



**Collège
Doctoral**
Languedoc-Roussillon

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivrée par l'**Université de Montpellier**

Préparée au sein de l'école doctorale **I2S - Information,
Structures, Systèmes**

Et de l'unité de recherche **UMR 5149 - IMAG - Institut
Montpellierain Alexander Grothendieck**

Spécialité: **Mathématiques et modélisation**

Présentée par **Emmanuelle ITAM**

**Simulation numérique
d'écoulements autour de
corps non profilés par des
modèles de turbulence
hybrides et un schéma
multirate**

Soutenue le 30 novembre 2017 devant le jury composé de

Mme Héloïse BEAUGENDRE	Maître de conférence	Université Bordeaux 1	Rapporteur
M. Alain DERVIEUX	Directeur de recherche	INRIA Sophia-Antipolis	Examineur
M. Bruno KOOBUS	Professeur	Université de Montpellier	Directeur
Mme Vanessa LLERAS	Maître de conférence	Université de Montpellier	Examinatrice
M. Boniface NKONGA	Professeur	Université de Nice	Rapporteur
M. Stephen WORNOM	Chercheur	LEMMA	Membre invité

Table des matières

Introduction	1
1 Écoulements laminaires et turbulents autour de corps non profilés	7
1.1 Introduction	8
1.2 Écoulements autour d'un cylindre circulaire	8
1.2.1 Nombre de Reynolds	8
1.2.2 Principales propriétés de l'écoulement autour du cylindre circulaire	9
1.2.3 Classification des écoulements	17
1.2.4 Coefficients de traînée et de pression	22
1.3 Écoulements autour d'un cylindre carré	25
1.4 Quelques notions sur la turbulence	26
1.4.1 Caractère aléatoire	27
1.4.2 Caractère diffusif	27
1.4.3 Caractère non linéaire	28
1.5 Comment modéliser la turbulence?	28
1.5.1 La simulation numérique directe	28
1.5.2 Les modèles de turbulence	29
2 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes	31
2.1 Introduction	32
2.2 Équations générales	32
2.3 Équations adimensionnées	34
2.4 Discrétisations	36
2.4.1 Discrétisation spatiale	36
2.4.2 Discrétisation temporelle	38
2.5 Conditions aux limites	38
2.6 Méthode mixte éléments finis/volumes finis	38
2.6.1 Évaluation du terme convectif	38
2.6.2 Préconditionnement petit Mach	42
2.6.3 Évaluation du terme diffusif	43
2.7 Méthode d'avancement en temps	44

2.7.1	Schéma implicite	44
3	Modélisation de la turbulence par un modèle hybride RANS/VMS-LES	47
3.1	Introduction	48
3.2	Modélisation de la turbulence	49
3.2.1	Approches statistiques	49
3.2.2	Simulation des grandes échelles (LES)	63
3.2.3	Modèles de sous-maille	65
3.2.4	Modélisation hybride : DES et ses variantes	68
3.2.5	Autres approches hybrides RANS/LES	72
3.3	Modélisation hybride RANS/VMS-LES	74
3.3.1	Projection variationnelle multi-échelle pour la LES	74
3.3.2	Modèle hybride RANS/LES avec corrections	79
3.3.3	Modèle hybride RANS/VMS-LES avec corrections	81
3.3.4	Définition de la fonction d'hybridation	82
3.4	Une approche hybride DDES/VMS-LES	83
4	Application aux écoulements autour de corps non profilés	85
4.1	Évaluation des modèles VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES dans leurs versions dynamiques	87
4.1.1	Compléments sur les cylindres en tandem	121
4.2	Comportement de modèles de turbulence hybrides pour la simulation d'écoulements autour d'un cylindre en régime sous-critique	127
4.2.1	Compléments sur le comportement du modèle hybride RANS/VMS-LES dans la couche limite	136
4.3	Évaluation du modèle VMS-LES pour le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre rectangulaire	139
4.3.1	Introduction	139
4.3.2	Description du cas test et applications	139
5	Développement d'un schéma d'avancement en temps explicite multirate	145
5.1	Introduction générale du chapitre	146
5.2	State of the art	149
5.2.1	Introduction	149
5.2.2	Base integration methods to solve $\dot{y} = f(t, y)$	150
5.2.3	A review on multirate schemes	152
5.2.4	Conclusion	163
5.3	A Volume-agglomeration explicit multirate approach	165
	Conclusion et perspectives	183

Table des figures

0.1	Structures turbulentes et vagues acoustiques autour du train d'atterrissage LAGOON [107]	1
0.2	Représentation virtuelle de la plateforme Spar Aasta Hansteen conçue par TechnipFMC [156]	2
0.3	Exemple d'un pont à haubans : le viaduc de Millau (à gauche) [99] et d'un pont suspendu : le pont de Manhattan (à droite) [50]	3
1.1	Expérience de O.Reynolds [120] : présentation du dispositif (à gauche) et représentation des principaux comportements A,B et C des filets de fluide colorés obtenus	9
1.2	Séparation de la couche limite autour d'un cylindre circulaire et formation de tourbillons dans son sillage [137]	12
1.3	Alternance des tourbillons	13
1.4	Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour $Re \sim 40 - 1 \times 10^7$ [151]. Les données expérimentales proviennent de : Williamson [171] (ligne continue), Roshko [127] (ligne pointillée) et Schewe [135] (points)	13
1.5	Représentation de la couche limite près de la zone de séparation [151] .	14
1.6	Évolution du rapport de la fréquence de la couche cisailée avec la fréquence du lâcher en fonction du nombre de Reynolds [103]	16
1.7	Dépendance de la longueur de recirculation à trois processus [172] . .	16
1.8	Évolution de la longueur de recirculation en fonction du nombre de Reynolds [104]	17
1.9	$Re < 5$: Pas de séparation, écoulement rampant	17
1.10	$5 < Re < 40$: Paire de tourbillons de recirculation symétriques	18
1.11	$40 < Re < 180$: Allée tourbillonnaire laminaire	18
1.12	$180 < Re < 300$: Transition vers la turbulence dans le sillage	18
1.13	Manifestation du mode A	19
1.14	Transition vers la turbulence dans le sillage : mode A et mode B [169]	20
1.15	Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds [2]	20
1.16	Régime sous-critique : $300 < Re < 3 \times 10^5$	20
1.17	La moyenne du coefficient de portance est non nulle dans le régime critique (ie. pour $3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^5$) [135]	21
1.18	Régime critique : $3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^5$	21

1.19	Régime supercritique : $3.5 \times 10^5 < Re < 1.5 \times 10^6$	21
1.20	Transition haute : $1.5 \times 10^6 < Re < 4 \times 10^6$	22
1.21	Régime transcritique : $Re > 4 \times 10^6$	22
1.22	Évolution du coefficient de pression en fonction du nombre de Reynolds pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire lisse : A : $Re = 1.1 \times 10^5$, B : 6.7×10^5 , C : 8.4×10^6 [174]	23
1.23	Évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire lisse [165]	24
1.24	Écoulement autour d'un cylindre carré pour des petits nombres de Reynolds	25
2.1	Découpage du tétraèdre en quatre hexaèdres par la règle des médianes	37
2.2	Construction d'une cellule de Barth en 2 dimensions, figure a) et exemple de cellule de barth en trois dimensions, figure b) [22] . . .	37
2.3	Position des points M et M'	42
3.1	Brève classification des modèles de turbulence, Sagaut <i>et al.</i> . . .	49
3.2	Classification des modèles de fermeture en un point [23]	52
3.3	Tableau récapitulatif des modèles de fermeture au premier ordre (à partir d'un article de [57])	57
3.4	Schématisation du principe ELES	74
3.5	Illustration du processus d'agglomération.	77
3.6	Valeurs de la fonction de mélange selon la zone de l'écoulement : $f_d \simeq 0$ dans la couche limite et $f_d \simeq 1$ en dehors	83
4.1	Arrangement des cylindres en tandem dans BART et schéma le modélisant	122
4.2	Lignes de courant (à gauche) et énergie cinétique turbulente (à droite) pour $L/D = 1.435$	123
4.3	Énergie cinétique turbulente entre les cylindres et à l'arrière du cylindre aval, pour $L/D = 3.7$	123
4.4	Lignes de courant entre les cylindres et à l'arrière du cylindre aval, pour $L/D = 3.7$	124
4.5	Distributions de θ et de la vitesse tangentielle pour le cylindre à $Re = 20000$ en hybride RANS/VMS-LES	136
4.6	Distribution de la norme de la vitesse de l'écoulement instantané et lignes de courant pour le cylindre à $Re = 20000$ en hybride RANS/VMS-LES	137
4.7	Distribution de la norme de la vorticité de l'écoulement instantané pour le cylindre à $Re = 20000$ en hybride RANS/VMS-LES	138
4.8	Schéma : géométrie du domaine de calcul [18]	140
4.9	Distribution des lignes de courant dans un plan transversal au cylindre : comparaison entre la simulation SA-DES de [86] et notre calcul en VMS-LES	140

TABLE DES FIGURES

4.10	Forces obtenues pour l'écoulement autour du cylindre rectangulaire à $Re = 26400$ en VMS-LES	141
4.11	Coupe dans le plan transversal de symétrie de la vorticité instantanée	143
4.12	Zoom dans le plan de symétrie de la vorticité instantanée	143
5.1	Time discretization of the latent and active component of the solution	152
5.2	Time discretization of the fast and slow component of the solution	154
5.3	1D model, 2 subdomains splitting	156
5.4	Partitioning into fast and slow subsystems	158
5.5	RK_F applies on y_F , and RK_S applies on y_S	159
5.6	Slow buffer Ω_{SB}	161

Introduction générale

Domaine d'application :

L'étude de l'écoulement autour d'un obstacle, et plus particulièrement autour d'un cylindre circulaire fixe à différents régimes de l'écoulement, est une branche de la mécanique des fluides numérique largement étudiée expérimentalement [127, 13, 170, 108, 105, 79, 111, 102, 19, 63, 139, 42, 177]), et numériquement [55, 69, 27, 97, 17, 158, 131, 146]. Cet écoulement est intéressant d'un point de vue académique car il engendre une physique complexe qui se développe autour du cylindre et plus en aval, dans son sillage. De nombreuses géométries naissent à partir du cylindre en fonction du problème que l'on cherche à résoudre. En effet, on peut simuler l'écoulement autour d'un cylindre carré [130, 15, 85, 143] et/ou d'un cylindre qui oscille [11, 28]. L'écoulement peut aussi s'effectuer autour de plusieurs cylindres placés en parallèle avec un éventuel décalage [175, 152] ou disposés en tandem [56, 175, 80, 110, 81, 100, 37, 164]. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive et les configurations citées précédemment peuvent être combinées.

Ces cas-tests sont aussi utilisés pour répondre à de nombreux problèmes industriels, notamment en aéronautique [164, 81, 100] afin de réduire le bruit généré par le train d'atterrissage d'un avion. Avant de calculer l'écoulement autour d'une géométrie réaliste de train avant d'avion d'affaire (figure 0.1), les chercheurs et ingénieurs ont dans un premier temps modélisé cette structure par des cylindres en tandem.

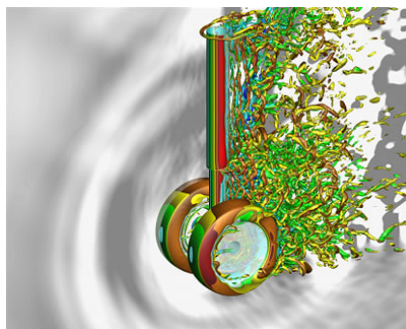


FIGURE 0.1: Structures turbulentes et vagues acoustiques autour du train d'atterrissage LAGOON [107]

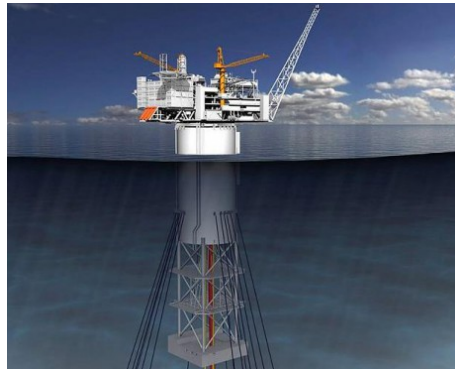


FIGURE 0.2: Représentation virtuelle de la plateforme Spar Aasta Hansteen conçue par TechnipFMC [156]

Par ailleurs, des études sont menées sur les vibrations des cylindres dans un écoulement sous l'effet de détachements tourbillonnaires du sillage [170, 1, 10, 14]. Une des applications concerne l'industrie offshore [114] car elle met en jeu des structures telles que des plateformes pétrolières vibrant sous l'effet du courant (figure 0.2). Ces vibrations sont induites par le lâcher tourbillonnaire périodique dans le sillage de la structure et endommagent par fatigue les conduites, appelées risers, utilisées pour amener le pétrole ou le gaz du fond de la mer jusqu'à la plate-forme ou le navire de stockage. Afin de pouvoir prédire efficacement la durée de vie des risers et le design qu'ils doivent adopter, des simulations sont réalisées afin d'avoir une meilleure compréhension du comportement dynamique de la structure soumise aux vibrations.

En génie civil, on retrouve cette étude numérique des *vibrations induites par vortex* de structures [54] avec par exemple la simulation d'écoulements autour de câbles d'un pont suspendu ou d'un pont à haubans (figure 0.3). Des calculs sont réalisés afin d'assurer la facilité d'entretien et la stabilité de la construction soumise à des vibrations de grandes amplitudes, provoquées par les vents. Un travail de recherche sur le mécanisme d'excitation de la structure est alors nécessaire pour réduire efficacement ces vibrations.

Dans toutes ces applications, la géométrie du cylindre est utilisée comme modèle pour simuler numériquement divers écoulements, ou du moins en tant que première approche avant de passer à une configuration plus complexe et réaliste. Cela confirme l'intérêt que suscite cet axe de recherche et justifie qu'il soit approfondi dans cette thèse.

Quelques problèmes ouverts en modélisation numérique des écoulement turbulents :

Une famille importante de modèles de turbulence est représentée par les modèles de Simulation des Grandes Echelles (LES). Le principe de base de ces



FIGURE 0.3: Exemple d'un pont à haubans : le viaduc de Millau (à gauche) [99] et d'un pont suspendu : le pont de Manhattan (à droite) [50]

méthodes est de modifier les équations de Navier-Stokes pour filtrer les petites structures qui sont de taille trop petites pour pouvoir être prédites sur les ordinateurs actuels, et d'introduire un modèle dit de sous-maille (SGS) qui modélise les effets de ces petites échelles sur les structures de taille plus importante qui sont prises en compte par la discrétisation. Tous les modèles LES sont en théorie aptes à produire de bonnes prédictions mais d'un modèle à l'autre, la taille de maillage minimale pour une certaine prédiction peut varier fortement avec des conséquences importantes sur le coût de calcul et en fait sur la possibilité de calculer. Il est donc essentiel de continuer à améliorer la modélisation LES. Deux familles de méthodes, l'une basée sur les modèles de sous-maille dynamiques et l'autre utilisant l'approche variationnelle multi-échelles de la LES (VMS-LES), permettent de contrôler la force de ces filtres ainsi que le domaine de leur application suivant la taille de la plus petite échelle représentée et de la plus grande échelle affectée par le modèle. Un problème ouvert est de savoir si en combinant ces méthodes de manière adéquate, la nouvelle méthode ainsi obtenue jouira des avantages des deux ingrédients et notamment sera supérieure à chacun de ces ingrédients.

Une des qualités essentielles souhaitable des modélisations de turbulence à vocation industrielle est l'applicabilité d'un modèle à la prédiction d'écoulements dont on connaît a priori le moins possible de caractéristiques. Par exemple, les écoulements autour d'un cylindre circulaire seul exhibent en fonction du nombre de Reynolds des variations de la traînée comprenant une chute brutale de celle-ci identifiée comme la crise de traînée, les écoulements à Reynolds plus bas étant considérés comme sous-critiques et ceux à Reynolds plus haut comme supercritiques. Sachant que les écoulements sous-critiques correspondent à une couche limite laminaire près du cylindre (alors que le sillage sera turbulent pour une bonne partie du domaine sous-critique), il est alors conseillé d'utiliser un modèle LES pour la simulation numérique de tels écoulements. Dans le cas supercritique, la couche limite est turbulente (en partie) et un modèle hybride RANS/LES est alors à privilégier, le coût de calcul avec l'approche LES étant encore trop important pour les ordinateurs actuels. Ce dilemme n'est pas praticable en milieu

industriel et il est important de définir des modèles qui soient applicables aux deux situations sans savoir a priori si l'écoulement sera sous-critique, critique ou supercritique.

L'approche de l'équipe :

La thèse s'inscrit dans un programme de développement de modèles de turbulence hybrides et de modèles numériques utilisables en milieu industriel. Le travail de modélisation s'est appuyé sur un code maison, AIRONUM, dont les spécificités en termes de modèles numériques et de modèles de turbulence sont présentées respectivement dans les Chapitres 2 et 3. AIRONUM est un code expérimental et aussi un code de production dans la mesure où il est apte à réaliser des calculs lourds grâce à sa parallélisation, en compressible et en incompressible, avec la possibilité de réduire considérablement la viscosité numérique (méthode à dissipation d'ordre six) afin d'améliorer la qualité de prédiction des écoulements visés. AIRONUM contient divers modèles LES et un modèle RANS $k - \epsilon$ (version classique et bas-Reynolds). Le modèle LES privilégié dans AIRONUM est le modèle VMS-LES qui néglige les effets des modèles de sous-maille sur les échelles résolues les plus grandes, ce qui, comparativement à l'approche LES classique, est plus conforme à la physique des écoulements turbulents où les transferts énergétiques ont lieu entre échelles voisines. Le choix de la composante LES du modèle de turbulence hybride sur lequel les efforts de développement ont porté dans ce travail de thèse s'est donc naturellement orienté vers l'approche VMS-LES.

L'équipe s'intéresse actuellement à des écoulement turbulents hydrauliques et les innovations en modélisation font l'objet de transferts vers la société de technologie Lemma qui édite un code commercial, ANANAS.

Mes contributions :

J'ai tout d'abord continué une étude entreprise par l'équipe avant mon arrivée. Il avait été démontré que le modèle VMS-LES combinait bien avec la méthode de réglage dynamique du coefficient du modèle de sous-maille (SGS) introduite par Germano. J'ai prolongé cette étude à des modèles hybrides RANS/VMS-LES et validé l'observation selon laquelle la méthode dynamique apporte un progrès dans certains cas et, dans les autres cas, ne détériore pas les prédictions sinon.

Afin d'évaluer et de comparer le comportement du modèle de turbulence hybride RANS/VMS-LES développé avec le modèle hybride le plus utilisé actuellement par les laboratoires et services d'études, j'ai mis en œuvre dans AIRONUM et validé une formulation DDES.

Parmi les modèles DDES comparés dans les différents workshops, la version basée sur le modèle $k - \omega$ SST semble particulièrement performante. Une des différences importantes entre le modèle $k - \omega$ SST et le modèle $k - \epsilon$ utilisé dans AIRONUM est la limitation de Bradshaw appelée aussi correction de Menter. J'ai donc aussi introduit cette limitation dans le modèle $k - \epsilon$ mis en œuvre dans

AIRONUM. Au cours de la validation, j'ai pu constater que les prédictions du modèle DDES reposant sur le modèle $k - \epsilon$ et la limitation de Bradshaw sont très proches des prédictions dans la littérature utilisant DDES basé sur $k - \omega$ SST (voir par exemple le cas test du tandem présenté dans le Chapitre 4 consacré aux applications).

J'ai aussi travaillé sur la définition de modèles applicables aux deux situations d'écoulements citées précédemment, à savoir des écoulements autour d'un cylindre circulaire en régime sous-critique ou supercritique. Cette étude a consisté à évaluer le comportement de modèles classiques vis-à-vis de cette problématique puis de proposer des modèles de turbulence se comportant mieux de ce point de vue. J'ai en particulier développé dans AIRONUM un modèle hybride combinant les approches DDES et VMS-LES avec l'objectif d'améliorer la composante LES du modèle DDES.

En parallèle à ces travaux sur la turbulence, j'ai d'autre part travaillé sur le modèle numérique. Plus précisément, j'ai développé et implémenté dans AIRONUM un nouveau schéma d'avancement en temps explicite multirate. Cette approche a pour objectif de réduire les limitations sur le pas de temps imposées par la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) qui pénalisent l'efficacité des schémas explicites classiques. Le schéma multirate proposé repose sur un algorithme de type prédicteur-correcteur et sur une grille grossière obtenue par agglomération de volumes fins. Ce schéma a été développé avec l'objectif de résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles, équipées des modèles de turbulence hybrides susmentionnés, dans un contexte de calcul parallèle.

Organisation du présent manuscrit :

Ce mémoire est organisé comme suit : le chapitre 1 présente les écoulements autour de corps non profilés de type cylindre ; le chapitre 2 décrit l'approche numérique utilisée dans nos simulations ; les grandes approches de turbulence et les modèles classiques sont rappelés dans le chapitre 3, nos modèles de turbulence et leurs spécificités sont ensuite détaillés ; le chapitre 4 est consacré aux applications avec un travail sur l'impact des modèles de sous-maille dynamiques dans nos approches VMS-LES et hybride pour le calcul d'écoulements autour de corps non profilés - une étude sur l'utilisation de modèles de turbulence hybrides pour la simulation d'écoulements en régime sous-critique - et enfin un travail sur l'application de l'approche VMS-LES au problème de l'écoulement autour d'un cylindre de section rectangulaire ; une revue de travaux importants sur les méthodes multirate ainsi que notre travail sur un nouveau schéma explicite multirate par agglomération de volumes fins sont présentés dans le chapitre 5 ; enfin, nous concluons ce mémoire par une synthèse des travaux présentés dans ce document et des perspectives sont aussi proposées.

Valorisation/publication :

L'ensemble des travaux que j'ai pu réaliser durant cette thèse ont été mis en

œuvre dans une plate-forme de calcul parallèle « AIRONUM » dédiée à la simulation d'écoulements tridimensionnels non visqueux, laminaires et turbulents en maillages non structurés fixes ou dynamiques. C'est une plate-forme de simulation qui est partagée et utilisée intensivement par plusieurs équipes au niveau national et international : à l'université de Pise (Professeur Maria-Vittoria Salvetti), à l'INRIA (Directeur de recherche Alain Dervieux), à l'université Montpellier 2 (Professeur Bruno Koobus), et dans la société technologique LEMMA éditrice de logiciels (Ingénieur Stephen Wornom).

Ce travail a d'autre part été réalisé au sein du projet ANR MAIDESC et il a donné lieu aux communications suivantes :

E. Itam, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux, *Hybrid versus pure LES models comparison for subcritical cylinders flows*, ERCOFTAC Workshop Direct and Large-Eddy Simulation 11 (DLES11), May 29-31, 2017, Pisa, Italy.

E. Itam, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux, *Hybrid simulation of high-Reynolds number flows relying on a variational multiscale model*, 6th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods September 26-28 2016, University of Strasbourg, France.

E. Itam, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux, *A volume-agglomeration multirate time advancing approach*, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), Crete Island, Greece, 5-10 juin, 2016.

E. Itam, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux, *Simulation of multiple-blunt-body flow with a hybrid variational multiscale model*, Conference on Modelling Flow (CMFF'15), September 1-4, 2015, Budapest, Hungary.

E. Itam, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux, *Application of a hybrid variational multiscale model to massively separated flows*, International Applied Aerodynamics Conference, Forthcoming Challenges for Aerodynamics, Toulouse, France - 30 March - 01 April, 2015.

C. Moussaed, E. Itam, S. Wornom, B. Koobus, M.-V. Salvetti and A. Dervieux, *Dynamic and hybrid variational multiscale models for the simulation of bluff-body flows on unstructured grids*, 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI), July 20-25, 2014, Barcelona, Spain.

Ces travaux ont aussi fait l'objet de livrables pour l'ANR MAIDESC (disponibles sous le lien <http://www-sop.inria.fr/tropics/livraisons-maidesc.html>).

Chapitre 1

Écoulements laminaires et turbulents autour de corps non profilés

Contents

1.1	Introduction	8
1.2	Écoulements autour d'un cylindre circulaire	8
1.2.1	Nombre de Reynolds	8
1.2.2	Principales propriétés de l'écoulement autour du cylindre circulaire	9
1.2.3	Classification des écoulements	17
1.2.4	Coefficients de traînée et de pression	22
1.3	Écoulements autour d'un cylindre carré	25
1.4	Quelques notions sur la turbulence	26
1.4.1	Caractère aléatoire	27
1.4.2	Caractère diffusif	27
1.4.3	Caractère non linéaire	28
1.5	Comment modéliser la turbulence ?	28
1.5.1	La simulation numérique directe	28
1.5.2	Les modèles de turbulence	29

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire la physique des écoulements autour d'un cylindre circulaire et d'un cylindre carré. Ces cas tests contiennent de nombreuses caractéristiques en termes de la physique des écoulements que l'on retrouve dans les problèmes de type industriel, ils sont d'autre part aussi largement documentés dans la littérature. En particulier, les écoulements autour d'un cylindre circulaire sont très riches de part leur physique qui varie fortement en fonction du nombre de Reynolds : point de stagnation, couche limite, régions de décollement (non dues à des singularités géométriques, ce qui augmente la difficulté de prédiction de l'écoulement), couches de cisaillement, transition laminaire/turbulent, zones de recirculation et développement de structures tourbillonnaires (allée de Von Kármán, et tourbillons de Kelvin-Helmholtz selon le nombre de Reynolds). C'est un cas test donc particulièrement intéressant pour évaluer les performances d'un modèle de turbulence.

Nous rappellerons aussi dans ce chapitre les caractéristiques fondamentales associées aux écoulements turbulents, puis nous introduirons le problème de la modélisation de la turbulence.

1.2 Écoulements autour d'un cylindre circulaire

1.2.1 Nombre de Reynolds

En 1883, les expériences réalisées par l'ingénieur et physicien Osborne Reynolds [120] ont permis de montrer l'existence de deux régimes d'écoulement : le régime laminaire et le régime turbulent. Au cours de ses expériences, O. Reynolds a injecté du colorant en amont d'une conduite cylindrique rectiligne transparente dans laquelle s'écoulait un liquide avec un débit contrôlé par une vanne située en aval, ce qui a permis de visualiser la formation d'un fluide coloré. Il s'est intéressé à différents paramètres comme la viscosité du fluide, le débit et le diamètre de la canalisation. En faisant varier ces grandeurs, il a pu observer trois principaux comportements du filet de fluide (figure 1.1) :

- Comportement A : le filet de fluide coloré adopte un mouvement régulier : les lignes formées sont sensiblement parallèles et se diffusent très lentement. Il s'agit du régime laminaire.
- Comportement B : le filet de fluide coloré a une forme chaotique et instable : les lignes s'entremêlent et se diffusent dans toutes la section de la conduite, ce qui constitue le régime turbulent.
- Le passage du comportement A au comportement B est réalisé par l'intermédiaire d'un autre état, le comportement C, au cours duquel les lignes

colorées présentent des oscillations. C'est la régime transitoire.

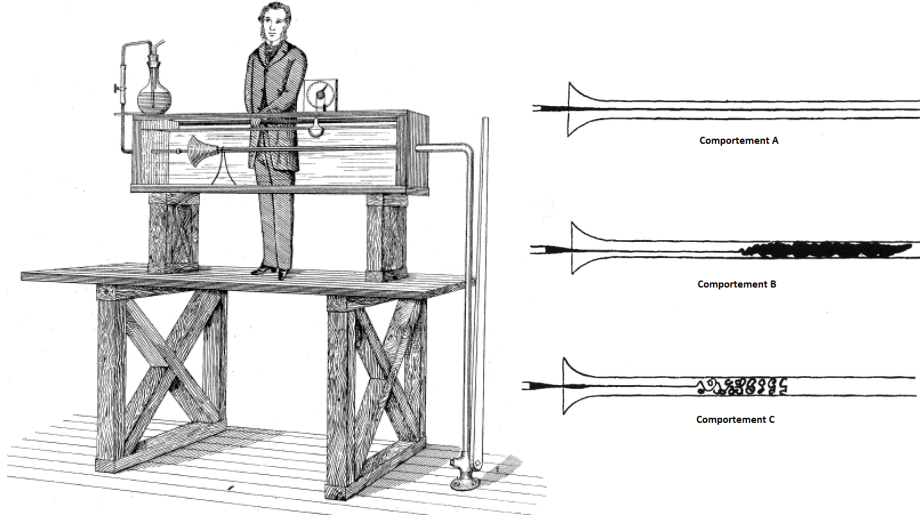


FIGURE 1.1: Expérience de O.Reynolds [120] : présentation du dispositif (à gauche) et représentation des principaux comportements A,B et C des filets de fluide colorés obtenus

Il a pu ainsi définir un nombre adimensionné, le nombre de Reynolds, qui détermine le régime de l'écoulement. Il est défini comme le rapport entre les forces d'inerties et les forces de viscosité (formule 1.1) :

$$Re = \frac{\rho D U_0}{\mu} = \frac{[\text{forces d'inertie}]}{[\text{forces visqueuses}]} \quad (1.1)$$

où ρ est la masse volumique, D le diamètre du cylindre, U_0 la vitesse de l'écoulement et μ la viscosité dynamique.

Bien que la frontière entre chaque état de l'écoulement soit difficile à établir, O. Reynolds a montré l'existence d'une valeur seuil, $Re_c \simeq 2000$, en deçà de laquelle l'écoulement est laminaire et au delà de laquelle l'écoulement devient de plus en plus turbulent avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

1.2.2 Principales propriétés de l'écoulement autour du cylindre circulaire

Plusieurs études expérimentales [78, 151, 177] ont permis de déterminer les différents régimes de l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien autour du cylindre, en fonction du nombre de Reynolds et d'y associer leurs principales manifestations physiques. Ces études s'accordent sur le fait que le cylindre est soumis à des forces provenant du fluide environnant et que des phénomènes complexes dépendant du nombre de Reynolds apparaissent, parfois de manière imprévisible et

chaotique, principalement dans certaines régions de l'écoulement qui sont brièvement présentées dans cette partie.

1.2.2.1 Couche Limite

La **couche limite** (figure 1.5) est une fine couche de fluide visqueux proche de la surface de la paroi du cylindre, en contact avec l'écoulement libre environnant et dans laquelle il s'établit un gradient de vitesse dû à des contraintes visqueuses qui ne sont pas négligeables : plus le fluide est proche de la paroi, plus il est freiné, la vitesse étant nulle à la surface du cylindre pour satisfaire à la condition d'adhérence. Cette redistribution dans le champ de vitesse entraîne une diffusion de la quantité de mouvement, soit par un mécanisme visqueux, soit par des mouvements turbulents induits par détachement tourbillonnaire. De plus, la couche limite s'étend entre le point où la vitesse d'écoulement est pratiquement nulle jusqu'au point où la vitesse de l'écoulement est égale à celle du flux libre.

Elle est considérée comme turbulente lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à une valeur critique autour de 3×10^5 , en deçà de cette valeur, elle est qualifiée de laminaire. Son épaisseur notée δ correspond à l'épaisseur autour du cylindre dominée par les effets visqueux et dans le cas d'une couche limite laminaire, elle est définie par l'expression 1.2 :

$$\frac{\delta}{D} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right) \quad (1.2)$$

et on a $\delta/D \ll 1$ pour $Re > \mathcal{O}(100)$.

Les premières mesures effectuées par Townsend [157], Laufer [71], Kovaszney [68], ont permis de distinguer différentes régions dans la couche limite turbulente. Elles sont définies par certaines grandeurs cinématiques qui sont généralement reliées aux caractéristiques internes de la couche limite. On peut citer par exemple les grandeurs adimensionnelles telles que la vitesse moyenne \bar{U}^+ (formule 1.3) et la distance \bar{y}^+ (formule 1.4) :

$$\bar{U}^+ = \frac{\bar{U}}{u_\tau} \quad (1.3)$$

$$\bar{y}^+ = y \frac{u_\tau}{\nu} \quad (1.4)$$

avec u_τ la vitesse de frottement à la paroi et ν la viscosité cinématique du fluide. C'est dans la zone extérieure que l'épaisseur de la couche limite δ et la vitesse du fluide libre ont une réelle influence. De ce fait, l'étude du profil de vitesse moyenne dans la couche limite permet de révéler trois régions principales de la couche limite interne, elles sont citées ci-dessous. Plusieurs représentations de

profils de vitesses moyennes sont récapitulées en détail par Clauser [24] à l'issue d'expériences.

- La sous-couche visqueuse, pour $0 \leq y^+ \leq 5$, est fine et très proche de la paroi. Dans cette sous-couche interne l'écoulement est laminaire et le profil de vitesse moyenne est linéaire : $U^+ = y^+$. La viscosité moléculaire joue un rôle prédominant par rapport à la viscosité turbulente dont la valeur tend vers zéro à l'approche de la paroi. Elle est à l'origine d'un mécanisme d'instabilité qui génère de la turbulence.
- Dans la deuxième région appelée *zone tampon* ou *buffer layer*, pour $5 \leq y^+ \leq 30$, les effets moléculaires et les effets turbulents sont du même ordre. Elle est marquée par une forte production et dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Sa surface extérieure marque le début de la couche logarithmique.
- La zone logarithmique, pour $30 \leq y^+ \leq 200$, correspond à la partie extérieure de la couche limite interne ($y \leq 0.2\delta$), la turbulence domine les effets de viscosité. De plus, la vitesse moyenne suit une loi logarithmique qui est définie par la formule 1.5 :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (1.5)$$

où κ est la constante universelle de Von Kármán et C est une constante voisine de la valeur 5.

La modélisation numérique de ces régions de proche paroi a un impact important sur les résultats de simulations car ces zones constituent la principale source de vorticité et de turbulence.

1.2.2.2 Point de séparation

Le **point de séparation**   partir duquel la couche limite décolle de la paroi est défini comme le point où le frottement s'annule. Contrairement à certaines géométries comme celle du cylindre carré, le décollement dans le cas du cylindre circulaire n'est pas dû à une singularité dans la géométrie mais au fait que la couche limite se développe en présence d'un gradient de pression adverse (ie. gradient de pression tel que la pression augmente dans le sens de l'écoulement). Lorsque ce gradient de pression adverse est suffisamment important, la vitesse des particules fluides va diminuer jusqu'à devenir nulle puis négative, c'est le processus de décollement de la couche limite.

Le phénomène de détachement de la couche limite est expliqué par H. Schlichting [137] à partir de la figure figure 1.2 en décrivant le déplacement de particules fluides autour du cylindre. Cette étude précise que dans la partie de l'écoulement non soumise aux frottements, les particules fluides sont accélérées dans la moitié

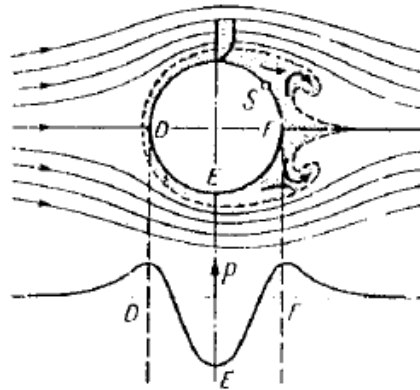


FIGURE 1.2: Séparation de la couche limite autour d'un cylindre circulaire et formation de tourbillons dans son sillage [137]

amont du cylindre à partir du point D jusqu'au point E puis elles ralentissent dans la moitié aval du cylindre depuis le point E jusqu'au point F . Il en résulte que la pression diminue de D à E puis croît de E à F . Cette pression se transforme en énergie cinétique entre D et E puis la transformation contraire a lieu entre E et F de telle manière que les particules aient la même vitesse en F qu'en D .

Dans la couche limite, les particules fluides sont soumises aux forces de frottement qui leur font perdre, entre les points D et E , une grande partie de leur énergie cinétique. Ensuite, sous la forte action de la pression extérieure, les particules ne sont plus en mesure d'aller de E à F . Elles ont tendance à s'arrêter et à repartir dans la direction opposée, ce qui entraîne le décollement de la couche limite.

1.2.2.3 Zone de formation tourbillonnaire

Pour le cas du cylindre circulaire, le phénomène de détachement tourbillonnaire est dû aux effets visqueux et constitue une caractéristique commune pour tous les écoulements dont le nombre de Reynolds est supérieur à 49. Pour ces nombres de Reynolds, la couche limite subit un cisaillement sur la surface du cylindre circulaire en raison d'un gradient de pression adverse. Le fluide de la couche limite parvient à la zone de décollement autour de $\pm \frac{\pi}{2}$ et lorsque son énergie cinétique est insuffisante pour passer plus en aval du cylindre où la pression est plus forte, le fluide a tendance à décoller engendrant ainsi un tourbillon de recirculation. Ce tourbillon, après avoir atteint une certaine taille, se détache de la couche limite et est convecté dans le sillage. L'écoulement en aval prend alors l'allure d'une allée tourbillonnaire et la couche limite se décolle de la paroi du cylindre. Zdravkovich [176] a répertorié les différents modes de lâchers tourbillonnaires. La fréquence du détachement tourbillonnaire f_d est le nombre de tourbillons

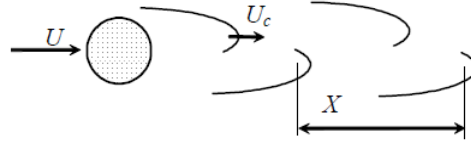


FIGURE 1.3: Alternance des tourbillons

lâchés d'un même côté pendant une seconde. Soit X la distance entre deux tourbillons d'une même rangée variant avec le nombre de Reynolds et U_c la vitesse d'émission des tourbillons par l'écoulement en amont de vitesse moyenne U (figure 1.3), alors la fréquence est définie par la formule 1.6. Soit D le diamètre d'un cylindre, la fréquence adimensionnelle du détachement est le nombre de Strouhal donné par l'expression 1.7 :

$$f_d = \frac{U_c}{X} \quad (1.6)$$

$$St = \frac{f_d D}{U} = \frac{U_c D}{U X} \quad (1.7)$$

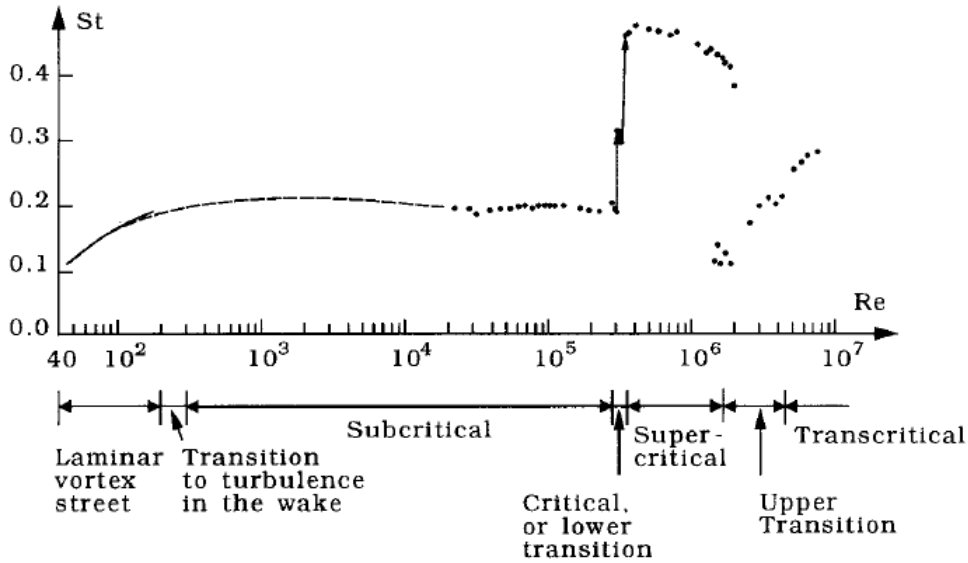


FIGURE 1.4: Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour $Re \sim 40 - 1 \times 10^7$ [151]. Les données expérimentales proviennent de : Williamson [171] (ligne continue), Roshko [127] (ligne pointillée) et Schewe [135] (points)

Les variations du nombre de Strouhal sont associées à des changements dans la structure de l'écoulement comme décrit par R.D. Blevins [12]. Pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire à $Re \sim 40 - 3 \times 10^7$, l'évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds est présenté par la

figure 1.4. Sur l'intervalle de valeurs du nombre de Reynolds considéré, Williamson [171], Roshko [127] et Schewe [135] ont observé expérimentalement que le nombre de Strouhal est proche de la valeur 0.2 sur une large gamme de nombre de Reynolds. Pour le cylindre circulaire, Roshko [127], Gerrard [40] et Bearman [10] ont proposé des formulations généralisées du nombre de Strouhal en utilisant une longueur caractéristique de la géométrie du sillage. Par la suite, Blevins a aussi donné un moyen d'estimer empiriquement cette grandeur, pour $250 < Re < 2 \times 10^5$, à partir de la formule 1.8. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, le détachement tourbillonnaire n'a pas lieu sur une seule fréquence distincte mais sur une étroite bande de fréquences.

$$St = 0.198 \left(1 - \frac{19.7}{Re} \right) \quad (1.8)$$

1.2.2.4 Couches de cisaillement

Les **couches de cisaillement** sont les régions du fluide où il existe un gradient de vitesse élevé et cette différence de vitesse au sein du fluide entraîne des contraintes de cisaillement importantes : les particules fluides se déplaçant rapidement sont freinées par les particules fluides moins rapides. L'expérience de Newton a montré, pour un fluide newtonien, qu'il existe une relation linéaire entre le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ (ie. le gradient de vitesse) et la contrainte de cisaillement, cette relation est donnée par la formule 1.9 :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1.9)$$

où μ est la viscosité dynamique (à température donnée).

Dans le cas de l'écoulement autour du cylindre (figure 1.5), deux couches de cisaillement libres se développent, de part et d'autre du cylindre, entre la zone d'écoulement libre et la zone de vitesse quasi nulle existant dans le sillage.

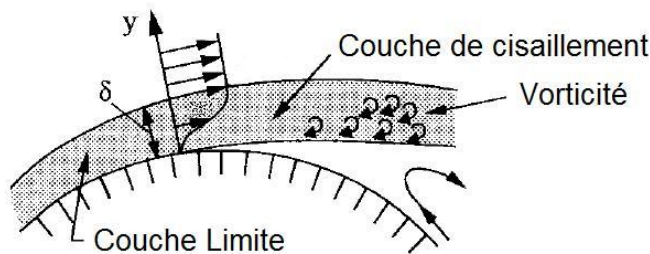


FIGURE 1.5: Représentation de la couche limite près de la zone de séparation [151]

Bloor [13] a été la première à observer l'existence de tourbillons de petite échelle dans les couches de cisaillement libres d'un cylindre circulaire. Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 350 environ [116], le cisaillement important dans les

couches limites se détachant de la surface du cylindre se déstabilisent en suivant les mécanismes d'instabilités de Kelvin-Helmholtz. Ces instabilités s'amplifient proportionnellement au nombre de Reynolds jusqu'à donner naissance aux tourbillons de petite échelle de zones de mélange à partir de $Re \sim 2000$. Ces tourbillons, devenus visibles, se détachent périodiquement avec une fréquence qui leur est propre puis interagissent avec l'allée de Von Kármán. Les interactions non linéaires entre ces petits tourbillons et l'allée de Bénard-Von Kármán accélèrent la transition à la turbulence, elles enrichissent le spectre de quelques harmoniques qui peu à peu disparaissent dans un fond turbulent développé [67]. Bloor a calculé à l'aide d'une sonde à fil chaud la fréquence de ces instabilités et ces mesures ont été le point de départ de nombreuses autres études. Elle a établi (formule 1.10), à partir de données expérimentales, une relation entre la fréquence de ces instabilités f_{SL} , la fréquence des tourbillons de Kármán f_K et le nombre de Reynolds :

$$\frac{f_{SL}}{f_K} \propto Re^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

Plus tard, Wei et Smith ont trouvé que le rapport $\frac{f_{SL}}{f_K}$ variait en $Re^{0.77}$ à partir de mesures à fil chaud et en $Re^{0.87}$ en visualisant le comportement de l'écoulement. Il a été soulevé ensuite par Zdravkovich [177] que le calcul de ces valeurs avaient certainement été artificiellement perturbées par des bulles d'hydrogène utilisées au cours de ces expériences. Mais Kourta *et al.* [67] ont confirmé de nouveau les résultats de Bloor et ont montré l'indépendance du mode de la zone de mélange par rapport au mode de Von Kármán. Prasad et Williamson [117] ont proposé une loi d'évolution en $Re^{0.67}$. La figure 1.6 montre que ces derniers s'approchent le mieux des différentes expériences en utilisant la loi $\frac{f_{SL}}{f_K} = 0.0235Re^{0.67}$. Récemment, Thompson et Hourigan [155] ont proposé une autre interprétation en considérant deux régimes différents selon le nombre de Reynolds. Pour $1500 < Re < 5000$, ils trouvent que la loi en $Re^{0.57}$ approche les valeurs du rapport mesurées pour ce régime, alors que la loi $Re^{0.52}$ approche celles calculées pour $10000 < Re < 50000$.

1.2.2.5 Zone de recirculation

Le champ proche du sillage est marqué par la **zone de recirculation** qui a une forte influence sur la prédiction des forces agissant sur le cylindre et sur la fréquence du lâcher tourbillonnaire. Cette région est sensible aux conditions extérieures amont telles que le nombre de Reynolds, le taux de turbulence, la dimension du cylindre et ses conditions aux extrémités.

J. Gerrard [40] a révélé le phénomène physique sous-jacent responsable de la formation tourbillonnaire dans le sillage d'un cylindre. Selon lui, pour un nombre de Reynolds assez grand, l'écoulement est divisé en trois parties formées par les

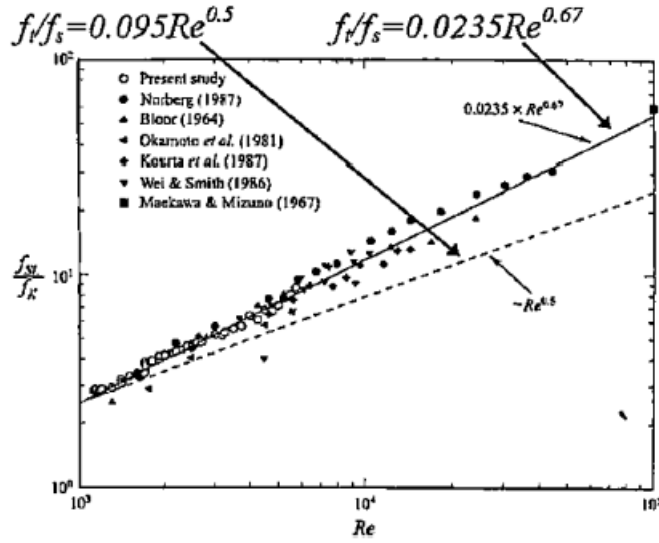


FIGURE 1.6: Évolution du rapport de la fréquence de la couche cisillée avec la fréquence du lâcher en fonction du nombre de Reynolds [103]

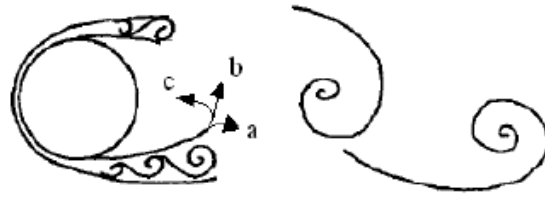


FIGURE 1.7: Dépendance de la longueur de recirculation à trois processus [172]

mouvements, notés \vec{a} , \vec{b} et \vec{c} , représentés dans la figure 1.7. Le premier mouvement \vec{a} entraîne la couche de cisaillement à l'extérieur, sous l'action du tourbillon qui grandit sur le côté opposé, ce qui étend la zone de recirculation. Le processus \vec{b} a l'effet inverse sur la formation de la bulle de recirculation puisqu'il dirige la couche de mélange en aval du tourbillon. Enfin, la dernière région formée par \vec{c} se dirige en sens inverse du détachement à l'intérieur de la zone de formation et donne naissance à un débit de recirculation. Ainsi, pour traverser l'axe du sillage, chaque tourbillon détaché grossit et doit être assez robuste pour surpasser la vorticité inverse associée à l'écoulement irrotationnel de la couche de mélange opposée. J. Gerrard a également suggéré que la fin de la zone de recirculation correspond au point sur lequel une structure provenant du détachement d'une des couches de mélange croise pour la première fois l'axe du sillage.

Pour des nombre de Reynolds compris entre 1000 et 2×10^5 la longueur de recirculation diminue, comme le montre la figure 1.8. Cette diminution est provoquée par le développement d'instabilités dans la couche cisillée séparée. En effet pour ces nombres de Reynolds, l'entraînement crée par le mouvement \vec{b} va s'amplifier

vis-à-vis de la vorticité inverse, ce qui va diminuer l'action de \vec{c} pour maintenir l'équilibre total.

