive simulation of transient flows using discontinuous Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(7) :899–923.
- [Rumsey, 2013] Rumsey, C. (2013). NASA - The Spalart-Allmaras Turbulence Model.
- [Rumsey, 2015] Rumsey, C. (2015). 2d NACA 0012 Airfoil Validation for Turbulence Model Numerical Analysis.
- [Rumsey, 2016] Rumsey, C. (2016). 2d Zero Pressure Gradient Flat Plate Validation.
- [Sagaut, 2002] Sagaut, P. (2002). *Large eddy simulation for incompressible flows : an introduction*. Scientific computation. Springer, Berlin. OCLC : 255318841.
- [Sahni et al., 2008] Sahni, O., Jansen, K. E., Shephard, M. S., Taylor, C. A., and Beall, M. W. (2008). Adaptive boundary layer meshing for viscous flow simulations. *Engineering with Computers*, 24(3) :267–285.

- [Sahni et al., 2006] Sahni, O., Müller, J., Jansen, K., Shephard, M., and Taylor, C. (2006). Efficient anisotropic adaptive discretization of the cardiovascular system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(41-43) :5634–5655.
- [Schlichting, 1979] Schlichting, H. (1979). *Boundary-layer theory*. Mcgraw hill edition.
- [Selmin et Formaggia, 1992] Selmin, V. and Formaggia, L. (1992). Simulation of hypersonic flows on unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34(2) :569–606.
- [Shakoor et al., 2015] Shakoor, M., Bernacki, M., and Bouchard, P.-O. (2015). A new body-fitted immersed volume method for the modeling of ductile fracture at the microscale : Analysis of void clusters and stress state effects on coalescence. *Engineering Fracture Mechanics*, 147 :398–417.
- [Shewchuk, 1998] Shewchuk, J. R. (1998). Tetrahedral Mesh Generation by Delaunay Refinement. In *Proceedings of the Fourteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '98, pages 86–95, New York, NY, USA. ACM.
- [Shewchuk, 2002] Shewchuk, J. R. (2002). What Is a Good Linear Finite Element ? - Interpolation, Conditioning, Anisotropy, and Quality Measures. Technical report, In Proc. of the 11th International Meshing Roundtable.
- [Slotnick et al., 2014] Slotnick, J., Khodadoust, A., Alonso, J., Darmofal, D., Gropp, W., Lurie, E., and Mavriplis, D. (2014). CFD Vision 2030 Study : A Path to Revolutionary Computational Aerosciences. Technical report.
- [Soulat et al., 2012] Soulat, L., Dridi, W., Moreau, S., and Fosso-Pouangue, A. (2012). Multi-Objective Optimization of a Multi-Element High-Lift Airfoil.
- [Spalart et Allmaras, 1992] Spalart, P. R. and Allmaras, S. R. (1992). A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. *Recherche Aerospaciale*, (1) :5–21.
- [Strachan et al., 2005] Strachan, R., Knowles, R., and Lawson, N. (2005). Comparisons between CFD and experimental results for a simplified car model in wall proximity. Technical report.
- [Tezduyar et Osawa, 2000] Tezduyar, T. E. and Osawa, Y. (2000). Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(3-4) :411–430.
- [Vallet, 1992] Vallet, M.-G. (1992). *Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs*. PhD thesis, Paris 6.

- [Vallet et al., 2007] Vallet, M.-G., Manole, C.-M., Dompierre, J., Dufour, S., and Guibault, F. (2007). Numerical comparison of some Hessian recovery techniques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(8) :987–1007.
- [van der Pijl et al., 2005] van der Pijl, S. P., Segal, A., Vuik, C., and Wesseling, P. (2005). A mass-conserving Level-Set method for modelling of multi-phase flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(4) :339–361.
- [Veysset, 2014] Veysset, J. (2014). *Simulation des grands espaces et des temps longs*. PhD thesis, Paris, ENMP.
- [Wall et al., 2000] Wall, W. A., Bischoff, M., and Ramm, E. (2000). A deformation dependent stabilization technique, exemplified by EAS elements at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(4) :859–871.
- [Wan, 2000] Wan, M. (2000). AutoZine Technical School - Aerodynamics.
- [Weatherill et Hassan, 1994] Weatherill, N. P. and Hassan, O. (1994). Efficient three-dimensional Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(12) :2005–2039.
- [Wervaecke, 2010] Wervaecke, C. (2010). *Simulation d'écoulements turbulents compressibles par une méthode d'éléments finis stabilisés*. PhD thesis, Bordeaux 1, Bordeaux.
- [Yerry et Shephard, 1983] Yerry, M. and Shephard, M. (1983). A Modified Quadtree Approach To Finite Element Mesh Generation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 3(01) :39–46.
- [Zienkiewicz et Wu, 1994] Zienkiewicz, O. C. and Wu, J. (1994). Automatic directional refinement in adaptive analysis of compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(13) :2189–2210.

Résumé

La simulation numérique des écoulements turbulents en aérodynamique est très complexe. Elle consiste en l'étude de l'interaction entre un fluide et un profil immergé. On observe à la surface du profil une zone de vitesse ralentie, nommée couche limite. L'étude fine de la couche limite est primordiale pour la résolution précise de l'écoulement. Elle nécessite de ce fait un maillage particulièrement fin et structuré. Nous proposons une procédure automatique permettant de générer un maillage adapté pour la résolution précise de la couche limite en accord avec la théorie et les caractéristiques physiques de l'écoulement. De plus, afin de décrire l'écoulement turbulent dans toute sa complexité à moindres coûts, nous proposons de combiner le maillage couche limite à une méthode d'adaptation de maillage dynamique.

A cet effet, nous avons utilisé une version avancée de l'adaptation de maillage sur l'erreur *a posteriori* basée sur les arêtes et développé une méthode permettant à la fois de conserver la structure et le raffinement dans la couche limite mais également de décrire précisément les recirculations et le sillage. La nouvelle méthode d'adaptation volume-couche limite a été validée sur des cas 2D et 3D à géométries complexes. Les résultats mettent en relief le potentiel de cette approche et ouvre des perspectives intéressantes pour l'adaptation de maillage en mécanique des fluides.

Mots Clés

Maillage non structuré, Adaptation de maillage basée sur les métriques, Maillage couche limite, Méthode de volume immergé, Méthode variationnelle multi-échelles

Abstract

Numerical simulation of turbulent aerodynamics flows remains challenging. Such fluid-structure interaction problem involves generally a thin layer close to the wall where the fluid is slow down, called boundary layer. This latter requires a careful study of the boundary layer since it is crucial regarding the accuracy of the complete flow computation. Therefore, a fine and structured mesh is needed close to the wall. In this work, we propose a novel automatic procedure to build a correct boundary layer mesh according to the theory and the flow parameters. Moreover, in order to describe exactly the behaviour of the flow on the whole domain, the boundary layer mesh is combined with a dynamic mesh adaptation method.

It follows an advanced version of the edge based mesh adaptation method. Combined together, they ensure a fine and structured mesh in the boundary layer while all the flow vortices are accurately resolved. This new method, called boundary-volume mesh adaptation, has been validated on several 2D and 3D test cases with complex geometries. Results emphasises the capacity of the approach and offer opportunities of improvement for numerical fluid mechanics mesh adaptation.

Keywords

Unstructured grids, Metric-based mesh adaptation, Boundary layer mesh, Immersed volume method, Variational multi-scale method