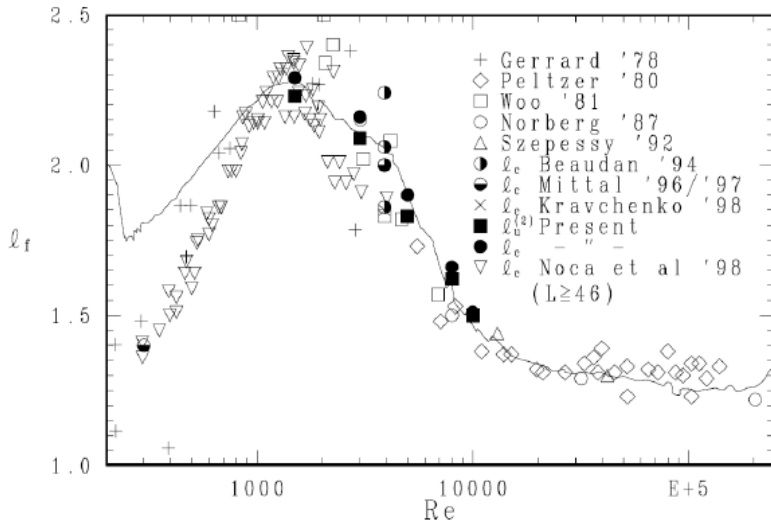


FIGURE 1.8: Évolution de la longueur de recirculation en fonction du nombre de Reynolds [104]

1.2.3 Classification des écoulements

Dans cette partie, les régimes d'écoulement autour du cylindre circulaire à parois lisses observés par B. Mutlu Sumer et J. Fredsoe [151] sont brièvement reportés.

Pour $Re < 5$ (figure 1.9), les lignes de courant sont symétriques entre l'amont et l'aval du cylindre. L'écoulement est dit **laminaire** et les forces sur le cylindre sont principalement d'origine visqueuse. La séparation de la couche limite a lieu lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à 5.



FIGURE 1.9: $Re < 5$: Pas de séparation, écoulement rampant

Pour $5 < Re < 40$ (figure 1.10), les forces d'inerties augmentent ce qui provoque un détachement de la couche limite en arrière de l'obstacle. Ainsi une zone de recirculation stable se forme en aval du cylindre et sa taille augmente avec le nombre de Reynolds (Batchelor [7]), s'accompagnant au fur et à mesure d'un

déplacement en amont du point de détachement. Cette zone est constituée d'une paire fixe de tourbillons, symétriques par rapport à l'axe longitudinal et attachés au cylindre. L'écoulement est dit **stationnaire décollé**.

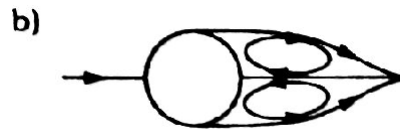


FIGURE 1.10: $5 < Re < 40$: Paire de tourbillons de recirculation symétriques

Pour $40 < Re < 180$ (figure 1.11), le sillage de l'écoulement devient asymétrique et instable. Ce qui donne naissance au phénomène de détachement tourbillonnaire : des tourbillons se forment de chaque côté du cylindre et sont alternativement convectés dans le sillage formant une allée de tourbillons laminaire, appelée **allée de Von Kármán**. Ce détachement se fait de manière périodique et bidimensionnelle, c'est-à-dire que le détachement n'a pas lieu dans la direction transverse (Williamson [171]).



FIGURE 1.11: $40 < Re < 180$: Allée tourbillonnaire laminaire

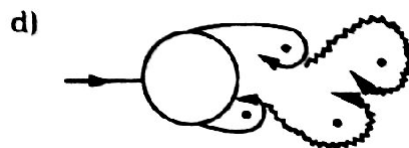


FIGURE 1.12: $180 < Re < 300$: Transition vers la turbulence dans le sillage

Pour $180 < Re < 300$ (figure 1.12), la **transition vers la turbulence** a lieu dans le sillage de l'écoulement et se déplace vers le cylindre lorsque le nombre de Reynolds augmente dans l'intervalle considéré. Concernant le détachement tourbillonnaire, il devient tridimensionnel : les tourbillons sont convectés en cellules dans la direction transverse (Gerrard [41], Williamson [170]) le nombre de Strouhal varie de manière discontinue pour cet intervalle de nombres de Reynolds (figure 1.15) puis atteint la valeur moyenne 0.2 lorsque $Re = 300$ et va ensuite rester globalement constant pendant toute la période sous-critique (figure 1.7).

L'instabilité de Von Kármán se manifeste par une ondulation dans la direction transversale selon l'envergure du cylindre et présente des tourbillons longitudinaux. La transition vers la turbulence s'effectue en deux étapes : deux topologies tridimensionnelles différentes s'organisent dans le sillage, si l'on considère la longueur d'onde dans le sens de l'envergure de l'ondulation des rouleaux :

- mode A : ce mode (figure 1.14 (a)) apparaît pour des nombres de Reynolds compris entre 180 – 190 et 230 – 240. Il est caractérisé par des longueurs d'onde de l'instabilité transversale de l'ordre de 3 à 4 diamètres et la formation de paires contra-rotatrices de bulles tourbillonnaires longitudinales. Ces ondulations ont une apparence régulière et sont situées entre les rouleaux primaires (figure 1.13).
- mode B : ce mode (figure 1.14 (b)) a lieu pour des nombres de Reynolds compris entre 230 – 260. La longueur d'onde de l'instabilité transversale de l'ordre de 1 diamètre et les tourbillons longitudinaux, plus fins, entrent en relation avec ceux de Von Kármán. Un phénomène de dislocation des tourbillons primaires est observable : un rouleau tourbillonnaire de Von Kármán rompt localement ce qui entraîne la création d'une liaison entre deux rouleaux.

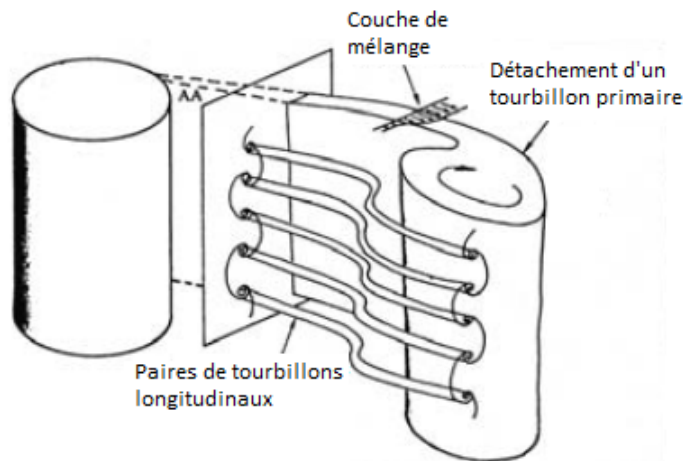


FIGURE 1.13: Manifestation du mode A

Pour $300 < Re < 3 \times 10^5$ (figure 1.16), l'écoulement en aval du cylindre devient totalement turbulent, les tourbillons se détachent du cylindre au-delà de la couche limite et se comportent de manière chaotique dans le sillage. La couche limite en amont du point de détachement reste toujours laminaire. Cette plage de Reynolds correspond au **régime sous-critique**.

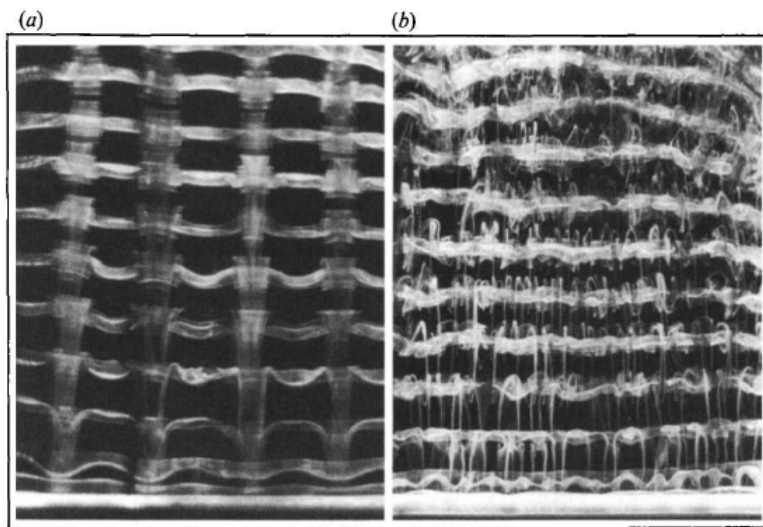


FIGURE 1.14: Transition vers la turbulence dans le sillage : mode A et mode B [169]

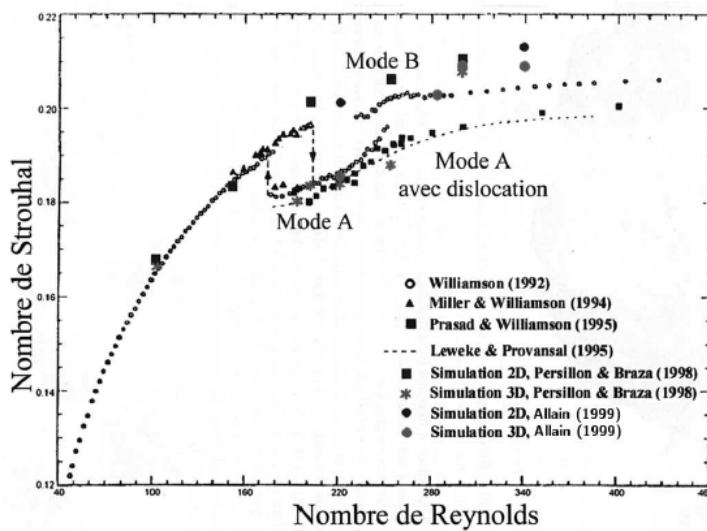


FIGURE 1.15: Évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds [2]

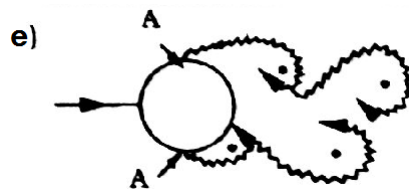


FIGURE 1.16: Régime sous-critique : $300 < Re < 3 \times 10^5$

Pour $3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^5$ (figure 1.18), le **régime critique** est atteint. La couche limite reste laminaire d'un côté du cylindre. De l'autre côté, elle est en partie turbulente et se détache plus loin en aval de l'obstacle, ce qui réduit la zone de recirculation et se traduit par une diminution brutale du coefficient de traînée (figure 1.23). La portance moyenne du cylindre n'est plus égale à zéro sur cette plage de nombre de Reynolds (figure 1.17) en raison du caractère asymétrique de l'écoulement. En aval du cylindre, l'écoulement est turbulent et le nombre de Strouhal jusque là égal à 0.2, subit une variation brusque pour $Re = 3.5 \times 10^5$, sa valeur atteignant 0.45 (figure 1.4).

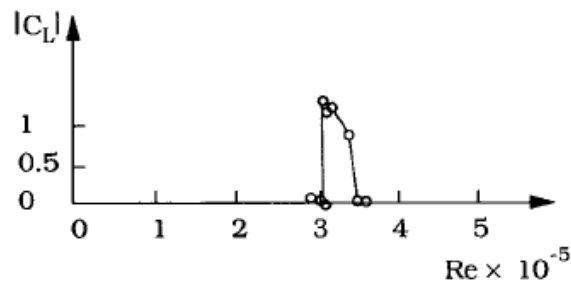


FIGURE 1.17: La moyenne du coefficient de portance est non nulle dans le régime critique (ie. pour $3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^5$) [135]

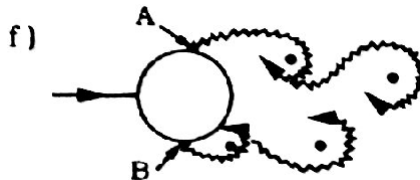


FIGURE 1.18: Régime critique : $3 \times 10^5 < Re < 3.5 \times 10^5$

Pour $3.5 \times 10^5 < Re < 1.5 \times 10^6$ (figure 1.19), on parle du **régime supercritique**. La couche limite est turbulente au décollement sur les deux côtés du cylindre et la transition est localisée entre le point de stagnation et le point de séparation.

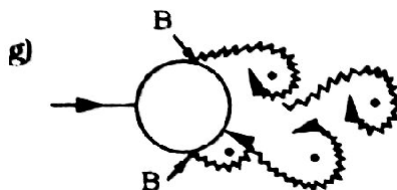


FIGURE 1.19: Régime supercritique : $3.5 \times 10^5 < Re < 1.5 \times 10^6$

Pour $1.5 \times 10^6 < Re < 4 \times 10^6$ (figure 1.20), c'est la **transition haute**. La couche limite est complètement turbulente sur un côté du cylindre et partiellement laminaire et turbulente sur l'autre côté.

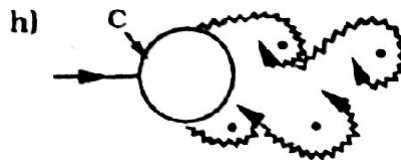


FIGURE 1.20: Transition haute : $1.5 \times 10^6 < Re < 4 \times 10^6$

Enfin, pour $Re > 4 \times 10^6$ (figure 1.21), la couche limite présente sur la surface du cylindre est totalement turbulente, cela correspond au régime transcritique.

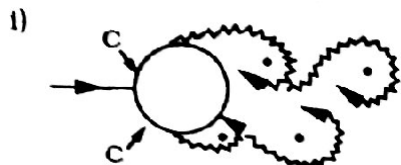


FIGURE 1.21: Régime transcritique : $Re > 4 \times 10^6$

1.2.4 Coefficients de traînée et de pression

Le coefficient de traînée C_d , et le coefficient de pression C_p caractérisent les forces exercées par le fluide sur le cylindre. Ce sont des grandeurs adimensionnées qui dépendent du nombre de Reynolds. Soit U la vitesse du fluide et ρ sa densité alors les coefficients sont définis par les relations 1.12 et 1.11.

Coefficient de pression :

La pression locale dominée par les mouvements non visqueux autour du cylindre ne dépend pas du nombre de Reynolds, elle est donnée par le théorème de Bernoulli et évolue comme ρU^2 . Donc, les contributions visqueuses sur les forces aérodynamiques deviennent négligeables avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Dans la zone de détachement, la pression reste plutôt constante et cette valeur constante est appelée coefficient de pression. Ce coefficient donné par la formule 1.22, est mesuré au point de stagnation amont où la vitesse locale du fluide est nulle.

Son évolution en fonction de l'angle de séparation θ est représentée par la figure

1.22 pour trois écoulements A, B et C correspondant respectivement à des plages de nombre de Reynolds de $Re = 1.1 \times 10^5$, 6.7×10^5 et 8.4×10^6 . Les courbes débutent au point de stagnation ($\theta = 0^\circ$) puis subissent une décroissance en atteignant des valeurs négatives jusqu' à $\theta \simeq 70^\circ$ pour A et C et $\theta \simeq 80^\circ$ pour B. Cette décroissance est due à l'accélération du fluide sur cette partie là du cylindre. À partir de ces angles, la vitesse de l'écoulement commence à diminuer, ce qui s'accompagne d'un accroissement de la pression dans la direction de l'écoulement et d'un gradient de pression négatif. Pour poursuivre son chemin, l'écoulement doit faire face aux forces de pression devenues importantes qui sont responsables de la production d'un cisaillement à la surface du cylindre. Le décollement de la couche limite a lieu à un angle $80^\circ < \theta < 120^\circ$ pour les trois écoulements, avec un angle plus grand pour B et C qui expérimentent des nombre de Reynolds plus importants. Enfin, la pression reste constante dans le sillage.

$$C_p = \frac{p - p_{inf}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (1.11)$$

où p est la pression de l'écoulement au point considéré et p_{inf} est la pression de l'écoulement en amont.

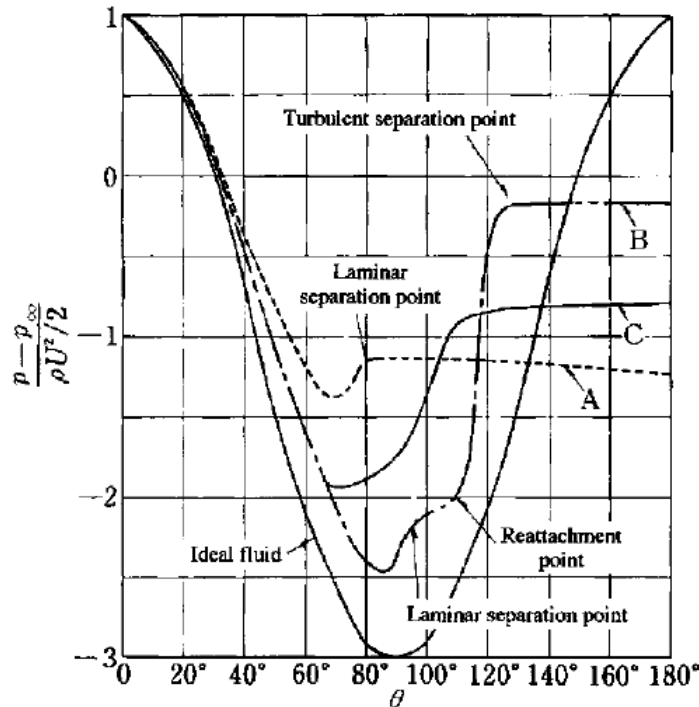


FIGURE 1.22: Évolution du coefficient de pression en fonction du nombre de Reynolds pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire lisse : A : $Re = 1.1 \times 10^5$, B : 6.7×10^5 , C : 8.4×10^6 [174]

Coefficient de traînée :

Le coefficient de traînée qui permet de caractériser les efforts appliqués sur le cylindre, est la composante longitudinale adimensionnée traduisant sa capacité à générer le moins de résistance possible lors de son déplacement dans l'écoulement. Le coefficient de portance constitue la composante perpendiculaire à l'écoulement de l'effort que le fluide exerce sur le cylindre. De part sa géométrie, la moyenne du coefficient de portance est nulle, on considère donc en général la valeur RMS des coefficients de portance et de traînée ou le coefficient de traînée. La figure 1.23 montre l'évolution globale du coefficient de traînée en fonction de l'augmentation du nombre de Reynolds. Une chute de la traînée est observable autour de $Re = 3 \times 10^5$, appelée *crise de traînée* ou *drag crisis* et marque le début de la transition vers la turbulence dans la couche limite près de la surface du cylindre. Dans ce régime d'écoulement, s'accompagnant d'une diminution du coefficient de traînée, le point de séparation de la couche limite se déplace plus en aval du cylindre et le sillage devient plus étroit et turbulent.

$$C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad (1.12)$$

où F désigne la somme des composantes des forces de pression et des forces visqueuses et A représente l'aire projetée du cylindre suivant la direction de l'écoulement.

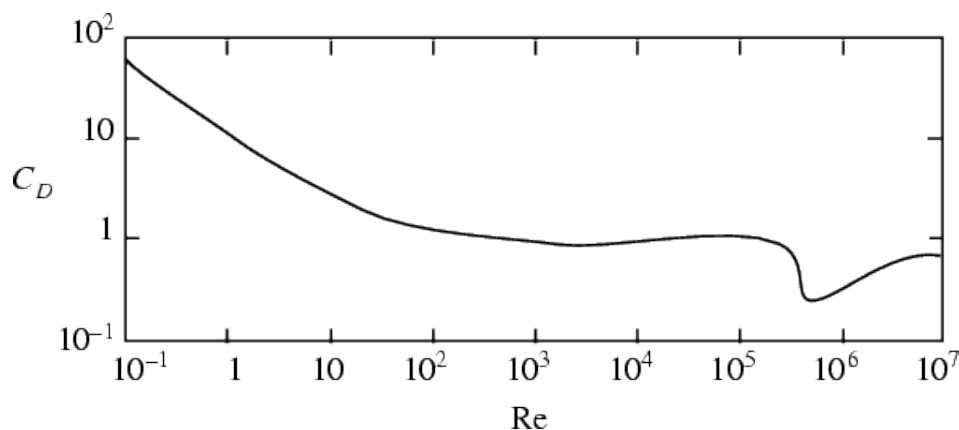


FIGURE 1.23: Évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire lisse [165]

1.3 Écoulements autour d'un cylindre carré

Le cas du cylindre de section carré joue un rôle dominant dans de nombreuses applications industrielles et techniques telle que l'aérodynamique des constructions. Ces écoulements sont en effet généralement observés dans la branche de l'ingénierie du vent : autour des immeubles de grandes hauteurs, des ponts, des monuments et des tours qui sont en permanence exposés au vent. De même, ils sont rencontrés autour des piliers de ponts et des jambes des plates-formes offshore qui sont en permanence soumis à la charge produite par les courants maritimes ou fluviaux. Ce type d'écoulement a donc fait l'objet de nombreuses études expérimentales et numériques [75, 161, 160, 124].

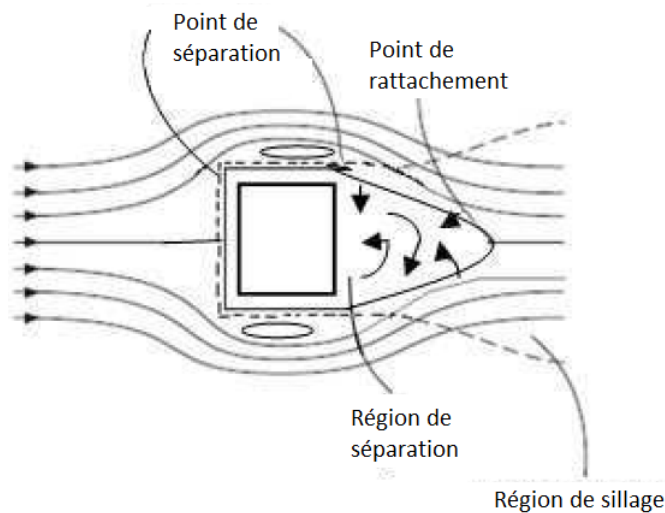


FIGURE 1.24: Écoulement autour d'un cylindre carré pour des petits nombres de Reynolds

Dans ce type d'écoulement, le phénomène de détachement tourbillonnaire est dominant. Il est provoqué par l'interaction entre les deux couches de cisaillement qui donne naissance à une allée tourbillonnaire lorsque les tourbillons deviennent assez importants pour être convectés dans le sillage. Le décollement de l'écoulement s'effectue à partir du coin amont du cylindre. Gerrard décrit ce phénomène dans [40] : un tourbillon de type Kelvin-Helmholtz se crée au dessus de l'obstacle, il s'alimente dans la couche cisailée à laquelle il est rattaché jusqu'à devenir suffisamment gros pour aspirer la couche de cisaillement inférieure qui est de vorticité transversale et située dans le sillage proche de l'obstacle. Lorsque la vorticité de signe opposé devient suffisamment importante pour interrompre le développement du tourbillon, il se détache et se trouve par la suite transport  en aval de l'obstacle.

Pour des petits nombres de Reynolds, l'écoulement est régulier et rampant car les forces visqueuses sont dominantes. A partir de $Re \simeq 47$, les forces d'inerties

deviennent plus importantes et une première bifurcation de Hopf a lieu [144], il s'agit d'une transition entre la bulle de recirculation et l'allée de vortex périodique de Von Kármán. Les effets tridimensionnels apparaissent dans le sillage à partir de $Re \simeq 150 - 200$. Comme pour le cylindre circulaire, au cours de la transition vers la turbulence, deux modes A et B apparaissent. Luo *et al.* [84] ont permis, à partir de mesures expérimentales, de mettre en avant ces deux modes et de déterminer un nombre de Reynolds critique de transition à 160 pour le mode A et à 200 pour le mode B à partir duquel le sillage en aval devient complètement déformé et les longueurs d'ondes diminuent.

Pour des nombres de Reynolds au delà de 500 les instabilités de Kelvin-Helmoltz se développent dans les couches de cisaillement autour du cylindre. Pour des nombre de Reynolds encore plus grands, les couches cisillées décollées deviennent de plus en plus fines et les instabilités qui s'y forment se déplacent en amont.

1.4 Quelques notions sur la turbulence

« Peut-on définir la turbulence ? Travailler sur la turbulence, c'est tenter de prévoir l'imprévisible. » Marcel Lesieur

Comme peuvent le traduire les propos de Marcel Lesieur, la **turbulence** est un mystère de la mécanique des fluides, elle nous échappe de part son caractère fortement imprévisible. Cependant, nombreux sont ceux qui cherchent à théoriser ce phénomène physique ou du moins à atteindre une compréhension suffisante pour la modéliser avec le plus de réalisme possible. Bien que d'apparence complexe, chacun peut en donner une description plus ou moins précise en s'appuyant sur ses diverses manifestations dans le mouvement des fluides naturels : citons les mouvements de fluides biologiques (le sang dans les vaisseaux), les mouvements de géofluides (le vent atmosphérique, les courants marins) ou encore les mouvements de fluides stellaires (les circulations gazeuses autour des planètes, les jets de plasmas d'étoiles). Elle intervient également dans le milieu industriel ou en laboratoire, dans les secteurs de l'hydraulique, de l'aéronautique ou de l'énergie par exemple. Malgré la diversité de ses manifestations, certaines propriétés communes apparaissent et permettent de caractériser la turbulence. En effet, les écoulements de turbulence forte, c'est-à-dire les écoulements à faible nombre de Mach mais à grand nombre de Reynolds, se comportent de manière totalement irrégulière, aléatoire, tridimensionnelle et tourbillonnante. Par ailleurs, la turbulence demande un certain temps pour apparaître et une certaine distance pour se développer d'où l'existence d'un régime transitoire entre le régime laminaire et le régime turbulent.

1.4.1 Caractère aléatoire

Le caractère aléatoire de la turbulence se traduit à travers les fonctions du champ de l'écoulement (vitesse, masse volumique, pression, température) qui varient de façon aléatoire et chaotique en espace et en temps. L'évolution de ces grandeurs, en espace et en temps, est déterminé par un ensemble d'équations, les équations de Navier-Stokes. Contrairement à l'écoulement laminaire, la notion de prédictibilité est perdue. L'écoulement est de plus très sensible aux conditions initiales et aux perturbations même faibles qui ont tendance à s'amplifier au cours du temps en raison de la faible viscosité. En effet, deux conditions initiales très proches l'une de l'autre (par exemple deux champs de vitesse) divergent assez rapidement au cours du temps.

Pour modéliser ces écoulements, l'utilisation d'une approche statistique est ainsi apparue très tôt et reste à ce jour la méthode la plus utilisée pour appréhender ces variations et obtenir des propriétés physiques moyennes de l'écoulement. Elle a permis d'accéder à une compréhension globale de la turbulence. Bien que l'aspect aléatoire des fluctuations d'un écoulement turbulent rende naturelle cette représentation statistique, une étude plus détaillée des structures qu'il contient laisse apparaître l'existence de structures cohérentes qui ont des mouvements assez organisés se répétant plus ou moins régulièrement au fil du temps. Cela justifie l'intérêt d'employer d'autres approches telle que la simulation des grandes échelles permettant de traiter les écoulements différemment selon les échelles des structures à partir de propriétés physiques locales. Les grandes échelles sont en principe résolues et les petites échelles au comportement plus universel sont modélisées à l'aide d'un modèle de turbulence.

1.4.2 Caractère diffusif

Le mathématicien Kolmogorov a contribué fortement à la compréhension de la turbulence à travers la théorie qu'il a développée et publiée en 1941 et dans laquelle il énonce l'existence d'une cascade d'énergie cinétique au sein d'un écoulement turbulent contenant des tourbillons dans toute une gamme d'échelles spatiales. Les grandes structures instables d'échelle de grandeur L imposée par la géométrie de l'écoulement contiennent la majorité de l'énergie initiale. Par des mécanismes d'interactions non linéaires, une partie de l'énergie cinétique fluctuante contenue dans les plus grands tourbillons est transférée vers les petits tourbillons qui vont à leur tour se diviser. Lorsque la taille des tourbillons est suffisamment petite, c'est-à-dire lorsque la viscosité devient dominante dans l'écoulement, l'énergie cinétique transférée se dissipe. La viscosité détermine la plus petite échelle de l'écoulement qui est l'échelle de dissipation visqueuse appelée échelle de Kolmogorov et de grandeur d'espace η .

Par analyse dimensionnelle, on obtient ces deux échelles. L'échelle L des grandes

structures s'écrit ainsi :

$$L = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$$

où k est l'énergie turbulente des grandes structures et ϵ représente le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Et l'échelle de Kolmogorov η est définie par :

$$\eta = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide et ϵ représente le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

1.4.3 Caractère non linéaire

Un autre point fondamental est la présence d'un grand nombre de degrés de liberté dans un écoulement turbulent, ce qui se traduit par l'excitation non linéaire d'une large gamme d'échelles de mouvements qui coexistent en son sein. De ce fait, si au départ l'énergie est contenue dans un domaine spectral restreint, la non linéarité des équations de Navier-Stokes décrivant les mouvements du fluide, va entraîner la répartition de cette énergie, en un temps fini, sur toutes les échelles disponibles.

De plus, la non linéarité de la turbulence assure une interaction incessante entre toutes les structures : le caractère plus prédictible des grosses structures va être limité par l'instabilité des plus petites structures dont le comportement plus universel va quant à lui être compromis par les plus grandes échelles.

1.5 Comment modéliser la turbulence ?

1.5.1 La simulation numérique directe

Ce modèle que l'on retrouve dans la littérature [109, 62, 70, 112] résout numériquement les équations de Navier-Stokes qui régissent les fluides en mouvement. Cette résolution s'effectue de manière directe, c'est-à-dire que ce modèle calcule toutes les échelles de l'écoulement.

Cette méthode est précise et efficace car elle fournit des informations complètes qui n'ont pas été affectées par des modèles de turbulence. Cependant elle est souvent peu adaptée aux écoulements dès que le nombre de Reynolds n'est plus modéré, un écoulement en transition vers la turbulence ou turbulent présentant des phénomènes de tailles très différentes : des grandes structures tourbillonnaires qui contiennent l'essentiel de l'énergie cinétique, des échelles intermédiaires par lesquelles l'énergie est transférée et des petites structures responsables de la plupart de la dissipation de l'énergie cinétique. La simulation de tels écoulements sur de longues périodes entraîne donc des contraintes très fortes, le temps de calcul

et la mémoire nécessaires devenant très importants. La résolution numérique directe de l'écoulement nécessite en effet des cellules de maillage suffisamment fines pour pouvoir capturer les petites structures. Si L et η désignent respectivement la taille des plus grandes et des plus petites structures alors le rapport entre ces structures est donnée par l'expression 1.13. Elle est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est important. Il en va de même pour le nombre de nœuds du maillage total N (formule 1.14) :

$$\frac{L}{\eta} = Re^{\frac{3}{4}} \quad (1.13)$$

$$N = Re^{9/4} \quad (1.14)$$

Les mêmes contraintes apparaissent au niveau de la discrétisation temporelle à travers la relation 1.15 où T_L et T_η représentent respectivement la plus grande et la plus petite échelle temporelle :

$$\frac{T_L}{T_\eta} = Re^{\frac{1}{2}} \quad (1.15)$$

Cette relation implique que le nombre de pas nécessaires pour simuler un intervalle fixé augmente avec le nombre de Reynolds, l'écoulement présentant de plus en plus de petites structures complexes évoluant de manière imprévisible au cours du temps.

1.5.2 Les modèles de turbulence

Afin de pouvoir traiter numériquement les écoulements associés à des nombres de Reynolds élevés et à des géométries complexes que l'on rencontre en industries, une modélisation de la turbulence est nécessaire. Le principe de ces modèles de turbulence est de réduire le nombre d'inconnues de la simulation tout en étant assez précis pour pouvoir prédire correctement des écoulements turbulents complexes.

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds à caractère industriel, les modèles de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds (RANS) [148, 5, 145, 73, 168, 92] sont largement utilisés. Cependant, si ces modèles peuvent fournir une bonne prédiction des écoulements attachés, ils sont moins performants pour la prédiction des écoulements fortement instationnaires comme ceux présentant des décollements et des développements tourbillonnaires importants.

L'autre grande famille d'approches représentée par la simulation des grandes échelles (LES) [77, 95, 162, 39, 113], qui permet une bonne prédiction de ces écoulements instationnaires avec décollement, est souvent encore trop coûteuse quand le nombre de Reynolds est élevé.

Une nouvelle classe de modèles, les modèles hybrides RANS/LES [147, 140, 36, 55, 66, 129, 154, 97, 37, 146, 140], a alors été récemment développée. L'idée

générale de ces modèles est de combiner les approches RANS et LES dans une même simulation dans le but d'obtenir des simulations aussi précises qu'en LES mais avec un coût moindre. Dans ces modèles hybrides, on souhaite prédire l'écoulement de couche limite attachée par un modèle RANS et l'écoulement dans les zones de forts décollements et de développements tourbillonnaires par une approche LES.

Chapitre 2

Résolution numérique des équations de Navier-Stokes

Contents

2.1	Introduction	32
2.2	Équations générales	32
2.3	Équations adimensionnées	34
2.4	Discrétisations	36
2.4.1	Discrétisation spatiale	36
2.4.2	Discrétisation temporelle	38
2.5	Conditions aux limites	38
2.6	Méthode mixte éléments finis/volumes finis	38
2.6.1	Évaluation du terme convectif	38
2.6.2	Préconditionnement petit Mach	42
2.6.3	Évaluation du terme diffusif	43
2.7	Méthode d'avancement en temps	44
2.7.1	Schéma implicite	44

2.1 Introduction

Pour décrire le mouvement des fluides newtoniens, on utilise les équations de Navier Stokes qui forment un modèle mathématique dérivé à partir des lois de conservation. Elles constituent un exemple d'équations aux dérivées partielles présentant une non-linéarité quadratique.

Historiquement, Bernoulli en 1778, puis Euler, peu de temps après, formulèrent des équations décrivant le mouvement d'un fluide non visqueux, soumis à des forces données. Le terme de viscosité fut ajouté dans ces équations par l'ingénieur et mathématicien Navier en 1821 et 1822. Ce dernier les énonça correctement avec l'aide du mathématicien irlandais Stokes qui, quelques années plus tard, élaborait une méthode pour y aboutir. La complexité de ces équations est telle qu'elle ne nous permet pas de disposer, en règle générale, de solutions analytiques.

Il est donc nécessaire de résoudre numériquement ces équations aux dérivées partielles par des approches telles que la méthode des éléments finis [150, 34, 31, 82] ou celle des volumes finis [8, 126, 32] par exemple. Elles ont permis de faire progresser de façon significative ces dernières années les connaissances en turbulence.

Dans ce chapitre, nous présentons les équations qui gouvernent un écoulement monophasique, compressible, visqueux et newtonien ; ensuite, nous décrivons la méthodologie numérique utilisée dans les simulations d'écoulements turbulents présentées dans ce travail, à savoir une méthode mixte éléments finis/volumes finis.

2.2 Équations générales

Les équations rappelées dans cette section, concernent un fluide monophasique compressible visqueux newtonien qui vérifie l'hypothèse de Stokes et la loi des gaz parfaits. La force gravitationnelle et les forces externes sont négligées et le fluide n'est soumis à aucune source de chaleur extérieure.

Équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

Équation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(E + P)v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial(v_j \sigma_{ij})}{\partial x_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

Dans ces équations, t est la variable temps et x_i , x_j et x_k sont les coordonnées spatiales suivant les trois directions de l'espace.

Grandeurs qui apparaissent dans ces équations et caractérisant le fluide :

v : champ de vitesse,
 ρ : densité,
 P : pression,
 T : température,
 E : énergie totale par unité de volume,
 Q_j : flux de chaleur.

Le fluide étant supposé newtonien, le **tenseur des contraintes visqueuses** s'exprime ainsi :

$$\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda S_{kk} \delta_{ij}$$

où μ et λ désignent la **viscosité dynamique** du fluide avec $\lambda = \frac{-2}{3}\mu$,

δ_{ij} est le **symbole de Kronecker**, c'est-à-dire, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ et,

S_{ij} est le **tenseur de déformation** qui s'écrit :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Pour fermer le système d'équations, on a d'autre part les relations suivantes :

$$E = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho v_k v_k$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

$$P = (\gamma - 1) \rho c_v T$$

où c_v est la chaleur spécifique à volume constant et $Q = -\lambda \nabla T$ avec λ désignant la conductivité thermique.

2.3 Équations adimensionnées

Considérons les grandeurs de référence suivantes :

L_{ref} : longueur caractéristique de l'écoulement
 U_{ref} : vitesse de l'écoulement à l'entrée
 ρ_{ref} : masse volumique de l'écoulement à l'entrée
 μ_{ref} : viscosité dynamique de l'écoulement à l'entrée

Les variables de l'écoulement sont normalisées à partir de ces grandeurs, on obtient :

$$t^* = t \frac{L_{ref}}{U_{ref}}, \rho^* = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, \mu^* = \frac{\mu}{\mu_{ref}}, u_j^* = \frac{u_j}{U_{ref}}, P^* = \frac{P}{P_{ref}}, \text{ et } E^* = \frac{E}{U_{ref}^2 \rho_{ref}}$$

Si l'on reprend le système des équations de Navier-Stokes en substituant les variables de l'équation par les variables adimensionnées correspondantes, le système s'écrit :

Équation de conservation de la masse adimensionnée :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* v_j^*)}{\partial x_j^*} = 0 \quad (2.4)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement adimensionnée :

$$\frac{\partial(\rho^* v_i^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* v_i^* v_j^*)}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j^*} \quad (2.5)$$

Équation de conservation de l'énergie adimensionnée :

$$\frac{\partial E^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(E^* v_j^*)}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial(P^* v_j^*)}{\partial x_j^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial(v_j^* \sigma_{ij}^*)}{\partial x_i^*} - \frac{\gamma}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\mu^* \left(\frac{E^*}{\rho^*} - \frac{1}{2} v_k^* v_k^* \right) \right] \quad (2.6)$$

où le nombre de Reynolds Re s'obtient à partir des grandeurs de références :

$$Re = \frac{U_{ref} L_{ref}}{\mu_{ref}} \quad \text{avec } \gamma_{ref} = \frac{\mu_{ref}}{\rho_{ref}} \quad (2.7)$$

ainsi que le nombre de Prandtl qui représente le rapport entre la viscosité cinématique ($\nu = \mu/\rho$) et la diffusivité thermique :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad (2.8)$$

On écrit également le tenseur des contraintes visqueuses et la pression sous forme adimensionnée :

$$\sigma_{ij}^* = -\frac{2}{3}\mu^* \left(\frac{\partial v_k^*}{\partial x_k^*} \delta_{ij} \right) + \mu^* \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*} \right) \quad (2.9)$$

$$P^* = (\gamma - 1)(E^* - \rho^* \frac{1}{2} v_i^* v_i^*) \quad (2.10)$$

où σ_{ij} est le symbole de Kronecker et γ représente le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constant :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Afin d'exprimer les équations de Navier-Stokes sous une forme compacte adaptée à la formulation variationnelle, on définit un vecteur W qui contient les variables inconnues de l'écoulement adimensionnées mais qui apparaissent à partir d'ici sans étoile pour simplifier l'écriture :

$$W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T \quad (2.11)$$

Les vecteurs $F_i(W)$ suivants correspondent aux termes convectifs des équations du problème :

$$F_1(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (E + p)u)^T, \quad (2.12)$$

$$F_2(W) = (\rho v, \rho vu, \rho v^2 + p, \rho vw, (E + p)v)^T, \quad (2.13)$$

$$F_3(W) = (\rho w, \rho wu, \rho wv, \rho w^2 + p, (E + p)w)^T \quad (2.14)$$

et les vecteurs $V_i(W)$ sont reliés aux termes diffusifs des équations de Navier-Stokes :

$$V_1(W) = (0, \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, u\sigma_{xx} + v\sigma_{xy} + w\sigma_{xz} - Q_x)^T, \quad (2.15)$$

$$V_2(W) = (0, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}, u\sigma_{yx} + v\sigma_{yy} + w\sigma_{yz} - Q_y)^T, \quad (2.16)$$

$$V_3(W) = (0, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}, u\sigma_{zx} + v\sigma_{zy} + w\sigma_{zz} - Q_z)^T \quad (2.17)$$

où

$$Q_j = \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial(\mu^* c_v T)}{\partial x_j}$$

En utilisant les vecteurs définis ci-dessus, les équations 2.1, 2.2 et 2.3, peuvent être écrites sous une forme adimensionnée compacte qui constituera l'équation de base pour la discrétisation du problème :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(W) - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} V_j(W, \nabla W) = 0 \quad (2.18)$$

2.4 Discrétisations

2.4.1 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale du schéma adoptée dans cette thèse, applicable aux maillages non structurés, est basée sur une méthode mixte éléments finis/volumes finis. Le domaine de calcul Ω est approché par un domaine polygonal Ω_h qui est ensuite décomposé en n tétraèdres T_i :

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^n T_i \quad (2.19)$$

La grille de calcul utilisée pour l'évaluation des flux diffusifs, par une méthode éléments finis, est constituée de l'ensemble des tétraèdres T_i de la formule 2.19. Pour l'évaluation des flux convectifs par une méthode volumes finis, on construit un maillage dual à partir de cette triangulation.

Cette partie sur la discrétisation spatiale sera détaillée dans la section 2.6.

2.4.1.1 Construction du maillage dual

La construction des cellules de contrôles constituant le maillage dual peut être réalisée par diverses méthodes [45], nous avons choisi d'appliquer dans nos calculs la méthode des médianes et, en cas de très forts étirements, celle des cercles circonscrits.

Cellule médiane :

Cette méthode consiste, dans le cas tridimensionnel, à créer des volumes de contrôle C_i autour de chaque nœud i en divisant chaque tétraèdre contenant le nœud i noté T_k^i en quatre hexaèdres par la règle des médianes. Ainsi pour chaque élément T_k^i , les hexaèdres sont construits en reliant le sommet i avec le centre de gravité de l'élément T_k^i , les trois centres de gravité des faces de T_k^i et le milieu des trois arêtes issues de i . La cellule C_i est l'union des hexaèdres contenant le sommet i obtenus. De plus, l'union de ces cellules volumes vérifient la propriété suivante :

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_C} C_k \quad (2.20)$$

avec n_C correspondant au nombre de cellules et au nombre de nœuds de la tétraédrisation.

Cellule de Barth :

Le maillage dual peut être aussi construit à partir de la méthode proposée par Barth [6] qui est une approche plus précise dans les régions du maillage contenant

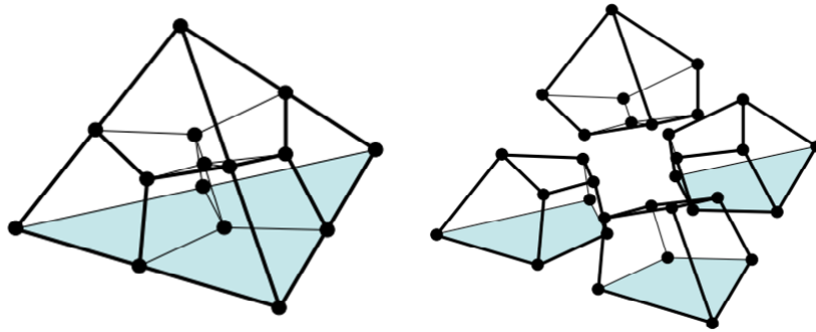


FIGURE 2.1: Découpage du tétraèdre en quatre hexaèdres par la règle des médianes

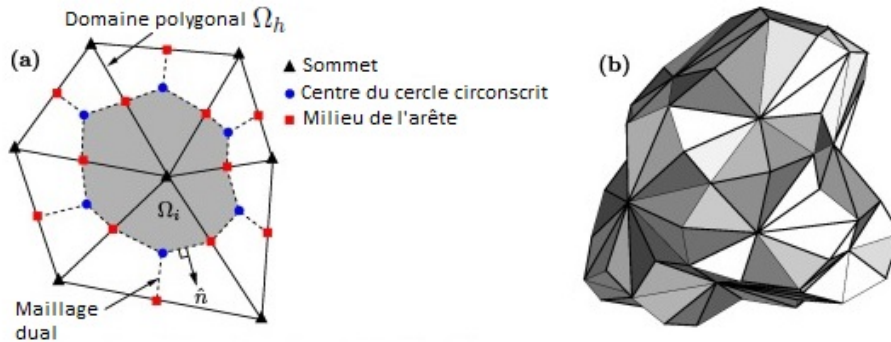


FIGURE 2.2: Construction d'une cellule de Barth en 2 dimensions, figure a) et exemple de cellule de Barth en trois dimensions, figure b) [22]

des mailles fortement étirées.

Une cellule de Barth est construite, en deux dimensions (figure 2.2 a)), autour d'un nœud en reliant les centres des arêtes issues du nœud avec le centre du cercle circonscrit à chaque triangle contenant le nœud considéré. Si le centre du cercle circonscrit est situé à l'extérieur du triangle, on considère le milieu du côté le plus long du triangle.

Les étapes pour construire une cellule de Barth C_i centrée au nœud i , en trois dimensions (figure 2.2 b)), sont les suivantes :

Considérons tous les nœuds k voisins de i : pour chaque élément contenant les nœuds i et k , la surface de la cellule est formée par les triangles obtenus en joignant le milieu de l'arête $[i, k]$ avec le *centre de surface* de chacune des faces de l'élément considéré contenant cette arête et le *centre de volume* de l'élément. Le *centre de volume* d'un tétraèdre correspond au centre de sa sphère circonscrite lorsque celui-ci est placé à l'intérieur de l'élément sinon il désigne le *centre de surface* du côté le plus large.

Si tous les angles de la face sont aigus, le *centre de surface* d'une face donnée désigne le centre de son cercle circonscrit sinon il est le milieu du côté le plus long.

2.4.2 Discrétisation temporelle

La discrétisation en temps est appliquée après semi-discrétisation (discrétisation spatiale des équations). Le vecteur solution du problème semi-discrétisé s'écrit sous la forme d'une fonction qui dépend du temps $W(t)$ et ses composantes sont les solutions approchées à chaque nœud du maillage. Le système s'écrit ainsi sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires en temps :

$$\frac{dW}{dt} + \Psi(W) = 0 \quad (2.21)$$

où Ψ contient les flux convectifs et diffusifs semi-discrétisés.

L'avancement en temps de l'équation (2.21) peut être réalisé par un schéma explicite en temps qui est cependant d'une efficacité fortement limitée par la contrainte sur le pas de temps assurant la stabilité du schéma. En effet, cette contrainte s'exprime en fonction de la plus petite maille du schéma et rend donc le calcul très coûteux dans les zones de maillages raffinés. Afin de remédier à ce problème d'efficacité, une option intéressante est l'utilisation de schémas implicites que nous développerons dans la section 2.7.

2.5 Conditions aux limites

La frontière Γ du domaine Ω , qui est approximée par une frontière polygonale notée Γ_h , se décompose en deux parties :

$$\Gamma_h = \Gamma_\infty + \Gamma_b \quad (2.22)$$

avec Γ_∞ la frontière de l'écoulement libre et Γ_b la surface de l'obstacle située dans l'écoulement. Les conditions aux limites Γ_∞ et Γ_b sont respectivement prises en compte par le schéma de Steger-Warming [149] et par des conditions de glissement ou de non-glissement pour la vitesse et d'adiabaticité pour la température.

2.6 Méthode mixte éléments finis/volumes finis

2.6.1 Évaluation du terme convectif

Pour discrétiser le terme convectif $\frac{\partial F_j}{\partial x_j}$ de l'équation (2.18), on emploie une méthode volumes finis décentrée. À partir de la tétraédrisation du domaine Ω , on construit un maillage dual par l'une des méthodes présentées dans la sous-partie 2.4.1.1.

La méthode consiste ensuite à établir la formulation variationnelle du terme

convectif. Pour cela, on va multiplier le terme convectif par une fonction de base volume fini sur chaque cellule C_i notée $\psi^{(i)}$ et définie ainsi :

$$\psi^{(i)}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \in C_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.23)$$

puis intégrer sur le domaine Ω_h :

$$\int_{\Omega_h} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_j} \right) \psi^{(i)} dx dy = \int_{C_i} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\partial C_i} F_j n_j d\sigma$$

où $d\Omega$ représente un volume élémentaire sur la cellule C_i et $d\sigma$ une aire élémentaire sur sa frontière ∂C_i . La quantité n_j désigne la j -ième composante de la normale extérieure sortante \vec{n} de C_i .

Soit $\partial C_{i,j}$ la frontière entre les cellules C_i et C_j et soit V_j l'ensemble des nœuds voisins au nœud i alors on peut également écrire le terme convectif $\int_{\partial C_i} F_j n_j d\sigma$ sous cette forme :

$$\sum_{j \in V_j} \int_{\partial C_{i,j}} \mathcal{F}(W, \vec{n}) d\sigma$$

avec $\mathcal{F}(W, n) = F_k(W) n_k$.

On applique le schéma de Roe classique [125] pour obtenir une approximation du flux :

$$\int_{\partial C_{i,j}} \mathcal{F}(W, \vec{n}) d\sigma \simeq \phi^R(W_i, W_j, \vec{\nu}_{ij}) \quad (2.24)$$

où W_k est le vecteur solution au nœud k et le vecteur $\vec{\nu}_{ij}$ est défini comme suit :

$$\vec{\nu}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \vec{n} d\sigma$$

Enfin, la fonction de flux numérique ϕ^R est donnée par :

$$\phi^R(W_i, W_j, \nu_{ij}) = \underbrace{\frac{\mathcal{F}(W_i, \vec{\nu}_{ij}) + \mathcal{F}(W_i, W_j, \vec{\nu}_{ij})}{2}}_{\text{partie centrée}} - \underbrace{\delta d^R(W_i, W_j, \vec{\nu}_{ij})}_{\text{partie décentrée}} \quad (2.25)$$

où $\delta \in [0, 1]$ est un paramètre qui contrôle le décentrage du schéma. Pour $\delta = 1$, on obtient le schéma de Roe classique.

Si \mathcal{R} désigne la matrice de Roe défini par :

$$\mathcal{R}(W_i, W_j, \vec{\nu}_{ij}) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \widehat{W}}(\widehat{W}, \vec{\nu}_{ij}) \quad (2.26)$$

où \widehat{W} est la moyenne de Roe de W_i et W_j [125],

alors le terme de décentrage s'écrit :

$$d^R(W_i, W_j, \vec{\nu}_{ij}) = |\mathcal{R}(W_i, W_j, \vec{\nu}_{ij})| \frac{W_j - W_i}{2} \quad (2.27)$$

Le schéma obtenu est précis à l'ordre 1.

2.6.1.1 Schéma MUSCL

La reconstruction MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) introduite en 1977 par Van Leer [76], utilise un flux numérique dont les arguments sont des valeurs extrapolées W_{ij} et W_{ji} de W à l'interface entre deux cellules C_i et C_j , afin d'augmenter l'ordre de précision du schéma. Ainsi le flux numérique (2.37) devient :

$$\int_{\partial C_{i,j}} \mathcal{F}(W, n) d\sigma \simeq \phi^R(W_{ij}, W_{ji}, \vec{\nu}_{ij}) \quad (2.28)$$

Les valeurs à l'interface sont construites à partir d'un développement de Taylor d'ordre 1 :

$$W_{ij} = W_i + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}W)_{ij} \cdot \vec{i}_j, \quad (2.29)$$

$$W_{ji} = W_j + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}W)_{ji} \cdot \vec{i}_j, \quad (2.30)$$

Selon l'évaluation qui est faite des termes $(\vec{\nabla}W)_{ij} \cdot \vec{i}_j$ et $(\vec{\nabla}W)_{ji} \cdot \vec{i}_j$, on distingue deux grands schémas dans notre méthode numérique.

2.6.1.2 Schéma V4

Avec ce schéma, la reconstruction aux interfaces est basée sur l'évaluation des gradients suivante :

$$(\vec{\nabla}W)_{ij} \cdot \vec{i}_j = (1 - \beta)(\vec{\nabla}W)_{ij}^C \cdot \vec{i}_j + \beta(\vec{\nabla}W)_{ij}^U \cdot \vec{i}_j \quad (2.31)$$

$$(\vec{\nabla}W)_{ji} \cdot \vec{i}_j = (1 - \beta)(\vec{\nabla}W)_{ji}^C \cdot \vec{i}_j + \beta(\vec{\nabla}W)_{ji}^D \cdot \vec{i}_j \quad (2.32)$$

où les gradients centrés sont construits ainsi :

$$(\vec{\nabla}W)_{ij}^C \cdot \vec{i}_j = W_j - W_i \quad (2.33)$$

Les gradients amont $(\vec{\nabla}W)_{ij}^U \cdot \vec{i}\vec{j}$ et aval $(\vec{\nabla}W)_{ij}^D \cdot \vec{i}\vec{j}$ sont définis à partir de la fonction $P1$ notée $\phi^{(k)}|_T$ et associée au nœud k et des gradients $P1$ –Galerkin sur les tétraèdres amont T_{ij} et aval T_{ji} :

$$(\vec{\nabla}W)_{ij}^D \cdot \vec{i}\vec{j} = \vec{\nabla}W|_{T_{ij}} = \sum_{k \in T_{ij}} W_k \vec{\nabla}\phi^{(k)}|_{T_{ij}} \quad (2.34)$$

et

$$(\vec{\nabla}W)_{ij}^U \cdot \vec{i}\vec{j} = \vec{\nabla}W|_{T_{ji}} = \sum_{k \in T_{ji}} W_k \vec{\nabla}\phi^{(k)}|_{T_{ji}} \quad (2.35)$$

Pour une valeur du paramètre de décentrage $\beta = \frac{1}{3}$, le schéma est d'ordre trois pour l'équation d'advection sur des maillages réguliers de type Friedrichs-Keller et la dissipation numérique du schéma résultant est basé sur des dérivées quadrèmes.

2.6.1.3 Schéma $V6$

Ce schéma introduit, dans son estimation des gradients, un nouveau gradient appelé gradient nodal moyen sur la cellule C_i noté $(\vec{\nabla}W)_i$ correspondant à la moyenne des gradients sur l'ensemble des tétraèdres T contenant le nœud i . Il est défini comme suit :

$$(\vec{\nabla}W)_i = \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in C_i} \frac{\text{volume}(T)}{4} \sum_{k \in T} W_k \vec{\nabla}\phi^{(k)}|_T \quad (2.36)$$

L'évaluation des gradients pour la reconstruction de la solution aux interfaces des cellules est alors la suivante :

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}W)_{i \cdot \vec{i}\vec{j}} &= (1 - \beta)(\vec{\nabla}W)_{ij}^C \cdot \vec{i}\vec{j} + \beta(\vec{\nabla}W)_{ij}^U \cdot \vec{i}\vec{j} + \\ &= \xi_c [(\vec{\nabla}W)_{ij}^U \cdot \vec{i}\vec{j} - 2(\vec{\nabla}W)_{ij}^C \cdot \vec{i}\vec{j} + (\vec{\nabla}W)_{ij}^D \cdot \vec{i}\vec{j}] + \\ &= \xi_d [(\vec{\nabla}W)_M \cdot \vec{i}\vec{j} - 2(\vec{\nabla}W)_{i \cdot \vec{i}\vec{j}} + (\vec{\nabla}W)_j \cdot \vec{i}\vec{j}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}W)_{i \cdot \vec{i}\vec{j}} &= (1 - \beta)(\vec{\nabla}W)_{ji}^C \cdot \vec{i}\vec{j} + \beta(\vec{\nabla}W)_{ji}^U \cdot \vec{i}\vec{j} \\ &= \xi_c [(\vec{\nabla}W)_{ji}^U \cdot \vec{i}\vec{j} - 2(\vec{\nabla}W)_{ji}^C \cdot \vec{i}\vec{j} + (\vec{\nabla}W)_{ji}^D \cdot \vec{i}\vec{j}] + \\ &= \xi_d [(\vec{\nabla}W)_{M'} \cdot \vec{i}\vec{j} - 2(\vec{\nabla}W)_{i \cdot \vec{i}\vec{j}} + (\vec{\nabla}W)_j \cdot \vec{i}\vec{j}] \end{aligned}$$

avec :

- M : point d'intersection de la droite passant par les nœuds i et j avec la face opposée au nœud i du tétraèdre T_{ij}
- M' : point d'intersection de la droite (ij) avec la face opposée au nœud j du tétraèdre T_{ji} .

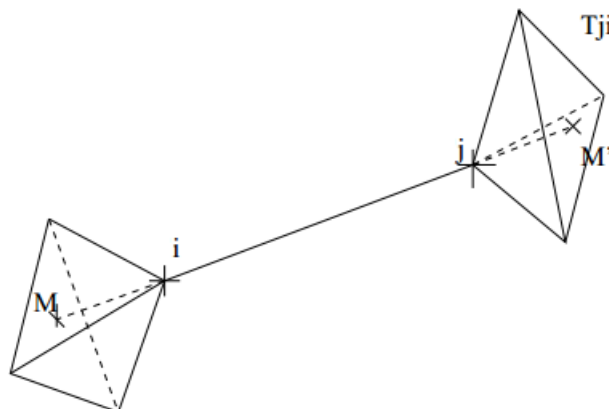


FIGURE 2.3: Position des points M et M'

Pour une valeur des paramètres $\beta = \frac{1}{3}$, $\delta_c = -\frac{1}{30}$, et $\delta_d = -\frac{2}{15}$, le schéma est d'ordre cinq pour l'équation d'advection sur des maillages réguliers de type Friedrichs-Keller et la dissipation numérique du schéma résultant est basée sur des dérivées sixièmes. Il s'ensuit que la dissipation numérique a des effets plus localisés sur les hautes fréquences du champ résolu, ce qui permet d'améliorer la qualité de prédiction d'écoulements turbulents en limitant l'interaction entre dissipation numérique et dissipation du modèle de turbulence, en particulier quand des modèles de turbulence de type « simulation des grandes échelles » sont utilisées. C'est donc cette famille de schémas que nous privilégions dans nos applications numériques.

2.6.2 Préconditionnement petit Mach

La discrétisation des flux convectifs repose sur le schéma de Roe dont la précision et la stabilité se détériorent quand le nombre de Mach diminue.

L'une des stratégie pour traiter les régimes d'écoulement bas Mach lorsque l'on utilise comme dans notre cas un solveur compressible, est celle d'étendre le solveur vers le bas Mach. Initiée par Turkel, cette méthode introduit un préconditionnement dans le terme de stabilisation. Le flux numérique de Roe-Turkel [46] résultant devient alors :

$$\Phi^{prec}(W_i, W_j, \vec{v}_{ij}) = \underbrace{\frac{\mathcal{F}(W_i, \vec{v}_{ij}) + \mathcal{F}(W_j, \vec{v}_{ij})}{2}}_{\text{partie centrée}} - \underbrace{\delta P^{-1} d^{prec}(W_i, W_j, \vec{v}_{ij})}_{\text{partie décentrée}} \quad (2.37)$$

où la partie décentrée de la formule 2.27 est remplacée par :

$$d^{prec}(W_i, W_j, \vec{v}_{ij}) = \left| P \mathcal{R}(W_i, W_j, \vec{v}_{ij}) \right| \frac{W_j - W_i}{2} \quad (2.38)$$

P étant la matrice de préconditionnement de Roe-Turkel [46] et \mathcal{R} la matrice de Roe (formule 2.26).

2.6.3 Évaluation du terme diffusif

Pour évaluer le terme diffusif $\frac{\partial V_j}{\partial x_j}$ de l'équation (2.18), on utilise une approximation centrée classique par éléments finis (Galerkin). Le maillage utilisé est constitué des éléments T_i construits en (2.19).

Soit la fonction de base éléments finis restreinte sur un tétraèdre T notée $\phi^{(i)|T}$ valant 1 sur le nœud i , 0 sur les autres nœuds et affine ailleurs sur T . Pour construire la formulation variationnelle du flux diffusif, il suffit de le multiplier par la fonction de base $\phi^{(i)|T}$ puis d'intégrer sur le domaine Ω_h :

$$\int \int_{\Omega_h} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_j} \phi^{(i)|T} \right) d\Omega = \sum_{T \in T^{(i)}} \underbrace{\left(\int \int_T \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \phi^{(i)|T} d\Omega \right)}_{(a)} \quad (2.39)$$

où $T^{(i)}$ est l'ensemble des tétraèdres ayant i pour sommet.

2.6.3.1 Évaluation du terme (a)

On procède à une intégration par parties sur le terme (a) :

$$\underbrace{\int \int_T \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \phi^{(i)|T} d\Omega}_{(a)} = \int_{\partial T} V_j \phi^{(i)|T} n_j d\sigma - \int \int_T V_j \frac{\partial \phi^{(i)|T}}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.40)$$

On obtient l'approximation du terme diffusif en tenant compte de la contribution de tous les tétraèdres contenant le nœud i . L'expression (2.39) devient :

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_h} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_j} \phi^{(i)|T} \right) d\Omega &= \sum_{T \in T^{(i)}} \left(\int_{\partial T} V_j \phi^{(i)|T} n_j d\sigma - \int \int_T V_j \frac{\partial \phi^{(i)|T}}{\partial x_j} d\Omega \right) \\ &= - \underbrace{\sum_{T \in T^{(i)}} \int \int_T V_j \frac{\partial \phi^{(i)|T}}{\partial x_j} d\Omega}_{(b)} + \sum_{T \in T^{(i)}} \underbrace{\int_{\partial T} V_j \phi^{(i)|T} n_j d\sigma}_{(c)} \end{aligned}$$

2.6.3.2 Évaluation du terme (b)

Les fonctions de base $\phi^{(i)}|_T$ sont affines par morceaux sur $T \in T^{(i)}$ et donc leur gradient est constant sur T . De plus, les variables inconnues du vecteur W sont approximées par projection sur l'espace des fonctions $P1$, il est alors possible d'évaluer l'intégrale directement.

2.6.3.3 Évaluation du terme (c)

Deux cas sont à considérer pour évaluer cette intégrale :

- Si le nœud i est intérieur au domaine Ω_h alors l'intégrale de surface s'annule sur ∂T pour tout $T \in T^{(i)}$. En effet, chaque face contenant le nœud i appartient à deux éléments de $T^{(i)}$ adjacents et donc les deux cotés de la face possèdent des vecteurs normaux opposés entre eux qui annulent les intégrales dans la somme. De même, l'intégrale s'annule sur la face opposée au nœud i de T car la fonction de base $\phi^{(i)}|_T$ est affine et s'annule sur les deux nœuds de cette face.
- Si le nœud i appartient à la frontière Γ_h alors pour tout $T \in T^{(i)}$, l'intégrale de surface s'annule sur la face de T opposée au nœud i (d'après la définition de $\phi^{(i)}|_T$) ainsi que sur la face contenant i intérieure à Ω_h . Cependant, l'intégrale ne s'annule pas sur la face appartenant à la frontière Γ_h et elle peut être évaluée en approximant par projection sur l'espace $P1$ les variables inconnues du vecteur W .

En résumé, (2.39) devient :

$$\int \int_{\Omega_h} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_j} \phi^{(i)}|_T \right) d\Omega = - \sum_{T \in T^{(i)}} \left(\int \int_T V_j \frac{\partial \phi^{(i)}|_T}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Gamma_h} V_j \phi^{(i)}|_T n_j d\sigma \right) \quad (2.41)$$

2.7 Méthode d'avancement en temps

2.7.1 Schéma implicite

Le schéma implicite aux différences finies rétrogrades sur trois niveaux en temps est le schéma choisi pour discrétiser en temps le système (2.21).

Cette méthode conduit à chaque pas de temps, au système non linéaire suivant :

$$\alpha_{n+1} W^{(n+1)} + \alpha_n W^{(n)} + \alpha_{n-1} W^{(n-1)} + \Delta t^{(n)} \Psi(W^{(n+1)}) = 0 \quad (2.42)$$

où $\Delta t^{(n)}$ est le pas de temps à la n -ième itération et les coefficients sont donnés par :

$$\alpha_{n+1} = \frac{1 + 2\tau}{1 + \tau} \quad \alpha_n = -1 - \tau \quad \alpha_{n-1} = \frac{\tau^2}{1 + \tau} \quad \tau = \frac{\Delta t^{(n)}}{\Delta t^{(n+1)}}$$

On linéarise ensuite le système (2.42) en utilisant le jacobien de $\Psi(W^{(n+1)})$ par rapport à W :

$$\begin{aligned} & \alpha_{n+1}W^{(n)} + \alpha_n W^{(n)} + \alpha_{(n-1)}W^{(n-1)} + \Delta t^{(n)}\Psi(W^{(n)}) \\ &= - \left[\alpha_{n+1} + \Delta t^{(n)} \frac{\partial \Psi}{\delta W}(W^{(n)}) \right] (W^{(n+1)} - W^{(n)}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

L'évaluation du jacobien de $\Psi(W^{(n+1)})$ par une approximation d'ordre deux ou plus élevé est en général complexe et implique des coûts importants en temps de calcul et en mémoire. Pour remédier à cela, on utilise la technique de défaut corrigé proposée dans [88] et qui se résume ainsi :

- les jacobiens $\frac{\partial \Psi}{\delta W}(W^{(n)})$ sont calculés avec un schéma d'ordre 1 pour les flux convectifs, c'est-à-dire, le flux numérique Φ^R introduit en (2.28), qui approxime le terme convectif, utilise les valeurs W_i (au nœud i) et W_j (au nœud j),
- les flux explicites $\Psi(W^{(n)})$ sont évalués par un schéma d'ordre 2, on réitère une fois (formule 2.43), ce qui permet d'obtenir la précision du second ordre en temps et en espace [88].

Le système linéaire résultant est enfin résolu par une méthode itérative de GMRES préconditionnée par une technique de type Schwarz additif restreint.

Chapitre 3

Modélisation de la turbulence par un modèle hybride RANS/VMS-LES

Contents

3.1	Introduction	48
3.2	Modélisation de la turbulence	49
3.2.1	Approches statistiques	49
3.2.2	Simulation des grandes échelles (LES)	63
3.2.3	Modèles de sous-maille	65
3.2.4	Modélisation hybride : DES et ses variantes	68
3.2.5	Autres approches hybrides RANS/LES	72
3.3	Modélisation hybride RANS/VMS-LES	74
3.3.1	Projection variationnelle multi-échelle pour la LES	74
3.3.2	Modèle hybride RANS/LES avec corrections	79
3.3.3	Modèle hybride RANS/VMS-LES avec corrections	81
3.3.4	Définition de la fonction d'hybridation	82
3.4	Une approche hybride DDES/VMS-LES	83

3.1 Introduction

En mécanique des fluides numériques, et plus particulièrement en industrie, de nombreuses simulations reposent sur une approche statistique Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) qui consiste à résoudre l'écoulement moyen et à modéliser les fluctuations de la turbulence par un modèle de fermeture. La méthode URANS est une extension instationnaire de ce modèle permettant de prendre en compte les fluctuations temporelles *lentes* de l'écoulement. Ce sont, à ce jour, les modèles les plus utilisés dans le monde industriel. Ils connaissent cependant certaines limitations dans leurs applications malgré les différentes améliorations qu'ils ont pu connaître ces dernières années. Par exemple, les simulations acoustiques, dans lesquelles la turbulence devient source de bruit, ne peuvent pas être réalisées correctement par ce types de modèle ; ils ne peuvent pas non plus prédire avec précision des écoulements turbulents massivement décollés contenant des structures de différentes échelles.

Il est ainsi apparu rapidement évident que certaines classes d'écoulements sont mieux prédites lorsqu'une partie du spectre turbulent est résolu. Avec cet objectif, des approches de turbulence ont été développées. On peut citer la simulation des grandes échelles (LES) où les échelles de turbulence plus petites que la taille du maillage sont filtrées et leurs effets modélisés alors que les grandes échelles contenant la majeure partie de l'énergie de l'écoulement sont entièrement simulées. Cette approche est par exemple adaptée à la simulation des écoulements présentant une couche de cisaillement libre dans laquelle il est facile de résoudre les grandes échelles turbulentes qui sont de l'ordre de grandeur de la couche cisailée ou encore la simulation d'écoulements autour de corps caractérisés par la présence de grandes structures instationnaires. L'une des principales limitations de la LES est le coût des calculs en temps CPU que l'on peut rencontrer dans les simulations d'écoulements à nombres de Reynolds élevés.

Une alternative est l'utilisation d'un modèle hybride qui combine un modèle RANS avec une approche LES. La stratégie est d'obtenir une bonne prédiction de la turbulence et de ses effets pour des écoulements complexes, avec un moindre coût que l'approche LES et avec une précision supérieure à un modèle RANS.

Dans cette thèse, nous nous intéressons au développement et à l'évaluation de modèles de turbulences qui permettent une simulation précise et efficace d'écoulements tridimensionnels massivement décollés et présentant des échelles multiples. Plus précisément, nous évaluons les performances d'un modèle hybride qui combine les approches RANS et une méthode variationnelle multi-échelle LES (VMS-LES) ainsi qu'une méthode hybride combinant les approches DDES et VMS-LES.

Dans ce chapitre, après avoir rappelé les principales modélisations possibles de la turbulence (qui, pour la plupart, sont classés dans la figure 3.1), nous donnerons

une définition du modèle VMS-LES que nous utilisons pour nos calculs et celle des approches hybrides RANS/VMS-LES et DDES/VMS-LES.

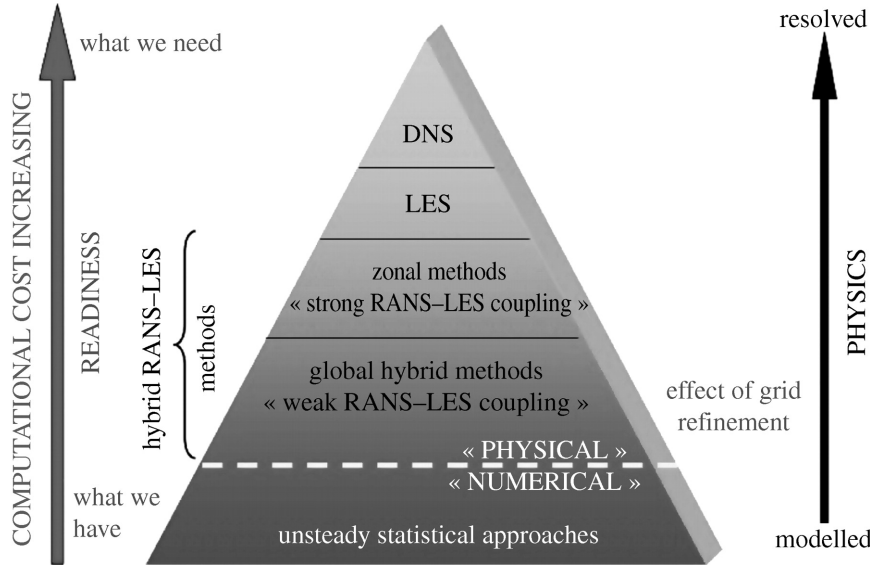


FIGURE 3.1: Brève classification des modèles de turbulence, Sagaut *et al.*

3.2 Modélisation de la turbulence

3.2.1 Approches statistiques

Les analyses statistiques de la turbulence sont les méthodes les plus anciennes, partant des équations non-linéaires de Navier-Stokes, elles sont apparues très rapidement comme l'approche la plus naturelle et nécessaire pour moyenner ces équations. C'est pourquoi ces approches furent-elles dominantes au cours des premières années de développement de modèles de turbulence. Elles avaient été évoquées dans les premiers travaux de J. Boussinesq qui, en 1877, a proposé le concept de viscosité turbulente [16] que O. Reynolds a complété, en 1894, [121] par une décomposition dite « de Reynolds » aux solutions des équations de Navier-Stokes. On doit aussi à ce dernier le dévoilement du caractère aléatoire de la turbulence. Dans les années 1930, G. I. Taylor apporta une contribution majeure à l'édifice en proposant une nouvelle approche basée sur l'analyse statistique des fluctuations du champ de vitesse. En 1945, L. Prandtl introduit le concept de longueur de mélange, il présente le premier modèle de turbulence, au sens moderne du terme, puisqu'il tente d'évaluer la viscosité de turbulence qui avait été introduite par Boussinesq pour fermer les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds (RANS).

Kolmogorov, a-t'on souvent affirmé, a introduit le premier les idées sous-jacentes du modèle $k - \epsilon$ à partir de 1942 [65] et ces idées ont également été proposées

un peu plus tard par Rotta en 1951 [128]. Mais ce sont Jones et Launder en 1972 [60] qui ont introduit la forme fondamentale du modèle $k - \epsilon$ qui est encore étudié de nos jours. Ensuite, Launder et Sharma [72] ont proposé des valeurs améliorées des constantes de ce modèle.

La modélisation statistique de la turbulence dite RANS pour *Reynolds Averaged Navier-Stokes*, consiste à moyenniser les équations de Navier-Stokes en décomposant chacune des variables physiques de l'écoulement dépendant du temps et de l'espace en une partie moyenne et une partie fluctuante (formule 3.1) :

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i, t) + \phi'(x_i, t) \quad (3.1)$$

où $\bar{\phi}(x_i, t)$ représente la moyenne du paramètre $\phi(x_i, t)$ et ϕ' la fluctuation.

Dans cette décomposition dite de Reynolds, la moyenne $\bar{\phi}(x_i, t)$ est donnée par :

$$\bar{\phi}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi^{(k)}(x_i, t) \quad (3.2)$$

où N représente le nombre de réalisations indépendantes portant sur le même écoulement. Cette moyenne d'ensemble est aussi appelée moyenne de Reynolds.

Si nous introduisons cette décomposition dans les équations de continuité moyennées, nous obtenons un terme de corrélation supplémentaire augmentant le nombre d'inconnues et qui devra être modélisé pour fermer le problème. Afin d'éviter cela, Favre a proposé en 1965 d'utiliser une moyenne pondérée par la masse. Elle est appelée moyenne de Favre et notée $\tilde{\phi}$:

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} \\ \overline{\rho\phi''} &= \bar{\rho}\tilde{\phi}'' = 0 \end{aligned}$$

Cette décomposition permet de supprimer les termes de corrélations faisant intervenir les fluctuations de la masse volumique de la forme $\overline{\rho'\phi'}$.

Les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds obtenues en appliquant la décomposition de Favre s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i)}{\partial x_i} &= 0 \\
\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \\
\frac{\partial(\tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial(\tilde{E} + \bar{P})\tilde{v}_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial(\tilde{v}_i\tilde{\sigma}_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial(\tilde{v}_i\tilde{\tau}_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x_j}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Deux termes supplémentaires apparaissent dans les équations ci-dessus :

$\tilde{\tau}_{ij} = \bar{\rho} \widetilde{v_i'' v_j''}$ appelé tenseur de Reynolds et $\tilde{Q} = -\bar{\rho} C_p \widetilde{v_j'' T''}$.

Ces termes doivent être modélisés en fonction des grandeurs de l'écoulement moyen. Il est donc nécessaire de fermer le problème en modélisant ces termes à l'aide de modèles, citons par exemple le modèle $k - \epsilon$ introduit par Launder et Spalding [73].

3.2.1.1 Problème de fermeture

Les modèles de fermeture des équations du mouvement moyen permettent de caractériser la nature statistique de l'agitation turbulente. Le désordre turbulent étant supposé statistiquement homogène et isotrope, il s'agit de caractériser les corrélations spatiales et temporelles du mouvement de la turbulence.

Nous avons vu que le système d'équations (3.4) fait apparaître des termes inconnus supplémentaires, suite au moyennage des équations de Navier-Stokes associé à la décomposition de Favre. Les inconnues des équations RANS sont représentées par la partie moyenne des variables de l'écoulement. Les inconnues supplémentaires qui sont apparues constituent les corrélations doubles des vitesses fluctuantes qui sont les composantes du tenseur des contraintes turbulentes (ou tenseur de Reynolds) et les corrélations assimilées à des flux turbulents de chaleur. Afin de résoudre le problème, nous devons donc appliquer un modèle permettant de calculer les contraintes turbulentes à partir des variables représentant l'écoulement moyen.

Ce problème est connu sous le nom de *problème de fermeture* ; il reste une difficulté fondamentale pour la modélisation de la turbulence.

Les hypothèses de fermeture sur lesquelles se basent les modèles de la turbulence sont nombreuses et variées. Les méthodes de fermeture en un point opèrent sur les équations statistiques aux divers moments de fluctuations de vitesse. On classe donc ces modèles selon l'ordre des moments retenus comme inconnue principale. On distingue généralement deux grandes classes de modèles : les modèles *au premier ordre* et les modèles *au second ordre*, ce sont les deux types de modèles les plus développés jusqu'à présent. La figure 3.2 classe ces modèles de fermeture en un point dont nous allons donner, pour chacun, une brève description.

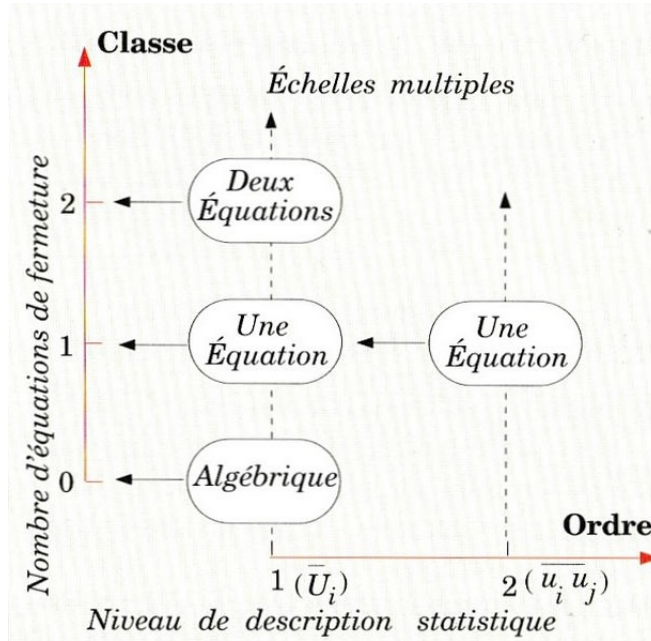


FIGURE 3.2: Classification des modèles de fermeture en un point [23]

Les modèles du premier ordre :

Les modèles du premier ordre sont les plus répandues et se répartissent en modèles à 0, 1 ou 2 équations de transport. L'idée fondamentale de ces modèles dits à viscosité de turbulence, est de relier algébriquement le tenseur de Reynolds au champ de vitesse moyen. Ils se basent sur l'hypothèse de Boussinesq qui établit une relation linéaire entre le tenseur de Reynolds et le gradient de vitesse moyenne [21] :

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad (3.5)$$

Le coefficient μ_t est la viscosité turbulente qui représente l'activité tourbillonnaire, k l'énergie cinétique de turbulence et δ_{ij} le symbole de Kronecker.

De plus, en supposant que les mécanismes de transfert turbulent de quantité de mouvement et de chaleur sont liés, le flux de chaleur turbulent \tilde{Q} peut être exprimé ainsi (formule 3.6) :

$$\bar{\rho} C_p \widetilde{v_j'' T''} = - \frac{C_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

où Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent fixé à 0.9.

Le problème consiste alors à évaluer les deux nouvelles variables (la viscosité turbulente μ_t et l'énergie cinétique de la turbulence) introduites par cette modélisation.

Le tableau 3.3 donne un succinct récapitulatif des avantages/inconvénients des principaux modèles cités ci-après.

- **Modèles à 0 équations de transport :**

Cette approche n'utilise pas d'équations pour décrire le transport des contraintes liées à l'agitation turbulente mais se base sur une relation algébrique. On distingue les schémas dits de *longueur de mélange* dont la théorie est issue des travaux de Prandtl [115] et Taylor [153]. Les lois de variation de longueur de mélange ont été largement développées depuis. Ces schémas relient la viscosité turbulente au gradient de vitesse moyenne en introduisant une échelle de longueur l_m appelée longueur de mélange qui est définie comme la longueur caractéristique d'interaction des tourbillons. La théorie algébrique de Prandtl définit la viscosité de turbulence de cette manière (formule 3.7) :

$$\mu_t = l_m^2 | \tilde{S}_{ij} | \quad \text{avec} \quad \tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7)$$

Il est difficile de déterminer la valeur de l_m qui n'a pas, en général, de caractère intrinsèque sauf dans des régions sous influence de parois. Elle peut être déterminée de manière empirique suivant l'écoulement considéré. Ces modèles sont souvent utilisés car ils sont rapides à mettre en œuvre et facile d'utilisation, ils sont employés avec succès dans des configurations classiques de l'aérodynamique de profils simples en l'absence de décollement.

- **Modèles à 1 équation de transport :**

Afin de surmonter les limitations engendrées par les modèles à zero équation qui ne traduisent pas précisément et de façon *universelle* les propriétés turbulentes de certains écoulements complexes, il est nécessaire de prendre en compte les modifications des propriétés locales en essayant d'obtenir une échelle de longueur caractéristique de la turbulence de manière plus formelle. Pour cela, les modèles à 1 équation relient ces caractéristiques locales à l'évolution d'une quantité transportable. D'où l'introduction d'une nouvelle équation permettant d'étudier l'évolution de la grandeur concernée qui est souvent représentative d'une échelle de vitesse des fluctuations turbulentes.

Le modèle de Spalart-Allmaras [145] utilise un modèle à une équation pour la viscosité de turbulence ν_t dépendant du temps et de l'espace :

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad (3.8)$$

L'échelle de longueur caractéristique d est définie comme la distance à la paroi la plus proche et la viscosité turbulente (3.8) est obtenue en résolvant l'équation de transport suivante :

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \underbrace{c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}}_{Production} - \underbrace{c_{w1}f_w\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2}_{Destruction} + \underbrace{\frac{1}{\sigma}\left[\nabla \cdot [(\nu + \tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu}] + c_{b2}\nabla\tilde{\nu} \cdot \nabla\tilde{\nu}\right]}_{Diffusion} \quad (3.9)$$

avec

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (3.10)$$

c_{v1} est une constante dont la valeur appropriée est choisie égale à 7.1. Le tenseur de déformation est notée par \tilde{S} et est relié à S par la relation suivante :

$$\tilde{S} = |S| + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad \text{où } |S| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (3.11)$$

Il reste à définir la constante c_{w1} apparaissant dans le terme de destruction. Selon Spalart et Allmaras, dans une couche logarithmique, où le tenseur \tilde{S} et la viscosité $\tilde{\nu}$ sont exprimés en fonction de la vitesse de friction u_τ et l'énergie cinétique k par $\tilde{S} = \frac{u_\tau}{kd}$ et $\tilde{\nu} = u_\tau kd$ respectivement, un équilibre entre les termes de production, de diffusion et de destruction est possible lorsque c_{w1} est définie en fonction des autres constantes comme suit :

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}$$

Enfin, la fonction adimensionnelle f_w est définie en fonction du ratio de deux grandeurs :

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}k^2 d^2} \quad (3.12)$$

et admet l'expression suivante :

$$f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}}, \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r)$$

Remarquons que f_w et r prennent une valeur égale à 1 dans la couche logarithmique et décroissent en dehors.

- **Modèles à 2 équations de transport :**

Afin de réduire l'empirisme de la détermination algébrique de l'échelle de longueur qui est présent dans les modèles à 0 et 1 équation, il est apparu rapidement naturel d'introduire une équation de transport supplémentaire

afin de calculer cette grandeur. Ainsi, les modèles du premier ordre à deux équations ont vu le jour. Ils se distinguent par le choix de la seconde fonction transportable utilisée. Il s'est avéré difficile d'établir rigoureusement une équation (ouverte) de transport pour l'échelle de longueur caractéristique par conséquent d'autres alternatives ont donc été proposées. Parmi ces modèles nous allons en citer quelques uns qui sont à ce jour largement étudiés.

Très fréquemment employé, le modèle $k - \epsilon$ (qui est décrit plus en détails dans la sous-partie 3.2.1.2) est un modèle à deux équations de transport. Il a été développé à l'origine pour prévoir le phénomène de relaminarisation des couches limites turbulentes en présence de gradients de pression faibles. Ce modèle n'est cependant pas efficace pour modéliser des régions en proche paroi, c'est pour cela qu'on le couple le plus souvent à des lois de paroi.

Des version améliorées ont alors vu le jour : le modèle $k - \epsilon$ à bas Reynolds (décrit dans la sous-partie 3.2.1.4) que nous avons choisi pour la plupart de nos calculs. Il introduit des fonctions d'amortissement pour traiter les zones en proche paroi sans passer par l'utilisation de lois de paroi.

Le modèle $k - \epsilon$ RNG est aussi une version améliorée du modèle $k - \epsilon$ de base. Il a été développé par le groupe Yakhot et Smith en 1992 [173] et consiste à utiliser des techniques basées sur la théorie des groupes de renormalisation en se plaçant dans l'espace de Fourier par une transformation de Fourier des équations de Navier-Stokes. Il s'agit ensuite de raisonner sur le nombre d'onde : les grandes échelles correspondent aux petits nombres d'onde et les petites aux grands nombres d'ondes. Par ailleurs, le champ de vitesse est décomposé en bandes de nombres d'ondes. Un procédé itératif est utilisé pour calculer l'influence de chaque bande en fonction des nombres d'ondes plus faibles adjacents. En principe, ce modèle répond beaucoup mieux aux effets de déformation rapide de certains écoulements turbulents que le modèle classique standard.

En 1942, Kolmogorov avait pensé adjoindre à l'énergie cinétique d'agitation, la fréquence $\omega \propto \sqrt{k}/l$ comme seconde fonction caractéristique d'un modèle de fermeture à deux équations. Cette théorie a été ensuite quelque peu oubliée puis a connu un regain d'intérêt à la fin des années quatre-vingt avec les travaux de Wilcox. En effet, le modèle $k - \omega$ de Wilcox utilise deux équations [167], une équation de transport pour l'énergie cinétique k , la seconde est une équation de transport pour la fréquence caractéristique de la turbulence notée ω . L'équation sur ω est construite à partir du changement de variable :

$$\omega \simeq \frac{\epsilon}{k}$$

Les différentes constantes du modèle sont obtenues empiriquement, à partir d'écoulements de base (turbulence homogène isotrope, écoulements de type couche limite avec un gradient de pression variable, favorable ou adverse). L'avantage de ce modèle est qu'il n'utilise aucune fonction d'amortissement, ni dans les seconds membres des équations de transports, ni dans l'expression de la viscosité turbulente. Bien qu'il soit particulièrement adapté pour le traitement en proche paroi, il reste très sensible aux conditions aux limites à imposer sur ω en dehors des couches limites.

Enfin, le dernier modèle que nous citerons dans cette catégorie est le modèle $k-\omega$ SST (*Shear Stress Transport*) de Menter [92]. C'est un modèle dit *bi-couche* qui superpose, au moyen d'une fonction de transfert, les modèles $k-\omega$ de Wilcox [167] et le modèle standard $k-\epsilon$ introduit par Launder [74]. Il a été construit afin de combiner les avantages de ces deux approches : il utilise le modèle $k-\omega$ dans la région interne de la couche limite et se raccorde au modèle $k-\epsilon$ dans la zone externe de la couche limite et dans les écoulements libres. Les deux schémas sont pondérés par une fonction de la distance à la paroi. Ce modèle est aussi robuste et performant que le modèle $k-\omega$ et n'est pas sensible à la turbulence de l'écoulement extérieur [90] grâce à l'emploi d'un modèle $k-\epsilon$.

Les modèles du second ordre :

Afin de diminuer le niveau d'approximation par rapport au modèle du premier ordre, il est possible de résoudre directement une équation de transport sur les tensions de Reynolds. C'est le principe des modèles du second ordre, introduits par Launder, Reece et Rodi vers 1975 qui ne consiste donc pas en la fermeture directe des équations de Navier-Stokes moyennées mais en la fermeture des équations de transport des corrélations doubles de vitesse fluctuante. L'équation de transport des tensions de Reynolds est donc résolue tout comme les équations du champ moyen, d'où l'appellation *modèles aux tensions de Reynolds* pour nommer ces schémas. Ce type de modèles nécessitent la donnée d'une échelle de temps, déduite en général d'une équation de dissipation. On distingue notamment les modèles du second ordre à relations algébriques et ceux à équations de transport des contraintes. Ils sont particulièrement adaptés aux écoulements avec tourbillons, à forte anisotropie et ils permettent de ne pas sur-estimer l'énergie cinétique dans le cas de forts cisaillements tels que les écoulements présentant une zone de séparation.

3.2. Modélisation de la turbulence

Modèles	Avantages	Inconvénients
Modèle de longueur de mélange	<ul style="list-style-type: none"> • Facile à implémenter. • Nécessite peu de ressources informatiques. • Bien établi. • Adapté aux fines couches de cisaillement (ie. jets, sillages). 	<ul style="list-style-type: none"> • Ne convient pas aux écoulements avec zones de séparation/recirculation
Spalart-Allmaras	<ul style="list-style-type: none"> • L'évaluation algébrique des échelles de longueur est peu coûteuse informatiquement. • Très bien adapté aux écoulements présentant des gradients de pression adverse. • Applicable aux études de type aérodynamique externe. 	<ul style="list-style-type: none"> • Le choix de l'échelle de longueur est empirique et difficile à définir lorsque l'on traite des géométries complexes. • L'extension de ce modèle au cas tridimensionnel est délicat.
Standard $k-\varepsilon$	<ul style="list-style-type: none"> • S'applique bien à un grand nombre d'écoulements à visée industrielle. • C'est le modèle le plus utilisé. 	<ul style="list-style-type: none"> • Ne convient pas aux écoulements avec gradient de pression adverse présentant des zones de séparation/ recirculation.
Wilcox $k-\omega$	<ul style="list-style-type: none"> • L'intégration des équations jusqu'à la paroi ne nécessite pas l'utilisation de fonctions de lissage supplémentaires pour les régimes de l'écoulement à bas nombres de Reynolds. • Les conditions aux limites turbulentes sont prescrites à la paroi ($k=0, \omega \rightarrow \infty$). 	<ul style="list-style-type: none"> • La séparation de la couche limite a lieu trop tôt et de manière excessive.
SST $k-\omega$	<ul style="list-style-type: none"> • Donne une représentation précise des phénomènes de séparation. • La fonction de mélange permet d'appliquer le modèle $k-\varepsilon$ dans les régions pleinement turbulentes loin de la paroi et le modèle $k-\omega$ en zone de proche paroi. • Très adapté aux écoulements avec ou sans pression de gradient adverse. • Plus précis et plus robuste que les modèles standards $k-\omega$ et $k-\varepsilon$. 	<ul style="list-style-type: none"> • L'utilisation de fonctions supplémentaires accroît rapidement la complexité et le besoin en ressources informatiques.

FIGURE 3.3: Tableau récapitulatif des modèles de fermeture au premier ordre (à partir d'un article de [57])

3.2.1.2 Modèle $k - \epsilon$ standard

Le modèle $k - \epsilon$ est un modèle du premier ordre à deux équations. C'est le plus testé à ce jour. Il utilise deux équations de transport, l'une pour déterminer l'énergie cinétique de turbulence k , l'autre pour donner son taux de dissipation ϵ . Le modèle $k - \epsilon$ standard a été introduit par Launder et Spalding [74]. Il permet de prendre en compte les effets de transport fondamentaux dans les mécanismes de la turbulence. Dans ce modèle, la viscosité de turbulence μ_t est définie en fonction de l'énergie cinétique turbulente k par unité de masse et de son taux de dissipation ϵ .

Plus précisément, en reliant ϵ à l'échelle de vitesse u et l'échelle de longueur l des gros tourbillons, on obtient par analyse dimensionnelle de la cascade d'énergie de Kolmogorov [136] :

$$\rho\epsilon \simeq \rho \frac{u^3}{l} \simeq \rho \frac{k^{3/2}}{l}$$

On peut exprimer la viscosité de turbulence μ_t en fonction de k et ϵ :

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.13)$$

où C_μ est une constante fixée à 0.09.

Les deux variables k et ϵ sont évaluées en résolvant les deux équations de transport :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho} \epsilon \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right]}{\partial x_j} + C_{\epsilon 1} \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.15)$$

Les paramètres $C_{\epsilon 1}$ et $C_{\epsilon 2}$ sont des constantes empiriques, σ_k et σ_ϵ sont appelés nombres de Prandtl respectivement pour k et ϵ . Ces paramètres, que l'on espère les plus universels possible, sont déduits de l'application du modèle sur une large gamme d'écoulements turbulents simples et prennent les valeurs suivantes :

$$C_{\epsilon 1} = 1.44 \quad C_{\epsilon 2} = 1.92 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

Les résultats des calculs dépendent fortement de la valeur de ces constantes, ce qui constitue une faiblesse du modèle. Par ailleurs, ce modèle repose sur des hypothèses relatives à des grands nombre de Reynolds et ne prend donc pas en compte les effets visqueux qui peuvent être dominants dans les zones de proche paroi. Par conséquent, pour ce type d'écoulements faisant intervenir une paroi solide, on couple le plus souvent ce modèle à des lois de paroi basées sur des approximations de la couche limite incompressible [20]. En appliquant ces lois, il n'est plus nécessaire d'intégrer les équations jusqu'à la paroi mais uniquement à une certaine distance de celle-ci.

3.2.1.3 Lois de paroi

La couche limite peut être traitée de deux manières :

- *Formulation bas-Reynolds* : cette approche permet de résoudre les équations jusqu'à la paroi afin de reproduire les effets de proche paroi. Elle est cependant coûteuse puisqu'elle nécessite une résolution plus fine du maillage dans la couche limite à proximité de la paroi. En effet, la vitesse mais aussi les variables de fermeture présentent près de la paroi d'importantes variations qui doivent être prédites précisément pour assurer une prédiction correcte de l'écoulement.
- *Formulation haut-Reynolds* : cette formulation est un autre moyen de traiter les petites échelles situées près de la paroi en introduisant un modèle analytique. Cette technique de loi de paroi permet de calculer des écoulements avec un maillage plus grossier, elle est donc plus efficace.

Nous utilisons dans nos calculs, lorsque nécessaire, la loi de paroi de Reichardt. Cette loi de paroi a l'avantage de pouvoir représenter la vitesse tangentielle de manière analytique dans les différentes zones de la couche limite turbulente :

- la sous-couche visqueuse ($y^+ < 5$),
- la zone logarithmique ($50 < y^+ < 500$),
- la zone tampon (qui raccorde ces 2 zones).

Soient les paramètres adimensionnels u^+ et y^+ définies ainsi :

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_f}, \quad y^+ = \frac{\rho u_f}{\mu} y \quad (3.16)$$

La vitesse de friction u_f est obtenue à partir du tenseur de cisaillement τ_w à la paroi :

$$u_f = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.17)$$

La loi de Reichardt permet de connecter la sous-couche laminaire de l'écoulement avec la zone logarithmique de la couche limite. Cette loi de paroi est bien adaptée pour la description des couches limites incompressibles et aussi pour étudier les couches limites faiblement compressibles. Elle est décrite en détail dans [52] et peut s'écrire comme suit :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-0.33y^+} \right) \quad (3.18)$$

3.2.1.4 Modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds

Le modèle $k - \epsilon$ standard présenté précédemment ne peut être utilisé dans le cas d'un écoulement à fort gradient de pression adverse, d'un écoulement avec décollement ou encore d'un écoulement avec échange de masse à la paroi.

Le Ribault en 1991 [122] a appliqué ce modèle standard pour la prédiction de plusieurs écoulements compressibles présentant une zone de recirculation et les résultats étaient tous insatisfaisants. Fontoura [35] a alors essayé, en 1990, de modifier les lois de paroi que l'on couple à ce type de modélisation pour arriver à traiter des écoulements complexes mais aucune loi générale n'a pu être établie. Il est alors apparu nécessaire de développer une nouvelle approche à partir du modèle $k - \epsilon$ standard permettant d'intégrer les équations jusqu'à la paroi sans avoir recours à des lois de paroi.

En 1972, Jones et Launder [60] ont été les premiers à proposer le modèle $k - \epsilon$ à bas nombre de Reynolds, depuis lors de nombreux modèles semblables ont été développés. Ce modèle a pour but de forcer la diminution de la turbulence en proche paroi. Pour cela, des fonctions d'amortissement sont introduites dans la formulation de la viscosité de turbulence et dans l'équation du taux de dissipation de l'énergie cinétique.

Dans le modèle $k - \epsilon$ bas-Reynolds proposé par Goldberg [43, 44], les tensions de Reynolds sont modélisées de la même manière que pour le modèle standard (équations 3.14 et 3.15), cependant la viscosité de turbulence est multipliée par une fonction d'amortissement f_μ qui a pour but de corriger μ_t :

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.19)$$

où C_μ est, comme dans le modèle standard, égale à 0.09.

La fonction d'amortissement f_μ est définie par :

$$f_\mu = \frac{1 - e^{-A_\mu R_t}}{1 - e^{-R_t^{1/2}}} \max(1, \psi^{-1}) \quad (3.20)$$

avec la constante $A_\mu = 0.01$ et $\psi = R_t^{1/2}/C_\tau$.

De plus, le nombre de Reynolds turbulent R_t est donné par :

$$R_t = k^2/(\nu\epsilon) \quad \text{avec } \nu = \mu/\rho \quad (3.21)$$

Dans ce modèle, les variables turbulentes k et ϵ sont déterminées par les équations

de transport suivantes :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho}\epsilon \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j \epsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right]}{\partial x_j} + \left(C_{\epsilon 1} \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \bar{\rho}\epsilon + E \right) T_\tau^{-1} \quad (3.23)$$

où T_τ est l'échelle de temps réalisable :

$$T_\tau = \frac{k}{\epsilon} \max(1, \psi^{-1}). \quad (3.24)$$

Cette échelle de temps vaut $\frac{k}{\epsilon}$ pour des nombres de Reynolds turbulent élevés donc lorsque ψ est grand, mais tend vers la valeur de l'échelle de Kolmogorov $C_\tau(\nu/\epsilon)^{1/2}$ pour $R_t \ll 1$.

Enfin, les constantes sont définies comme :

$$C_\tau = 1.41 \quad C_{\epsilon 1} = 1.42 \quad C_{\epsilon 2} = 1.83 \quad (3.25)$$

et E apparaissant dans le terme source de l'équation de ϵ vérifie :

$$E = \rho A_E V (\epsilon T_\tau)^{0.5} \xi \quad (3.26)$$

avec $A_E = 0.3$, $V = \max(\sqrt{k}, (\nu\epsilon)^{0.25})$ et $\xi = \max(\frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, 0)$, où $\tau = k/\epsilon$.

3.2.1.5 Correction de Menter

Nous avons développée et implémentée dans notre code une correction, dite *correction de Menter*, puis nous l'avons appliquée à nos simulations. Elle consiste à limiter la viscosité de turbulence par une loi de Bradshaw d'une manière similaire au modèle SST de Menter [91] qui a été conçu pour donner une représentation précise de phénomènes de séparation en prenant en compte les effets de transport dans l'expression de la viscosité turbulente. Il s'inspire du modèle de Johnson et King [59] dans lequel le tenseur de contrainte de Reynolds est supposé proportionnel à l'énergie cinétique de turbulence dans la région logarithmique de la couche limite turbulente. Initialement développée pour être couplée au modèle $k - \omega$ de Wilcox [166], la correction de Menter redéfinit la viscosité turbulente afin de s'assurer que cette proportionnalité est bien vérifiée. Plus précisément, le modèle repose sur la relation de Bradshaw (formule 3.27) qui relie les variations du tenseur de contrainte à l'énergie cinétique de turbulence :

$$\tau = \rho a k \quad (3.27)$$

où a est une constante.

Considérons par ailleurs le terme de production de l'énergie \mathcal{P} et le terme de dissipation D (formule 3.28) :

$$\mathcal{P} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad \text{et} \quad D = \rho \epsilon \quad (3.28)$$

avec $\mathcal{P} = D$ quand un équilibre local est atteint.

En se basant sur la définition de la viscosité de turbulence (formule 3.29) :

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.29)$$

et sur celle de la contrainte de cisaillement turbulente locale donnée par l'hypothèse de Boussinesq (formule 3.30) :

$$\tau = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.30)$$

nous pouvons réécrire le tenseur des contraintes turbulentes ainsi (formule 3.31) :

$$\tau = \rho \sqrt{c_\mu} \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{D}} k \quad (3.31)$$

Par un procédé d'identification, nous déterminons une valeur à la constante a : elle est égale à c_μ , dans le cas d'un équilibre local. En utilisant l'hypothèse de Bradshaw, la correction Menter redéfinit la viscosité de turbulence comme ci-dessous :

$$\mu_t = \frac{\rho k \sqrt{c_\mu}}{\max \left(\frac{\epsilon}{k \sqrt{c_\mu}}, \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| F \right)} \quad (3.32)$$

où $F = \tanh(\psi^2)$, avec $\psi = \max \left(2 \frac{k^{3/2}}{y\epsilon}, \frac{500 \mu c_\mu k}{\rho \epsilon y^2 Re} \right)$ et $c_\mu = 0.09$

Le modèle de Menter (formule 3.32) permet de corriger la viscosité de turbulence quand il n'y a pas d'équilibre local entre la production de la turbulence \mathcal{P} et sa dissipation D . Quand le gradient de la norme de la vitesse devient plus faible, c'est-à-dire dans des zones éloignées de la couche limite, la viscosité de turbulence habituelle (formule 3.29) est utilisée.

3.2.2 Simulation des grandes échelles (LES)

La simulation des grandes échelles (LES) est une méthode qui se situe, en terme de résolution, entre la DNS et l'approche RANS et elle est, en terme de temps de calcul, largement moins coûteuse que la DNS mais en général plus coûteuse que la simulation RANS.

La LES traite les échelles en fonction de leur taille : les grandes échelles sont directement résolues et les effets des petites échelles sur les grandes sont modélisés par le biais d'un modèle de sous-maille. En effet, les petites perturbations au caractère plus universel sont plus faciles à modéliser que les grandes structures non-homogènes.

Afin de séparer les grandes échelles à résoudre et les petites échelles à modéliser, un opérateur de filtrage est appliqué aux équations de Navier-Stokes compressibles :

Soient ϕ une grandeur dans l'espace spectral, $\{x, \zeta\}$ des vecteurs de coordonnées spatiales et t le temps alors l'opération de filtrage appliquée à ϕ est obtenue par convolution sur le domaine de calcul Ω :

$$\overline{\phi(x, t)} = \int_{\Omega} \phi(\zeta, t) G_{\Delta}(x - \zeta) d\zeta \quad (3.33)$$

où G est un filtre spatial qui détermine l'ensemble des fluctuations représentant les grandes échelles. La grandeur Δ correspond à la largeur du filtre choisi, elle peut être définie par : $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ où Δ_x , Δ_y et Δ_z sont les pas du maillage dans les trois directions. Les structures de taille inférieure à Δ sont écartées par l'opérateur alors que les plus grandes échelles sont préservées.

Ce filtre vérifie par ailleurs la condition de normalisation suivante :

$$\int_{\Omega} G_{\Delta}(\zeta) d\zeta = 1$$

Il agit ainsi comme une opération de moyenne. La champ de sous-maille non résolue, noté ϕ' , est défini par :

$$\phi' = \phi - \overline{\phi} \quad (3.34)$$

En pratique, pour un écoulement compressible, on utilise le plus souvent le filtre de Favre pondéré par la masse volumique (formule 3.3), ce qui fait perdre au filtrage sa propriété de projectivité et entraîne l'apparition de termes supplémentaires dans les équations filtrées.

Après avoir appliqué cette opération de filtrage aux équations de Navier-Stokes compressibles 2.1, 2.2 et 2.3, on obtient les équations de mouvement du champ des grandes structures de l'écoulement :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial x_j} &= 0 \\
 \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial(\mu\tilde{P}_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial M_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial M_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} \\
 \frac{\partial\tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial[(\tilde{E} + \bar{p})\tilde{v}_j]}{\partial x_j} &= \frac{\partial(\tilde{v}_j\tilde{\sigma}_{ij})}{\partial x_i} - \frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(Q_j^{(1)} + Q_j^{(2)} + Q_j^{(3)} \right).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Les inconnues des équations obtenues sont les variables filtrées et les termes supplémentaires qui apparaissent en raison de la non-linéarité du système, sont appelés termes de sous-maille, ils représentent des phénomènes physiques distincts.

Dans l'équation de quantité de mouvement, ils sont représentés par $M_{ij}^{(1)}$ et $M_{ij}^{(2)}$ et sont définis ainsi :

$$M_{ij}^{(1)} = \overline{\rho v_i v_j} - \bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j \text{ et } M_{ij}^{(2)} = \overline{\mu P_{ij}} - \mu\tilde{P}_{ij}$$

avec $M_{ij}^{(1)}$ et $M_{ij}^{(2)}$ désignant respectivement le transport du moment des échelles de sous-maille et le transport de viscosité due aux fluctuations de sous-maille.

Dans l'équation de bilan de l'énergie, les termes de sous-maille sont représentés par $Q_j^{(1)}$, $Q_j^{(2)}$ et $Q_j^{(3)}$ et s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
 Q_j^{(1)} &= \left[\tilde{v}_i \left(\tilde{E} + \bar{p} \right) - \overline{v_i (E + p)} \right] \\
 Q_j^{(2)} &= \overline{(\mu P_{ij} v_j)} - \left(\mu \tilde{P}_{ij} \tilde{v}_j \right) \\
 Q_j^{(3)} &= k \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} - k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

Le terme $Q_j^{(2)}$ représente l'effet dissipatif due au transport de la viscosité des échelles de sous-maille et $Q_j^{(3)}$ est le terme de diffusion de la chaleur.

Enfin, le terme de sous-maille $Q_j^{(1)}$ décrit trois phénomènes physiques distincts :

- le transport de l'énergie dû aux fluctuations des petites échelles ;
- l'évolution de l'énergie interne due à la compressibilité des échelles de sous-maille $\left(p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$;
- la dissipation de l'énergie due aux mouvements des échelles de sous-maille dans le champ de pression $\left(u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \right)$.

Afin de fermer le système, ces termes de sous-maille sont ensuite traitées par un modèle de sous-maille qui va modéliser les interactions de ces petites échelles avec les grandes échelles du spectre turbulent. Parmi les modèles de sous-maille employés pour la fermeture du problème, on retrouve entre autres, le modèle de Smagorinsky [142], le modèle WALE (Wall-Adapting Locale Eddy-Viscosity) [101] et une version dynamique du modèle de Smagorinsky basée sur la procédure dynamique de Germano [39]. Ce sont les modèles de sous-maille que nous utilisons dans nos calculs.

3.2.3 Modèles de sous-maille

3.2.3.1 Modèle de Smagorinsky

Le modèle développé par Smagorinsky en 1963 [142], le plus connu à ce jour, a été étendu aux écoulements compressibles par Lesieur *et al.* [77] en 1996. Sa formulation est simple mais suffisante pour simuler des écoulements présentant une turbulence homogène et isotrope. Dans ce modèle, la viscosité turbulente de sous-maille μ_{SGS} est définie comme le produit d'une échelle de longueur par une échelle de vitesse (formule 3.37). Il se base sur des hypothèses de transferts de chaleur et de gradients de températures modérés.

De plus, le terme de sous-maille dans l'équation de la quantité de mouvement est le tenseur des contraintes de sous-maille classique :

$$M_{i,j} = \overline{\rho v_i v_j} - \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j \quad (3.36)$$

où, on le rappelle, la barre renvoie au filtre de la grille et le tilde au filtre de Favre. La partie isotrope du tenseur $M_{i,j}$ peut être négligée sous l'hypothèse de faible effet de compressibilité des fluctuations de sous-maille. Sa partie déviatorique $T_{i,j}$ est exprimée à partir d'un terme de viscosité turbulente :

$$T_{i,j} = -2\mu_{SGS} \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \right) \text{ et } \mu_{SGS} = \bar{\rho} (C_s \Delta)^2 | \tilde{S} | \quad (3.37)$$

où $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ est le tenseur des contraintes résolues et μ_{SGS} la viscosité de sous-maille. Le terme Δ représente la largeur locale de la grille que nous définissons par la racine cubique du volume d'un élément T_l du maillage :

$$\Delta_l = Vol(T_l)^{\frac{1}{3}} \text{ et } | \tilde{S} | = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}} \quad (3.38)$$

La constante de Smagorinsky est fixée *a priori* à la valeur $C_s = 0.1$. Elle est souvent utilisée, surtout dans les écoulements de cisaillement.

Dans l'équation d'énergie, les effets des fluctuations de sous-maille sont modélisés en introduisant une constante de Prandtl de sous-maille qui est définie *a priori* :

$$Pr_{SGS} = C_p \frac{\mu_{SGS}}{K_{SGS}} \quad (3.39)$$

où K_{SGS} correspond au coefficient de conductivité de sous-maille. Il prend en compte l'énergie totale de diffusion due aux fluctuations de sous-maille et il est ajouté au coefficient de conductivité moléculaire.

3.2.3.2 Modèle dynamique de Germano

Dans le cas d'un écoulement non homogène faisant apparaître différents phénomènes physiques, la viscosité de turbulence varie fortement en temps mais aussi en espace. Alors que le modèle de Smagorinsky classique se base sur une constante C_S fixée *a priori*, Germano a proposé une adaptation de ce modèle [39], en remplaçant cette constante par un paramètre adimensionnel $C(x, t)$ dépendant, en chaque point, de la variable d'espace x et du temps t . En effet, comme il n'est pas possible d'établir une constante unique universelle décrivant tous les phénomènes d'un écoulement donné, il est donc intéressant d'utiliser un ajustement automatique de ce paramètre. Cette procédure permet ainsi d'estimer dynamiquement le coefficient de viscosité de turbulence, ce qui rend le modèle plus adapté pour prédire des écoulements turbulents complexes.

La méthode repose sur un *filtre test* (noté par un chapeau) de largeur plus grande que celle du filtre de grille :

$$\hat{\phi}(x, t) = \int_{\Omega} \phi(\zeta, t) \hat{G}_{\Delta}(x - \zeta) d\zeta \quad (3.40)$$

Elle consiste à appliquer ce filtre test aux équations de Navier-Stokes déjà filtrées par le filtre de grille. Les termes supplémentaires obtenus après ces étapes de filtrage sont ensuite modélisés par le modèle de sous-maille.

Le terme de sous-test \mathcal{M}_{ij} qui apparaît dans l'équation de quantité de mouvement filtrée par le filtre test est modélisé comme tenseur de contrainte :

$$\mathcal{M}_{ij} = \widehat{\rho v_i \rho v_j} - \left(\frac{\widehat{\rho v_i v_i}}{\widehat{\rho}} \right) = -C \hat{\Delta}^2 \hat{\rho} | \hat{S} | \hat{P}_{ij} \quad (3.41)$$

où $\hat{\Delta}$ est la largeur du filtre test.

On peut montrer que le terme de tenseur de contrainte de sous-maille et de sous-test sont liés par la relation suivante :

$$\mathcal{L}_{ij} = \widehat{\rho \tilde{v}_i \tilde{v}_j} - \frac{1}{\widehat{\rho}} (\widehat{\rho \tilde{v}_i \tilde{v}_i} \widehat{\rho \tilde{v}_j}) = \mathcal{M}_{ij} - \widehat{M}_{ij}^1 \quad (3.42)$$

Puis, en injectant les équations de T_{ij} (formule 3.37) et de \mathcal{M}_{ij} (formule 3.41) dans l'identité (formule 3.42), on obtient le champ tensoriel suivant :

$$L_{ij} = (C\Delta^2)B_{ij} \quad (3.43)$$

avec $L_{ij} = \mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3}\mathcal{L}_{kk}\delta_{ij}$ et $B_{ij} = \bar{\rho}|\widehat{\tilde{S}}|\widehat{\tilde{P}}_{ij} - \left(\frac{\widehat{\Delta}}{\Delta}\right)^2 \widehat{\rho}|\widehat{\tilde{S}}|\widehat{\tilde{P}}_{ij}$

La seule inconnue dans l'équation 3.43 est $C\Delta^2$ qui peut être déterminée par une méthode des moindres carrés :

$$C\Delta^2 = \frac{B_{ij}L_{ij}}{B_{ij}B_{ij}} \quad (3.44)$$

Notons que le choix de calculer $C\Delta^2$ plutôt que C permet d'enlever l'indétermination dans la définition de la largeur du filtre.

Enfin, le paramètre Pr_t est calculé d'une manière analogue.

Cette procédure dynamique est souvent instable en raison du comportement oscillatoire de $C\Delta^2$ présentant des pics négatifs et une auto-corrélation en temps importante. Dans le but de réduire ce problème, un lissage local est appliqué en moyennant sur les cellules de grille voisines. Une procédure de *clipping* est également mis en place, donnant la valeur nulle au paramètre $C\Delta^2$ lorsque la somme des viscosités de sous-maille et moléculaire est négative.

Ce principe est applicable à tous les modèles faisant apparaître explicitement, dans leur formulation, une constante arbitraire. Les avantages de ce modèle dynamique sont nombreux. Il permet de prédire correctement le comportement asymptotique d'une couche limite laminaire et ne nécessite pas l'utilisation de fonctions d'amortissement ou d'intermittence. De plus, contrairement aux modèles non dynamiques, il est capable de prendre en compte le processus de la cascade inverse (Backscatter).

3.2.3.3 Modèle WALE

Le modèle de viscosité de sous-maille *Wall-adapting local eddy-viscosity (WALE)* proposé par Nicoud et Ducros [101] permet de mieux prédire le comportement asymptotique exact de la tension de sous-maille de cisaillement. Pour cela, le déviateur de la partie symétrique du carré du tenseur gradient de vitesse $\tilde{S}_{i,j}^d$ est introduit (formule 3.45). Cela conduit à une viscosité de turbulence qui tend asymptotiquement vers la valeur nulle à l'approche de la paroi, selon une loi $\sim y^3$. Ce modèle a donc la capacité de ne produire aucune viscosité turbulente dans le cas d'une couche limite laminaire. De ce fait, la quantité de diffusion turbulente devient négligeable et cela permet le développement d'ondes non linéaires

périodiques en azimuth et dans la direction axiale qui constituent les solutions des équations de Navier-Stokes lors de la transition de l'écoulement de l'état laminaire à celui turbulent.

De plus, ce modèle a l'avantage de ne pas dépendre de la position ni de la direction de la paroi, ce qui le rend particulièrement adapté aux maillages non-structurés ou aux écoulements complexes, avec lesquels il est difficile de calculer la distance jusqu'à la paroi.

Dans ce modèle, le terme de viscosité turbulente μ_{SGS} est défini par :

$$\mu_{SGS} = \bar{\rho}(C_W\Delta)^2 \frac{\left(\tilde{S}_{i,j}^d \tilde{S}_{i,j}^d\right)^{3/2}}{\left(\tilde{S}_{i,j} \tilde{S}_{i,j}\right)^{5/2} + \left(\tilde{S}_{i,j}^d \tilde{S}_{i,j}^d\right)^{5/4}} \quad (3.45)$$

avec $\tilde{S}_{i,j}^d$ qui est la partie symétrique du tenseur $g_{ij}^2 = g_{ik}g_{kj}$, où $g_{ik} = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j}$.

Ce qui donne :

$$\tilde{S}_{i,j}^d = \frac{1}{2} (g_{ij}^2 + g_{ji}^2) - \frac{1}{3} \delta_{ij} g_{kk}^2 \quad (3.46)$$

La définition de la largeur du filtre Δ est la même que celle du modèle Smagorinsky (formule 3.38). Dans [101], la constante C_W est fixée à 0.5.

3.2.4 Modélisation hybride : DES et ses variantes

3.2.4.1 Detached Eddy Simulation (DES)

La version originale du modèle DES a été énoncée, pour la première fois par P. R. Spalart *et al.* [147] en 1997, elle avait pour but de se débarrasser des principales limitations de la simulation des grandes échelles. Par la suite, Travin *et al.* [159] ont développé et implémenté une formulation générale de la méthode DES, en s'inspirant du modèle SST de Menter [92].

C'est un modèle hybride qui applique l'approche RANS ou le modèle LES selon la résolution du maillage. Le point fort du modèle DES est qu'il fait entrer en jeu un seul modèle de turbulence : il fonctionne comme un modèle de sous-maille dans les régions où la densité du maillage est assez fine pour la LES, et comme approche RANS en dehors de ces zones. Plus précisément, les régions de proche paroi sont traitées par un modèle RANS (celui que l'utilisateur choisi) et les zones de l'écoulement de cisaillement libre sont résolues en LES. Sa formulation est assez simple, elle s'appuie, dans le modèle original, sur celle de Spalart-Allmaras qui, on le rappelle, résout une équation de transport pour une quantité $\tilde{\nu}$ équivalente à la viscosité cinématique turbulente loin des parois. Bien qu'elle soit plutôt empirique, la DES est l'une des approches hybrides la plus utilisée à ce jour, en particulier dans les secteurs de l'ingénierie.

Le modèle DES de Travin *et al.* se fonde sur la formulation Spalart-Allmaras (décrite dans la partie 3.2.1.1) mais utilise, à la place de la distance à la paroi d , une nouvelle échelle de longueur \tilde{d} qui s'exprime en fonction de la taille de maille Δ :

$$\tilde{d} = \min(d, C_{DES}\Delta) \quad (3.47)$$

où C_{DES} est une constante empirique qui vaut 0.65 et qui a été calibrée sur un calcul de *Turbulence Homogène Isotrope*. La quantité Δ correspond, pour les maillages structurés, à la plus grande dimension de la cellule :

$$\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \text{ ou alors } \Delta = \sqrt{(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)} \quad (3.48)$$

Pour les maillages non structurés, la longueur Δ est égale au diamètre de la cellule multiplié par la paramètre $3^{-\frac{1}{2}}$.

Ce choix de l'échelle \tilde{d} assure que le traitement RANS soit retenu dans les couches limites, i.e. dans les régions de proche paroi du solide où $d \ll \Delta$ alors que les zones de mélange et de sillage, situées à $d \gg \Delta$, sont directement résolues par l'approche LES.

Cette méthode présente toutefois plusieurs limites. En effet, les régions de transition de RANS à LES (lorsque $d \simeq \Delta$) créent des zones grises (appelées *grey regions* en anglais) dépendantes de la taille du maillage et dans lesquelles le comportement du modèle n'est pas très clair, ce qui réduit sa prédictibilité. De plus, la LES peut être activée dans la couche limite attachée dans le cas d'un maillage raffiné peu étiré, ce qui affecte le mode RANS en réduisant le terme de viscosité turbulente et peut conduire à un phénomène dit de *Grid-Induced separation* : la transition entre les deux modes LES et RANS est essentiellement gouvernée par des considérations géométriques (dépendance à la distance à la paroi), la couche limite peut ainsi se séparer prématurément en certains points arbitraires en raison d'un traitement LES dans ces zones. Ce comportement a été révélé par Menter *et al.* en 2003. Afin de remédier à ce problème, le modèle Delayed-DES (DDES) a été proposé par Spalart *et al.* en 2006 [146].

3.2.4.2 Delayed-Detached Eddy Simulation (DDES)

L'approche DDES, inspirée des travaux de Menter et Kuntz [94], permet de retarder (*delay*) une transition précoce de RANS à LES dans la couche limite en modifiant l'échelle de longueur \tilde{d} (formule 3.47) du modèle DES.

Une fonction f_d est introduite :

$$f_d = 1 - \tanh\left([8r_d]^3\right) \text{ où } r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\sqrt{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \kappa^2 d^2}} \quad (3.49)$$

La constante κ dite de Von Kármán vaut 0.41.

La fonction f_d est définie de telle manière à ce qu'elle soit approximativement égale à 0 dans la couche limite et à 1 en dehors de la couche limite où $r_d \ll 1$. De plus, l'échelle de longueur du modèle Spalart-Allmaras est redéfinie alors de la façon suivante :

$$\tilde{d} = d - f_d \max[0; (d - C_{DES}\Delta)] \quad (3.50)$$

Avec cette redéfinition de l'échelle de longueur, lorsque f_d tend vers 0, la longueur d'échelle \tilde{d} est égale à d , une modélisation RANS est donc activée. Alors que pour $f_d \rightarrow 1$, \tilde{d} est donnée par :

$$\tilde{d} = d - f_d \max[0; (d - C_{DES}\Delta)] = \min(d; C_{DES}\Delta)$$

ce qui correspond au critère de choix de la DES.

Ce modèle est moins dépendant du maillage que la DES grâce à cette nouvelle définition de l'échelle de longueur qui permet de forcer le mode RANS dans la couche limite et qui garantit la transition vers la LES à l'extérieur de cette couche.

Pour certains types d'écoulements, lors du passage du mode RANS à la LES dans la couche limite, les zones grises donnent lieu à un phénomène que l'on connaît sous le nom de *log-layer mismatch*. Si l'on considère les profils de vitesse, cela signifie que celui prédit par la LES ne correspond pas à celui obtenu avec l'approche RANS en raison du décalage entre les tenseurs turbulents calculés de part et d'autre de l'interface RANS-LES. Ce décalage est provoqué par la réduction rapide de la viscosité de turbulence à travers l'interface RANS-LES et par la sous-estimation des tenseurs résolus du côté LES de l'interface. Une conséquence de ce phénomène est en principe la sous-estimation de la force de frottement.

Différentes stratégies ont été mises en place pour remédier à ces problèmes de zones grises et de log-layer mismatch : des fluctuations turbulentes peuvent être ajoutées à l'entrée/sur l'interface RANS-LES normale à la paroi pour compenser le manque de turbulence dans les régions RANS. Des méthodes visant à réduire la viscosité de turbulence du côté LES de l'interface peuvent aussi être appliquées, parfois en complément de la première stratégie.

Le modèle IDDES (*Improved delayed-detached eddy simulation*) a été proposé par Shur *et al.* en solution à ces problèmes.

3.2.4.3 Improved Detached Eddy Simulation (IDDES)

Le modèle IDDES (Improved Delayed Detached Eddy Simulation) [140] vise à construire un seul ensemble d'équations permettant de combiner la DDES (ou la DES) et la WMLES (Wall Modeled Large Eddy Simulation) [113]. En comparaison à la DDES, le modèle IDDES possède donc une capacité de loi de paroi

supplémentaire, celle prodiguée par la WMLES, et assure une transition continue et progressive du mode RANS au mode LES. Un nouvel élément essentiel dans le fomulation de ce schéma est la définition d'une échelle de sous-maille qui dépend non seulement de la taille des mailles mais aussi de la distance à la paroi. Lorsque des conditions d'entrée instationnaires sont suffisamment présentes, le mode WMLES est activé, dans le cas contraire l'approche IDDES agit comme la DDES, i.e. elle donne une solution RANS pour l'écoulement attaché et une solution de type DES pour les zones de séparation.

En IDDES, l'échelle de longueur de sous-maille est définie en faisant intervenir la distance à la paroi comme suit :

$$\Delta = \min\left(\max[C_w d_w, C_w h_{max}, h_{wn}], h_{max}\right) \quad (3.51)$$

où d_w est la distance à la paroi, C_w est une constante empirique fixée à 0.15, h_{wn} est la taille de maille dans la direction normale à la paroi et h_{max} est la valeur maximale de Δ obtenue lorsque d_w est infinie, c'est-à-dire dans les régions très éloignées des parois, et se trouve exprimée par la longueur maximale des mailles dans les trois directions :

$$h_{max} = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Cette approche se base sur un ensemble de fonctions qui vise à donner des performances correctes pour les deux modélisations utilisées : DDES et WMLES, et de leur couplage. Les deux modèles sont combinés par le biais d'une longueur caractéristique l_{IDDES} du modèle hybride définie de façon à avoir un choix automatique de l'un ou l'autre des modèles DDES ou WMLES selon le type de l'écoulement et du maillage utilisé. La longueur l_{IDDES} est donnée par l'expression suivante :

$$l_{IDDES} = \tilde{f}_d(1 + f_e)l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d)l_{LES} \quad (3.52)$$

où l_{RANS} désigne la distance à la paroi, $l_{RANS} = d_w$ et l_{LES} est la longueur caractéristique du modèle LES, $l_{LES} = C_{DES}\Delta$ avec Δ l'échelle de sous-maille (équation (3.51)). Le terme \tilde{f}_d est la fonction de couplage définie par :

$$\tilde{f}_d = \max\left((1 - f_{dt}), f_B\right) \quad (3.53)$$

où $f_{dt} = 1 - \tanh[(r_{dt})^3]$ avec r_{dt} l'analogue turbulent de r_d de la méthode DDES (formule 3.49) :

$$r_{dt} = \frac{\nu_t}{\sqrt{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} k^2 d_w^2}} \quad (3.54)$$

et où f_B est la fonction de couplage utilisée dans la modélisation WMLES qui dépend du rapport $\frac{d_w}{h_{max}}$:

$$f_B = \min\left(2\exp(-9\alpha^2), 1\right), \quad \alpha = 0.25 - \frac{d_w}{h_{max}} \quad (3.55)$$

Lorsque $r_{dt} \ll 1$, f_{dt} sera proche de 1 d'où $\tilde{f}_d = f_B$, ainsi le modèle fonctionne en mode WMLES. Dans le cas contraire, le modèle s'approche du mode DDES.

3.2.5 Autres approches hybrides RANS/LES

Cette partie présente de manière succincte d'autres approches hybrides basées sur des stratégies différentes. Pour plus de détails le lecteur peut se reporter aux références données pour chaque modèle.

3.2.5.1 Scale-Adaptive Simulation (SAS)

La SAS est une version améliorée de la formulation URANS introduite par Menter [89]. C'est un modèle à viscosité turbulente à deux équations avec des équations de transport sur l'énergie et l'échelle de longueur. Dans sa formulation, un terme source est ajouté dans l'équation de l'échelle de longueur. Ce terme source est fonction de la grandeur L_{vk} qui est un rapport entre l'échelle intégrale et celle de Von Kármán :

$$L_{vk} = \kappa \left| \frac{\overline{U'}}{\overline{U''}} \right|; \quad \overline{U''} = \sqrt{\frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j^2}}; \quad \overline{U'} = S = \sqrt{2 \cdot S_{ij} S_{ij}}; \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right)$$

L'idée est d'adapter les échelles du modèle afin de réduire la viscosité de turbulence de manière adéquate. Le mode LES est appliqué dans les zones de fort cisaillement, ce qui permet aux structures cohérentes de se développer. A noter que cette méthode a l'avantage de ne pas mettre directement en jeu la taille des mailles, elle fournit donc une solution auto-adaptative.

3.2.5.2 Shielded Detached Eddy Simulation (SDES)

Le modèle SDES [118] appartient à la grande famille de modélisation DES mais elle offre des alternatives différentes pour la construction de la fonction de couplage et la définition de l'échelle de sous-maille. La fonction de couplage protège la couche limite calculée en RANS d'un passage prématuré vers une résolution LES, ce qui assure un meilleur traitement de la couche limite attachée. De plus, la nouvelle définition de l'échelle de sous-maille garantit une transition plus rapide « RANS-LES » dans les couches de cisaillement séparées. Sa formulation s'obtient par l'ajout d'un terme puits dans l'équation de transport :

$$\epsilon_{SDES} = -\beta^* \rho \kappa \omega \cdot F_{SDES} \quad (3.56)$$

$$\text{avec } F_{SDES} = \left[\max \left(\frac{L_t}{C_{SDES} \Delta_{SDES}} (1 - f_s), 1 \right) - 1 \right]$$

La fonction de couplage f_s plus efficace dans cette formulation, permet d'utiliser une taille de maille réduite par rapport à celle d'une approche DES classique. L'échelle de sous-maille est définie comme suit :

$$\Delta_{SDES} = \max\left(\sqrt[3]{Vol}, 0.2\Delta_{max}\right)$$

Le terme $\sqrt[3]{Vol}$ correspond à la largeur locale de grille correspondant à la racine cubique du volume de l'élément du maillage considéré (comme en LES) et Δ_{max} est la plus grande dimension de la cellule (comme dans la formulation DES). Le facteur 0.2 assure que pour des mailles fortement étirées, la taille de maille reste 5 fois plus petite que pour celle d'une approche DES/DDES.

3.2.5.3 Very Large Eddy Simulation (VLES)

Ce modèle hybride, qui se fonde sur l'approche de Speziale, a été récemment développé [51]. Sa stratégie est de passer de façon continue du RANS en DNS en fonction de la résolution numérique, le but étant d'améliorer la version VLES originale. Pour cela on traite les zones de proche paroi par une approche RANS, identiquement au concept de la DES, les régions éloignées des parois sont quand à elles résolues en LES en introduisant une longueur d'échelle supplémentaire. Dans l'approche VLES de Speziale [51], on introduit dans la formulation RANS conventionnelle, une fonction qui contrôle la résolution. Le tenseur de sous-maille turbulent est de ce fait modélisé en amortissant le tenseur de Reynolds :

$$\tau_{ij}^{sub} = F_r \tau_{ij}^{RANS}$$

où F_r est la fonction de contrôle de résolution donnée par :

$$F_r = \left[1 - \exp\left(\frac{-\beta\Delta}{L_k}\right)\right]^n \quad (3.57)$$

avec $\beta \sim O(10^{-3})$ et $n \sim O(1)$ sont les paramètres du modèle, Δ est la taille de maille et L_k l'échelle de longueur de Kolmogorov donnée par :

$$L_k = \frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{\epsilon^{\frac{1}{4}}} \quad (3.58)$$

Lorsque $\frac{\Delta}{L_k} \rightarrow 0$, c'est-à-dire lorsque le maillage est suffisamment fin pour capturer les plus petites échelles de l'écoulement, $\tau_{ij}^{sub} = 0$: le modèle s'approche de la méthode DNS. Dans le cas contraire, lorsque le maillage est grossier et donc $\frac{\Delta}{L_k} \rightarrow \infty$ on a $\tau_{ij}^{sub} = \tau_{ij}^{RANS}$ et le comportement d'un modèle RANS régulier est obtenu. Entre les deux limites, cette méthode hybride fonctionne selon l'approche Very Large Eddy Simulation (VLES).

3.2.5.4 Zonal/Embedded LES (ELES, ZLES)

Dans ce type d'approches zonales [93, 25, 61], il s'agit de prédéfinir différentes zones durant la phase de pré-traitement de la simulation qui seront ensuite traitées par des modèles de turbulence appropriés. Le domaine est en principe divisé au préalable en zones RANS et LES, entre ces régions le modèle de turbulence passe de l'approche RANS à celle LES. Dans le but de garder un schéma cohérent, on introduit généralement de la turbulence synthétique à l'interface RANS-LES. Ce qui implique que l'interface ne doit pas être placée dans une zone critique de l'écoulement puisque les actuels générateurs de turbulence ne fournissent pas de fluctuations turbulentes assez réalistes pour traiter des écoulements fortement instationnaires.

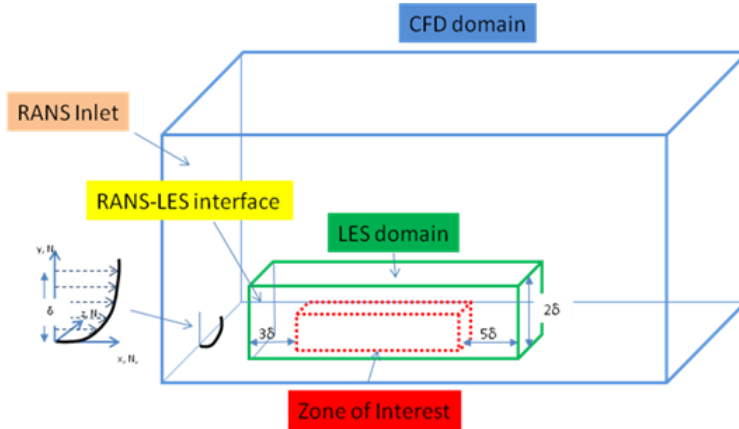


FIGURE 3.4: Schématisation du principe ELES

L'approche ELES est en principe utilisée pour modéliser une petite zone LES intégrée dans un domaine de calcul RANS plus important. Le domaine traité en RANS contient tout le domaine de calcul alors que la partie résolue en LES représente une petite portion de la géométrie initiale. La figure 3.4 schématise la configuration d'une simulation ELES avec, par exemple, une zone centrale (en rouge) que l'on souhaite traiter, il peut s'agir d'une couche limite présentant une bulle de recirculation. Elle est entourée du domaine LES séparé du reste de la zone RANS par des interfaces.

3.3 Modélisation hybride RANS/VMS-LES

3.3.1 Projection variationnelle multi-échelle pour la LES

Dans cette section, nous présentons l'approche VMS-LES utilisée dans notre étude. La simulation des grandes échelles avec projection variationnelle dépend fortement de la méthode de discrétisation spatiale des équations du problème.

Cette approche consiste, comme pour la LES, à séparer les échelles de l'écoulement, mais cette fois-ci en trois parties : grandes échelles résolues, petites échelles résolues et échelles non résolues. La variable de l'écoulement est alors décomposée de la façon suivante :

$$W = \overline{W} + W' + W^{SGS} \quad (3.59)$$

où \overline{W} désigne la composante associée aux grandes échelles résolues, W' aux petites échelles résolues et W^{SGS} aux échelles de sous-maille non résolues.

Dans notre étude, nous suivons la formulation variationnelle multi-échelle proposée par Farhat *et al.* dans [33]. Dans la suite, nous décrivons cette approche qui a été développée pour pouvoir être appliquée au cas de discrétisations par éléments finis et par volumes finis. On considère que le domaine de calcul Ω est discrétisé par un maillage tétraédrique non structuré contenant N nœuds. Une cellule duale C_i est construite autour de chaque nœud i .

On note χ_i les fonctions de base associées aux volumes finis qui sont utilisées pour le traitement des flux convectifs, et Φ_i les fonctions de base correspondant aux éléments finis utilisées pour résoudre les flux diffusifs. Après discrétisation par une formulation mixte éléments finis/volumes finis, les équations de Navier-Stokes deviennent en chaque nœud i :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}, \chi_i \right) + (\nabla \cdot F(W), \chi_i) + (\nabla \cdot V(W), \Phi_i) = 0 \quad (3.60)$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire L^2 , $F(W)$ sont les flux convectifs et $V(W)$ les flux diffusifs.

On note par \mathcal{V}_{FV} et \mathcal{V}_{FE} les espaces fonctionnels engendrés respectivement par les fonctions de base χ_i et Φ_i . La décomposition *a priori* en grandes et petites échelles résolues et échelles non résolues permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{FV} &= \overline{\mathcal{V}}_{FV} \oplus \mathcal{V}'_{FV} \oplus \widehat{\mathcal{V}}_{FV} \\ \mathcal{V}_{FE} &= \overline{\mathcal{V}}_{FE} \oplus \mathcal{V}'_{FE} \oplus \widehat{\mathcal{V}}_{FE} \end{aligned} \quad (3.61)$$

où les notations “ $\overline{}$ ”, “ \mathcal{V}' ” et “ $\widehat{}$ ” désignent respectivement les grandes échelles résolues, les petites échelles résolues et les échelles non résolues. Par conséquent, la décomposition de la variable de l'écoulement W peut être écrite comme suit :

$$W = \overline{W} + W' + \widehat{W} \quad (3.62)$$

Nous pouvons réécrire les équations de Navier-Stokes semi-discrétisées (3.60) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} A(\chi_i, W) & = 0 \\ B(\chi_i, \Phi_i, W) & = 0 \\ C(\chi_i, \Phi_i, W) & = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

où $A(\chi_i, W)$, $B(\chi_i, \Phi_i, W)$ et $C(\chi_i, \Phi_i, W)$ représentent respectivement les équations semi-discrétisées associées à la masse volumique, à la quantité de mouvement et à l'énergie totale.

Les équations régissant les grandes échelles résolues sont alors données par :

$$\begin{cases} A(\bar{\chi}_i, \bar{W} + W' + \widehat{W}) = 0 \\ B(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W} + W' + \widehat{W}) = 0 \\ C(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W} + W' + \widehat{W}) = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} A(\bar{\chi}_i, \bar{W} + W') + A^*(\bar{\chi}_i, \bar{W}, W', \widehat{W}) = 0 \\ B(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W} + W') + B^*(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W}, W', \widehat{W}) = 0 \\ C(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W} + W') + C^*(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W}, W', \widehat{W}) = 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

où les termes $A^*(\bar{\chi}_i, \bar{W}, W', \widehat{W})$, $B^*(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W}, W', \widehat{W})$ et $C^*(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W}, W', \widehat{W})$ représentent la contribution des échelles non résolues dans les équations définissant les grandes échelles résolues.

De même, les équations régissant les petites échelles résolues sont définies par :

$$\begin{cases} A(\chi'_i, \bar{W} + W' + \widehat{W}) = 0 \\ B(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W} + W' + \widehat{W}) = 0 \\ C(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W} + W' + \widehat{W}) = 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} A(\chi'_i, \bar{W} + W') + A^*(\chi'_i, \bar{W}, W', \widehat{W}) = 0 \\ B(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W} + W') + B^*(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W}, W', \widehat{W}) = 0 \\ C(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W} + W') + C^*(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W}, W', \widehat{W}) = 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

où les termes $A^*(\chi'_i, \bar{W}, W', \widehat{W})$, $B^*(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W}, W', \widehat{W})$ et $C^*(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W}, W', \widehat{W})$ représentent la contribution des échelles non résolues dans les équations définissant les petites échelles résolues.

Les échelles non résolues n'étant pas capturées par la résolution numérique, la composante notée avec “ $\widehat{}$ ” dans les relations ci-dessus n'est plus prise en compte (on verra que leurs effets sur les grandes échelles résolues sont négligés alors que ceux sur les petites échelles résolues sont modérés) et la décomposition en trois-niveaux (équation 3.61) est donc ré-interprétée comme une décomposition deux-niveaux :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{FV_h} &= \bar{\mathcal{V}}_{FV_h} \oplus \mathcal{V}'_{FV_h} \\ \mathcal{V}_{FE_h} &= \bar{\mathcal{V}}_{FE_h} \oplus \mathcal{V}'_{FE_h} \end{aligned} \quad (3.68)$$

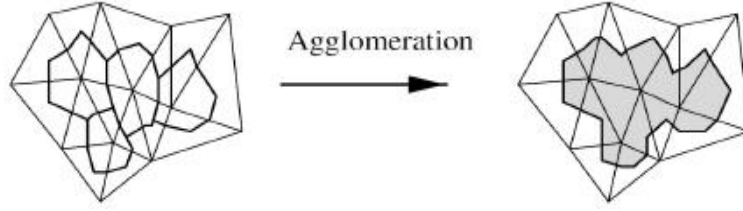


FIGURE 3.5: Illustration du processus d'agglomération.

La variable de l'écoulement est alors décomposée comme suit :

$$W_h = \bar{W}_h + W'_h \quad (3.69)$$

L'indice h désigne les composantes résolues. La séparation *a priori* des échelles est effectuée grâce à un processus d'agglomération. La figure 3.5 offre un exemple de macro-cellule qui contient une cellule du maillage dual avec l'ensemble de ses voisines n'appartenant pas encore à une macro-cellule. La composante \bar{W}_h associée aux grandes échelles résolues est alors définie à l'aide d'un opérateur défini dans l'espace des grandes échelles résolues (\bar{V}_{FV_h} pour les volumes finis et \bar{V}_{FE_h} pour les éléments finis) de la façon suivante :

$$\bar{W}_h = P(W_h) = \sum_k \underbrace{\left(\frac{Vol(C_k)}{\sum_{j \in I_k} Vol(C_j)} \sum_{j \in I_k} \chi_j \right)}_{\bar{\chi}_k} W_k = \sum_k \chi_k \tilde{W}_k \quad (3.70)$$

où

$$\tilde{W}_k = \frac{\sum_{j \in I_k} Vol(C_j) W_j}{\sum_{j \in I_k} Vol(C_j)}$$

pour les termes convectifs discrétisés par volumes finis, et :

$$\bar{W}_h = P(W_h) = \sum_k \underbrace{\left(\frac{Vol(C_k)}{\sum_{j \in I_k} Vol(C_j)} \sum_{j \in I_k} \Phi_j \right)}_{\bar{\Phi}_k} W_k = \sum_k \Phi_k \tilde{W}_k \quad (3.71)$$

pour les termes diffusifs discrétisés par éléments finis. C_j désigne la cellule autour du nœud j , $Vol(C_j)$ son volume, $I_k = \{j/C_j \in C_{m(k)}\}$ où $C_{m(k)}$ est la macro-cellule contenant la cellule C_k .

Les composantes des petites échelles résolues W'_h sont alors calculées pour les termes convectifs de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}'_h &= \mathbf{W}_h - \overline{\mathbf{W}}_h & (3.72) \\
 &= \sum_k \underbrace{(\chi_k - \overline{\chi}_k)}_{\chi'_k} \mathbf{W}_k \\
 &= \sum_k \chi_k (\mathbf{W}_k - \widetilde{\mathbf{W}}_k)
 \end{aligned}$$

et pour les termes diffusifs en remplaçant χ par Φ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}'_h &= \mathbf{W}_h - \overline{\mathbf{W}}_h & (3.73) \\
 &= \sum_k \underbrace{(\Phi_k - \overline{\Phi}_k)}_{\Phi'_k} \mathbf{W}_k \\
 &= \sum_k \Phi_k (\mathbf{W}_k - \widetilde{\mathbf{W}}_k)
 \end{aligned}$$

Un processus important qui caractérise un écoulement turbulent est la cascade énergétique où l'énergie cinétique est transférée des grandes structures aux structures plus petites. On peut supposer que le transfert d'énergie se produit principalement entre échelles voisines, des grandes échelles résolues aux petites échelles résolues et des petites échelles résolues aux échelles de sous-maille non résolues. De ce fait, une autre particularité de l'approche VMS réside dans le fait que les effets des échelles non résolues sont pris en compte uniquement dans les équations gouvernant les petites échelles résolues et sont négligés au niveau des grandes structures. Ces effets sont modélisés par l'introduction d'une viscosité de turbulence dans les équations associées aux petites échelles résolues. Le terme suivant est alors ajouté à l'équation de bilan de la quantité de mouvement associée aux petites échelles résolues :

$$\int_{\Omega} \tau'_h \nabla \Phi'_i d\Omega$$

où τ'_h est le tenseur de sous-maille donné par :

$$\tau'_h = \mu'_{sgs} \left(2S'_{ij} - \frac{2}{3} S'_{kk} \delta_{ij} \right)$$

avec μ'_{sgs} la viscosité de turbulence qui dépend du modèle de sous-maille utilisé et qui est exprimée en fonction de la composante petite échelle résolue de la solution, et

$$S'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$$

également, les effets des échelles non résolues sont modélisés dans l'équation d'énergie des petites échelles résolues par le terme :

$$\int_{\Omega} \frac{C_p \mu'_{sgs}}{Pr_{sgs}} \nabla T'_h \cdot \nabla \Phi'_i d\Omega$$

Les équations semi-discrétisées régissant les grandes échelles résolues (3.65) se réécrivent alors :

$$\begin{cases} A(\bar{\chi}_i, \bar{W}_h + W'_h) & = 0 \\ B(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W}_h + W'_h) & = 0 \\ C(\bar{\chi}_i, \bar{\Phi}_i, \bar{W}_h + W'_h) & = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

et celles définissant les petites échelles résolues (3.67) :

$$\begin{cases} A(\chi'_i, \bar{W}_h + W'_h) & = 0 \\ B(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W}_h + W'_h) + \int_{\Omega} \tau'_h \nabla \Phi'_i d\Omega & = 0 \\ C(\chi'_i, \Phi'_i, \bar{W}_h + W'_h) + \int_{\Omega} \frac{C_p \mu'_{sgs}}{Pr_{sgs}} \nabla T'_h \cdot \nabla \Phi'_i d\Omega & = 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

Après avoir rassemblé les équations associées aux petites échelles résolues et celles correspondantes aux grandes échelles résolues, on obtient les équations VMS-LES finales semi-discrétisées qui sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} A(\chi_i, W_h) & = 0 \\ B(\chi_i, \Phi_i, W_h) + \int_{\Omega} \tau'_h \nabla \Phi'_i d\Omega & = 0 \\ C(\chi_i, \Phi_i, W_h) + \int_{\Omega} \frac{C_p \mu'_{sgs}}{Pr_{sgs}} \nabla T'_h \cdot \nabla \Phi'_i d\Omega & = 0 \end{cases} \quad (3.76)$$

ou encore de façon explicite (pour des raisons de simplicité d'écriture, on abandonne l'indice h) :

$$\begin{cases} \int_{C_i} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial C_i} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\Gamma & = 0 \\ \int_{C_i} \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial C_i} \rho \vec{U} \otimes \vec{U} \vec{n} d\Gamma + \int_{\partial C_i} p \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma \nabla \Phi_i d\Omega + \int_{\Omega} \tau' \nabla \Phi'_i d\Omega & = 0 \\ \int_{C_i} \frac{\partial E}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial C_i} (E + p) \vec{U} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma \vec{U} \cdot \nabla \Phi_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{C_p \mu}{Pr} \nabla T \cdot \nabla \Phi_i d\Omega \\ + \int_{\Omega} \frac{C_p \mu'_{sgs}}{Pr_{sgs}} \nabla T' \cdot \nabla \Phi'_i d\Omega & = 0 \end{cases} \quad (3.77)$$

3.3.2 Modèle hybride RANS/LES avec corrections

Soient les équations de Navier-Stokes écrites sous forme conservative :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(W) = 0 \quad (3.78)$$

avec \mathcal{F} représentant à la fois les flux diffusifs et convectifs et le vecteur W contenant les variables inconnues de l'écoulement.

Le principe de ce modèle hybride est de décomposer chaque variable de l'écoulement W comme suit :

$$W = \langle W \rangle + W^c + W^{SGS} \quad (3.79)$$

où $\langle W \rangle$ est la variable de l'approche RANS obtenue en moyennant les équations de Navier-Stokes à l'aide d'un opérateur de moyenne, W^c désigne les fluctuations résolues restantes et enfin W^{SGS} représente les fluctuations non-résolues appelées fluctuations SGS.

L'équation de la variable moyenne de l'écoulement $\langle W \rangle$ résolue avec l'approche RANS est donnée par :

$$\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\langle W \rangle) = -\tau^{RANS}(\langle W \rangle) \quad (3.80)$$

où $\tau^{RANS}(\langle W \rangle)$ est le terme de fermeture donné par le modèle RANS.

D'autre part, après avoir filtré les équations de Navier-Stokes grâce à un opérateur de filtrage, les équations LES obtenues dont les variables de l'écoulement sont $\langle W \rangle + W^c$, s'expriment ainsi :

$$\frac{\partial (\langle W \rangle + W^c)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\langle W \rangle + W^c) = -\tau^{LES}(\langle W \rangle + W^c) \quad (3.81)$$

avec τ^{LES} représentant le terme de sous-maille donné en fonction du modèle de sous-maille choisi.

L'équation pour les fluctuations résolues de variables de l'écoulement W^c est établie en soustrayant l'équation (3.80) à l'équation (3.81) :

$$\frac{\partial W^c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\langle W \rangle + W^c) - \nabla \cdot \mathcal{F}(\langle W \rangle) = \tau^{RANS}(\langle W \rangle) - \tau^{LES}(\langle W \rangle + W^c) \quad (3.82)$$

Ce modèle hybride consiste à résoudre l'équation (3.80) dans tout le domaine de calcul. Ensuite, l'écoulement moyen obtenu est corrigé en ajoutant dans les régions où la résolution du maillage est assez fine, les fluctuations résolues restantes qui sont calculées à partir de l'équation (3.82). Les régions du domaine où les fluctuations doivent être résolues peuvent être déterminées avant le calcul par une approche zonale. Cependant cette méthode n'est pas universelle : on

introduit donc une fonction d'hybridation notée θ (détaillée dans la partie 3.3.4) qui varie de manière continue entre les valeurs 0 et 1. Plus précisément, lorsque $\theta \rightarrow 0$, le modèle fonctionne comme l'approche LES et il agit comme le modèle RANS lorsque $\theta = 1$. Dans ce dernier cas, on ne calcule pas de correction pour le terme $\langle W \rangle$ alors que pour $\theta < 1$, les fluctuations résolues sont calculées.

L'équation des fluctuations peut être réécrite en fonction de θ comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\langle W \rangle + W^c) - \nabla \cdot \mathcal{F}(\langle W \rangle) \\ = (1 - \theta) [\tau^{RANS}(\langle W \rangle) - \tau^{LES}(\langle W \rangle + W^c)] \end{aligned}$$

Le terme $(1 - \theta)$ permet d'amortir le membre de droite de l'équation lorsque $0 < \theta < 1$ afin d'introduire une transition continue entre les approches RANS et LES.

3.3.3 Modèle hybride RANS/VMS-LES avec corrections

Cette méthode d'hybridation RANS/VMS-LES est celle qui est employée pour nos simulations. Pour tout nœud du maillage noté l , on obtient les équations de ce modèle en appliquant la projection de Galerkin à l'équation RANS (3.80) et à celle des fluctuations (3.82). Les équations obtenues permettent de calculer la variable moyenne et les fluctuations. Elles sont données par :

$$\left(\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t}, \psi_l \right) + (\nabla \cdot \mathcal{F}_c(\langle W \rangle), \psi_l) + (\nabla \cdot \mathcal{F}_v(\langle W \rangle), \phi_l) = -(\tau^{RANS}(\langle W \rangle), \phi_l)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W^c}{\partial t}, \psi_l \right) + (\nabla \cdot \mathcal{F}_c(\langle W \rangle + W^c), \psi_l) - (\nabla \cdot \mathcal{F}_c(\langle W \rangle), \psi_l) \\ + (\nabla \cdot \mathcal{F}_v(W^c), \phi_l) = (1 - \theta)[(\tau^{RANS}(\langle W \rangle), \phi_l) - (\tau^{LES}(W'), \phi'_l)] \end{aligned}$$

où \mathcal{F}_c désigne les flux convectifs traités par volume finis et \mathcal{F}_v représente les flux visqueux traités par éléments finis. Le terme τ^{LES} est modélisé par un modèle de sous-maille et W' désigne la composante petite échelle résolue associée à $\langle W \rangle + W^c$.

Afin d'éviter la résolution de deux systèmes d'équations et de limiter le coût du calcul, les équations précédentes sont ensuite fusionnées en un seul système pour donner l'équation finale de notre modèle hybride RANS/VMS-LES :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial W}{\partial t}, \psi_l \right) + (\nabla \cdot \mathcal{F}_c(W), \psi_l) + (\nabla \cdot \mathcal{F}_v(W), \phi_l) \\ & = -\theta (\tau^{RANS}(\langle W \rangle), \phi_l) - (1 - \theta) (\tau^{LES}(W'), \phi_l) \quad l = 1, N \end{aligned}$$

Il est clair que si seulement cette équation est résolue, on ne dispose pas de la solution RANS $\langle W \rangle$ à chaque pas de temps. En première approximation, nous utilisons $\tau^{RANS}(W)$ au lieu de $\tau^{RANS}(\langle W \rangle)$ en nous appuyant sur le fait que le modèle RANS a une tendance naturelle à amortir les fluctuations. Dans notre travail, le modèle RANS utilisé est le modèle $k - \epsilon$ bas-Reynolds de Goldberg décrit précédemment (section 3.2.1.4).

3.3.4 Définition de la fonction d'hybridation

Dans ce travail, nous utilisons la fonction d'hybridation θ (formule 3.83) qui identifie les régions de l'écoulement où la correction est ajoutée.

$$\boxed{\theta = 1 - f_d(1 - \bar{\theta})} \quad (3.83)$$

où la fonction bouclier f_d est définie par la formulation 3.84, de la même manière que celle d'un modèle DDES. Cette fonction est égale à 1 dans les zones simulées par la VMS-LES où $r_d \ll 1$ et nulle dans la couche limite :

$$f_d = 1 - \tanh((8r_d)^3) \quad \text{et} \quad r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\max(\sqrt{u_{i,j}u_{i,j}}, 10^{-10})K^2d_w^2} \quad (3.84)$$

K correspond à la constante de Von Kármán ($K = 0.41$), d_w est la distance normale à la paroi, $u_{i,j}$ est la dérivée selon x_j de la i ème-composante de la vitesse u . Enfin, ν_t et ν sont respectivement la viscosité cinématique turbulente et la viscosité cinématique du fluide.

De plus, le paramètre θ est déterminé en fonction d'un paramètre d'hybridation ξ (formule 3.85) qui doit permettre d'indiquer si la résolution de grille est suffisante pour résoudre une part significative des fluctuations, i.e. faire une simulation RANS ou VMS-LES. Le choix de ce paramètre est donc essentiel dans la construction du modèle hybride.

$$\bar{\theta} = \tanh(\xi^2) \quad (3.85)$$

Dans nos applications, nous avons utilisé indifféremment les fonctions suivantes pour définir ξ :

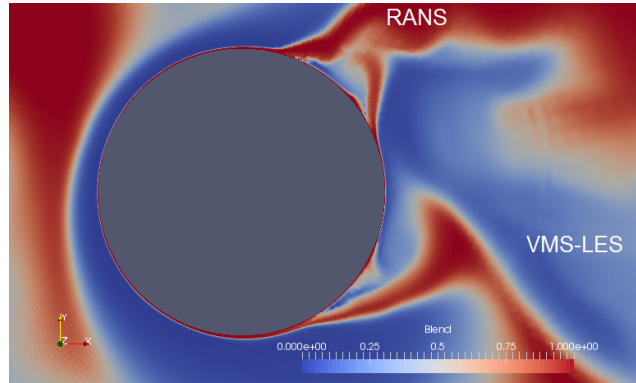


FIGURE 3.6: Valeurs de la fonction de mélange selon la zone de l'écoulement : $f_d \simeq 0$ dans la couche limite et $f_d \simeq 1$ en dehors

- $\xi = \frac{\mu_s}{\mu_t}$, aussi utilisé comme paramètre d'hybridation dans la méthode LNS [9].
- $\xi = \frac{\Delta}{l_{RANS}}$, où l_{RANS} est une longueur caractéristique de l'approche RANS donnée par $l_{RANS} = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$ et Δ représente la taille locale du maillage définie dans ce travail par la racine cubique du volume du tétraèdre T , $\Delta = (\text{Volume}(T))^{\frac{1}{3}}$.
- $\xi = \frac{t_{LES}}{t_{RANS}}$, où t_{LES} et t_{RANS} sont des temps caractéristiques des approches LES et RANS respectivement, $t_{LES} = \frac{1}{\sqrt{S_{ij}S_{ij}}}$ et $t_{RANS} = \frac{k}{\epsilon}$.

3.4 Une approche hybride DDES/VMS-LES

En parallèle à l'approche RANS/VMS-LES décrite précédemment, une approche hybride DDES/VMS-LES a été développée et implémentée dans notre code AIRONUM.

La composante RANS utilisée dans notre approche hybride i.e. le modèle $k - \epsilon$ proposé par Goldberg [43] où nous limitons la viscosité de turbulence en appliquant la correction de Menter (formule 3.32), est remplacée par un modèle DDES/ $k - \epsilon$. Ce modèle est obtenu en remplaçant, dans l'équation de transport sur ρk du modèle $k - \epsilon$, le terme de dissipation $D_k^{RANS} = \rho\epsilon$ par :

$$D_k^{DDES} = \rho \frac{k^{3/2}}{l_{DDES}} \quad \text{où} \quad l_{DDES} = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} - f_d * \max(0, \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} - C_{DDES}\Delta) \quad (3.86)$$

$$\text{avec} \quad f_d = 1 - \tanh((8r_d)^3) \quad \text{et} \quad r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\max(\sqrt{u_{i,j}u_{i,j}}, 10^{-10})K^2d_w^2} \quad (3.87)$$

Comme souligné précédemment, K correspond à la constante de Von Kàrmàn ($K = 0.41$), d_w est la distance normale à la paroi, $u_{i,j}$ est la dérivée selon x_j de la i ème-composante de la vitesse u , et la constante du modèle notée C_{DDES} a pour valeur standard 0.65 (ν_t et ν sont respectivement la viscosité cinématique turbulente et la viscosité cinématique du fluide).

L'idée qui a motivé l'introduction de ce modèle DDES/VMS-LES, est que dans la couche limite, le modèle RANS soit toujours activé mais qu'à l'extérieur de celle-ci, on active le modèle DDES au lieu du modèle VMS-LES si le maillage n'est pas suffisamment fin pour faire de la VMS-LES. On espère ainsi améliorer la qualité de prédiction de notre modèle hybride quand la résolution de grille en dehors de la couche limite n'est pas très fine.

Chapitre 4

Application aux écoulements autour de corps non profilés

Contents

4.1	Évaluation des modèles VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES dans leurs versions dynamiques	87
4.1.1	Compléments sur les cylindres en tandem	121
4.2	Comportement de modèles de turbulence hybrides pour la simulation d'écoulements autour d'un cylindre en régime sous-critique	127
4.2.1	Compléments sur le comportement du modèle hybride RANS/VMS-LES dans la couche limite . . .	136
4.3	Évaluation du modèle VMS-LES pour le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre rectangulaire . .	139
4.3.1	Introduction	139
4.3.2	Description du cas test et applications	139

4.1 Évaluation des modèles VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES dans leurs versions dynamiques

Dans ce travail, qui fait suite à une étude antérieure menée par l'équipe [96] et qui avait montré que le modèle VMS-LES se combinait bien avec les modèles de sous-maille (SGS) dynamiques, nous cherchons en particulier à évaluer l'impact de la procédure dynamique du modèle SGS dans l'approche de turbulence hybride RANS/VMS-LES pour le calcul d'écoulements massivement décollés. Il est intéressant d'investiguer ce problème dans la mesure où la procédure dynamique du modèle SGS et l'approche VMS-LES sont complémentaires dans leurs effets puisque la première ajuste spatialement et temporellement la constante du modèle SGS alors que la seconde est basée sur une bande d'application fréquentielle de la viscosité de turbulence, la combinaison de ces deux approches produisant le modèle activé hors de la couche limite, et donc en particulier dans la région de sillage, dans l'approche hybride développée. Dans une étape préliminaire, nous présentons les résultats de l'application de la procédure dynamique en ne considérant que l'approche VMS-LES qui est donc la composante LES de notre modèle hybride. Les cas test considérés sont des problèmes d'écoulement autour de cylindres circulaires ou carrés pour des nombres de Reynolds faibles à modérés. Dans une deuxième partie, nous évaluons l'impact de la procédure dynamique des modèles SGS dans l'approche hybride RANS/VMS-LES pour un cylindre circulaire dans le cas d'un régime d'écoulement supercritique (nombre de Reynolds élevé) et pour des cylindres en tandem. Il est à noter que le cas test du tandem présente de nombreuses difficultés, tant sur le plan numérique que du modèle de turbulence. Pour une bonne prédiction de l'écoulement autour du second cylindre, il faut en effet non seulement pouvoir simuler avec précision l'écoulement autour du premier cylindre, mais aussi capturer proprement le sillage entre les deux cylindres. Ceci implique l'utilisation de modèles numériques et de turbulence peu dissipatifs, ainsi qu'un maillage approprié. Ces modèles doivent être aussi suffisamment efficaces d'un point de vue du temps de calcul pour pouvoir faire des statistiques sur un temps suffisamment long.

Dans cette étude, le modèle hybride RANS/VMS-LES est muni d'une fonction "bouclier" qui renforce l'activation de la composante RANS dans la couche limite, ce qui entre autres permet de limiter le phénomène de non coïncidence dans la zone logarithmique ("log-layer mismatch") que l'on peut observer lorsque la composante LES d'un modèle hybride est activée dans la couche limite au cours d'un calcul. La correction de Menter est d'autre part introduite dans la composante RANS de notre modèle hybride afin de limiter la viscosité de turbulence, en particulier dans les zones de stagnation présentes dans nos écoulements autour d'obstacles, et de mieux prendre en compte les écoulements à gradients

de pression adverses que l'on rencontre dans la majorité des problèmes présentés dans ce travail.

Le modèle numérique utilisé, basé sur une formulation éléments finis/volumes finis et une méthode à dissipation d'ordre six pour la discrétisation des termes hyperboliques, est celui décrit dans le Chapitre 2. Les modèles SGS mis en œuvre sont ceux de Smagorinsky [142] et de WALE [101].

Ce travail est introduit ci-après sous la forme d'un article en préparation. Un complément à l'article concernant la description du cas test des cylindres en tandem est aussi joint.

Emmanuelle Itam · Carine Moussaed · Stephen Wornom · Bruno Koobus · Maria-Vittoria Salvetti · Alain Dervieux

Impact of dynamic subgrid scale modeling in variational multiscale LES and hybrid simulation of massively separated flows

Abstract In this paper, we assess the effects of dynamic subgrid scale (SGS) modeling in variational multiscale (VMS) LES and hybrid simulations of bluff-body flows. The spatial discretization is based on a mixed finite element/finite volume formulation on unstructured grids. In the VMS approach used in this work, the separation between the largest and the smallest resolved scales is obtained through a variational projection operator and a finite volume cell agglomeration. The dynamic and non-dynamic versions of Smagorinsky and WALE SGS models are used to account for the effects of the unresolved scales. The turbulence hybrid model combines a RANS $k - \epsilon$ model with the VMS-LES approach. The dynamic and non-dynamic versions of Smagorinsky and WALE SGS models are used to account for the effects of the unresolved scales. The VMS-LES and classical LES approaches, combined with the considered dynamic and non-dynamic SGS models, are applied to the simulation of the flow around a circular cylinder in the subcritical regime and to the flow around a square cylinder at Reynolds numbers 22000. The hybrid turbulence simulations, with and without dynamic SGS modeling, concern supercritical circular cylinder flows and the flow around a tandem cylinder at Reynolds number 166000.

Keywords variational multiscale LES · hybrid turbulence model · dynamic SGS model · unstructured grids · circular cylinder · square cylinder tandem cylinder.

1 Introduction

Nowadays, thanks to the increasing availability of large computational resources, large-eddy simulation (LES) is widely used also for industrial and engineering applications, e.g. for the

E. Itam · C. Moussaed · B. Koobus
I3M, Université de Montpellier, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex, France
E-mail: carine.moussaed@univ-montp2.fr, itamemmanuelle@gmail.com, koobus@math.univ-montp2.fr

S. Wornom
LEMMA, 2000 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France
E-mail: Stephen.Wornom@inria.fr

M.V. Salvetti
Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale, Università di Pisa, Via G. Caruso 8, 56122 Pisa, Italy
E-mail: mv.salvetti@dia.unipi.it

A. Dervieux
INRIA, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France
E-mail: alain.dervieux@sophia.inria.fr

simulation of turbulent flows characterized by complex realistic geometries and by a dynamics involving a wide range of time and space scales. The basic idea of LES is to directly simulate the turbulence scales larger than a given size, usually related to the grid resolution, while the effects of the neglected smaller scales is provided by a closure model (see e.g. [1] for an introduction). The success of a LES depends on different factors, viz. grid resolution and topology, closure modeling and numerics. For all these aspects, the simulation of complex engineering or industrial flows may lead to different choices compared to those mostly adopted in well assessed LES of academic flows. For instance, complex geometries usually lead to the use of anisotropic and non-homogeneous grids, possibly unstructured. Moreover, due to the flow complexity and to the need of limiting computational costs, low-order robust numerical schemes are often adopted together with *cheap* subgrid scale (SGS) models.

The present work is part of a research activity aimed at developing and validating methodologies for the application of LES to flows of industrial or engineering interest. We adopted an approach based on the following key ingredients: (i) unstructured coarse grids, (ii) a second-order accurate numerical scheme stabilized by an ad-hoc developed numerical viscosity, and (iii) the variational multiscale (VMS) formulation combined with non-dynamic eddy-viscosity SGS models. These choices have been extensively discussed and investigated in our previous publications (see, e.g. [2]-[4]) and the main features are only briefly recalled in the following.

The numerical method is based on a mixed finite-volume/finite-element discretization, applicable to unstructured grids, combined with linearized implicit time advancing. The resulting scheme is second-order accurate in space and time and it is stabilized through a numerical diffusion built with a sixth-order spatial derivative, weighted by the 5th power of local mesh size and by a tunable coefficient [2]. In this way, the impact of this stabilizing term can be reduced as much as possible and it has been a posteriori checked that it does not mask the effect of the SGS model (see e.g. [2-4]). On the other hand, it has also been observed that the numerical viscosity introduced in our formulation is not enough alone to act as a SGS model [3].

The VMS-LES formulation [5] is aimed at limiting the effects of the SGS closure model to the smallest resolved scales. The separation between large and small resolved scales was obtained in [5] through Galerkin projection. The VMS idea has some positive implications; in particular, it reduces the excessive dissipation introduced also on the largest resolved scales by non-dynamic eddy-viscosity SGS models, such as, for instance, the Smagorinsky [6] or the Wall-Adapted Local Eddy viscosity (WALE) model [7]. In particular, the VMS-LES approach allows the inaccuracies characterizing Smagorinsky-like models near solid walls to be at least partially overcome. Also, the excessive dissipation applied by usual LES to the largest resolved scales spuriously damps the backscatter effect, unlike the VMS mechanism which allows a better prediction of backscatter. The VMS approach is particularly attractive for variational numerical methods and unstructured grids, because it is easily incorporated in such formulations [8] and the additional computational costs with respect to classical LES are very low. We adopted the VMS approach proposed in [8], in which the projection operator in the largest resolved scale space is defined through finite-volume cell agglomeration, and, in our previous studies, we combined it with non-dynamic viscosity models. This kind of models contain a constant, which must be a-priori fixed and which directly controls the amount of introduced SGS dissipation. Therefore, as well known for classical LES, the value of this constant has a remarkable effect on the quality of the results and in most cases it should be space and time dependent. Among the several remedies to this drawback proposed in the literature, the most popular is the dynamic procedure [9], which exploits the information contained in the small resolved scales to compute the SGS model parameter, which is

allowed to vary in space and time. This approach is widely used in classical LES and it has been observed in a number of applications that it brings a noticeable improvement in the accuracy of the results compared to non-dynamic SGS modeling. In VMS-LES, the quality of the SGS model is expected to have a more limited impact than for classical LES, as it was indeed found in all our previous studies (e.g. [3,4]). Nonetheless, we also observed that in most cases the introduction of the proper amount of SGS dissipation is a crucial issue also within the VMS-LES approach [3].

The VMS approach and the dynamic procedure in SGS models affect the component of the turbulent flow in a complementary way. The first selects which scales are damped by the SGS viscosity and the latter adjusts the strength of the damping according to the location and the time instants. It thus appears that the combination of the dynamic procedure and the VMS-LES model is worth of being investigated. *The specific aim of the present work is indeed to investigate the effects of the use of dynamic SGS models within the VMS-LES approach, included hybrid turbulence models whose LES component is the VMS-LES approach, in combination with the previously outlined numerical ingredients.*

Very few dynamic VMS-LES simulations have been performed in the past. A dynamic VMS-LES method was introduced in [10]. A coarse mesh made of macro-cells, defined by an agglomeration process, was used in the variational form brought by the VMS method in order to determine the dynamic SGS model coefficient varying in space and time. This approach is different from the present one, in which the Germano algebraic identity is used independently of the variational formulation. In [10], the test cases of a prolate spheroid and of a forward swept wing were considered. The authors concluded that the proposed dynamic VMS-LES procedure captures small turbulence structures that are not resolved by its static counterpart, but this does not improve significantly integral quantities such as lift and drag predicted by the static VMS-LES method. In the more recent work of Gravemeier [12] a VMS-LES approach is combined with a dynamic Smagorinsky model and with a finite-volume solver in slightly different formulations for the simulation of a turbulent flow in a diffuser. According to this latter work, passing from VMS to dynamic-VMS does not bring a significant improvement. Holmes et al. [11] combined a spectral VMS approach with classical and dynamic versions of the Smagorinsky model in the simulation of turbulent channel flow. In particular, the sensitivity to the partition between large and small resolved scales was investigated and it was found that the VMS approach in combination with the dynamic Smagorinsky model was significantly less sensitive than in combination with the classical Smagorinsky model.

The hybrid turbulence approach used in this study combines a RANS model (low-Reynolds $k - \epsilon$ model of Goldberg, [52]) with the VMS-LES model [55]. A blending function is used in order to automatically switch from RANS to VMS-LES and vice versa. A shielding function is also introduced in the proposed hybrid model, with the objective to reduce the problem of *log-layer mismatch*. Furthermore, the Menter correction [54] is implemented in order to improve the prediction of adverse pressure flows which characterize the flow problems tackled in this paper.

VMS-LES and hybrid RANS/VMS-LES simulations of bluff-body flows carried out with the Smagorinsky and WALE SGS models as well as with their dynamic counterpart are presented and analyzed herein, in order to appraise the impact of the dynamic procedure on the results. More specifically, the VMS-LES model is applied to the flow around a circular cylinder at Reynolds numbers 3900 and 20000, and to the flow around a square cylinder at Reynolds numbers 22000, and the hybrid model is applied to a circular cylinder flow at Reynolds number 1 million and to the flow around a tandem cylinder at Reynolds number 166000. These benchmark flows are well documented in the literature and contain many difficulties also encountered in more complex flow configurations of engineering interest.

2 Variational Multiscale LES approach

The VMS formulation consists in splitting between the large resolved scales (LRS) i.e. those resolved on a virtual coarser grid, and the small resolved ones (SRS) which correspond to the finest level of discretization. The VMS-LES method does not compute the SGS component of the solution, but it models its dissipative effects on the SRS, and it preserves the Navier-Stokes model for the large resolved scales.

2.1 VMS formulation

In the present work, we adopt the VMS approach proposed in [8] for the simulation of compressible turbulent flows through a finite volume/finite element discretization on unstructured tetrahedral grids. Let V_{FV} be the space spanned by ψ_k , the finite volume basis function, and V_{FE} the one spanned by ϕ_k , the finite element basis function. In order to separate large and small scales, these spaces are decomposed as: $\psi_k = \langle \psi_k \rangle + \psi'_k$ and $\phi_k = \langle \phi_k \rangle + \phi'_k$ where the *brackets* denote a coarse scale and the *prime* a fine scale. Consequently to this decomposition, the flow variables are decomposed as follows:

$$W = \langle W \rangle + W' + W^{SGS} \quad (1)$$

where $\langle W \rangle$ are the LRS, W' the SRS and W^{SGS} the unresolved scales. The projection operator based on spatial average on macro-cells defined in [8] is used to compute the basis functions of the LRS space. This, for finite elements, leads to:

$$\langle \phi_k \rangle = \frac{Vol(C_k)}{\sum_{j \in I_k} Vol(C_j)} \sum_{j \in I_k} \phi_j \quad (2)$$

where $Vol(C_j)$ denotes the volume of C_j , the cell around the vertex j , and $I_k = \{ j / C_j \in C_{m(k)} \}$ where $C_{m(k)}$ is the macro-cell containing the cell C_k . The macro-cells are obtained by a process known as agglomeration [13]. An analogous definition holds for finite-volume basis functions. The SGS model which introduces the dissipative effect of the unresolved scales on the resolved scales is only added to the SRS and it is computed only as a function of the SRS. Therefore, the term below is added to the momentum equations

$$\int_{\Omega} \tau' \cdot \nabla \Phi' d\Omega \quad (3)$$

The SGS stress tensor is expressed herein by means of an eddy-viscosity model and, as previously stated, it is computed as a function of the small resolved scales:

$$\tau'_{ij} = -\mu'_{sgs} (2S'_{ij} - \frac{2}{3} S'_{kk} \delta_{ij}) ; \quad S'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

where μ'_{sgs} denotes the viscosity of the SGS model used to close the problem, computed as a function of the smallest resolved scales, and u'_i is the i -th component of the SRS velocity. Likewise, the term

$$\int_{\Omega} \frac{C_p \mu'_{sgs}}{Pr_{sgs}} \nabla T' \cdot \nabla \Phi'_5 d\Omega \quad (5)$$

is added to the energy equation. C_p is the specific heat at constant pressure, Pr_{sgs} is the subgrid-scale Prandtl number which is assumed to be constant and T' the SRS temperature.

2.2 SGS viscosities

To obtain the SGS viscosity needed to close the problem, the widely used Smagorinsky model [6] is first considered. In the adopted VMS formulation this writes:

$$\mu'_{\text{sgs}} = \langle \rho \rangle (C_S \Delta)^2 |S'|, \quad (6)$$

where Δ is the filter width, C_S is the Smagorinsky coefficient and $|S'| = \sqrt{2S'_{ij}}$. The filter width is defined as the third root of the grid element volume. A typical value for the Smagorinsky coefficient for shear flows is $C_S = 0.1$, which is used herein.

The second SGS model we considered is the Wall-Adapting Local Eddy -Viscosity (WALE) SGS model proposed by Nicoud and Ducros [7]. The eddy-viscosity term in the VMS formulation is defined as follows:

$$\mu'_{\text{sgs}} = \langle \rho \rangle (C_W \Delta)^2 \frac{((S_{ij}^d)')(S_{ij}^d)')^{\frac{3}{2}}}{(S'_{ij}S'_{ij})^{\frac{5}{2}} + ((S_{ij}^d)')(S_{ij}^d)')^{\frac{5}{4}}} \quad (7)$$

with $(S_{ij}^d)' = \frac{1}{2}(g'_{ij}{}^2 + g'_{ji}{}^2) - \frac{1}{3}\delta_{ij}g'_{kk}{}^2$ being the symmetric part of the tensor $g'_{ij}{}^2 = g'_{ik}g'_{kj}$, where $g'_{ij} = \partial u'_i / \partial x_j$. As indicated in [7], the constant C_W is set to 0.5.

2.3 Dynamic model

In their original formulations, C_S and C_W appearing in the expression of the viscosity of the Smagorinsky and WALE SGS model (Eqs. (6) and (7) respectively) are set to a constant over the entire flow field and in time. In the dynamic model [9], this constant is replaced by a dimensionless parameter $C(x, t)$ that is allowed to be a function of space and time. The dynamic approach also provides a systematic way for adjusting this parameter in space and time by using information from the resolved scales. After the introduction of the grid filter, denoted by *overline* and *tilde*, *tilde* being Favre averaging, $\tilde{f} = \overline{\rho f} / \overline{\rho}$, a second filter is considered, having a larger width than the grid one, which is called the test-filter and denoted by a *hat*. The test-filter is applied to the grid-filtered Navier-Stokes equations, and then, the subtest-scale stress is defined as follows:

$$M_{ij}^{\text{test}} = \widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j}} - (\hat{\rho})^{-1} \left(\widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_i}} \widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_j}} \right) \quad (8)$$

The deviatoric part of M_{ij}^{test} can be written using a Smagorinsky or WALE model, as

$$M_{ij}^{\text{test}} - \frac{1}{3} M_{kk}^{\text{test}} \delta_{ij} = -C \hat{\Delta}^2 \hat{\rho} g(\hat{\mathbf{u}}) \hat{P}_{ij} \quad (C = C_W^2 \text{ or } C_S^2) \quad (9)$$

with $\hat{P}_{ij} = -\frac{2}{3} \hat{S}_{kk} \delta_{ij} + 2 \hat{S}_{ij}$ and where $g(\hat{\mathbf{u}})$ denotes the contribution to the SGS viscosity depending on the gradient velocity that appears in (6) for the Smagorinsky model, and in (7) for the WALE model. The constant C , as originally proposed in [9], is assumed to be constant at the subgrid and subtest levels.

By using the Germano identity [9] and a least-square approach [14] to contract the resulting tensorial equation, we obtain:

$$(C \Delta^2) = \frac{L_{ij} B_{ij}}{B_{pq} B_{pq}} \quad (10)$$

where:

$$L_{ij} = \mathcal{L}_{ij} - \frac{1}{3} \mathcal{L}_{kk} \delta_{ij}; \quad \mathcal{L}_{ij} = \widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j}} - (\hat{\rho})^{-1} \left(\widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_i}} \widehat{\overline{\rho \mathbf{u}_j}} \right) \quad (11)$$

and

$$B_{ij} = \widehat{\bar{\rho}g(\tilde{\mathbf{u}})\tilde{P}_{ij}} - \left(\frac{\hat{\Delta}}{\Delta}\right)^2 \hat{\rho}g(\hat{\mathbf{u}})\hat{P}_{ij}. \quad (12)$$

Note that all quantities in the right-hand side of Eq. (10) are known from the LES computation. Note also that we preferred to dynamically compute $(C\Delta^2)$, instead of C as done in the original dynamic procedure, in order to partially overcome difficulties in the definition of the filter width for inhomogeneous and unstructured grids. Finally, as done also in [11], the classical dynamic procedure previously briefly outlined, which involves all the resolved scales, is used herein. Once $(C\Delta^2)$ is dynamically computed, it is injected in Eq. (6) or (7) to obtain the SGS viscosity used in the VMS approach.

A possible drawback of the dynamic procedure based on the Germano-identity [9] when applied to a SGS model already having a correct near-wall behavior, as the WALE one, is the introduction of a sensitivity to the additional filtering procedure. A simple way to avoid this inconvenient is to have a sensor able to detect the presence of the wall, without a priori knowledge of the geometry, so that the dynamic SGS model adapts to the classical constant of the model, which is equal to 0.5 in the near wall region for the WALE model, and compute the constant dynamically otherwise. We adopt the sensor proposed in [15], having the following expression:

$$SVS = \frac{(\widetilde{S_{ij}^d} \widetilde{S_{ij}^d})^{\frac{3}{2}}}{(\widetilde{S_{ij}^d} \widetilde{S_{ij}^d})^{\frac{3}{2}} + (\widetilde{S_{ij}} \widetilde{S_{ij}})^3}. \quad (13)$$

This parameter has the properties to behave like y^{+3} near a solid wall, to be equal to 0 for pure shear flows and to 1 for pure rotating flows.

It should be noticed that the implementation of the dynamic SGS models in our software has been optimized so that the additional cost of the resulting dynamic LES and VMS models, in the case of an implicit time-marching scheme, which is our default option, is less than 1% compared to their non-dynamic counterparts.

3 Hybrid turbulence model

In this Section, we briefly describe the main ingredients of our hybrid turbulence model [55]. Let us write the Navier-Stokes equations in the form :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_c(W) + \nabla \cdot \mathcal{F}_d(W) = 0 \quad (14)$$

where \mathcal{F}_d and \mathcal{F}_c denote the diffusive and convective fluxes respectively, and W the flow variables.

The principle of the hybrid model used in this work is to combine in a single model the RANS model and the VMS-LES approach, which writes after semi-dcretization with a finite element/finite volume approach :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}, \Psi_l\right) + (\nabla \cdot \mathcal{F}_c(W), \Psi_l) + (\nabla \cdot \mathcal{F}_d(W), \Phi_l) = -\theta (\tau^{RANS}(W), \Phi_l) - (1-\theta) (\tau^{LES}(W'), \Phi'_l) \quad (15)$$

where Ψ_l and Φ_l are the finite element and finite volume test functions respectively, Φ'_l denote the finite element basis functions spanning the finite dimensional space of the small resolved

scales, $\tau^{RANS}(W)$ is the closure term for the RANS model, and $\tau^{LES}(W')$ the closure term for the VMS-LES model, W' being the small resolved component of W .

In the hybrid model used in this work, the blending function θ which allows to automatically switch from RANS to VMS-LES and vice versa, is defined as follows :

$$\theta = 1 - f_d(1 - \tanh(\xi^2)) \quad (16)$$

where $\xi = \frac{\mu_{SGS}}{\mu_t}$ with μ_{SGS} the SGS viscosity and μ_t the RANS viscosity.

In expression (16), f_d is a shielding function defined by :

$$f_d = 1 - \tanh((8r_d)^3) \quad \text{with} \quad r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\max(\sqrt{u_{i,j}u_{i,j}}, 10^{-10})K^2d_w^2} \quad (17)$$

where K is the constant of von Kàrmàn ($K = 0.41$), d_w the distance to the wall, $u_{i,j}$ the derivative of the velocity component u_i with respect to x_j , ν_t and ν being the turbulent and fluid kinematic viscosity respectively.

The shielding function allows the hybrid model to work in a RANS mode in the boundary layer, and thus allows to reduce the log-layer mismatch problem that can appear when the LES mode is activated in a boundary layer when a hybrid model is used.

4 Numerical ingredients

We briefly recall now the main features of the numerical scheme. Further details can be found in [2] and in [16].

The governing equations are discretized in space using a mixed finite volume/finite element method applied to unstructured tetrahedrizations. The adopted scheme is vertex centered, i.e. all degrees of freedom are located at the vertices. P1 Galerkin finite elements are used to discretize the diffusive terms.

A dual finite-volume grid is obtained by building a cell C_i around each vertex i ; the finite-volume cells are built by the rule of medians: the boundaries between cells are made of triangular interface facets. Each of these facets has a mid-edge, a facet centroid, and a tetrahedron centroid as vertices. The convective fluxes are discretized on this tessellation by a finite-volume approach, i.e. in terms of the fluxes through the common boundaries between each couple of neighboring cells. The unknowns are discontinuous along the cell boundaries and this allows an approximate Riemann solver to be introduced. The Roe scheme [18] (with low-Mach preconditioning) represents the basic upwind component for the numerical evaluation of the convective fluxes. The MUSCL linear reconstruction method (“Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws”), introduced by Van Leer [19], is adapted for increasing the spatial accuracy. The basic idea is to express the Roe flux as a function of reconstructed values of W at the boundary between two neighboring cells. Attention has been dedicated to the dissipative properties of the resulting scheme which is a key point for its successful application to LES simulations. The numerical dissipation in the resulting scheme is made of sixth-order space derivatives by using suitable high-order reconstructions of the flow variables [2]. Moreover, a tunable parameter, γ , directly controls the amount of introduced numerical viscosity and this allows to reduce it to the minimal amount needed to stabilize the simulation. Time advancing is carried out through an implicit linearized method, based on a second-order accurate backward difference scheme and on a first-order approximation of the Jacobian matrix [20]. The resulting numerical discretization is second-order accurate both in time and space.

5 Applications to Large Eddy simulations

5.1 Circular cylinder flow at Reynolds number 20000

Let us start by presenting the results of the simulations of the flow around a circular cylinder carried out at Reynolds number based on the cylinder diameter, D , and on the freestream velocity, Re , equal to 20000. The computational domain is such that $-10 \leq x/D \leq 25$, $-20 \leq y/D \leq 20$ and $-\pi/2 \leq z/D \leq \pi/2$, where x , y and z denote the streamwise, transverse and spanwise directions respectively, the cylinder axis being located at $x = y = 0$. Periodic boundary conditions are applied in the spanwise direction while no-slip conditions are imposed on the cylinder surface. Characteristic based conditions are used at the inflow and outflow as well as on the lateral surfaces ($y/D = \pm 20$) [21]. The freestream Mach number is set equal to 0.1 in order to make a sensible comparison with incompressible simulations in the literature. Preconditioning is used to deal with the low Mach number regime. The computational domain is discretized by an unstructured grid consisting of approximately 1.8 million of nodes. The averaged normal distance of the nearest point to the cylinder boundary is $0.001D$, 320 nodes are uniformly distributed on the cylinder surface in the azimuthal direction and 100 nodes are present in the spanwise direction near the cylinder, with an approximately uniform distribution. The computational domain, boundary conditions and grid are the same as in [4]. As for the remaining simulation parameters, the coefficient controlling the numerical viscosity is set to 0.3, chosen on the basis of previous sensitivity studies [3]. Finally, the time step, adimensionalized with the freestream velocity and the cylinder diameter, is equal to 2.5×10^{-4} ; therefore, a vortex shedding period contains approximately 500 time steps. LES and VMS-LES simulations have been carried with this set up for the WALE and the Smagorinsky SGS models in their original formulation as well as in their dynamic version. The results of a simulation carried without any explicit SGS model are also reported, in order to highlight the effects of the SGS terms compared to those of numerical viscosity.

First of all, the dynamic procedure has a remarkable effect on the amount of introduced SGS viscosity. In all the considered cases, the SGS viscosity produced in the wake by dynamic SGS models is significantly reduced compared to that given by their non-dynamic counterparts. An example is given in Figure 1, showing the instantaneous iso-contours of μ_{sgs}/μ obtained in the VMS-LES simulations with the non-dynamic and dynamic WALE models respectively.

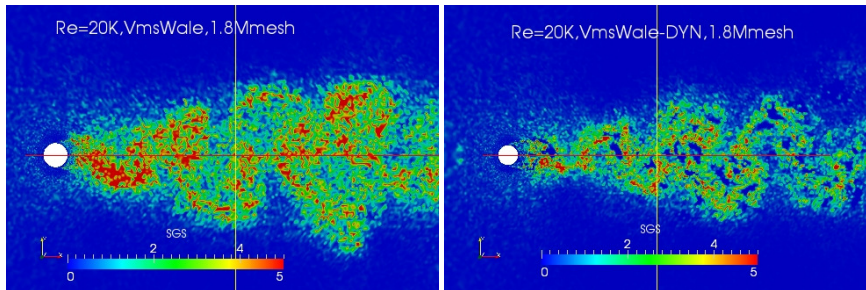


Fig. 1 Flow around a circular cylinder at Reynolds 20000 : viscosity ratio for the VMS-WALE (left) and for dynamic VMS-WALE (right).

The impact of these differences in SGS viscosity is investigated in terms of flow bulk parameters and statistics. For all simulations, statistics are computed by averaging in the spanwise homogeneous direction and in time for 35 vortex shedding cycles. The main bulk

	$\overline{C_d}$	C'_L	l_r/D	$-\overline{C_{pb}}$	St	L_V/D	$I(\%)$
LES Smagorinsky	1.29	.59	.85	1.27	.19	.71	34.
LES dyn. Smagorinsky	1.21	.45	.93	1.20	.19	.96	34.5
LES WALE	1.16	.39	.97	1.15	.20	.71	31.5
LES dyn. WALE	1.19	.44	.92	1.16	.20	.96	31.8
VMS Smagorinsky	1.18	.43	.88	1.20	.20	.90	32.7
VMS dyn. Smagorinsky	1.19	.45	.95	1.19	.19	1.1	36.1
VMS WALE	1.17	.42	.87	1.20	.20	.96	33.7
VMS dyn. WALE	1.18	.43	.89	1.19	.20	.96	32.8
no model	1.26	.58	.87	1.22	.20	-	-
LES [22] min.	.94	.17	.55	0.83	-	-	-
max.	1.28	.65	1.4	1.38	-	-	-
LES [23]	1.20	-	.99	1.25	-	.99	38.1
Exp. [24]	1.16	-	-	-	-	1.0	37.0
Exp. [25]	1.20	-	-	-	-	-	-
Exp. [26]	-	.45	-	1.19	.19	-	-

Table 1 Main bulk flow parameters and quantities of interest, predicted by dynamic and non-dynamic LES and VMS-LES around a circular cylinder at $Re = 20000$. $\overline{C_d}$ holds for the mean drag coefficient, C'_L for the root mean square of lift time fluctuations, l_r is the recirculation length, $\overline{C_{pb}}$ is the mean pressure coefficient at cylinder basis, St is the Strouhal number, L_V denotes the x -location of the maximum in the turbulent intensity distribution along the wake axis, I holds for the maximum turbulence intensity along the wake axis.

coefficients and quantities of interest are summarized in Table 1. They are compared with the experimental results of [24] and [25] and with the data of the review in [26]. As for simulations, we recall the LES results of [23] and of [22]. In [23] an implicit LES simulation, i.e. without any explicit SGS model, was carried out on a grid of 2.3×10^6 cells, while the LES in [22] were carried out for different grid resolutions, the most refined one having about 5×10^5 nodes, and with dynamic Smagorinsky and mixed models. The range of values of the considered quantities obtained in the different simulations in [22] is reported in Table 1.

As a first remark, the Strouhal number, i.e. the vortex-shedding frequency made non dimensional with the cylinder diameter and the freestream velocity, is practically not sensitive to SGS modeling and, in all cases, in good agreement with the experimental data taken from [26]. In general, we observed that this quantity is well predicted in all the considered LES or VMS-LES simulations of the circular cylinder flow (see the results in Sec. 5.2 and in [4] for $Re=3900$ and $Re=10000$).

As for the mean drag coefficient, all the numerical predictions are inside the experimental range, except for the ones given by the simulation with no SGS model and the LES one with the Smagorinsky model, characterized by an overestimation of $\overline{C_d}$ of 7.5% and of 5%, compared to upper limit of the experimental range, respectively. These two simulations also give the largest discrepancies from the experimental value of [26] in the prediction of the r.m.s. of the time fluctuations of the lift coefficient, C'_L , with an overestimation of 31% for the simulation with the Smagorinsky model and of 29% for the one with no model. These results first confirm the inadequacy of numerical viscosity in our formulation to replace a physically based SGS model, as observed in our previous studies [3,2]. Second, it confirms that the non-dynamic Smagorinsky model in classical LES does not lead to satisfactory predictions also for bulk parameters, while its behavior improves in the VMS-LES approach. The impact of dynamic SGS modeling on the predictions of $\overline{C_d}$ and C'_L is more significant for classical LES than for VMS-LES for both the considered SGS models; in all cases, for these considered parameters, the dynamic SGS models give better or slightly better agreement with the experimental data than their non-dynamic counterparts.

Moving to the analysis of more local quantities, the value of the mean drag is closely related to the mean pressure distribution over the cylinder surface and to the mean base pres-

sure coefficient reported in Table 1. The mean base pressure is defined as the mean pressure at $\theta = 180$, θ being the azimuthal angle, with $\theta = 0$ at the stagnation point. If we consider, for instance, the LES simulation with the Smagorinsky model, it is evident from Table 1 and from Fig. 2(a), showing the distribution of the mean pressure coefficient along the cylinder surface, that the wrong prediction of the mean drag coefficient is due to an underestimation of the mean pressure in the separate wake. It is also evident that the use of the dynamic version improves the agreement between the numerical and experimental values of the mean pressure in the separated wake (see again Fig. 2(a) and Table 1). Conversely, in all the other simulations the effects of the use of the dynamic procedure on the mean pressure distribution are moderate and very small for the VMS-LES ones, as shown for instance in Fig. 2(b) for the WALE model.

Another quantity which is in general rather difficult to be accurately predicted is the length of the mean recirculation bubble, l_r/D ; the values obtained in our simulations are reported in Table 1 together with the numerical predictions of [22] and [23]. It appears that the value of l_r/D is quite sensitive to SGS modeling and to the use of the dynamic procedure; our predictions are slightly lower than that of [23] but well inside the range of those of [22], which is, however, quite large. Since we could not find any experimental data for l_r/D at this Reynolds number, no further analysis is carried out here, while the numerical results for l_r/D are discussed more in details in Sec. 5.2 at $Re=3900$, for which different experimental data are available and this quantity has received large attention in the literature.

Finally, let us focus on the turbulence intensity distribution on the wake centerline. The distributions obtained in LES and VMS-LES simulations with dynamic and non dynamic Smagorinsky model are shown, as an example, in Fig. 3 and compared with the numerical predictions of [23] and with the experimental measurements of [24]. The value and the location of the peak in these distributions, I and L_V/D , are reported in Table 1. The maximum value of the turbulence intensity for all the simulations carried out is underestimated compared to the experimental value. This is however not surprising, since as shown also in Figure 1, the contribution of the SGS model is significant in the very near wake region ($x/D < 2$), and it is not taken into account in the computation of the resolved turbulence intensity. Conversely, the location of the peak, which is related to the length of the vortex formation region [24], should be correctly captured in the simulations. It can be seen from Table 1 that the use of the dynamic procedure noticeably improves the prediction of L_V/D in all cases, except for the VMS-LES computation with the WALE model, which gives a value in good agreement with the experimental one also for its non-dynamic version.

5.2 Circular cylinder flow at Reynolds number 3900

We consider now flow around a circular cylinder at $Re=3900$. The computational domain is the same one used for the same flow configuration at $Re=20000$ in Sec. 5.1. Two different grids are used in this case. The first one (GR1) contains approximately 2.9×10^5 nodes; the averaged distance of the nearest point to the cylinder boundary is $0.017D$, 160 nodes are uniformly distributed on the cylinder surface in the azimuthal direction and 80 nodes are present in the spanwise direction near the cylinder, with an approximately uniform distribution. The second grid (GR2) is obtained from GR1 by refining in a structured way, i.e. by dividing each tetrahedron in 8, resulting in approximately 1.46×10^6 nodes. All the remaining simulation parameters are the same as in Sec. 5.1.

The same averaging procedure as for Reynolds 20000 is used in order to compute the statistics. The main quantities of interest are summarized in Table 2.

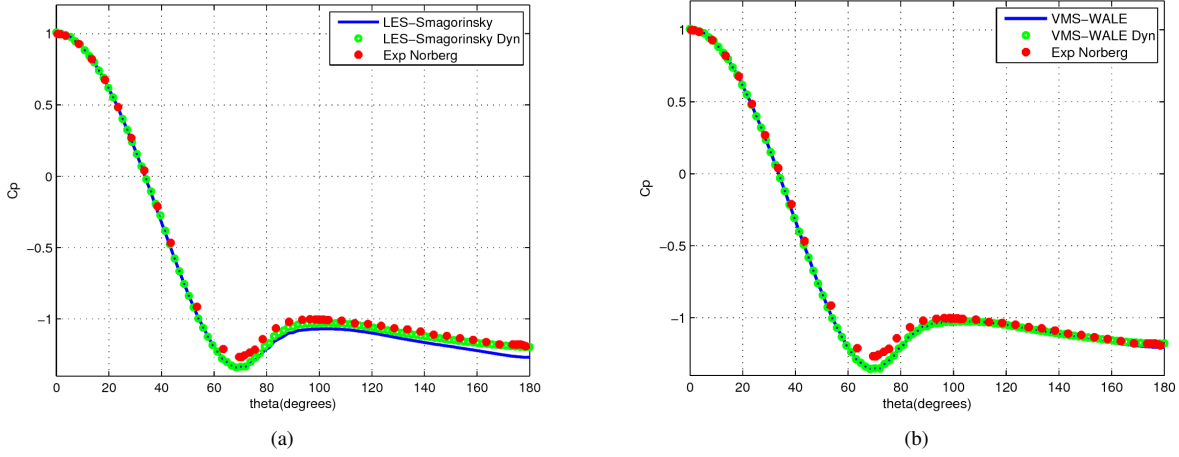


Fig. 2 Flow around a circular cylinder at Reynolds 20000: mean pressure coefficient distribution at the cylinder from the dynamic and non dynamic LES Smagorinsky (a) and VMS-LES WALE (b) computations. The experimental data are taken from [27].

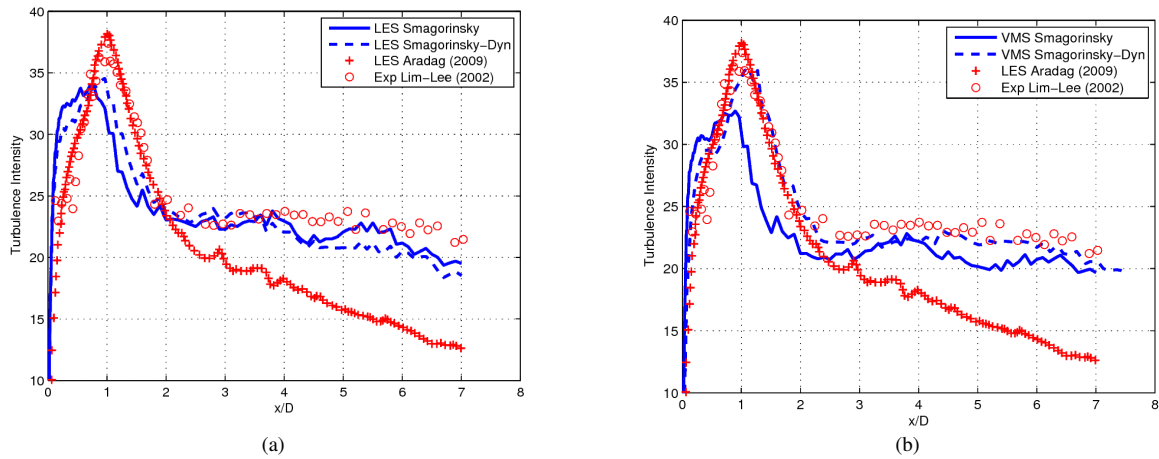


Fig. 3 Flow around a circular cylinder at Reynolds 20000 : distribution of the turbulence intensity (%) along the wake centerline obtained in LES (a) and VMS-LES (b) simulations with the dynamic and non dynamic Smagorinsky model. The data from [23] and [24] are also reported for comparison.

As previously observed for $Re=20000$, the Strouhal number is in all cases in good agreement with the reference experimental data and it is not significantly sensitive to grid refinement or SGS modeling. The numerical prediction of the mean drag coefficient is also within the experimental range, except for the no-model simulations giving a small underestimation with respect to the lower bound of the experimental range on both considered grids.

Let us analyze in more details the values obtained for the length of the mean recirculation bubble. As previously mentioned and as also pointed out in the literature (see e.g. [29]), this quantity is difficult to be accurately predicted and it is very sensitive to different simulation parameters. As reference value, we use the one obtained in the experiments in [30], reported in Table 2, which well agrees with the predictions of well resolved LES in the literature (see also the discussion in [29,30]). As can be seen from Table 2, the length of the mean recirculation bubble is noticeably underestimated in all the simulations on the coarser grid GR1. This is in agreement with previous studies [29,3], which indicated that an inadequate

4.1. Évaluation des modèles VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES dans leurs versions dynamiques

12

	$\overline{C_d}$	l_r/D	$-\overline{C_{p_b}}$	St
LES Smagorinsky (GR1)	0.98	1.06	0.97	0.219
LES dyn. Smagorinsky (GR1)	0.95	1.12	0.93	0.219
LES WALE (GR1)	0.96	1.06	0.96	0.219
LES dyn. WALE (GR1)	0.94	1.20	0.87	0.22
VMS Smagorinsky (GR1)	0.98	1.08	0.95	0.22
VMS dyn. Smagorinsky (GR1)	0.99	1.08	0.95	0.218
VMS WALE (GR1)	0.96	1.06	0.94	0.22
VMS dyn. WALE (GR1)	0.97	1.08	0.93	0.22
no model (GR1)	0.92	1.31	0.81	0.22
VMS Smagorinsky (GR2)	0.94	1.71	0.80	0.216
VMS dyn. Smagorinsky (GR2)	0.96	1.70	0.82	0.22
VMS WALE (GR2)	0.94	1.47	0.81	0.22
VMS dyn. WALE (GR2)	0.94	1.47	0.85	0.22
no model (GR2)	0.91	1.85	0.78	0.219
Exp. [28], min.	–	–	–	0.205
Exp. [28], max.	–	–	–	0.215
Exp. [30], min.	–	1.36	–	0.206
Exp. [30], max.	–	1.66	–	0.21
Exp. Norberg (from [29]), min.	0.94	–	0.83	–
Exp. Norberg (from [29]), max.	1.04	–	0.93	–

Table 2 Main quantities of interest predicted by dynamic and non-dynamic LES and VMS-LES around a circular cylinder at a Reynolds number of 3900. Same symbols as in Table 1.

grid resolution leads to a too early transition of the shear-layers detaching from the cylinder and, thus, to the formation of the vortices too close to the cylinder; all this results in an underestimation of l_r/D . It was also observed in [3] that the introduction of SGS viscosity in such a situation yields a further reduction of l_r/D and, thus, a further deterioration of the agreement with the experimental reference value. Indeed, paradoxally the *best* prediction on the coarse grid is obtained in the no-model simulation. For both SGS models, the use of the dynamic procedure leads to an increase of l_r/D in LES simulations, although it remains significantly underestimated, while the effects of dynamic SGS modeling on this quantity are negligible in VMS-LES. On the other hand, for both SGS models, VMS-LES simulations on the finer grid GR2 give values of l_r/D within or very close to the experimental uncertainty range. Once again the impact of dynamic SGS modeling is negligible. Conversely, the no-model simulation on the finer grid gives a noticeable overestimation of l_r/D , confirming once again that in our formulation the numerical viscosity does not mask the effect of SGS models and is not able to replace it. The mean streamwise velocity profile along the wake centerline is reported in Figure 4 for VMS-LES simulations on the coarse and the fine grids with dynamic and non-dynamic Smagorinsky and WALE models. These profiles confirm the observations previously made for the mean recirculation length.

Analogous considerations can be made by looking at the mean streamwise velocity profiles at different streamwise locations depicted in Figure 5 for the VMS-LES simulations with non-dynamic and dynamic WALE model on the coarse and fine grids. Note, how, on the coarse grid the shape of the profile immediately downstream the cylinder is not correctly reproduced in the simulations (a V shape is obtained instead of the U shape found in the experiments). Also the evolution of the profiles moving downstream is not well predicted. Conversely, the results obtained on the fine grid are in very good qualitative and quantitative agreement with the experimental data. Again, the effect of SGS modeling is very small, as previously in general observed for VMS-LES simulations.

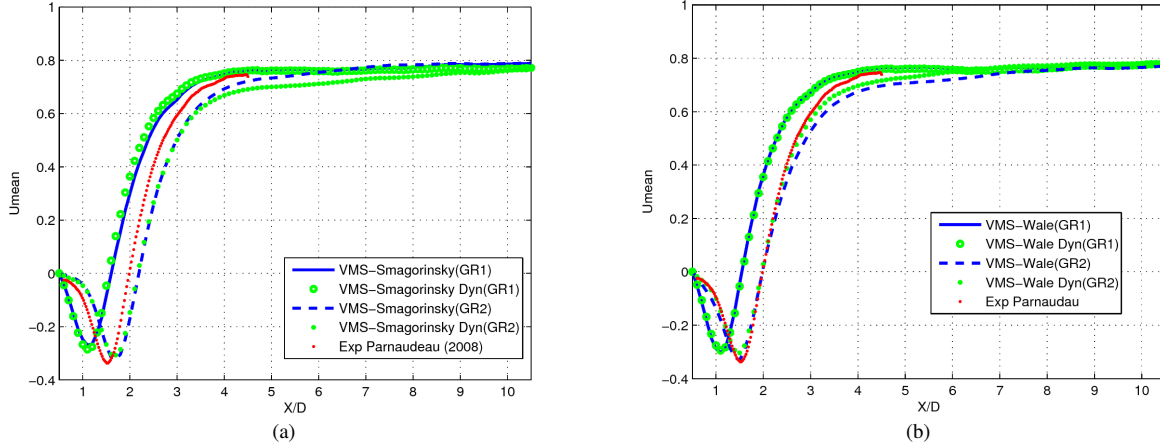


Fig. 4 Flow around a circular cylinder at Reynolds 3900 : mean streamwise velocity profile along the wake centerline for VMS-LES simulations with the Smagorinsky model and its dynamic counterpart (a) and with the WALE model and its dynamic counterpart (b) on both grids (GR1 and GR2). The experimental data are taken from [30]. The mean velocity is made nondimensional by means of the freestream velocity.

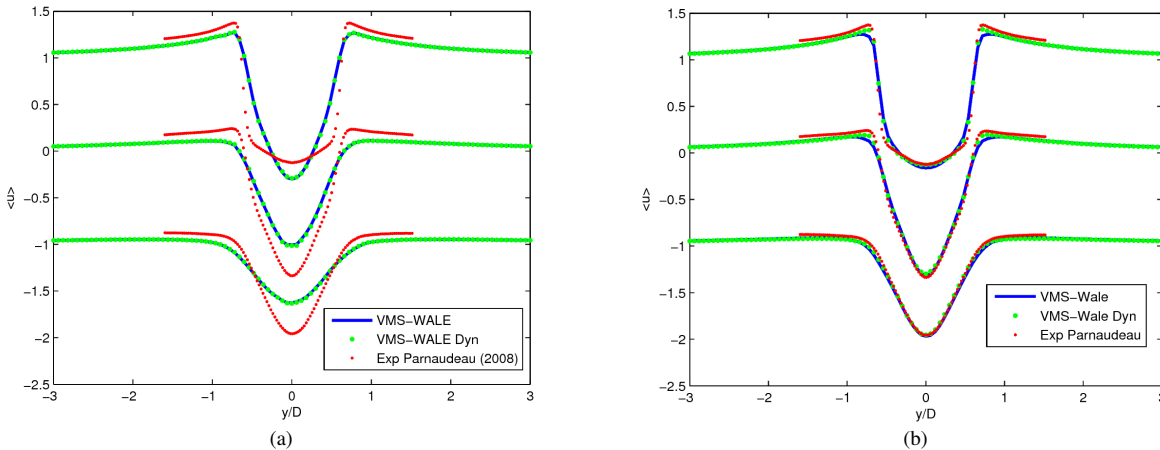


Fig. 5 Flow around a circular cylinder at Reynolds 3900 : mean streamwise velocity profile at $x/D = 1.06$ (top), $x/D = 1.54$ (center) and $x/D = 2.02$ (bottom), obtained for VMS-LES with dynamic and non-dynamic WALE models on the coarse (a) and fine (b) grids. The experimental data are taken from [30]. The mean velocity is made nondimensional by means of the freestream velocity.

5.3 Square cylinder flow at Reynolds number 22000

Obstacles with square or rectangular sections are extremely frequent in civil engineering structures, like buildings and bridges. The behavior of a flow past such an obstacle is quite different from the one around a circular cylinder. We restrict here to the case of a zero angle of attack.

Since separation is fixed by geometry, the flow keeps similar properties for a large interval of Reynolds numbers, from 10000 to 200000. This flow configuration is the object of a well-known benchmark [31] at a Reynolds number, based on the cylinder side length, D , and on the freestream velocity, equal to 22000. The overview in [31] points out that, in spite of the fixed separation, this flow is challenging for simulations, the main difficulty being the fact

that the boundary layer is laminar when it separates, and transition takes place in the separate free shear layers on the side of the cylinder.

In the present case the computational domain is a cylinder having a circular cross section of radius equal to $R = 15D$ and a spanwise length of $2D$. This length is lower than in DNS in [32] and in [33]; we chose this value after having checked that the results, at least the quantities herein analyzed, do not change significantly compared to those obtained in simulations carried out with a spanwise length of $4D$ as in DNS. The center of the square cylinder cross section coincides with that of the cross section of the computational domain, which is also the origin of the adopted reference frame. The grid is unstructured and has 1.21×10^6 cells; there are 64 nodes on each side of the cylinder and 24 in the spanwise direction uniformly distributed, while the normal distance of the first node layer from the cylinder surface is equal to $2.85 \times 10^{-3}D$. The nondimensional time step is equal to 3.8×10^{-4} , such that there are approximately 500 time steps per shedding cycle. The boundary conditions and all the remaining simulation parameters are the same as for the circular cylinder case. For the square cylinder case, we investigate the effects of the dynamic procedure only for the VMS-LES approach with the Smagorinsky model. The results of a simulation with no SGS model are also presented. The time interval used to compute statistics contains 35 vortex-shedding cycles.

	$\overline{C_d}$	l_r/D	St	C'_l	C'_d
VMS Smagorinsky	2.08	0.74	0.127	1.38	0.25
VMS dyn. Smagorinsky	2.06	0.82	0.128	1.28	0.24
no model	1.99	0.75	0.132	1.25	0.15
DNS [32]	2.09	–	0.133	1.45	0.178
DNS [33]	2.1	–	0.133	1.22	0.21
Exp. [34,35]	2.1	0.88	0.132±0.004	–	–

Table 3 Bulk flow parameters and quantities of interest for the flow around a square cylinder at a Reynolds number of 22000. C'_d is the root mean square of the time fluctuations of the drag coefficient; the other symbols are the same as in previous tables.

In Table 3 we compare a few quantities of interest obtained in our simulations with those of a DNS by Verstappen *et al.*, (from the 1997 paper [32] and from more recent slides [33]) and measurements by Lyn *et al.*, [34,35] and Luo *et al.*, [36].

The DNS simulations in [32,33] and the experiments of [34,35] are characterized by the same blockage factor. Our computational domain has a different shape (circular cross-section instead of rectangular) and its maximum width is significantly larger than that of the DNS. Periodic boundary conditions are used herein as well as in [32,33]; the spanwise length is $4D$ for the computational domain used in DNS and $9.75D$ in the experiments [34,35]. As for freestream conditions, in our simulations a smooth incoming flow is considered as in [32,33], while the experiments in [34,35] are characterized by a freestream turbulence intensity of 2%. In spite of the previous differences, the DNS results and the experimental data agree very well in the prediction of the Strouhal number and of the mean drag coefficient. Our VMS simulations, both with the non-dynamic and dynamic Smagorinsky models, give predictions of $\overline{C_d}$ in good agreement with the literature data, while the no-model simulation slightly underestimates it. As for the Strouhal number, all the values are within or very close to the experimental range and this quantity is only slightly sensitive to SGS modeling, as expected in this case since the boundary-layer separation is fixed by the geometry. Conversely, the r.m.s. of the time fluctuations of lift and drag coefficient vary more significantly with SGS modeling; however, it is hard to draw some conclusions on these quantities since also in DNS

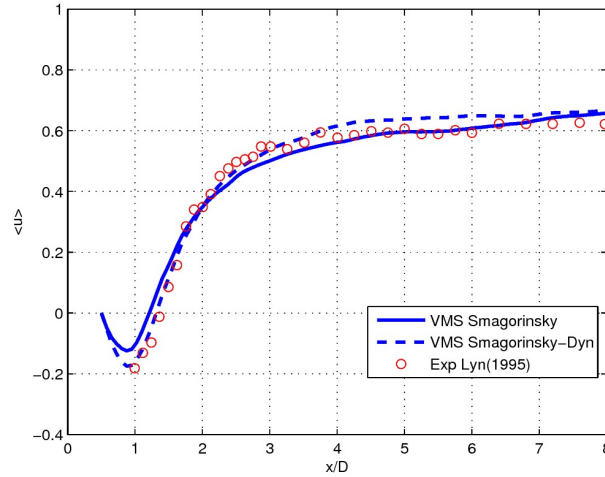


Fig. 6 Flow around a square cylinder at Reynolds 22000 : mean streamwise velocity on the centerline of the wake. Experimental data are taken from[35]. The mean velocity is made nondimensional by using the freestream velocity.

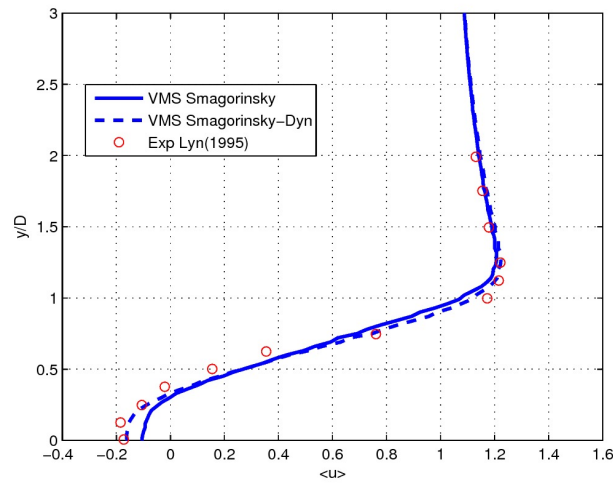


Fig. 7 Flow around a square cylinder at Reynolds 22000 : mean streamwise velocity at $x/D=1$. Experimental data are taken from[35]. The mean velocity is made nondimensional by using the freestream velocity.

in [32] and [33] significantly different values are obtained. Finally, as previously observed for the circular cylinder case, another quantity which is significantly sensitive to SGS modeling is the length of the mean recirculation bubble. The best agreement with the experimental value is obtained in the VMS-LES simulation with the dynamic Smagorinsky model. This can be seen also in Fig. 6, which shows the mean streamwise velocity along the wake centerline. The mean velocity field in the near-wake obtained with the dynamic Smagorinsky model is in general in better agreement with the experimental one than that given by the non-dynamic one; this can be seen again in Fig. 6, by looking for instance at the prediction of the mean velocity in the recirculation zone, or in Fig. 7, showing the mean streamwise velocity profile immediately downstream the cylinder ($x/D = 1$). Conversely, the use of dynamic SGS modeling does not affect the main velocity field on the lateral sides of the cylinder, as shown for instance by the mean streamwise velocity profile at $x/D = 0$ reported in Fig. 8. Note also

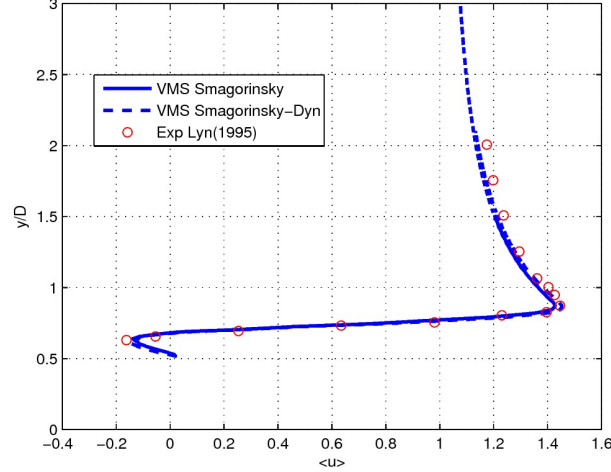


Fig. 8 Flow around a square cylinder at Reynolds 22000: mean streamwise velocity at $x/D=0$. Experimental data are taken from [35]. The mean velocity is made nondimensional by using the freestream streamwise velocity.

how there is good agreement between the numerical and experimental values of the mean streamwise velocity also quite far from the cylinder surface; therefore, it can be inferred that the different blockage does not seem to significantly affect the mean velocity field around the cylinder.

6 Applications to hybrid calculations

6.1 Circular cylinder flow at Reynolds number 1 million

Let us start this part devoted to hybrid calculations by presenting the results of a circular cylinder flow at Reynolds number, based on the cylinder diameter D and on the freestream velocity, equal to 1 million. The computational domain is such that $-10D \leq x \leq 55D$, $-10D \leq y \leq 10D$, and $0 \leq z \leq 4D$ where x , y and z denote the streamwise, transverse and spanwise directions respectively, the cylinder axis being located at $x = y = z = 0$. The mesh involves 2.854 millions nodes and 15 millions tetrahedra. The first mesh layer thickness is $0.002D$, which corresponds to $y^+ \approx 100.0$, a cross-section of the mesh according to the transverse plane is depicted in Fig. 9. In this study, the Reichardt wall law is used and the SGS model is taken as the WALE model, dynamic or non-dynamic.

Only a few results with Reynolds larger than 5×10^5 are available in the literature. this range corresponds to a supercritical regime for which the boundary layer is turbulent at the flow separation. It is generally admitted that the vortex shedding strength is low over the interval $[5 \times 10^5, 1.5 \times 10^6]$. Experimental results involve those of Shih et al. [43], Schewe [42], Guven et al. [45], Goelling[46] and Zdravkovich [47]. Computations are even more difficult to find in the literature. LES computations of Kim et Mohan [41], Catalano et al. [39], Ono and Tamura [40], and RANS computations of Catalano et al. [39] are used for comparison purpose. These simulations were performed with grids of 2.3×10^6 nodes (Catalano et al. [39]), 4.5×10^6 nodes (Ono and Tamura [40]) and 6.8×10^6 nodes (Kim and Mohan [41]). Probably LES computations performed with less than 4 million nodes are underresolved and produce in particular a too large drag (see Table 4).

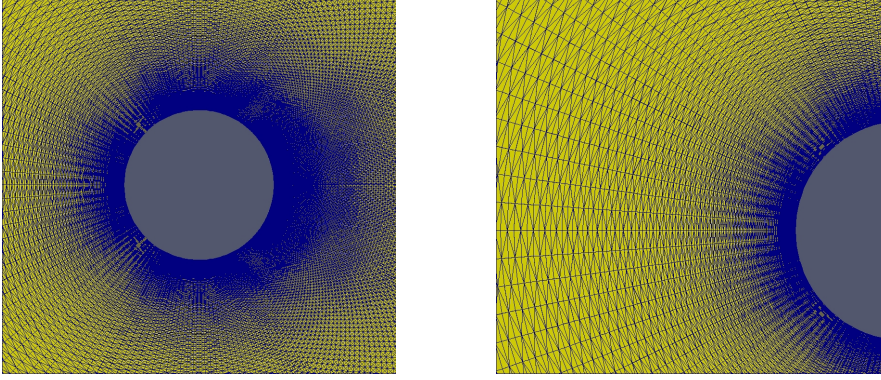


Fig. 9 Transverse cross-section of the mesh and a close-up view of the grid near the surface cylinder

The impact of the dynamic SGS modeling in the hybrid RANS-VMS-LES approach is investigated in terms of flow bulk coefficients and statistics. For all simulations, statistics are computed by averaging in time for 30 vortex shedding cycles. The main bulk coefficients and quantities of interest are summarized in Table 4, and are compared with experimental data and with other numerical results also included to this Table.

Present simulations	Mesh size	$\overline{C_d}$	C'_l	$-\overline{C_{pb}}$	θ
Hybrid RANS/VMS-LES WALE non dyn	2.85M	0.28	0.09	0.21	116
Hybrid RANS/VMS-LES WALE dyn	2.85M	0.27	0.08	0.21	116
Simulations					
RANS of Catalano et al. [39]	2.3M	0.39		0.33	
LES of Catalano et al. [39]	2.3M	0.31		0.32	
LES of Ono and Tamura [40]	4.5M	0.27	0.13		
LES of Kim and Mohan [41]	6.8M	0.27	0.12	0.28	108
Experiments					
Shih et al. [43]		0.24		0.33	
Schewe [42]		0.22			
Szechenyi [44]		0.25		0.32	
Güven et al. [45]		0.22			
Goelling [46]					
Zdravkovich [47]		0.2-0.4	.1-.15	.2-.34	130

Table 4 Bulk coefficients of the flow around a circular cylinder at Reynolds number 10^6 . Symbol l_r holds for the mean recirculation length, $\overline{C_d}$ for the mean drag coefficient, C'_l is the root mean square of lift time fluctuations, $\overline{C_{pb}}$ is the pressure coefficient at cylinder basis, and θ the separation angle.

From these results, we first observe that the dynamic SGS modeling does not bring a notable improvement in the hybrid simulations. Second, the drag coefficient predicted by our hybrid computations is overestimated compared to experimental data, as it can be observed in other numerical experiments available in the literature which nevertheless use finer meshes. On the other hand, lift fluctuations are under predicted by our computations (the mesh is not enough refined close to the body). The predicted separation angle, which corresponds to a turbulent flow separation (more than 90 degrees), is in better agreement with experimental data than for the other numerical experiments shown in Table 4. Nevertheless, this angle is underestimated compared to experimental data, which corroborates the observation made

concerning the drag coefficient (overestimation). In Fig. 10, we give an example of instantaneous vorticity field which shows the small flow details captured by our hybrid simulations.

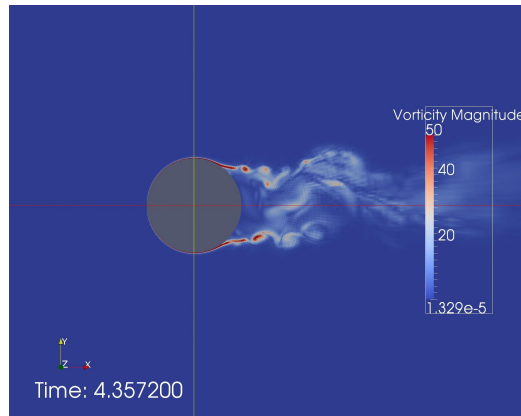


Fig. 10 Flow around a circular cylinder at Reynolds 1 million : instantaneous vorticity field.

In order to compare with available experimental results for the mean C_p distribution over the cylinder surface, we have performed additional computations of the circular cylinder flow at Reynolds numbers 6.7×10^5 and 1.25×10^6 on a coarse mesh (274000 nodes) and a finer one (1.21 million nodes), see Fig. 11. These Reynolds numbers correspond also to a supercritical flow regime. Dynamic and non-dynamic options do not produce notably different outputs and only the case of the dynamic option is shown. From Fig. 11, we note that the secondary recirculation observed in experimental measurements at $\theta \approx 110$ deg for Reynolds number 6.7×10^5 is not predicted by our computations, the grid resolution, even with the fine mesh, being not sufficient. Nevertheless, we note a good overall agreement with experimental data at this Reynolds number. At Reynolds number 1.25×10^6 , we observe an overestimation of the mean pressure for angles between 90 and 130 degrees.

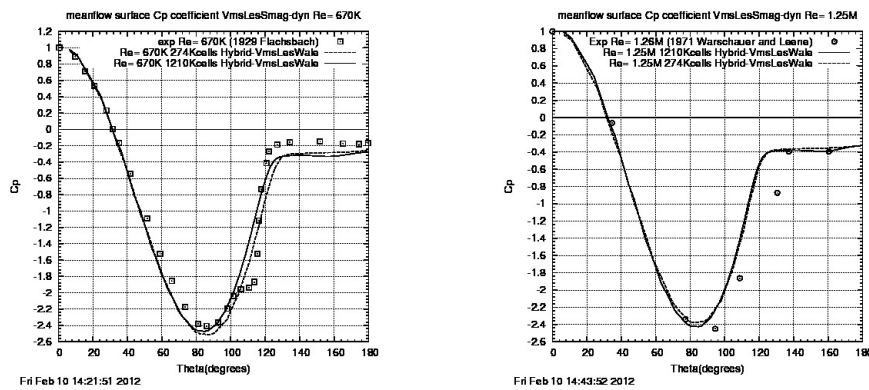


Fig. 11 Distribution of mean pressure as a function of polar angle. Comparison of measure with two computations with different meshes.

6.2 Tandem cylinder at Reynolds number 166000

6.2.1 Test case description and simulation parameters

The second application of the RANS/VMS-LES hybrid model concern the simulation of the flow over two cylinders in tandem at Reynolds number, based on the far-field velocity and the cylinders diameters D , equal to 1.66×10^5 . The distance L_c between the centers of the cylinders is $L_c/D = 3.7$. It should be noted that the boundary layers in this benchmark are turbulent due to turbulent inflow conditions.

This test case has been chosen because it involves many features and difficulties encountered in industrial problems and, secondly, it has been numerically studied by several teams as part of a workshop and experimental data are also available in the literature. Moreover, this benchmark can also be considered as the first step before the computation of the flow around an array of cylinders which is an important problem encountered in many industrial applications associated to offshore oil and gas industries, civil engineering, aeronautics and nuclear industry, among others.

Experiments have been performed in the "Basic Aerodynamic Research Tunnel"(BART) of Langley in order to study the flow around a landing gear of an aircraft. This study belongs to the "Quiet Aircraft Technology" (QAT) project of NASA for noise reduction.

This test case was also studied in an AIAA workshop [50] whose participants are summarized in Table 12. This Table shows in particular the numerous CFD codes, the turbulence models and the size of the grids used in this workshop. Among the conclusions of the workshop, addressing this case with the LES approach was considered as a too difficult task with existing computers. Results of DES-based computations were much closer to measurements, although none of them was in very good agreement with the experimental data. This test case is therefore particularly challenging for turbulence models but also for numerical ones. First, the flow over the first cylinder has to be correctly predicted, second the turbulent wake between the two cylinders has to be well captured, which of course conditions the calculation of the flow around the second cylinder. This implies to be able to have not too dissipative turbulence and numerical models, as well as an appropriate grid, in order, in particular, to convect properly the vortices between the two cylinders.

In this study, the capabilities of the RANS/VMS-LES hybrid approach, combined with the non-dynamic and dynamic versions of the WALE SGS model, are investigated on the tandem cylinder benchmark. The results, obtained on a coarse and a fine unstructured grids, are compared to those of other hybrid simulations from [50], and with experimental data. Both grids are composed of a structured part in a circular crown around the cylinders surfaces and an unstructured part in the rest of the domain. Furthermore, and in order to improve the prediction of such flows, the Menter correction [54] is introduced in the RANS/VMS-LES hybrid model combined with the dynamic SGS model and evaluated on the tandem benchmark.

As for the simulations presented hereafter, characteristic based conditions are used at the inflow and outflow as well as the lateral surfaces. In the spanwise direction, periodic boundary conditions are applied. No-slip conditions are imposed on the walls for the fine mesh and a wall law approach is used for the coarser grid. The freestream Mach number is set to 0.1 in order to make a sensible comparison with incompressible simulations in the literature and a preconditioning is used to deal with the low-Mach number regime.

Starting from a uniform flow and once the flow is established, statistics are computed by averaging in time for, at least, 30 vortex-shedding cycles. The computations, using 192 to

4.1. Évaluation des modèles VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES dans leurs versions dynamiques

20

ID	Code	Turbulence Model	Time Step Algorithm	Span/D	Grid Points (millions)	Time Steps	Subiterations Per Time Step
1	STAR-CCM+	SST DES		12	6.7	100000	5
2	PowerFLOW	k- ϵ DES	Explicit	16	66	1360874	1
3	CEDRE	SST DDES	Implicit RK12	4	17	1000000	20
4	UPACS-LES	Zonal S-A	MFGS	18	70	297463	5
5a	CFL3D	S-A MDES	Dual-time	3	10	59000	20
5b	CFL3D	Zonal SST	Dual-time	18	60	59000	20
6	OVERFLOW	S-A MDES	Dual-time	3	16	233973	20
7	ARGO	S-A DDES	Dual-Time	4	10	100000	
8a	NTS Code	S-A DDES	Dual-time	3	11	38461	15
8b	NTS Code	S-A DDES	Dual-time	16	60	153846	30
9	FUNK	LES	Implicit Gear	4	16	500000	5
10	FSU Code	S-A DDES	Implicit B-W	6	133	512820	3
11	FUN3D	HRLES	Dual-time	3	8.7	59200	15
12	OpenFOAM	FSM SST	pisoFOAM	3	2	325287	
13	ELAN	S-A DDES	Implicit	3	10	40000	10
14	TAU	S-A DDES	Dual-time	3	11	14000	150

Fig. 12 Details of computations from Lockard [50]. Reported time steps would simulate 1 second of real time

768 parallel processors in the present study, have been carried out on the supercomputer OC-CIGEN at CINES (Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur, Montpellier, France).

6.2.2 Tandem cylinder - coarse grid

In the simulations presented in this section, the mesh, depicted in Fig. 13, contains 2.59 millions nodes and 15×10^6 tetrahedra. The computational domain is such that $-10 \leq x/D \leq 50$, $-10 \leq y/D \leq 20$, $-2 \leq z/D \leq 2$ where x, y, z denote the streamwise, transverse and spanwise directions respectively, the center of the first cylinder being located at $x = y = z = 0$.

As previously written, the RANS/VMS-LES hybrid model, combined with the dynamic and non-dynamic WALE SGS models, is used. A URANS (Goldberg $k - \epsilon$, [52]) computation, which is the approach often favored in CFD simulations in industry, is also performed for comparison purpose.

An idea of the impact of RANS and RANS/VMS-LES hybrid options on the resulting flow is first proposed in Fig. 14. As expected, an excessive damping of the flow is observed for the RANS computation whereas the hybrid calculation captures a rather large spectrum of scales in the flow around and in the wake of the tandem cylinder.

Fig. 15 depicts the mean pressure coefficient distribution at the upstream and downstream cylinders for the RANS and the dynamic RANS/VMS-LES simulations. The base pressure $\overline{C_{pb}}$ predicted by the RANS/VMS-LES is in good accordance with BART experiment for the upstream cylinder, unlike the URANS approach. The simulation around the second cylinder is more challenging as illustrated in Fig. 15. Besides the fact that the prediction of the flow around the downstream cylinder depends on the quality of the wake simulation between the two cylinders, the prediction of the second cylinder flow should benefit from a finer grid compared to the first cylinder since it experiments a higher Reynolds number due to the pres-

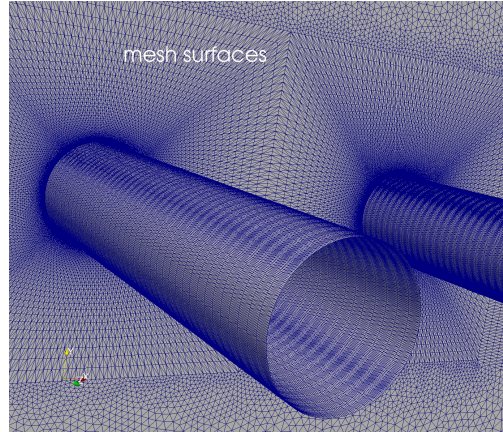


Fig. 13 Coarse grid: 2.59 millions of nodes: 142 nodes in θ direction and 45 nodes in z direction

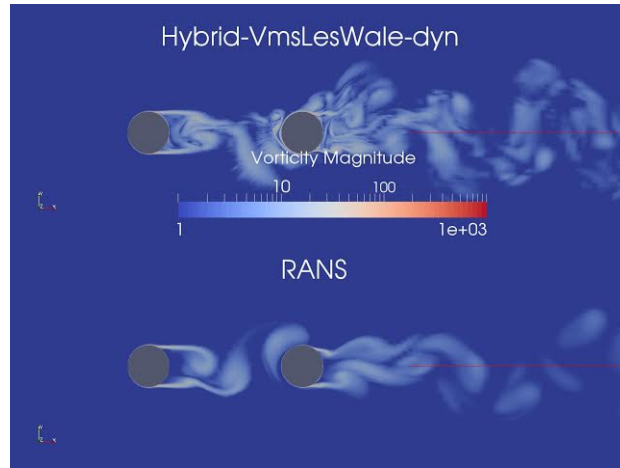


Fig. 14 A vertical cut of vorticity norm obtained with hybrid dynamic RANS/VMS-LES WALE (top) and RANS (bottom).

ence of the unsteady turbulent wake generated by the upstream cylinder. We checked that the dissymmetry that appears in the mean pressure coefficient distribution with the RANS/VMS-LES hybrid simulation is related to the VMS coarse cells generation while this is attenuated with the dynamic RANS/LES hybrid computation when the VMS option is not used (see Fig. 16). In this case, the hybrid simulation provides an overall better prediction, compared to RANS, of the mean pressure coefficient at the downstream cylinder.

Table 5 shows the mean drag coefficients C_d and the root-mean-square of the time variation of the lift coefficient $C_{l_{rms}}$ for the two cylinders obtained with our RANS and hybrid simulations (the symbol ① corresponds to the first cylinder and ② to the second one). For the purpose of comparison, experimental data [51] and results available in the literature [50, 53, 49, 17] are also included in this Table. It should be mentioned that the meshes used in the other numerical experiments are much finer than the one used in our simulations (up to 133 million nodes). It should also be noted that, in Table 5, *Lockard* refers to the AIAA workshop [50] whose contributors are summarized in Table 12 and for which intervals of values are given in order to show the scattering of the results obtained with this difficult benchmark,

4.1. Évaluation des modèles VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES dans leurs versions dynamiques

22

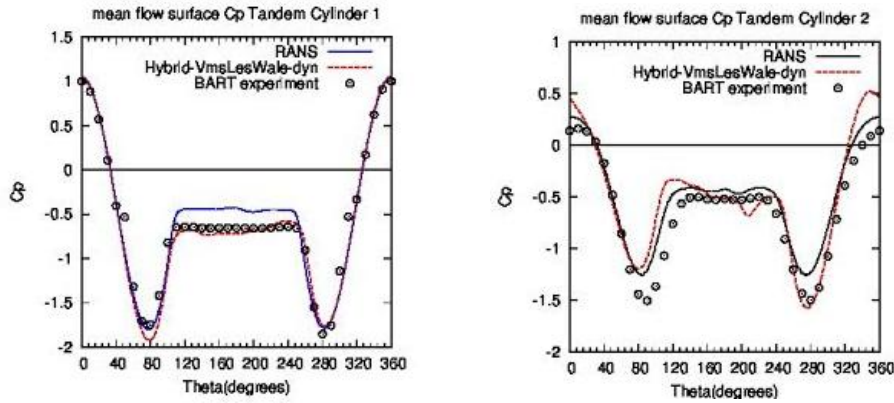


Fig. 15 RANS and dynamic RANS/VMS-LES hybrid models, coarse grid of the tandem cylinder : mean pressure coefficient distribution at the upstream (left) and downstream (right) cylinders as a function of polar angle

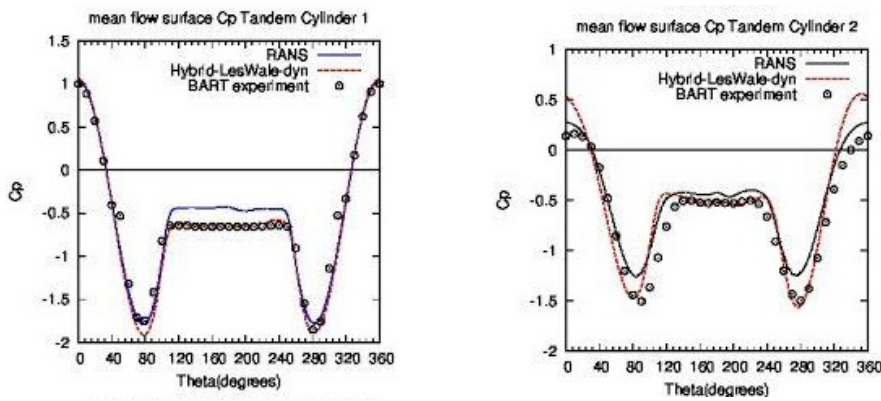


Fig. 16 RANS and dynamic RANS/LES hybrid models, coarse grid of the tandem cylinder : mean pressure coefficient distribution at the upstream (left) and downstream (right) cylinders as a function of polar angle.

and *Aybay* refers to the simulation which gives predictions among the most accurate of this workshop.

First, we observe that the RANS model gives rather poor predictions while the results obtained with the RANS/VMS-LES model are in overall good agreement with experimental data, with a slight improvement when the dynamic SGS modeling is used. It should also be noted that the RANS/VMS hybrid model combined with a dynamic SGS modeling gives better predictions compared to the other numerical experiments reported in Table 5. As expected, with regard to the root-mean-square of the time variation of the lift coefficient $C_{l,rms}$ of the two cylinders, the RANS/VMS-LES hybrid model is in overall better agreement with the available numerical results compared to the RANS method.

	Mesh	$\overline{C_d}^{(1)}$	$\overline{C_d}^{(2)}$	$C_{Lrms}^{(1)}$	$C_{Lrms}^{(2)}$
Experiment					
Neuhart and Lockard (BART facility) [51]		0.64	0.31		
Present simulations					
RANS	2.59M	0.55	0.24	0.01	0.32
Hybrid Wale non-dyn.	2.59M	0.68	0.36	0.050	0.65
Hybrid Wale dyn.	2.59M	0.64	0.38	0.077	0.79
Other simulations					
DES $k - \omega$ SST, Aybay [50]	6.7M	0.64	0.44		
HRLES, Vatsa [53]	8.7M	0.64	0.45		
S-A MDES, Lockard [49]	16M	0.50	0.45	0.072	0.643
S-A DDES, Garbaruk [17]	11M	0.48	0.42	0.078	0.612
Lockard (min-max) [50]	2M-133M	0.33-0.80	0.29-0.51	0.035-0.225	0.34-0.73

Table 5 Tandem cylinder: Mean drag coefficient (experimental coefficients are computed by integrating experimental pressure). Circled superscripts hold for cylinder 1 and cylinder 2.

6.2.3 Tandem cylinder - fine grid

In this section, the flow around tandem cylinders at Reynolds number equal to 1.66×10^5 is again considered but with a finer grid around the cylinders consisting of approximately 92 million of elements. A close-up view of the surface mesh is shown in Figure 17. The computational domain is such that $-25 \leq x/D \leq 28.7$, $-25 \leq y/D \leq 25$, $0 \leq z/D \leq 3$, where D is the diameter of the cylinders, and x , y , z denote the streamwise, transverse and spanwise directions respectively, the center of the upstream cylinder being located at $x = y = z = 0$.

The dimensionless time step $\Delta t = 0.001$ is used, corresponding to CFL numbers less than 1 for the cells of the near-region around and between the cylinders.

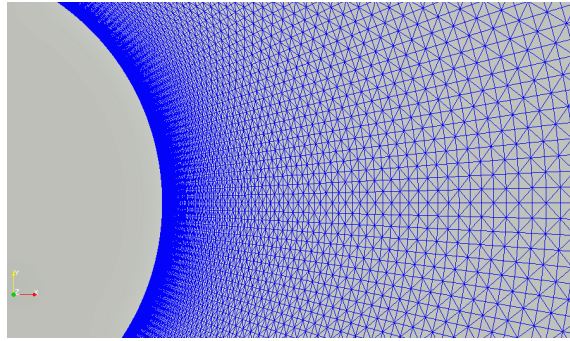


Fig. 17 Tandem cylinder, fine grid : close-up view of the surface mesh near the surface cylinder

In this study, we exclusively evaluate the performance of the RANS/VMS-LES hybrid approach combined with the dynamic and the non-dynamic version of the WALE SGS model, and with integration to the wall.

In order to illustrate the small scales of the flow computed on the fine grid by the hybrid model, the Q-criterion isosurfaces are shown in Figure 18 and the distribution of vorticity magnitude is given in Figure 19. These pictures show the complexity of the flow containing very small structures that need to be captured by the numerical model and the turbulence model, which renders this simulation particularly challenging. The flowfield between the cylinders and in the wake of the downstream cylinder is now predicted with much more

details compared to the same flow computed on the coarse grid of 2.59 million nodes. In Table 6 we compare some bulk coefficients and quantities of interest obtained in our hybrid simulations with those of Aybay [50], Vatsa [53], Lockard [49] and Garbaruk [17], and measurements by Neuhart [51]. The symbols used in this Table are the same than those from Table 5, except for $St^{\textcircled{1}}$ which denotes the Strouhal number corresponding to the upstream cylinder. The hybrid simulation brings an overall good agreement with reference data, and we note that some slight improvements when the dynamic SGS modeling is used in our hybrid model.

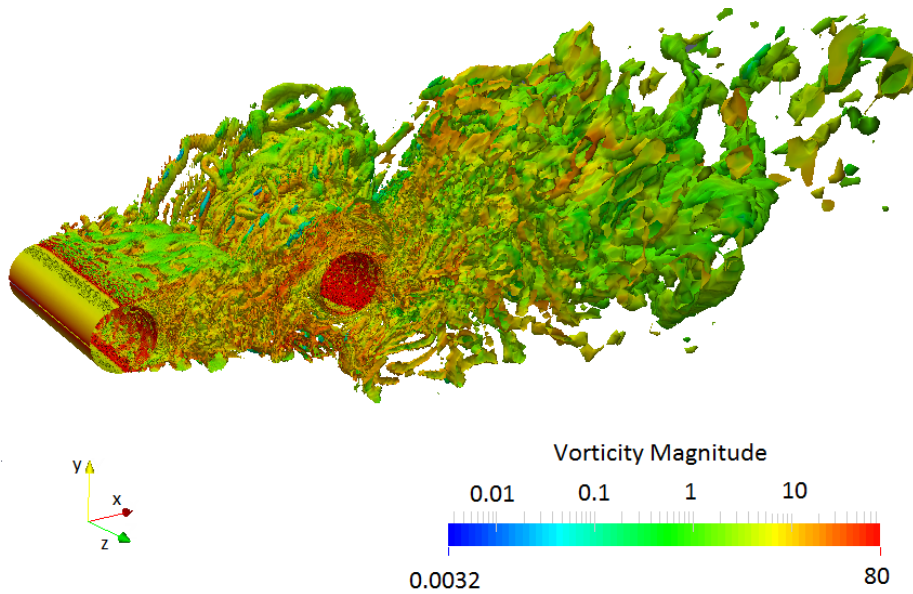


Fig. 18 Tandem cylinder, fine grid : Q-criterion isosurfaces with the RANS/VMS-LES hybrid model (dynamic SGS modeling)

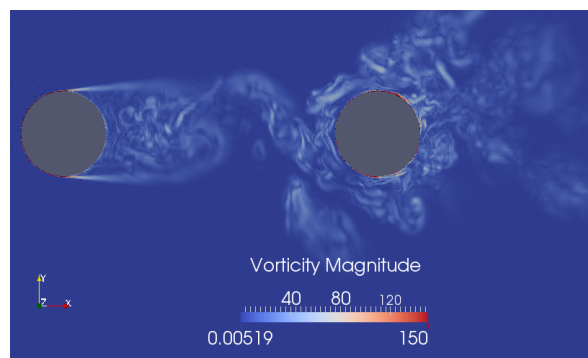


Fig. 19 Tandem cylinder, fine grid : distribution of vorticity magnitude with the RANS/VMS-LES hybrid model (dynamic SGS modeling)

Figure 20 depicts the centerline distribution of the turbulent kinetic energy (TKE) in the gap between the cylinders (top left) and after the downstream cylinder (bottom left) obtained in our hybrid simulations, and those from other simulations are also included in this Figure. We observe an important improvement for the prediction of this distribution after the second cylinder when the dynamic SGS modeling is used in our hybrid model. An overall good

agreement with experimental data is then obtained, contrary to the hybrid simulation without dynamic SGS modeling.

Figure 21 gives the distribution along the transverse direction of the velocity profile in the wake after the downstream cylinder. We observe that there is a good agreement between the predictions obtained with the RANS/VMS-LES hybrid model and the experimental data, with a rather comparable behavior between the dynamic and non dynamic options.

At last, Figure 22 (left) presents the distribution along the wake centerline of time-averaged streamwise velocity in the gap between cylinders, results from other numerical experiments (top and bottom right) are also included in this Figure. We observe again that the results obtained with the hybrid model are in good agreement with experimental data, with an improvement brought by the use of the dynamic SGS modeling in the second part of this distribution. In summary, it can be said that the introduction of the dynamic SGS modeling in the VMS-LES hybrid approach brings improvements for the prediction of certain quantities and does not deteriorate it otherwise.

	Mesh	$\overline{C_d}^{(1)}$	$\overline{C_d}^{(2)}$	$C_{Lrms}^{(1)}$	$C_{Lrms}^{(2)}$	$St^{(1)}$
Experiment						
Neuhart and Lockard (BART facility)		0.64	0.31			0.232
Present simulations						
Hybrid Wale non dyn.		16M	0.63	0.44	0.11	0.64
Hybrid Wale dyn.		16M	0.64	0.43	0.09	0.54
Other simulations						
DES $k - \omega$ SST, Aybay		6.7M	0.64	0.44		
HRLES, Vatsa		8.7M	0.64	0.45		
S-A MDDES, Lockard		16M	0.50	0.45	0.072	0.643
S-A DDES, Garbaruk		11M	0.48	0.42	0.078	0.612
Lockard (min-max)		2M-133M	0.33-0.80	0.29-0.51	0.035-0.225	0.34-0.73

Table 6 Tandem cylinder, fine grid: mean drag coefficient (experimental coefficients are computed by integrating experimental pressure). Circled superscripts hold for cylinder 1 and cylinder 2.

6.3 Impact of the Menter correction in the RANS/VMS-LES hybrid model combined with a dynamic SGS modeling

In this section, with the objective to improve the performance of the RANS/VMS-LES hybrid model combined with a dynamic SGS modeling for the prediction of the tandem cylinder flow, we introduce the Menter correction in the $k - \epsilon$ model of Goldberg [52] which is the RANS component of our hybrid model. The Menter correction allows to limit the turbulent viscosity, an important feature useful for example in stagnation regions that are present in bluff body flow problems, and allows to better predict adverse pressure flows which characterize the flow problems presented in this paper.

It should be noted that the coarse mesh of 2.59 million nodes is selected in the simulations carried out in order to limit the computational cost of the simulations.

6.3.1 The Menter correction

This correction limits the turbulent viscosity by the Bradshaw's law in a similar way to Menter's SST model [54].

In the low Reynolds $k - \epsilon$ Goldberg model [52] implemented in our hybrid model, the turbulent viscosity is modeled by :

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

4.1. Évaluation des modèles VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES dans leurs versions dynamiques

26

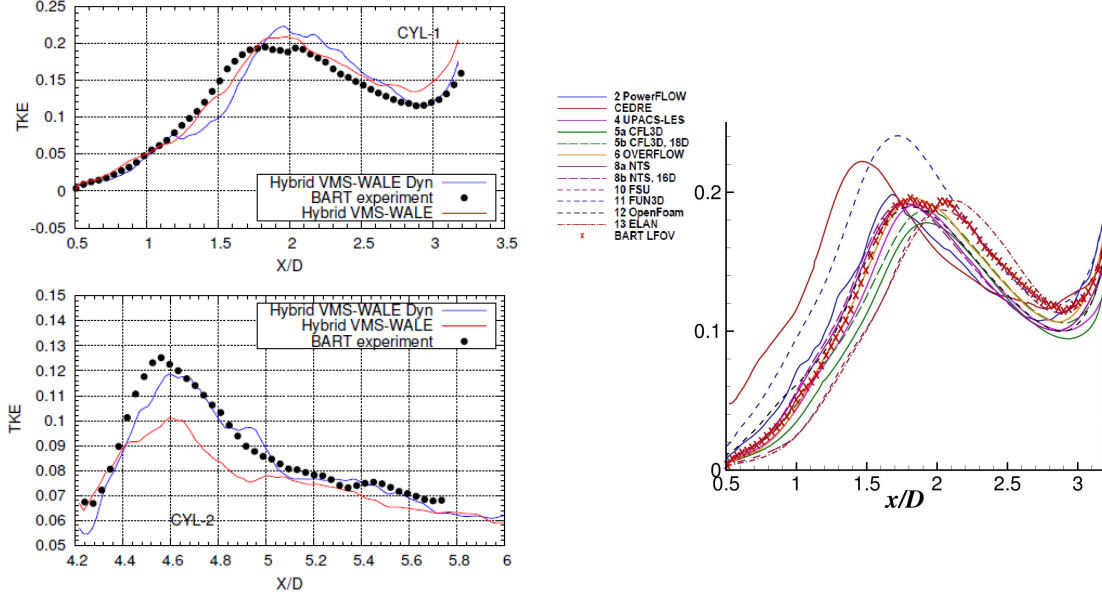


Fig. 20 Tandem cylinder, fine grid : centerline distributions of the resolved TKE in the gap between the cylinders (top left) and after the downstream cylinder with the RANS/VMS-LES hybrid model (bottom left) and from other simulations (right) [50]

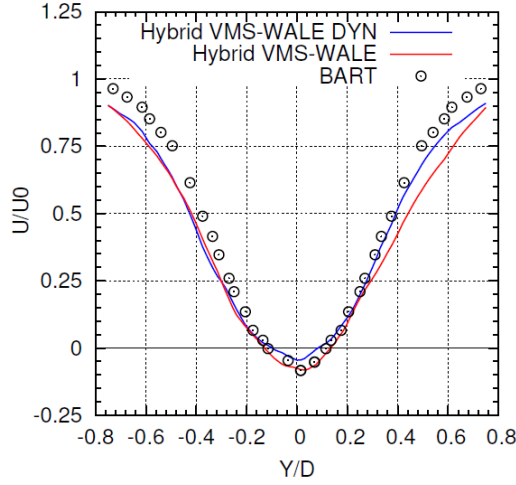


Fig. 21 Tandem cylinder, fine grid : distribution along the transverse direction of the velocity profile in the wake after the downstream cylinder

where $C_\mu = 0.09$, and the damping function is defined as :

$$f_\mu = \frac{1 - e^{-A_\mu R_t}}{1 - e^{-R_t^{1/2}}} \max(1, \psi^{-1})$$

with $A_\mu = 0.01$, $\psi = R_t^{1/2}/C_\tau$ and $R_t = k^2/(\nu\varepsilon)$.

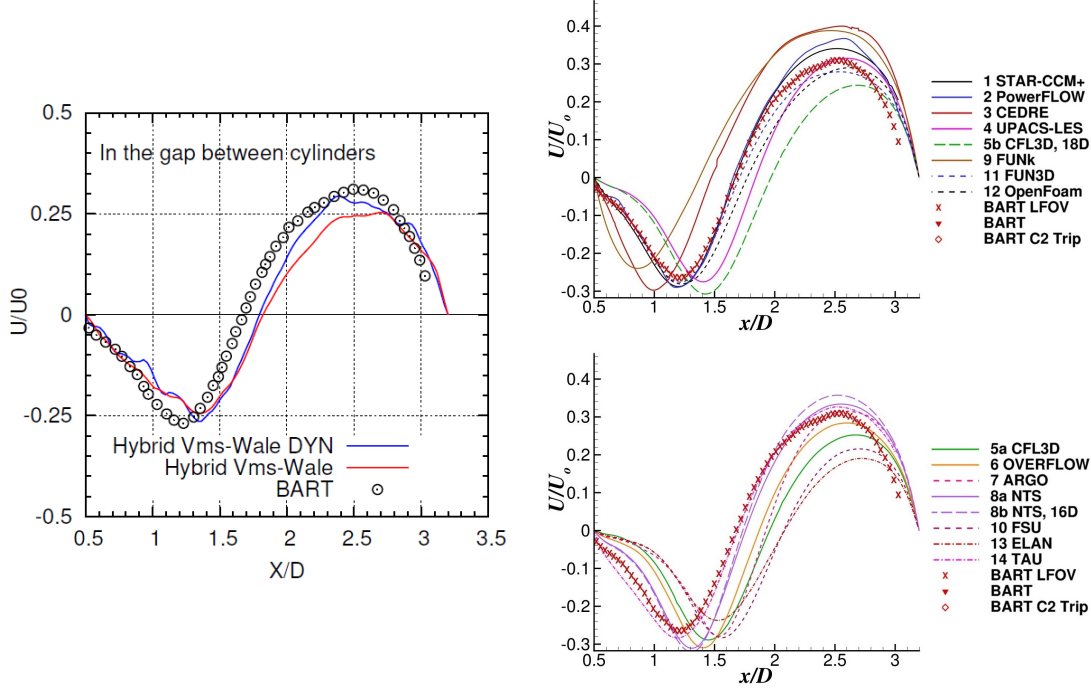


Fig. 22 Tandem cylinder, fine grid : distribution along the wake centerline of the time-averaged streamwise velocity in the gap between the cylinders with the RANS/VMS-LES hybrid model (left) and from other simulations (top and bottom right) [50]

The Menter correction limits the turbulent viscosity as follows :

$$\mu_t = \frac{\rho k \sqrt{C_\mu}}{\max\left(\frac{\epsilon}{k \sqrt{C_\mu} f_\mu}, |r| \psi\right)}$$

where $|r|$ is the norm of the vorticity, $\psi = \tanh(\arg^2)$ with $\arg = \max\left(2 \frac{k^{3/2}}{\epsilon d}, \frac{500 \nu B^* k}{d^2 \epsilon}\right)$,

$\nu = \frac{\epsilon}{B^* k}$ and $B^* = 0.09 (= C_\mu)$

6.3.2 Results - Menter correction

In Fig. 23, we compare the distributions of the time-averaged streamwise velocity along the wake centerline in the gap between cylinders (a) and the velocity profile along the transverse direction in the wake after the downstream cylinder (b), with Bart experimental data. There is a significant improvement of the first prediction (a) when the Menter correction is used, while no notable effects appear on the second one (b). This can be due to the high level of turbulence in the boundary layer of the second cylinder, submerged into the upstream cylinder wake, which is difficult to properly capture and impacts the effect of the correction. This trend is also observed in Fig. 25 (left) that shows the streamwise velocity along the wake centerline after the downstream cylinder and shows a slight improvement. This prediction is compared with experimental data and with the numerical results (top and bottom right in Fig. 25) obtained in the workshop whose contributors are summarized in Fig. 12. A reasonably

good agreement is achieved even if the numerical simulations show large scatter. Finally, as for the distribution of the turbulent kinetic energy (TKE) along the wake centerline in the gap between the two cylinders (Fig. 24), while using the Menter correction in the hybrid approach, the distribution of TKE is in good agreement with BART experimental data.

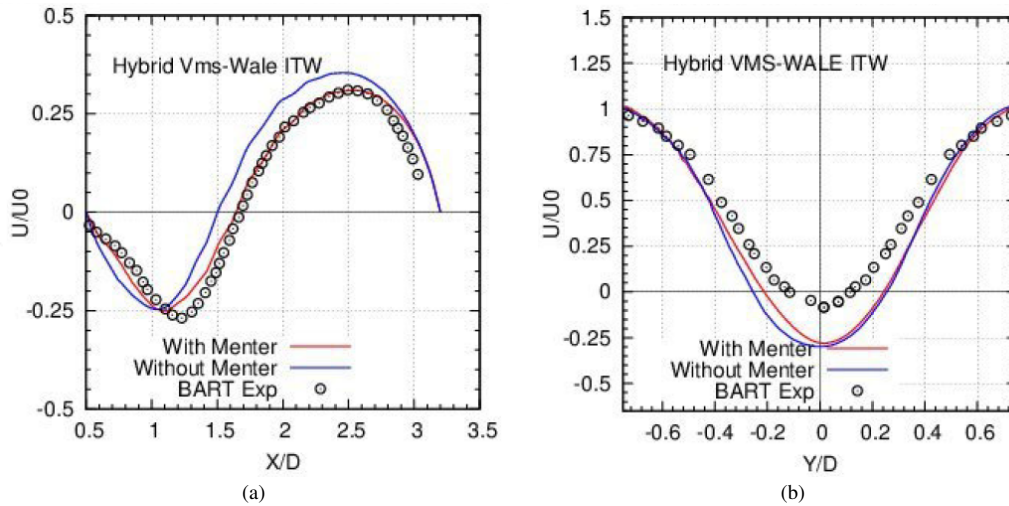


Fig. 23 Distributions of the time-averaged streamwise velocity along the wake centerline in the gap between the two cylinders (a) and velocity profile in the wake along the transverse direction after the downstream cylinder (b) obtained for the dynamic VMS-WALE hybrid model with/without Menter correction

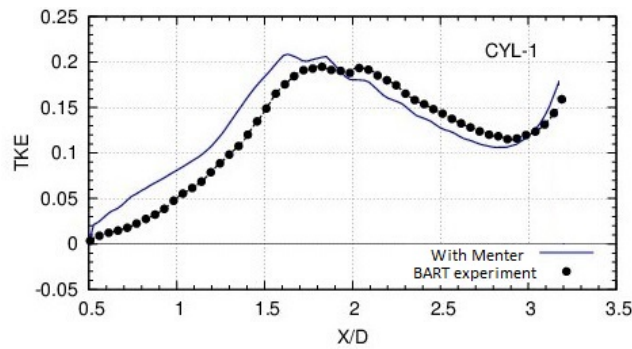


Fig. 24 Distribution of the resolved TKE along the wake centerline in the gap between the two cylinders for the RANS/VMS-LES hybrid computations with and without Menter correction.

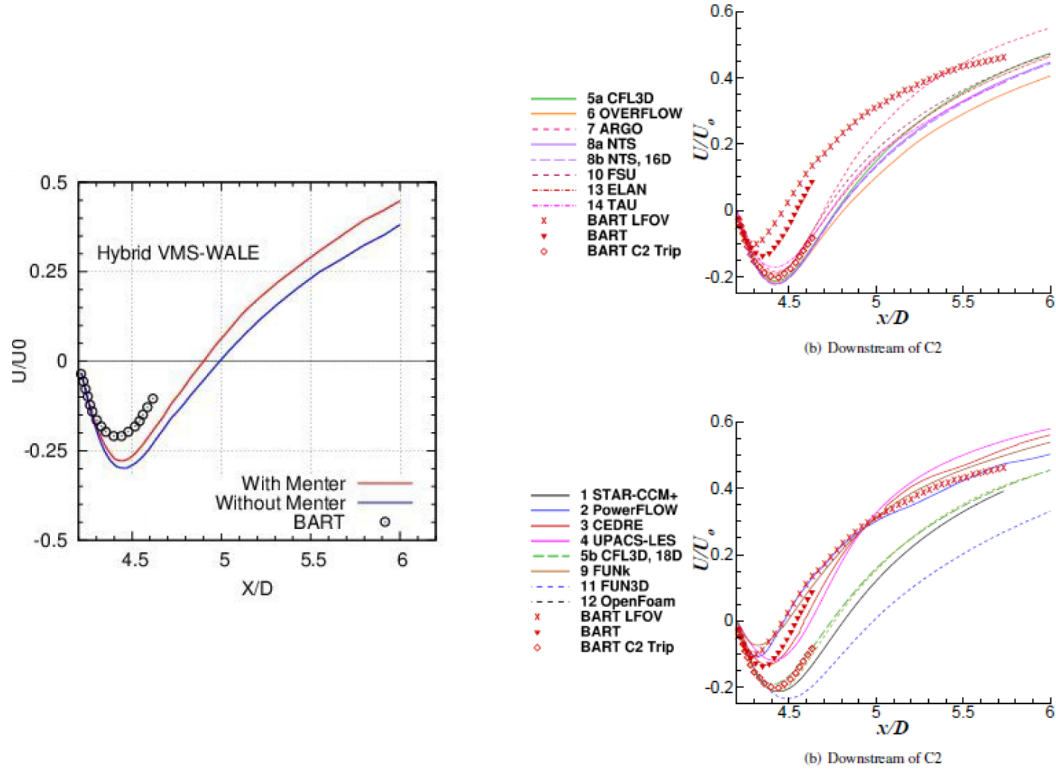


Fig. 25 Streamwise velocity along the wake centerline after the downstream cylinder for the RANS/VMS-WALE hybrid computations with and without Menter correction (left), and from other simulations [50] (top and bottom right)

7 Conclusions

The effects of dynamic SGS modeling in a variational multiscale (VMS) LES model and a RANS/VMS-LES hybrid approach have been assessed in this paper. Subcritical and supercritical cylinder flows, as well as the flow around a tandem cylinder, are considered as benchmark tests in order to appraise the impact of dynamic SGS modeling in the turbulence models mentioned above.

The numerical model and the turbulence modeling used in this work are based on the following ingredients : unstructured grids, a second-order accurate numerical scheme stabilized by a tunable numerical diffusion proportional to sixth-order space derivatives, a VMS formulation and a RANS/VMS hybrid approach combined with the dynamic and non-dynamic Smagorinsky and WALE SGS models.

The results obtained in this work first confirms that in VMS-LES, the impact of dynamic SGS modeling is in most cases and for most quantities rather low, but almost never leads to a deterioration of the agreement with reference data. Conversely, in some cases and for the Smagorinsky model, it leads to a significant improvement of this agreement; this happens, for instance, for the prediction of the turbulence intensity along the wake axis in the flow around the circular cylinder at $Re = 20000$ or of the mean velocity field in the near wake of the square-cylinder flow at $Re = 22000$. The use of the dynamic option for hybrid calculations does not show a notable improvement for the high-Reynolds number cylinder flow, and a small improvement in the drag prediction is observed with the coarse grid for the

tandem cylinder problem. However, a significant improvement is observed, with the hybrid model combined with the dynamic SGS modeling, for the prediction of the centerline distribution of the turbulent kinetic energy behind the downstream cylinder and for the distribution of velocity in the case of the fine mesh and the tandem cylinder. Following these computations, and in order to improve the flow prediction delivered by the RANS/VMS-LES hybrid model combined with a dynamic SGS modeling, the Menter option has been introduced in the RANS component. Rather important improvements are noticed with the Menter correction, in particular for the prediction of velocity distributions.

In conclusion, with a careful implementation leading to negligible additional costs of the dynamic procedure, as the one used in the present work, dynamic models may be considered as an interesting option within a VMS-LES approach and a RANS/VMS-LES hybrid model.

Acknowledgements This work has been supported by French National Research Agency (ANR) through “Modèle numérique” program (projet MAIDESC n° ANR-13-MONU-0010). HPC resources from GENCI-[CINES] (Grant 2017-A0022A05067 and 2017-A0022A06386) are also gratefully acknowledged.

References

1. P. Sagaut, *Large eddy simulation for incompressible flows*. Third Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006.
2. S. Camarri, M.V. Salvetti, B. Koobus, and A. Dervieux. A low diffusion MUSCL scheme for LES on unstructured grids. *Comp. Fluids*, 33:1101-1129, 2004.
3. H. Ouvrard, B. Koobus, A. Dervieux, and M.V. Salvetti. Classical and variational multiscale LES of the flow around a circular cylinder on unstructured grids. *Computer and Fluids*, 39(7):1083-1094, 2010.
4. S. Wornom, H. Ouvrard, M.-V. Salvetti, B. Koobus, A. Dervieux. Variational multiscale large-eddy simulations of the flow past a circular cylinder : Reynolds number effects. *Computer and Fluids*, 47(1):44-50, 2011.
5. T.J.R. Hughes, L.Mazzei, and K.E. Jansen. Large-eddy simulation and the variational multiscale method. *Comput. Vis. Sci.*, 3:47-59, 2000.
6. J. Smagorinsky, General circulation experiments with the primitive equations. *Month. Weath. Rev.*, 91(3) :99-164, 1963.
7. F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow Turb. Comb.*, 62(3):183-200, 1999.
8. B. Koobus and C. Farhat. A variational multiscale method for the large eddy simulation of compressible turbulent flows on unstructured meshes-application to vortex shedding. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 193:1367-1383, 2004.
9. M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, W.H. Cabot. A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model. *Physics of Fluids*, A 3, 1760-1765, 1991.
10. C. Farhat, A. Rajasekharan, B. Koobus. A dynamic variational multiscale method for large eddy simulations on unstructured meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 (2006) 1667-1691.
11. J. Holmen, T.J.R. Hughes, A.A. Oberai, G.G.N. Wells. Sensitivity of the scale partition for variational multiscale LES of channel flow. *Phys. Fluids*, 16(3) (2004) 824-b27.
12. V. Gravemeier. Variational Multiscale Large Eddy Simulation of turbulent Flow in a Diffuser. *Computational Mechanics*, 39(4):477:495, 2012.
13. M.H. Lallemand, H. Steve, and A. Dervieux. Unstructured multigridding by volume agglomeration : current status. *Comput. Fluids*, 21:397-433, 1992.

14. D. K. Lilly. A proposed modification of the Germano subgrid scale closure model. *Physics of Fluids A*, 4:633-635, 1992.
15. H. Baya Toda, K. Truffin and F. Nicoud. Is the dynamic procedure appropriate for all SGS model. *V European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD*, J.C.F. Pereira and A. Sequeira (Eds), Lisbon, Portugal, 14-17 June 2010.
16. C. Farhat, B. Koobus and H. Tran. Simulation of vortex shedding dominated flows past rigid and flexible structures. *Computational Methods for Fluid-Structure Interaction*, 1-30, 1999.
17. A. Garbaruk, M. Shur, M. Strelets, P.R. Spalart, R. Balakrishnan. DDES and IDDES of tandem cylinders. *In: Proceedings of the Benchmark problems for Airframe Noise Computations BANC*, vol. an1-10/26. Argonne National Laboratory, 2010.
18. P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameters, vectors and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 43:357-371, 1981.
19. B. Van. Leer. Towards the ultimate conservative scheme. IV :A new approach to numerical convection. *J. Comp. Phys.*, 23:276-299, 1977.
20. R. Martin and H. Guillard. A second-order defect correction scheme for unsteady problems. *Comput. and Fluids*, 25(1):9-27, 1996.
21. J.L. Steger, R.F. Warming. Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic equations with applications to the finite difference methods. *J. Comp. Phys.*, 40(2):263-293, 1981.
22. E. Salvatici and M.V. Salvetti, Large-eddy simulations of the flow around a circular cylinder: effects of grid resolution and subgrid scale modeling, *Wind & Structures*, 6(6):419-436, 2003.
23. S. Aradag. Unsteady turbulent vortex structure downstream of a three dimensional cylinder, *J. of Thermal Science and Technology*, 29(1):91-98, 2009.
24. H. Lim and S. Lee. Flow Control of Circular Cylinders with Longitudinal Grooved Surfaces, *AIAA Journal*, 40(10):2027-2035, 2002.
25. J.D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1991.
26. C. Norberg. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *J. Fluids Struct.*, 17:57-96, 2003.
27. C. Norberg. Pressure distribution around a circular cylinder in cross-flow. *Proceedings of the Symposium on bluff body wakes and vortex-induced vibrations (BBVIV3)*, K. Hourigan, Leweke T., Thompson M.C. and Williamson C.H.K. Eds., Port Arthur, Queensland (Australia), 2002.
28. L. Ong and J. Wallace. The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder. *Exp. Fluids*, 20: 441-453, 1996.
29. A.G. Kravchenko and P. Moin. Numerical studies of flow over a circular cylinder at $re=3900$. *Phys. Fluids*, 12(2):403-417, 1999.
30. P. Parnaudeau, J. Carlier, D.Heitz and E. Lamballais. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 3900. *Phys. Fluids*, 20(085101), 2008.
31. W. Rodi, J.H. Ferziger, M. Breuer and M. Pourqui "Status of Large Eddy Simulation: Results of a Workshop" *J. Fluids Engineering*, Transactions of the ASME, 119, 248-262, (1997).
32. R.W.C.P. Verstappen and A.E.P. Veldman, Direct numerical simulation of turbulence at lower costs. *Journal of Engineering Mathematics*, 32:143-159, 1997.
33. R. Verstappen. Regularizing turbulent flow, 2010. <http://www.prace-ri.eu/IMG/pdf/16-verstappen.pdf>
34. D. A. Lyn and W. Rodi The flapping shear layer formed by flow separation from the forward corner of a square cylinder *J. Fluid Mech.* 261:353-316, 1994.

35. D. A. Lyn, S. Einav, W. Rodi and J-H. Park, A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder. *J. Fluid Mech.* 304:285-319, 1995.
36. S. C. Luo and MdG. Yazdani and Y. T. Chew and T. S. Lee, Effects of incidence and afterbody shape on flow past bluff cylinders, *J. Ind. Aerodyn.*, 53:375-399, 1994.
37. B.E. Lee, The effect of turbulence on the surface pressure field of a square prism. *J. Fluid Mech.*, 69:263-282, 1975.
38. B.J. Vickery. Fluctuating lift and drag on a long cylinder of square cross-section in a smooth and in a turbulent stream. *Fluid Mech*, 25:481-494, 1966.
39. P. Catalano, M. Wang, G. Iaccarino and P. Moin. Numerical simulation of the flow around a circular cylinder at High Reynolds numbers. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 24:463-469, 2003.
40. Y. Ono and T. Tamura. LES of flows around a circular cylinder in the critical Reynolds number region. In *Proceedings of BBAA VI International Colloquium on: Bluff Bodies Aerodynamics and Applications*, Milano, Italy, July 20-24 2008.
41. S.-E. Kim and L.S. Mohan. Prediction of unsteady loading on a circular cylinder in high Reynolds number flows using large eddy simulation. *Proceedings of OMAE 2005: 24th International Conference on Offshore Mechanics and Artic Engin*
42. G. Schewe. On the force fluctuations acting on a circular cylinder in crossflow from sub-critical up to transcritical Reynolds numbers. *J. of Fluid Mechanics*, 133:265-285, 1983.
43. W.C. L. Shih and C. Wang and D. Coles and A. Roshko. Experiments on Flow past rough circular cylinders at large Reynolds numbers. *J. Wind Engg. and Industrial Aerodynamics*, 49:351-368, 1993.
44. E. Szechenyi. Supercritical reynolds number simulation for two-dimensional flow over circular cylinders. *J. Fluid Mech.*, 70:529-542, 1975.
45. O. Guven, C. Farell, and V.C. Patel. Surface-roughness effects on the mean flow past circular cylinders. *J. Fluid Mech.*, 98(4):673-701, 1980.
46. B. Gölling. Experimental Investigations of Separating Boundary-Layer Flow from Circular Cylinder at Reynolds Numbers from 10^5 up to 10^7 ; three-dimensional vortex flow of a circular cylinder. In G.E.A. Meier and K.R. Sreenivasan, editors, *Proceedings of IU-TAM Symposium on One Hundred Years of Bloundary Layer Research*, pages 455-462, The Netherlands, 2006. Springer.
47. M.M. Zdravkovich. *Flow around circular cylinders Vol 1: Fundamentals*. Oxford University Press, 1997.
48. Luther N. Jenkins, Medhi R. Khorrami, Meelan M. Choudhari, and Catherine B. McGinley. *Fluids. Exp.* NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 2005.
49. D. P. Lockard, M. R. Khorrami, M. M. Choudhari, F. V. Hutcheson, T. F. Brooks, and D. J. Stead. *Tandem cylinder noise predictions*, *AIAA Paper*, 2007-3450, 2007
50. David P. Lockard, *NASA Langley Research Center, Hampton, VA 23681*, 2011.
51. D. Neuhart, L. Jenkins, M. Choudhari and M. Khorrami. *Measurements of the Flowfield Interaction Between Tandem Cylinders*, *AIAA Paper* 2009-3275, 2009.
52. U. Goldberg and D. Ota. A $k - \varepsilon$ Near-Wall Formulation for Separated Flows. *AIAA 22nd Fluid Dynamics, Plasma Dynamics, Lasers Conference*, 91-1482, June 1990.
53. V. Vatsa, D. Lockard. Assessment of hybrid RANS/LES turbulence models for aeroacoustics applications. *AIAA Paper* 2010-4001, 2010
54. Menter F.R. Zonal two-equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper* 93-2906, 1993.
55. C. Moussaed, M.V. Salvetti, S. Wornom, B. Koobus and A. Dervieux, Simulation of the flow past a circular cylinder in the supercritical regime by blending RANS and variational-

4.1.1 Compléments sur les cylindres en tandem

Cette partie récapitule les conditions des expériences menées au centre de recherche NASA de Langley sur ce cas test et les principaux résultats expérimentaux obtenus pour deux espacements différents entre les cylindres.

Enfin, une description du premier workshop « Benchmark Problems for Air frame Noise Computations » (BANC-I) est donnée ainsi que les principaux objectifs traités au cours de ces conférences. D'autres workshops ont été organisés depuis, le dernier (BANC-IV) a eu lieu en 2016 [106].

4.1.1.1 Étude expérimentale

Des expériences ont été menées dans le « Basic Aerodynamic Research Tunnel » (BART), au centre de recherche de Langley, pour étudier le comportement de l'écoulement instationnaire généré par les composants du train d'atterrissage d'un avion. Les résultats sont reportés dans l'article de L. N Jenkins *et al.* paru en 2005 [58].

Cette étude s'inscrit dans le projet « Quiet Aircraft Technology » (QAT) de la NASA qui vise à mieux comprendre le processus de génération du bruit et cherche à développer des techniques pour le réduire. Des progrès sont déjà apparus dans la compréhension des mécanismes à l'origine du bruit d'un avion, généré au niveau des bords de bord d'attaque et des volets d'atterrissage. Cependant, comprendre comment le bruit est généré par un train d'atterrissage et le réduire reste difficile de par la complexité de sa configuration et le grand nombre de composants qui le constitue. Dans une première approche, cette structure est donc modélisée par deux cylindres en tandem dans ces expériences.

4.1.1.1.1 Conditions des expériences

Le tunnel BART dans lequel s'effectue les simulations est subsonique et placé sous conditions atmosphériques. Il mesure 0.711 mètres de hauteur, 1.016 mètres de largeur et possède une longueur de 3.048 mètres. Les tests ont été réalisés avec un écoulement libre de vitesse 56m/s , ce qui correspond à un nombre de Reynolds de 1.66×10^5 , calculé à partir du même diamètre D des cylindres. La distance de séparation entre les deux cylindres est notée L et varie au cours des expériences (le cylindre arrière peut être translaté d'amont en aval). L'angle θ que l'on aperçoit sur le schéma de la figure 6.1, est mesuré à partir du point de stagnation et il est positif dans le sens horaire.

Afin que les résultats expérimentaux puissent s'appliquer à des valeurs quelconques de diamètres de cylindres et de distances de séparation entre eux, on s'intéresse au ratio L/D et les différents comportements de l'écoulement sont décrits pour les deux rapports $L/D = 1.435$ et $L/D = 3.70$.

Durant ces expériences, le champ de vitesse du fluide est déterminé grâce à une

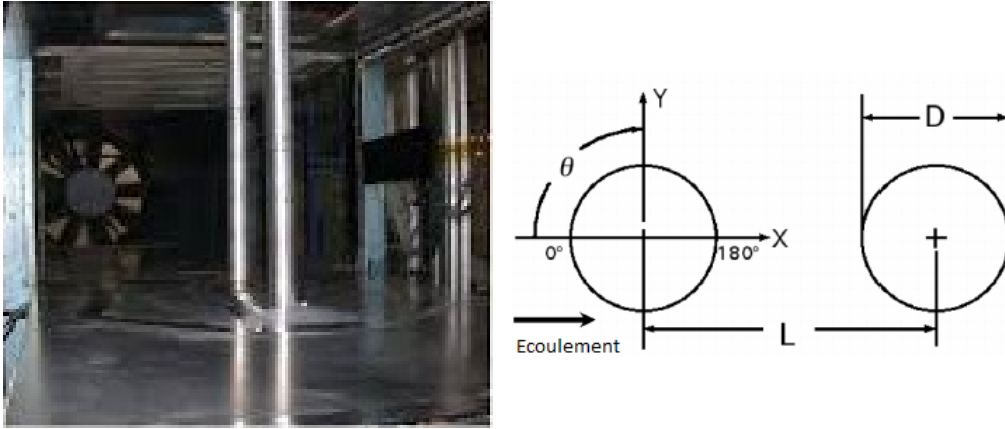


FIGURE 4.1: Arrangement des cylindres en tandem dans BART et schéma le modélisant

technique de vélocimétrie par image de particule digitale 2D et un anémomètre à fil chaud est utilisé pour mesurer la fréquence de détachement des tourbillons.

4.1.1.1.2 Résumé des résultats

Comportement du fluide pour $L/D = 1.435$:

Dans ce régime de faible espacement, l'écoulement possède un comportement asymétrique par rapport à la ligne centrale longitudinale reliant les deux cylindres. En effet, les couches de cisaillement du cylindre amont englobent le cylindre aval et une zone de recirculation se crée entre les cylindres. Une allée tourbillonnaire se forme en arrière du cylindre aval, due aux couches de cisaillement du premier obstacle. Cela correspond à une interférence de sillage et on retrouve ce comportement en visualisant les lignes de courant de l'écoulement.

La configuration du sillage est ainsi similaire à celui d'un cylindre seul, excepté que le sillage est plus étroit et que la séparation de l'écoulement a lieu plus loin en arrière du cylindre aval. Les deux cylindres se comportent de la même façon qu'un seul de forme allongée avec des lâchers de tourbillons en arrière du cylindre aval seulement. Ceci correspond à une augmentation de l'énergie cinétique dans le sillage du dernier obstacle.

Comportement du fluide pour $L/D = 3.70$:

Dans ce régime d'espacement critique, le comportement de l'écoulement entre les cylindres est semblable à celui que l'on observe à l'arrière d'un cylindre seul, à l'exception de la région très proche de l'avant du cylindre aval. Les lignes de courant montrent la formation d'une zone de recirculation entre les cylindres qui est 2.5 fois plus étroite que celle formée à cette même distance pour le cas $L/D = 1.435$.

Entre les cylindres, l'énergie cinétique turbulente est élevée au niveau de la fer-

4.1. Évaluation des modèles VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES dans leurs versions dynamiques

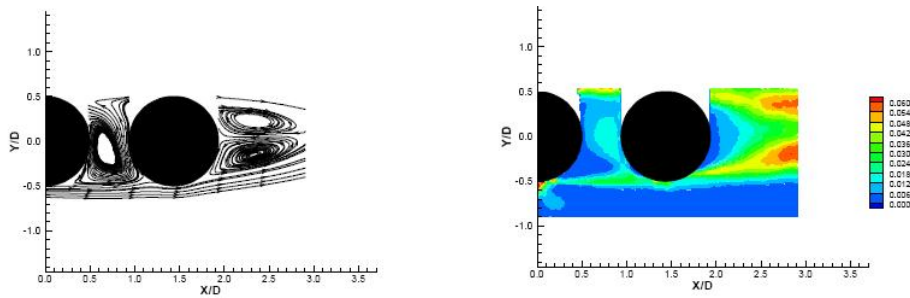


FIGURE 4.2: Lignes de courant (à gauche) et énergie cinétique turbulente (à droite) pour $L/D = 1.435$

meture de la zone de recirculation et cette énergie diminue à proximité de la face avant du cylindre aval.

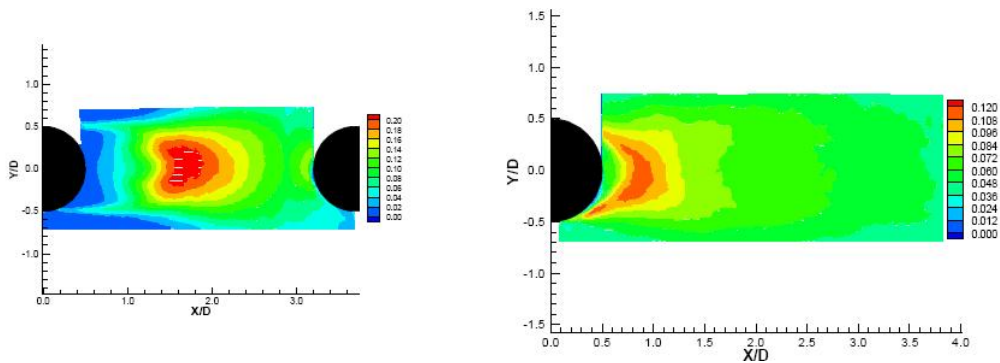


FIGURE 4.3: Énergie cinétique turbulente entre les cylindres et à l'arrière du cylindre aval, pour $L/D = 3.7$

Enfin, à l'arrière du cylindre aval, une autre zone de recirculation se forme associée à la formation de tourbillons. De plus, on observe que l'énergie cinétique turbulente est plus importante à moins de $1D$ de l'obstacle et qu'elle est 5.5 fois plus élevée que celle que l'on mesure pour cette même distance dans le cas $L/D = 1.435$.

4.1.1.2 Premier workshop

Le premier workshop sur les problèmes de « bruit de cellule » d'un avion simulé sur bancs d'essais (BANC-I) a eu lieu à Stockholm en Suède, le 10–11 Juin, 2010. Il a été organisé par le groupe « Discussion Group on Benchmark Experiments and Computations for Airframe Noise » (BECAN) et cosponsorisé par le comité « Aeroacoustics and Fluid Dynamics Technical Committees ». Assisté par plus de quatre-vingt-cinq chercheurs venant de quatorze pays différents, les objectifs de cet atelier étaient multiples :

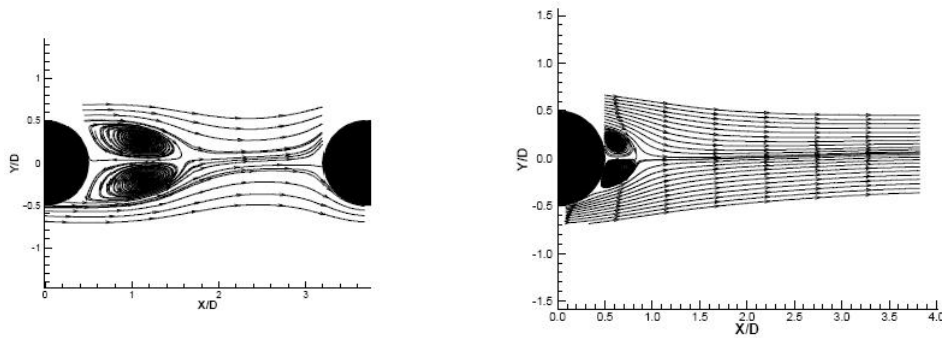


FIGURE 4.4: Lignes de courant entre les cylindres et à l'arrière du cylindre aval, pour $L/D = 3.7$

- Servir de plate-forme commune pour une évaluation approfondie des outils de simulation pour la prédiction du bruit d'une cellule d'avion, incluant à la fois le champs proche de l'écoulement instable et les radiations acoustiques générées par l'interaction de cet écoulement avec les surfaces solides.
- Identifier les lacunes actuelles en termes de compréhension physique de ces problèmes, des bases de données expérimentales et de la capacité de prédiction des principales sources de bruit de la cellule d'un avion.
- Aider à déterminer les meilleures pratiques et accélérer le développement d'un ensemble de données de référence de qualité.
- Promouvoir de futures études coordonnées se basant sur des configurations communes.

Quatre catégories de problèmes ont été traités pendant le BANC-I :

- Bruit de bord de fuite d'un profil,
- Cylindres en tandem,
- Train d'atterrissage rudimentaire
- Bruit de la cavité interne d'un train d'atterrissage

L'article de David P. Lockard, paru en 2011 [81], donne un résumé des résultats des simulations numériques d'écoulements autour de cylindres en tandem qui ont été présentés durant ce workshop et qui visent à répondre au problème des cylindres en tandem. Ce problème consiste en la simulation d'un écoulement autour de deux cylindres en tandem qui respectent la même configuration que celle utilisée au cours des expériences de la NASA. Le diamètre D des cylindres est d'environ 0.05715 mètres et la distance de séparation L entre eux s'étend de $3D$ à $18D$.

4.1. Évaluation des modèles VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES dans leurs versions dynamiques

Les simulations concernent différents maillages, approches numériques et modèles de turbulences. La principale conclusion est l'incapacité des modèles purement LES à faire ce calcul et la qualité raisonnable des calculs en DES/DDES.

4.2 Comportement de modèles de turbulence hybrides pour la simulation d'écoulements autour d'un cylindre en régime sous-critique

Ce travail représente une première étape vers l'objectif de disposer d'un modèle de turbulence capable de simuler un écoulement dont on connaît peu ou pas les caractéristiques, un modèle qui serait donc très utile en milieu industriel. L'étude précédente sur les cylindres en tandem montre que le modèle DDES s'est bien comporté pour un écoulement *a priori* peu connu. Il se pose alors le problème de la prédictivité d'un schéma hybride en présence d'un écoulement majoritairement non turbulent près du corps. L'exemple type, que nous considérons ici, est celui de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire où, selon le nombre de Reynolds considéré, l'écoulement présente une couche limite entièrement laminaire (régime sous-critique) ou une couche limite laminaire et turbulente (en particulier au point de décollement, régime supercritique). Une approche LES est à privilégier dans le premier cas de régime, mais elle n'est pas adaptée pour des nombres de Reynolds plus élevés correspondant au cas supercritique à cause d'un coût de calcul encore trop important sur les ordinateurs actuels. Les modèles hybrides représentent l'approche privilégiée en régime supercritique, mais on peut cependant se poser la question de leur applicabilité en régime sous-critique puisque ces modèles activent leur composante RANS pour prendre en compte la couche limite qui est donc laminaire dans ce cas de régime d'écoulement.

Nous avons donc évalué, dans le cas d'écoulements en régime sous-critique, le comportement d'un modèle hybride DDES, basé sur $k - \epsilon$ et implémenté dans AIRONUM, ainsi qu'une approche hybride combinant les approches DDES et VMS-LES qui a été nouvellement développée et mise en œuvre dans le même code. Cette dernière approche hybride peut être vue comme un modèle DDES dont la composante LES (qui est un modèle LES assez simple) est améliorée par l'introduction du modèle VMS-LES (modèle de la famille LES plus sophistiqué, qui *a priori* permet d'améliorer les prédictions dans la zone de sillage, par exemple). L'approche hybride DDES/VMS-LES proposée peut être aussi interprétée comme une variante du modèle hybride RANS/VMS-LES qui activerait toujours la composante RANS dans la couche limite mais qui activerait à l'extérieur de cette région le modèle DDES là où la grille de calcul n'est pas suffisamment fine pour appliquer, seulement dans le sillage, la composante VMS-LES du modèle hybride. On espère ainsi améliorer la qualité de prédiction dans des zones de maillage pas très fines situées dans les couches de cisaillement ou dans le sillage. Il est à noter que, comme pour l'étude précédente, la correction de Menter est appliquée sur le modèle RANS.

Avec l'objectif de considérer une large plage du régime sous-critique, les applications mises en œuvre dans cette étude concerne donc l'écoulement autour d'un

cylindre circulaire pour trois nombres de Reynolds, faible (3900), modéré (20000) et élevé (140000) du régime sous-critique.

Les résultats obtenus par ces modèles hybrides sont comparés avec ceux prédits par le modèle VMS-LES qui est *a priori* un modèle bien adapté pour le calcul des écoulements en régime sous-critique considérés dans ce travail. Des comparaisons avec des résultats numériques et des données expérimentales disponibles dans la littérature sont aussi présentées.

Ce travail est introduit ci-après sous la forme d'une communication associée au Workshop DLES11 : E.Itam, S. Wornom, B. Koobus, A. dervieux, *Hybrid versus pure LES models comparison for subcritical cylinder flows*, ERCOFTAC Workshop Direct and Large Eddy Simulation 11 (DLES11), May 29-31, 2017, Pisa, Italy. Un complément à cette communication, est aussi joint.

HYBRID VERSUS PURE-LES MODELS COMPARISON FOR SUBCRITICAL CYLINDER FLOWS

Emmanuelle Itam, Stephen Wornom, Bruno Koobus, Alain Dervieux

1 Introduction

In Computational Fluid Dynamics applications, there is a need for turbulence models which deliver good predictions for flows involving both laminar and turbulent boundary layers, without knowing in advance the regions where turbulence occurs, and then without changing their parameters according to such an *a priori* knowledge of the flow characteristics. In this work, which extends the study [6], we are interested in the assessment of hybrid models for the computation of subcritical flows with laminar boundary layers and in the improvement of the wake behavior prediction in a hybrid RANS/LES model [5, 6, 9]. The performances of a DDES model are compared with a dynamic variational multi-scale (DVMS) large eddy simulation model. The reasons why DDES computations give less good predictions are many. We concentrate in this study on the treatment of the wake. We define RANS/DVMS and DDES/DVMS hybrid models, and compare their predictions with those provided by a DDES model. Three subcritical flows past a circular cylinder are considered, namely at Reynolds numbers 3900, 20000 and 140000 (see Tables 1,2 and 3). Computations are also compared with other LES and hybrid computations in the litterature and with experimental data.

Emmanuelle Itam · Bruno Koobus

Institut Montpellierain Alexander Grothendieck(IMAG), Université de Montpellier, Montpellier, France, e-mail: {emmanuelle.itam, Bruno.Koobus}@umontpellier.fr

Stephen Wornom

Société technologique LEMMA, 2000 route des Lucioles, Sophia-Antipolis, France, e-mail: stephen.wornom@inria.fr

Alain Dervieux

Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA), 2004 Route des lucioles, F-06902 Sophia-Antipolis, e-mail: alain.dervieux@inria.fr

2 Emmanuelle Itam, Stephen Wornom, Bruno Koobus, Alain Dervieux

2 Numerical model

The spatial discretization is based on a mixed Finite-Element / Finite-Volume formulation on unstructured grids, with degrees of freedom located at vertices i of the tetrahedrization. The finite volume part is integrated on a dual mesh built from medians in 2D and median plans in 3D. The space-discretized unsteady Navier-Stokes equations can be written as follows :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}, \phi_i \right) + (\nabla \cdot F(W), \phi_i) = -(\tau(W), \phi_i) \quad (1)$$

where W is the set of conservative variables and ϕ_i the test function related to vertex i . The diffusive terms $\tau(W)$ are evaluated by a Finite-Element method, whereas a Finite-volume method is used for the convective fluxes $F(W)$. The numerical approximation of the convective fluxes at the interface of neighboring cells is based on the Roe Scheme. In order to obtain second-order accuracy in space, a particular MUSCL-like method is used. The numerical (spatial) dissipation provided by this scheme is made of sixth-order space derivatives and is concentrated on a narrow-band of the highest resolved frequencies. This is expected to limit dissipation of the large scales. This dissipation behaves as $O(\Delta x^5)$ (on uniform 1D meshes). Lastly, a parameter γ_S directly controls the amount of introduced viscosity and can be explicitly tuned in order to control the influence of numerical dissipation and, when necessary, reduce it to the minimal amount needed to stabilize the simulation. Typically, γ_S is set to a value which gives a 10 times smaller dissipation than the fully-upwind fifth-order scheme. Time integration is performed by a second-order implicit second-order backward difference scheme allowing to address flows at various Mach numbers. In the present paper, the Mach number is chosen equal to 0.1.

3 Turbulence modeling

In the VMS approach [7] which we use, the subgrid-scale (SGS) stress term is acting only on small scales and is computed from the small scale component of the flow field by applying either a Smagorinsky or a WALE SGS model. Further, the constants of these models can be evaluated by a Germano-Lilly dynamic procedure [10]. This results in our *DVMS model*, the semi-discretization of which writes:

$$\left(\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t}, \phi_i \right) + (\nabla \cdot F(\langle W \rangle), \phi_i) = -(\tau^{DVMS}(W'), \phi_i'). \quad (2)$$

in which the upper index $'$ refers to the resolved small scales. In order to define our hybrid model, we choose a RANS modelling. It is based on the $k-\varepsilon$ Goldberg model combined with the Menter correction. We denote it in the sequel as *RANS $k-\varepsilon$ -Menter* and write it in short:

Hybrid subcritical simulations 3

$$\left(\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t}, \phi_i\right) + (\nabla \cdot F(\langle W \rangle), \phi_i) = -(\tau^{RANS}(\langle W \rangle), \phi_i). \quad (3)$$

Let us define the hybrid *RANS/DVMS* model based on the above DVMS and RANS models:

$$\left(\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t}, \phi_i\right) + (\nabla \cdot F(\langle W \rangle), \phi_i) = -\theta(\tau^{RANS}(\langle W \rangle), \phi_i) - (1 - \theta)(\tau^{DVMS}(W'), \phi_i'). \quad (4)$$

where W_h denotes the hybrid variables. The symbol $\theta \in [0, 1]$ holds for the blending function and is defined as following : $\theta = 1 - f_d(\bar{\theta})$, $\bar{\theta} = \tanh(\xi^2)$ with $\xi = \Delta/l_{RANS}$ or $\xi = \mu_{SGS}/\mu_{RANS}$. The shielding function f_d is defined as in DDES, and therefore $f_d \approx 0$ in the boundary layer, and $f_d \approx 1$ outside the boundary layer.

For comparison purpose, we introduce the *DDES $k - \varepsilon$ -Menter*, written

$$\left(\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t}, \phi_i\right) + (\nabla \cdot F(\langle W \rangle), \phi_i) = -(\tau^{DDES}(\langle W \rangle), \phi_i), \quad (5)$$

in which the above RANS model is introduced in a DDES formulation by replacing in the RHS of the k equations the $D_k^{RANS} = \rho\varepsilon$ dissipation term by $D_k^{DDES} = \rho k^{\frac{3}{2}}/l_{DDES}$ with $l_{DDES} = k^{\frac{3}{2}}/\varepsilon - f_d \max(0, k^{\frac{3}{2}}/\varepsilon - C_{DDES}\Delta)$ where $C_{DDES} = 0.65$ and Δ is a measure of the local mesh size. We have checked in [6] that this model gives predictions close to other DDES approach based on the $k - \omega$ SST model.

Lastly, we define the *DDES/DVMS* model. This version has the same switching as the previous hybrid one, but combines DVMS with the DDES model:

$$\left(\frac{\partial \langle W \rangle}{\partial t}, \phi_i\right) + (\nabla \cdot F(\langle W \rangle), \phi_i) = -\theta(\tau^{DDES}(\langle W \rangle), \phi_i) - (1 - \theta)(\tau^{DVMS}(W'), \phi_i'). \quad (6)$$

Compared to the RANS/DVMS model, and outside the boundary layer where the RANS approach applies, this hybrid model still behaves as DVMS if the grid resolution is sufficient, but it switches to DDES instead of RANS in coarser grid locations. It may also be noted that the LES component (DVMS) of our hybrid models allows a priori a better prediction of the wake than the simpler LES model invoked by DDES.

4 Results

We reconsider here the two first test cases of [6], with several updates and new computations involving other models. A third test case (see Figure 1), which concerns a high subcritical Reynolds number, is also presented for the assessment

4 Emmanuelle Itam, Stephen Wornom, Bruno Koobus, Alain Dervieux

of the different turbulence models introduced in this work. Among our hybrid models, it turned out that DDES/DVMS performs slightly better, and only its results are reported in the following tables. For reasons of brevity, comments on the results are given with conclusive remarks in the last section.

	\bar{C}_d	$-\bar{C}_{p_b}$	C_L^{rms}	L_r	S_t
Experiments					
Norberg [11] min.	0.94	0.83	-	-	-
Norberg [11] max.	1.04	0.93	-	-	-
Parnaudeau [13]	-	-	-	1.51	0.210
Present simulations					
No model	0.87	0.73	0.04	2.11	
RANS $k - \varepsilon$ -Menter	0.86	0.72	0.03	2.18	0.216
DDES $k - \varepsilon$ -Menter	0.98	0.83	0.10	1.70	0.215
DVMS	1.03	0.86	0.19	1.50	0.216
DDES/DVMS	0.99	0.79	0.12	1.67	0.216
Other simulations					
Kravchenko (LES) [8]	[1.04-1.38]	[0.93-1.23]	-	[1.-1.35]	0.193
D'Alessandro SA-IDDES [1]	0.98	0.83	0.109	1.67	0.214
D'Alessandro $\bar{v}^2 - f$ DES [1]	1.02	0.87	0.14	1.42	0.222

Table 1 Bulk quantities for Re=3900 flow around a cylinder. \bar{C}_d holds for the mean drag coefficient, \bar{C}_{p_b} for the mean pressure coefficient at cylinder basis, C_L^{rms} for the root mean square of lift time fluctuations, L_r is the recirculation length, S_t the Strouhal number.

	\bar{C}_d	$-\bar{C}_{p_b}$	C_L^{rms}	Θ_{sep}	L_r	S_t
Experiments						
Norberg [12]	1.16	1.16	0.47	78	1.03	0.194
Present simulations						
No model	1.27	1.35	0.61	82	0.96	
RANS $k - \varepsilon$ -Menter	1.31	1.49	0.75	85	0.50	0.212
DDES $k - \varepsilon$ -Menter	1.25	1.21	0.58	86	0.90	0.194
DVMS	1.18	1.20	0.46	81	0.96	0.196
DDES/DVMS	1.17	1.13	0.46	82	1.05	0.200
Other simulations						
Salvatici LES [14] min.	0.94	0.83	0.17	-	0.7	-
Salvatici LES [14] max.	1.28	1.38	0.65	-	1.4	-

Table 2 Bulk flow parameters for Re=20000 flow around a cylinder. Θ_{sep} is the separation angle. The other symbols are the same as in Table 1.

	\bar{C}_d	$-\bar{C}_{p_b}$	C_L^{rms}	L_r	S_t	Θ_{sep}
Experiments						
Cantwell-Coles [3]	1.24	1.21	-	0.5	0.179	77
Szepessy-Bearman [15]	-	-	0.39	-	-	-
Present simulations						
No model	0.43	0.40	0.14	0.63	0.142	
RANS $k - \varepsilon$ -Menter	0.77	0.87	0.31	1.05	0.218	98
DDES $k - \varepsilon$ -Menter	0.97	1.01	0.30	0.96	0.217	85
DVMS	1.25	1.33	0.64	0.88	0.217	76
DDES/DVMS	1.04	1.12	0.41	0.91	0.214	85
Other simulations						
Froehlich (LES Smago.) [4]	1.16	1.33	-	0.41	0.217	94
Breuer (LES Smago. Dyn) [2]	1.24	1.40	-	0.57	0.204	96

Table 3 Bulk quantities for $Re=140000$ flow around a cylinder. Same symbols as in Table 4.

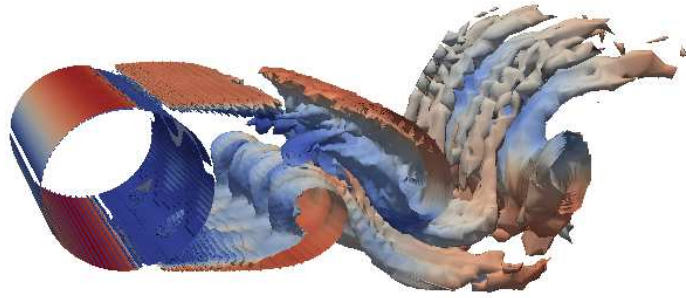


Fig. 1 Iso-contours of Q-criterion colored by velocity magnitude obtained with RANS/DVMS model for $Re=140000$ flow around a cylinder.

5 Comments and conclusions

In the lines of [6], DVMS, DDES and our hybrid model are compared for sub-critical flows past cylinders. DVMS uses the Smagorinsky SGS model.

For low and medium subcritical Reynolds numbers ($Re = 3900$ and $Re = 20000$), the computations performed with the turbulent models mentioned above compare well with experimental data and numerical results in the litterature. Several remarks can however be made. First, although theoretically not adapted (the laminar boundary layer is computed by a RANS model), the DDES and our hybrid approach provide a reasonably good prediction of main outputs. As noticed in [1], the eddy viscosity introduced in the attached boundary layer is small enough so that its effect is negligible. Second, the DDES and our hybrid model predictions are generally less accurate than those obtained with DVMS for Reynolds number 3900, which is a LES model of intermediate sophistication. Third, comparing our hybrid approach and DDES, we observe that an overall

6 Emmanuelle Itam, Stephen Wornom, Bruno Koobus, Alain Dervieux

improvement is obtained for Reynolds number 20000 when a better LES component is locally imposed (through the use of DVMS in the wake region).

For a higher subcritical Reynolds number ($Re = 140000$), while DVMS behaves correctly, the RANS, DDES and our hybrid turbulence models predict a turbulent boundary layer and are then not accurate. The DDES/DVMS model shows intermediate prediction with a reasonable improvement with respect to DDES. However, still only LES-type simulations provide bulk quantities prediction inside a 10% interval. DDES results and our hybrid model predictions are in a 20% interval, with a slight improvement for our hybrid approach. These models still need further improvements for properly tackling such subcritical flows.

Acknowledgements This work has been supported by French National Research Agency (ANR) through project MAIDESC n° ANR-13-MONU-0010. This work was granted access to the HPC resources of CINES under the allocations 2017-A0022A05067 and 2017-A0022A06386 made by GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif).

References

1. V. DAlessandro, S. Montelpare, and R. Ricci. Detached eddy simulations of the flow over a cylinder at $Re = 3900$ using Open-FOAM a low-diffusion MUSCL scheme for LES on unstructured grids. *Computers and Fluids*, 136:152169, 2016.
2. M. Breuer. A challenging test case for large eddy simulation, high Reynolds number circular cylinder flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21, 648-654, 2000.
3. B. Cantwell and D. Coles. An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 136, 321-374, 1983.
4. J. Froehlich, W. Rodi, J.P. Bertoglio, U. Bieder and H. Touil. Large Eddy Simulation of Flow around Circular Cylinders on Structured and Unstructured Grids I. Ed.: E.H. Hirschel. *Numerical flow simulation II*. 75, 231-249, Vieweg, 2001.
5. E. Itam, S. Wornom, B. Koobus and A. Dervieux. Application of a Hybrid Variational Multiscale Model to Massively Separated Flows. 3AF, Toulouse, France, March 2015.
6. E. Itam, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux. Hybrid simulation of high-Reynolds number flows relying on a variational multiscale model. 6th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Strasbourg, France, 26-28 September 2016.
7. B. Koobus and C. Farhat. A variational multiscale method for the large eddy simulation of compressible turbulent flows on unstructured meshes-

- application to vortex shedding. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193, 13671383, 2004.
8. A.-G. Kravchenko and P. Moin. Numerical studies of flow over a circular cylinder at $Re_D=3900$, *Phys. Fluids*, 12:2, 403-417, 2000.
 9. C. Moussaed, M.V. Salvetti, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux. Simulation of the flow past a circular cylinder in the supercritical regime by blending RANS and variational-multiscale LES models. *Journal of Fluids and Structures*, 47:114123, 2014.
 10. C. Moussaed, S. Wornom, M.V. Salvetti, B. Koobus and A. Dervieux. Impact of dynamic subgrid-scale modeling in variational multiscale large-eddy simulation of bluff body flows. *Acta Mechanica*, 12:33093323, 2014.
 11. C. Norberg. Effects of Reynolds number and low-intensity freestream turbulence on the flow around a circular cylinder. Publ. No.87/2, Department of Applied Thermosc. and Fluid Mech., Chalmers University of Technology, Sweden, 1987.
 12. C. Norberg. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *J. Fluids Struct.*, 17:5796, 2003.
 13. P. Parnaudeau, J. Carlier, D. Heitz, and E. Lamballais. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at Reynolds number 3900. *Phys. Fluids*, 20(085101), 2008.
 14. E. Salvatici and M.V. Salvetti. Large eddy simulations of the flow around a circular cylinder: effects of grid resolution and subgrid scale modeling, *Wind and Structures*, 6:6, 419-436, 2003.
 15. S. Szepessy and P. W. Bearman. Aspect ratio and end plate effects on vortex shedding from a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 234, 191217, 1992.

4.2.1 Compléments sur le comportement du modèle hybride RANS/VMS-LES dans la couche limite

Dans ce complément, nous précisons le comportement de la couche limite de notre modèle de turbulence hybride RANS/VMS-LES. Nous avons choisi le cylindre à nombre de Reynolds 20000 (illustré par les Figures 4.6 et 4.7) pour expliquer le fonctionnement de notre modèle en proche paroi. Ce comportement, qui est aussi valable avec l'approche hybride DDES/VMS-LES, se retrouve dans les simulations de cylindre à d'autres nombres de Reynolds, en particulier celles à $Re = 3900$ et $Re = 140000$ présentées dans la Communication précédente.

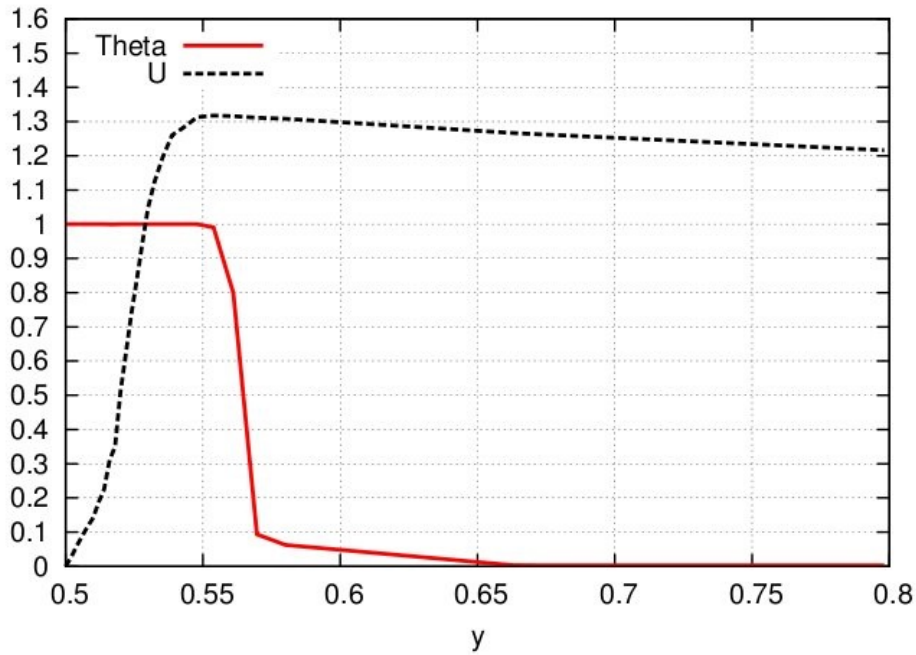


FIGURE 4.5: Distributions de θ et de la vitesse tangentielle pour le cylindre à $Re = 20000$ en hybride RANS/VMS-LES

Dans notre modèle RANS/VMS-LES, l'hybridation entre la composante RANS et celle VMS-LES repose sur la fonction d'hybridation θ définie par :

$$\theta = 1 - (1 - \tanh(\xi^2))f_d$$

Cette fonction ainsi que les définitions de ξ et f_d , ont été introduites dans la partie 3.3.4.

Nous rappelons que pour $\theta = 1$, le modèle hybride fonctionne en mode RANS

4.2. Comportement de modèles de turbulence hybrides pour la simulation d'écoulements autour d'un cylindre en régime sous-critique

et que pour $\theta = 0$, ce modèle fonctionne en mode VMS-LES (les valeurs de θ intermédiaires permettent une transition continue entre RANS et VMS-LES). La combinaison de la fonction bouclier f_d (« bouclier » car elle a pour fonction de renforcer la protection de la couche limite devant l'utilisation de la composante LES, i.e. VMS-LES dans notre cas) et du paramètre d'hybridation ξ , a pour objectif de renforcer l'activation du modèle RANS par le modèle hybride dans la couche limite.

La Figure 4.5 montre les profils de la vitesse tangentielle (qui nous permet d'avoir une idée précise de la couche limite) et de la fonction d'hybridation θ dans la couche limite pour un calcul de cylindre avec le modèle RANS/VMS-LES.

On peut remarquer que $\theta = 1$ dans toute la couche limite i.e. que le modèle hybride fonctionne en mode RANS. On évite ainsi le problème de « log-layer mismatch », i.e. une non coïncidence des profils logarithmiques prédits d'une part par le modèle RANS dans la zone interne de la couche limite et d'autre part par le modèle LES (ou VMS-LES dans notre cas) dans la zone externe de la couche limite. Ce problème peut apparaître lorsque la composante LES est activée dans la couche limite par un modèle hybride. On peut aussi remarquer qu'à l'extérieur de la couche limite, le modèle hybride fonctionne en mode purement VMS-LES ($\theta = 0$).

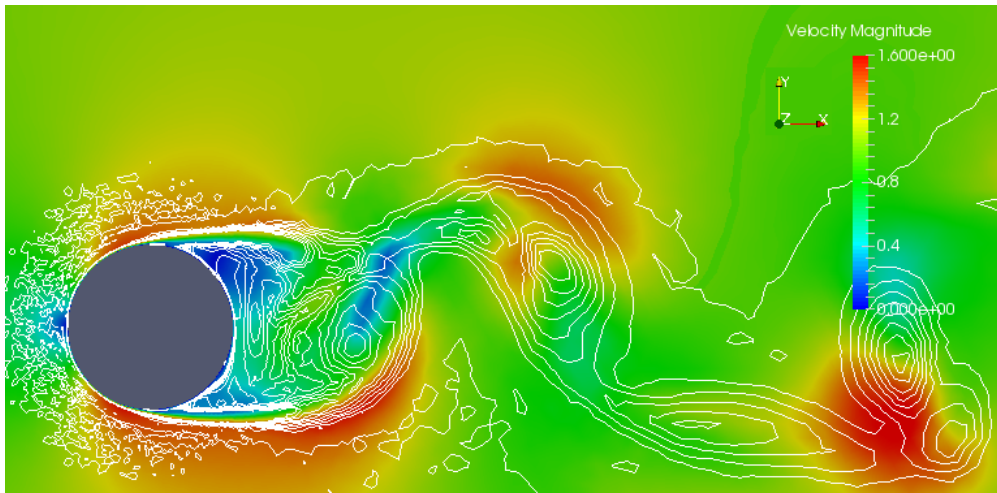


FIGURE 4.6: Distribution de la norme de la vitesse de l'écoulement instantané et lignes de courant pour le cylindre à $Re = 20000$ en hybride RANS/VMS-LES

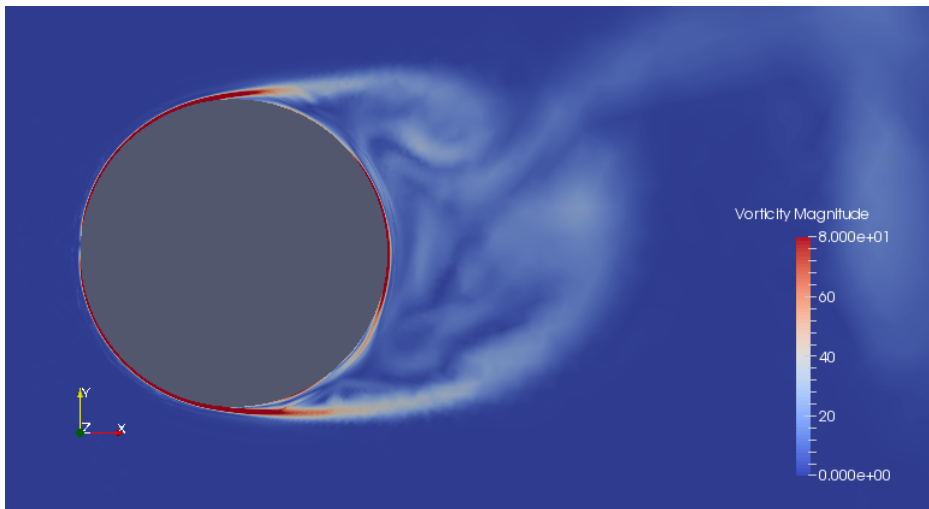


FIGURE 4.7: Distribution de la norme de la vorticité de l'écoulement instantané pour le cylindre à $Re = 20000$ en hybride RANS/VMS-LES

4.3 Évaluation du modèle VMS-LES pour le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre rectangulaire

4.3.1 Introduction

Les géométries rectangulaires sont des formes que l'on retrouve fréquemment, en particulier en génie civil avec par exemple les immeubles et gratte-ciel, ou encore comme géométrie simplifiée d'un tablier de pont. Il est donc intéressant de considérer le calcul d'écoulements autour de telles géométries afin de pouvoir, par exemple, prédire des phénomènes de vibrations induites par un écoulement sur une structure de forme rectangulaire.

Dans cette étude, nous évaluons les performances du modèle VMS-LES pour le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre rectangulaire (de rapport 5 : 1 pour sa section transversale) à des nombres de Reynolds modérés (26400 et 40000). Cette étude représente une première étape avant de mettre en œuvre notre modèle hybride, qui utilise comme composante LES l'approche VMS-LES testée ici, sur cette même géométrie et à des nombres de Reynolds pouvant aussi être plus élevés.

Le cas test du cylindre rectangulaire 5 : 1 considéré dans ce travail présente des difficultés supplémentaires par rapport à un cylindre carré. En effet, si la couche limite décolle dans les deux cas aux singularités de la géométrie (coins amont), elle recolle sur la face supérieure ou inférieure dans le cas du cylindre rectangulaire contrairement au cylindre carré. Ce type d'écoulements tridimensionnels, turbulents et caractérisés par des décollements et recollements instationnaires, est donc très complexe et représente un enjeu intéressant pour les modèles numériques et les modèles de turbulence mis en œuvre dans les simulations. Ce problème a d'autre part fait l'objet d'études et de simulations au niveau international en tant que cas test de référence pour l'aérodynamique des cylindres rectangulaires (BARC test case,[18]).

4.3.2 Description du cas test et applications

Dans cette partie, nous présentons les simulations de l'écoulement autour du cylindre rectangle 5 : 1 que nous avons effectuées avec le modèle de turbulence VMS-LES combiné avec le modèle de sous-maille Smagorinsky pour des nombres de Reynolds de 26400. Le cas test est représenté dans la figure 4.8. Le maillage non structuré utilisé contient 1.4 millions de nœuds. Dans nos calculs, un pas de temps adimensionnel égal à $0.00388 (U_{ref} \times \Delta t(s)/D)$ est utilisé et l'angle d'incidence est nul.

Bruno, Salvetti et Ricciardelli ont présenté dans un papier de 2014 [18], l'ensemble des résultats expérimentaux et numériques obtenus depuis l'étude de ré-

férence faite pour l'aérodynamique des cylindres rectangulaires en 2008 (BARC). Plus tard, Mariotti, Siconofi et Salvetti ont complété cette étude dans un papier de 2017 [87] en ajoutant de nouveaux résultats.

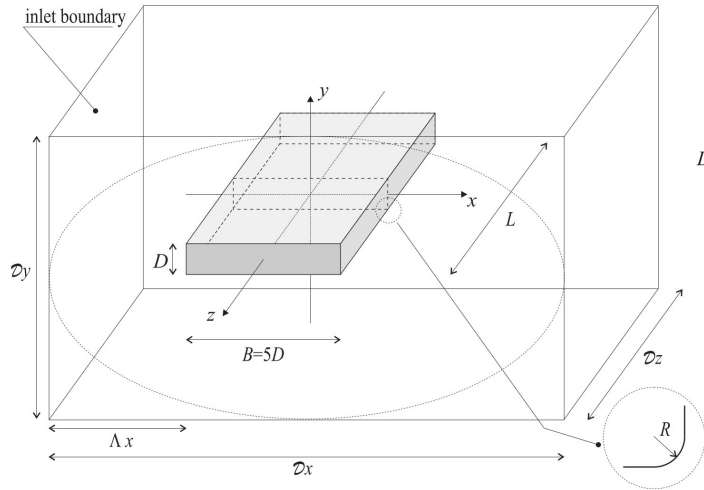


FIGURE 4.8: Schéma : géométrie du domaine de calcul [18]

La Figure 4.10 montre l'évolution des coefficients moyens de traînée, de portance, de pression à la base du cylindre et de la longueur de la zone recirculation Lr/D , en fonction de trois paramètres : le temps, les cycles de détachements tourbillonnaires et le temps adimensionnel.

Nous remarquons, à partir des courbes, que les coefficients de traînée et de portance ne nécessitent que 20-30 cycles de détachements tourbillonnaires pour s'établir, ce qui correspond à un temps adimensionnel égal à 350. En revanche, la longueur de recirculation atteint une valeur précise proche de 0.94 au bout de 75 cycles tourbillonnaires environ.

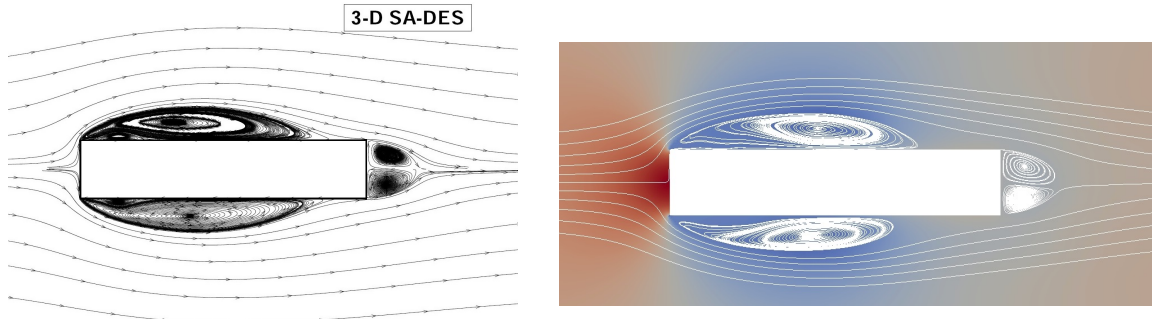


FIGURE 4.9: Distribution des lignes de courant dans un plan transversal au cylindre : comparaison entre la simulation SA-DES de [86] et notre calcul en VMS-LES

4.3. Évaluation du modèle VMS-LES pour le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre rectangulaire

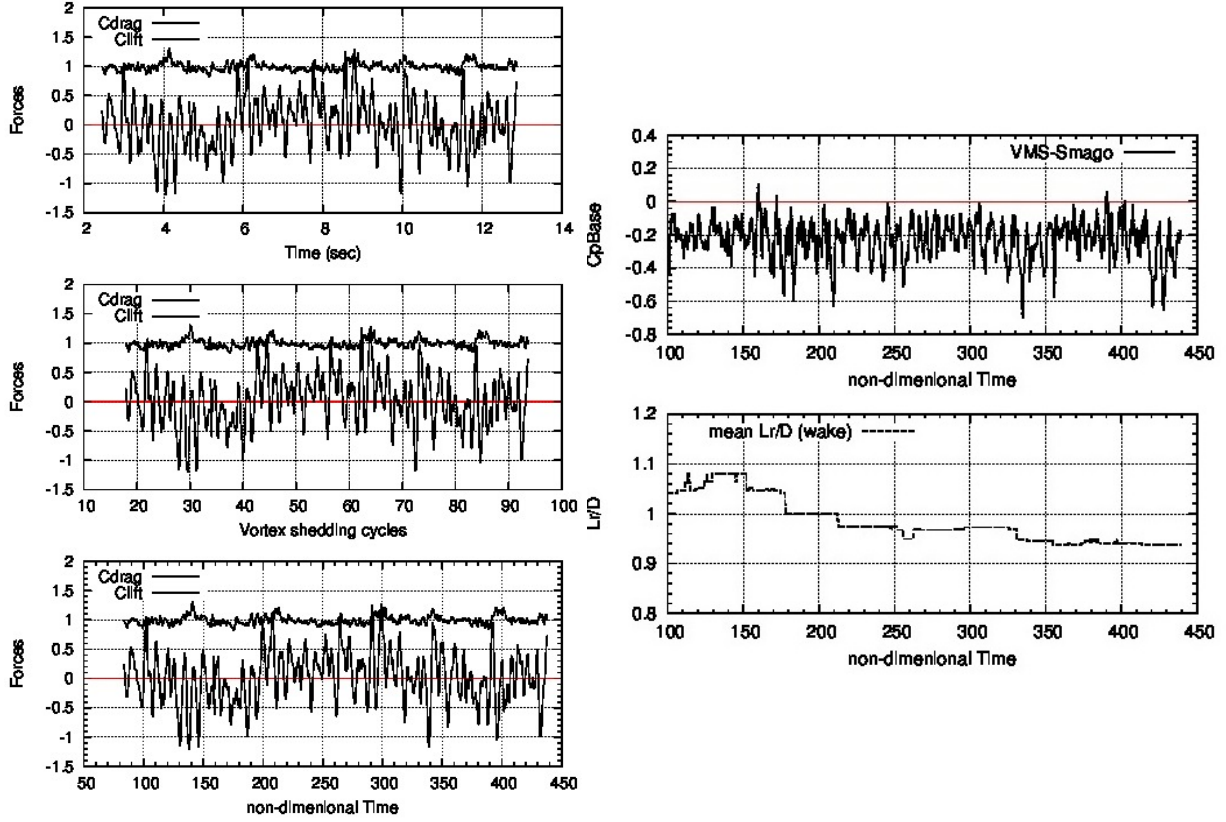


FIGURE 4.10: Forces obtenues pour l'écoulement autour du cylindre rectangulaire à $Re = 26400$ en VMS-LES

La figure 4.9 illustre la distribution dans un plan transversal au cylindre des lignes de courant de l'écoulement moyen qui est utilisée pour calculer la longueur de recirculation. Nous remarquons que notre approche VMS-LES capture aussi bien les zones de recirculation que celles obtenues par Mannini dans [86] avec un modèle de turbulence SA-DES.

Le tableau 4.1 compare les bulk coefficients de nos simulations avec ceux des expériences de Schewe. Les quantités évaluées sont les suivantes :

- Le nombre de Strouhal : St ,
- Le coefficient moyen de traînée : $\overline{C_d}$,
- la valeur moyenne du coefficient de portance : C_l ,
- la moyenne quadratique des fluctuations du coefficient de traînée : C'_d ,
- la moyenne quadratique des fluctuations du coefficient de portance : C'_l ,
- le coefficient de pression à la base du cylindre : $\overline{C_{p_b}}$,

model	Study	St	\overline{Cl}	\overline{Cd}	Cl'	Cd'	$\overline{Cp_b}$	Lr
Experiments	Schewe 2009	0.111	0.0	1.029	0.4	0.0	-0.22	
VMS-Smago (L/B= 2)	present	0.118	0.077	0.98	0.4	0.063	-0.22	0.94
VMS-Smago (L/B= 1)	present	0.105	0.019	0.995	0.44	0.070	-0.24	0.51
SA-DES (L/B= 2)	Mannini 2010	0.102	0.005	1.029	0.421	0.043	na	0.98
SA-DES (L/B= 1)	Mannini 2010	0.103	0.047	1.016	0.553	0.055	na	na

TABLE 4.1: Cylindre rectangulaire : bulk coefficients

- la longueur de recirculation qui se forme après le cylindre : Lr .

Nos résultats sont comparés, pour deux rapports de longueur $L/B = 1$ et $L/B = 2$ (qui définissent la dimension transversale du domaine de calcul), aux données expérimentales de Schewe (2009) et aux simulations de Mannini (2010) qui utilise le code de calcul DLR-Tau et le modèle de turbulence DES basé sur Spalart Allmaras. On peut remarquer que l'ensemble de nos résultats sont en bon accord avec ceux expérimentaux et numérique de Mannini sur un maillage de 3.38 millions de nœuds, plus fin que celui utilisé dans nos simulations. En particulier, pour la simulation $L/B = 2$, les coefficients C_l' et $\overline{Cp_b}$ correspondent parfaitement aux valeurs expérimentales. Les résultats présentés montrent que le modèle VMS-LES a de bonnes propriétés de prédictivité sur ce cas test.

Enfin, on peut avoir un aperçu de l'écoulement instantané et du processus de détachement tourbillonnaire à travers les Figures 4.11 et 4.12 qui représentent respectivement une coupe de la vorticité et un zoom dans le plan de symétrie de cette quantité. On peut remarquer sur la Figure 4.11 que le sillage et les tourbillons sont bien capturés par notre modèle, même si l'on note une certaine dissipation des structures de l'écoulement plus en aval de l'obstacle (le maillage n'est pas assez fin dans le sillage).

Sur la Figure 4.12, on peut constater la diversité des échelles de l'écoulement capturées autour du cylindre rectangulaire et dans une zone en aval proche du cylindre.

Une étude est en cours sur ce cas test avec l'utilisation de modèles hybrides.

4.3. Évaluation du modèle VMS-LES pour le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre rectangulaire

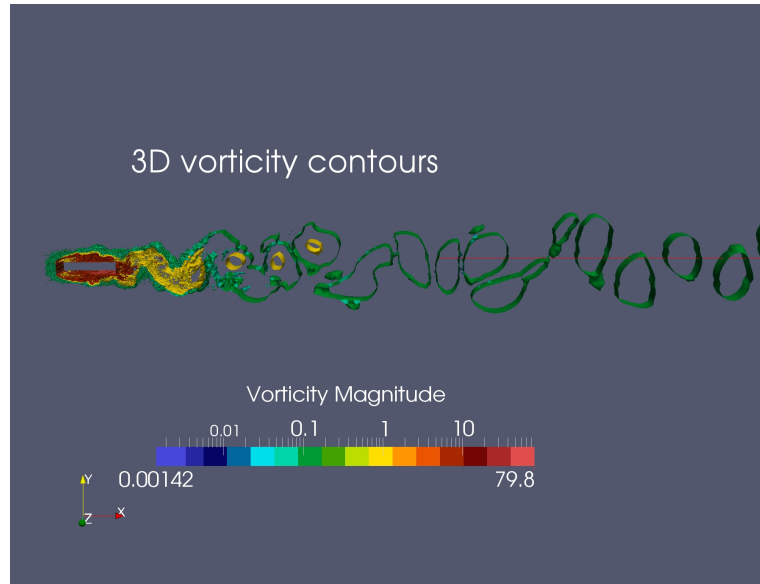


FIGURE 4.11: Coupe dans le plan transversal de symétrie de la vorticité instantanée

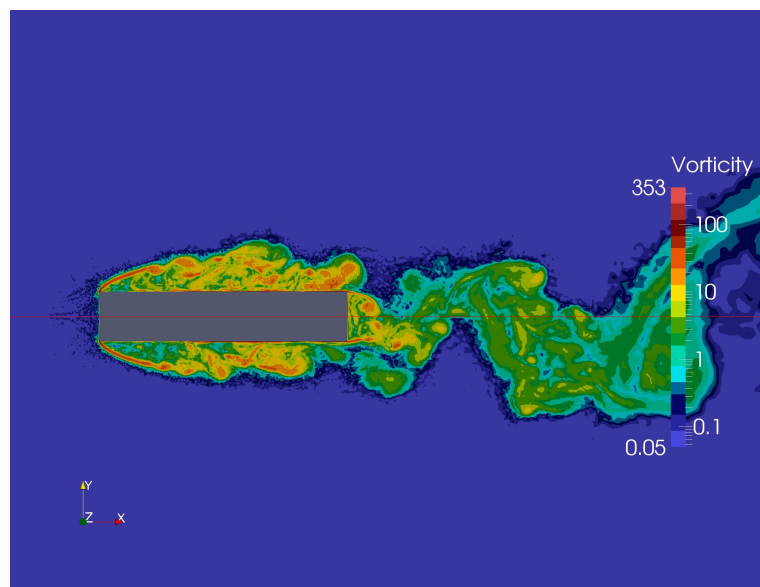


FIGURE 4.12: Zoom dans le plan de symétrie de la vorticité instantanée

Chapitre 5

Développement d'un schéma d'avancement en temps explicite multirate

Contents

5.1	Introduction générale du chapitre	146
5.2	State of the art	149
5.2.1	Introduction	149
5.2.2	Base integration methods to solve $\dot{y} = f(t, y)$	150
5.2.3	A review on multirate schemes	152
5.2.4	Conclusion	163
5.3	A Volume-agglomeration explicit multirate approach	165

5.1 Introduction générale du chapitre

En mécanique des fluides numériques, une configuration souvent rencontrée est la combinaison d'un schéma d'avancement en temps explicite, pour atteindre une précision suffisante, et d'une grille de calcul présentant un nombre restreint de très petites mailles par rapport au reste du maillage. On rencontre une telle situation lorsqu'on étudie par exemple une discontinuité de contact à l'aide d'un maillage adaptatif ou encore lors de la simulation des grandes échelles d'écoulements à grands nombres de Reynolds autour de corps non profilés dans lesquelles coexistent des petites structures dans la couche limite très fine et des tourbillons de plus grande taille dans le sillage.

Pour de tels écoulements, les méthodes d'avancement en temps explicites, employées avec un pas de temps global, sont très coûteuses. Afin de réduire le coût de ces calculs, les méthodes d'avancement en temps *multirate* sont une alternative intéressante. L'objectif de ces schémas qui permettent d'utiliser différents pas de temps sur le domaine de calcul, est de ne pas pénaliser le coût de calcul de l'avancement en temps des solutions instationnaires. En effet, le pas de temps global est imposé par les plus petits éléments comme ceux constituant la couche limite ; cela entraîne un « ralentissement » de la résolution en temps des grands éléments pour lesquels un plus grand pas de temps global aurait pu être utilisé.

Dans ce travail, un nouveau schéma multirate basé sur un processus d'agglomération est proposé pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles et peut être aussi utilisé lorsque ces équations sont combinées avec les modèles de turbulence présentés dans ce manuscrit. La méthode se fonde sur une étape de prédiction au cours de laquelle l'avancement de la solution s'effectue avec des grands pas de temps, accompagnée d'une évaluation des flux au niveau des grandes cellules et sur des macro-cellules regroupant le reste des petites cellules afin de garantir la stabilité du schéma. La seconde étape est celle de correction où des petits pas de temps sont employés pour l'avancement en temps des plus petits éléments.

La précision et l'efficacité de la méthode que nous avons développée et implémentée dans le code parallèle AIRONUM, sont évaluées pour différents cas tests : une discontinuité de contact se déplaçant, la simulation hybride de l'écoulement autour de cylindres circulaires en tandem pour un nombre de Reynolds à 1.66×10^5 ainsi que l'écoulement autour d'un seul cylindre à un nombre de Reynolds de 8.4×10^6 . Enfin, les performances de ce schéma sont évaluées pour l'écoulement autour d'une capsule spatiale à un nombre de Reynolds de 10^6 .

D'autre part, deux partitionnements des maillages du cylindre et du tandem ont été mis en œuvre dans cette étude sur l'évaluation des performances de ce schéma multirate :

- l'un classique qui équidistribue les nœuds entre les différentes partitions tout en minimisant les communications entre les sous-domaines voisins

- l'autre qui est un partitionnement multi-contraintes et qui tient compte des spécificités du schéma multirate développé, avec l'objectif d'équidistribuer au mieux la charge de travail sur tous les cœurs de calcul à la fois dans la phase de prédiction et dans la phase de correction de l'algorithme multirate tout en minimisant les communications entre les sous-domaines.

Dans ce chapitre, une revue des travaux importants sur les méthodes multirate est proposée dans un premier temps. Ce travail a fait l'objet d'un livrable pour le projet ANR MAIDESC que nous introduisons dans les pages qui suivent. Le schéma d'avancement en temps multirate est ensuite présenté avec l'ensemble des résultats que nous avons obtenus pour les cas tests susmentionnés. Ce travail fait l'objet d'un papier en préparation que nous joignons en deuxième partie de ce chapitre.

5.2 State of the art

A review of some important works on multirate methods is proposed. This starts from Rice's pioneering work on first order differential equations [123] to recent works dealing with hyperbolic conservation laws [26, 138].

5.2.1 Introduction

For the solution of EDOs or EDPs, explicit integration schemes are still often used because of the accuracy they can provide and their simplicity of implementation. Nevertheless, these schemes can prove to be very expensive in some situations, for example stiff EDOs whose solution components exhibit different time scales, system of non-stiff EDOs characterized by different activity levels (fast/slow), or EDPs discretized on computational grids with very small elements. In order to overcome this efficiency problem, different strategies were developed, first in the field of EDOs, in order to propose an interesting alternative :

- Multi-method schemes : for systems of EDOs containing both non-stiff and stiff parts, an explicit scheme is used for the non-stiff subsystem and an implicit method for the stiff one [53, 119, 163].
- Multi-order schemes : for non-stiff system of ODEs, the same explicit method and step size are used, but the order of the method is selected according to the activity level (fast/slow) of the considered subsystem of EDOs [29].
- Multirate schemes : for stiff and non-stiff problems, the same explicit or implicit method with the same order is applied to all subsystems, but the step size is chosen according to the activity level. The first multirate time integration algorithm goes back to the work of Rice [123].

In this work we focus on the multirate approach. The application of such schemes was first limited to ODEs [123, 3, 38, 141, 132, 4, 49, 30, 29, 47, 48, 134] and restricted to a low number of industrial problems. In the last fifteen years, the development and application of such methods to the time integration of PDEs was also performed. In particular, a few works were conducted on the system of ODEs that arise after semidiscretization of hyperbolic conservation laws [26, 133, 98, 64, 138, 83], and rare applications were performed in Computational Fluid Dynamics (CFD) [138, 83] for which we are interested.

The remainder of this document is organized as follows.

In Section 2, some base integration methods to solve first order differential equations are recalled . A survey of some important works performed in the domain of multirate approaches is given in Section 3. It starts from Rice's pioneering work

on first order differential equations [123] to recent works dealing with hyperbolic conservation laws [26, 133, 98, 138].

5.2.2 Base integration methods to solve $\dot{y} = f(t, y)$

For the purpose of this survey, some base integration methods for the solution of ODE $\dot{y} = f(t, y)$ are recalled in this section. We focus on two large families of methods : (i) linear multistep methods and (ii) Runge Kutta methods. The Butcher representation of Runge Kutta methods is also given.

- (i) **Linear multistep methods** (including one-step methods as degenerate cases) which are written :

$$y_n = \sum_{i=1}^{K_1} \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^{K_2} \beta_i \dot{y}_{n-i}$$

where y_n approximates $y(t_n)$, $h = t_n - t_{n-1}$ and $\dot{y}_j = f(t_j, y_j)$.

The simplest examples of linear multistep methods are the Euler (forward Euler) method,

$$y_n = y_{n-1} + h\dot{y}_{n-1}$$

and the backward Euler method,

$$y_n = y_{n-1} + h\dot{y}_n.$$

Two classes of linear multistep methods are often used for the solution of EDOs :

- **Backward Differentiation Formulas (BDF) methods** ($K_2 = 0, K_1 = q$) :

$$y_n = \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{n-i} + h\beta_0 \dot{y}_n$$

- **Adams methods** :

- **explicit** of order q ($K_1 = 1, \alpha_1 = 1, K_2 = q, \beta_0 = 0$) :

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{i=1}^q \beta_i \dot{y}_{n-i}$$

- **implicit** of order q ($K_1 = 1, \alpha_1 = 1, K_2 = q - 1$) :

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i \dot{y}_{n-i}$$

- (ii) **Runge Kutta (RK) methods** which concern :

- **r-stage explicit RK methods** :

$$y_n = y_{n-1} + \sum_{i=1}^r b_i k_i$$

with $k_1 = hf(t_{n-1}, y_{n-1})$, $k_i = hf(t_{n-1} + c_i h, y_{n-1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$

and $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ ($i = 2 \dots r$)

- **r-stage implicit RK methods** :

$$y_n = y_{n-1} + \sum_{i=1}^r b_i k_i$$

with $k_i = hf(t_{n-1} + c_i h, y_{n-1} + \sum_{j=1}^r a_{ij} k_j)$ ($i = 1 \dots r$)

- **r-stage Rosenbrock and Rosenbrock-Wanner (ROW) methods** :

$$y_n = y_{n-1} + \sum_{i=1}^r b_i k_i$$

with

$$k_i = hf(t_{n-1} + c_i h, y_{n-1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) + d_i h^2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_{n-1}, y_{n-1}) + h \frac{\partial f}{\partial y}(t_{n-1}, y_{n-1}) \sum_{j=1}^i d_{ij} k_j$$

where the coefficients d_{ij} are chosen to optimize order and stability properties.

Hereafter, we give the representation in Butcher tableau of explicit and implicit RK methods :

- **Representation in Butcher tableau of r-stage explicit RK methods** :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^r b_i k_i \text{ with } k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 c_1 = 0 & 0 & & \\
 c_2 & a_{21} & & \\
 c_3 & a_{31} & a_{32} & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 c_r & a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{r,r-1} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{r-1} & b_r
 \end{array}
 \quad \text{or shorter} \quad
 \frac{c}{b^T} \quad \text{or} \quad [A, b, c]$$

- Representation in Butcher tableau of r-stage implicit RK methods, :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^r b_i k_i \quad \text{with} \quad k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^r a_{ij} k_j)$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 c_r & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\
 \hline
 & b_1 & \cdots & b_r
 \end{array}
 \quad \text{or shorter} \quad
 \frac{c}{b^T} \quad \text{or} \quad [A, b, c]$$

5.2.3 A review on multirate schemes

5.2.3.1 The pioneering work of Rice, 1960 [123]

This work, which is the first one in the field of multirate methods, considers the solution of the following system of EDOs

$$\dot{x} = F(t, x, y), \quad x(t_0) = x_0$$

$$\dot{y} = G(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0$$

where $x(t)$ represents the latent component and $y(t)$ the active one (meaning $y(t)$ varies much more rapidly than $x(t)$).

The proposed time discretization of this system is schematically given in Figure 5.1.

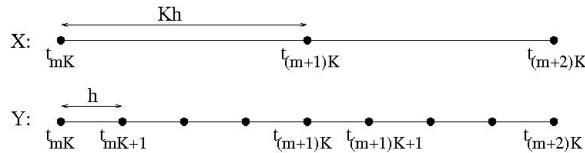


FIGURE 5.1: Time discretization of the latent and active component of the solution

In the work of Rice, the evaluation of the latent part of the solution $x_{(m+1)K}, x_{(m+2)K}, \dots$ is performed with a time step Kh as follows :

$$x_{(m+1)K} = x_{mK} + \sum_{i=1}^3 b_i k_i$$

$$\text{with } k_i = hF(t_{mK} + c_iKh, x_{mK} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j, y_{mK} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}h_j) \quad (i = 1 \dots 3)$$

$$\text{and } h_i = hG(t_{mK} + c_iKh, x_{mK} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j, y_{mK} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}h_j) \quad (i = 1 \dots 2)$$

Coefficients b_i, c_i, a_{ij} are given by any RK3 method (work also done with RK4).

The evaluation of the active part of the solution $y_{mK+j+1}, y_{mK+j+2}, \dots$ is performed with a time step h as follows :

$$y_{mK+j+1} = y_{mK+j} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i d_i(j) \quad \text{for } 0 \leq j \leq K-1.$$

with

$$d_1(j) = hG(t_{mK+j}, \mathbf{x}_{mK+j}, y_{mK+j})$$

$$d_2(j) = hG(t_{mK+j} + \mu_2h, \mathbf{x}_{mK+j} + \sum_{i=4}^6 \lambda_i(j)k_{i-3}, y_{mK+j} + \gamma_{21}d_1(j))$$

$$d_3(j) = hG(t_{mK+j} + \mu_3h, \mathbf{x}_{mK+j} + \sum_{i=7}^9 \lambda_i(j)k_{i-6}, y_{mK+j} + \gamma_{31}d_1(j) + \gamma_{32}d_2(j))$$

in which the following extrapolation, based on the previous k_i , is used :

$$\mathbf{x}_{mK+j} = \mathbf{x}_{mK} + \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{j})\mathbf{k}_i \quad 1 \leq j \leq K-1,$$

and where the several sets of parameters “ $\alpha_i, \mu_i, \gamma_{ik}, \lambda_i(\mathbf{j})$ ” are determined so that :

option 1 : the local truncation error of integration formula for $y(t)$ is in $O(h^4)$
or

option 2 : extrapolation parameters $\lambda_i(\mathbf{j})$ lead to an extrapolation truncation error in $O(h^4)$ and the integration parameters are determined independantly.

Several numerical experiments were performed by applying the previous multirate approach on differential equations in order to investigate the integration errors as a function of K and h . A typical example is given by the 2 degrees of freedom problem :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x/2, & x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = x \cos(25t), & y(0) = 1/1250.5 \end{cases}$$

for which the good features of the proposed multirate approach is shown.

With the objective to illustrate the saving in computation with the multirate option, the number of operations and function evaluations were given for several Runge-Kutta methods and their multirate counterparts. For example, for the third-order version (RK3), we obtain :

	Additions	Multiplications	F evaluations	G evaluations
RK3	22K	28K	3K	3K
Multirate RK3	14(K+1)	17(K+1)	3	3K+2

5.2.3.2 The work of Skelboe on multirate BDF methods, 1989 [141].

In this work, the following system of EDOs is considered :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y, z), & y(t_0) &= y_0, & \text{fast subsystem} \\ \dot{z} &= g(t, y, z), & z(t_0) &= z_0, & \text{slow subsystem} \end{aligned}$$

In the proposed multirate strategy, the fast subsystem is integrated by a k-step BDF formula (BDF-k) with step length h (Figure 5.2) :

$$y_m = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{m-i} + h\beta_0 f(t_m, y_m, z_m)$$

and the slow subsystem is integrated by the same BDF-k formula but with step length $H = qh$ (Figure 5.2) :

$$z_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i z_{n-qi} + qh\beta_0 f(t_n, y_n, z_n)$$

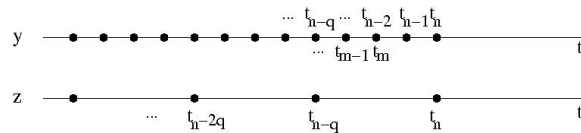


FIGURE 5.2: Time discretization of the fast and slow component of the solution

Different strategies for the sequence of computation are proposed :

- **Fastest first algorithm**

step 1) Integration of the fast subsystem from t_{n-q} to t_n (q steps) with extrapolated values \tilde{z}_m ($n-q < m \leq n$) based on z_{n-kq}, \dots, z_{n-q} (following a Newton type formula, $\tilde{z}_m = \sum_{r=1}^k \tilde{\alpha}_{r,m-(n-q)} z_{n-rq}$).

step 2) Integration of the slow subsystem from t_{n-q} to t_n (one step).

- **Slowest first algorithm**

step 1) Integration of the slow subsystem from t_{n-q} to t_n (one step) with

extrapolated value \tilde{y}_n based on $y_{n-q-k+1}, \dots, y_{n-q}$ (following a Newton type formula).

step 2) Integration of the fast subsystem from t_{n-q} to t_n (q steps) with interpolated values \tilde{z}_m ($n - q < m < n$) based on $z_{n-(k-1)q}, \dots, z_n$ (following a Newton type formula, $\tilde{z}_m = \sum_{r=0}^{k-1} \tilde{\alpha}_{r,m-(n-q)} z_{n-rq}$).

As for the application part, a 2×2 test problem is considered for investigating the stability properties of the previous multirate algorithms (BDF-1 and BDF-2, interpolation of order 0 and 1). From this application, it appears that the proposed multirate algorithms are not necessarily A-stable, limiting the use of such methods.

5.2.3.3 The work of Günther and Rentrop on multirate ROW methods, 1993 [49].

In this work, the following autonomous initial value problem is considered

$$\dot{y}(t) = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

which can be split into active and latent components :

$$\dot{y}_S = f_S(y_S, y_L), \quad y_S(t_0) = y_{S0}, \quad y_S \in \mathbb{R}^{n_S}, \quad \text{active subsystem}$$

$$\dot{y}_L = f_L(y_S, y_L), \quad y_L(t_0) = y_{L0}, \quad y_L \in \mathbb{R}^{n_L}, \quad \text{latent subsystem.}$$

The proposed multirate strategy is the following :

- y_L is integrated with a ROW method on one large time step H :

$$y_L^H(t_0 + H) = y_{L0} + \sum_{i=1}^s c_i k_i$$

$$k_i = h f_L(\hat{y}_S(\mathbf{t}_0 + \alpha_i \mathbf{H}), y_{L0} + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + H J_L \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j, \quad J_L = \frac{\partial f_L}{\partial y_L}(y_{S0}, y_{L0})$$

where $\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}$ and $\hat{y}_S(\mathbf{t})$ is an **extrapolated value for** $y_S(t)$.

- y_S is integrated with a ROW method and m time steps $h = H/m$:

$$y_S^H(t_0 + (\lambda + 1)h) = y_{S0}(t_0 + \lambda h) + \sum_{i=1}^s c_i l_i$$

$$l_i = hf_S(y_S(t_0 + \lambda h) + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} l_j, \tilde{\mathbf{y}}_L(\mathbf{t}_0 + \lambda \mathbf{h} + \alpha_i)) + hJ_S \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} l_j ,$$

$$J_S = \frac{\partial f_S}{\partial y_S}(y_S(t_0 + \lambda h), \tilde{\mathbf{y}}_L(\mathbf{t}_0 + \lambda \mathbf{h})), \text{ for } \lambda = 0, 1, \dots, m-1$$

where $\tilde{\mathbf{y}}_L(\mathbf{t})$ is an **extrapolated value for** $y_L(t)$.

The extrapolation formulas (Padé approximation of order (1,1)) are given by :

$$\hat{y}_{Si}(t_0 + \bar{h}) = y_{Si}(t_0) + \frac{2\bar{h} f_{Si}(t_0)^2}{2f_{Si}(t_0) - \bar{h} \sum_{j=1}^{n_S} \frac{\partial f_{Si}}{\partial y_{Sj}}(y(t_0)) f_{Sj}(y(t_0)) - \bar{h} \sum_{j=n_S+1}^n \frac{\partial f_{Si}}{\partial y_{Lj}}(y(t_0)) f_{Lj}(y(t_0))}$$

$$\tilde{y}_{Li}(t_0 + \bar{h}) = y_{Li}(t_0) + \frac{2\bar{h} f_{Li}(t_0)^2}{2f_{Li}(t_0) - \bar{h} \sum_{j=1}^{n_S} \frac{\partial f_{Li}}{\partial y_{Sj}}(y(t_0)) f_{Sj}(y(t_0)) - \bar{h} \sum_{j=n_S+1}^n \frac{\partial f_{Li}}{\partial y_{Lj}}(y(t_0)) f_{Lj}(y(t_0))}$$

The application part concerns the simulation of electric circuits (inverter chain) leading to the solution of stiff EDOs (system of 250-4000 differential equations). A multirate 4-steps ROW method was implemented, leading to a A-stable algorithm, and a speedup up to 2.8 compared to the classical RK4 method.

5.2.3.4 The work of Löhner-Morgan-Zienkiewicz on explicit multirate schemes for hyperbolic problems, 1984 [83].

To our knowledge, this work is the first one on multirate methods which deals with applications in CFD.

In this study, the problem of interest is given by

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F(U) = 0 \quad \text{in } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

where Ω_1 and Ω_2 are two subregions with different grid resolution (see Figure 5.3 in 1D), and with, for a given explicit scheme, an allowable time step Δt_1 in Ω_1 and $\Delta t_2 = \Delta t_1/n$ in Ω_2 .

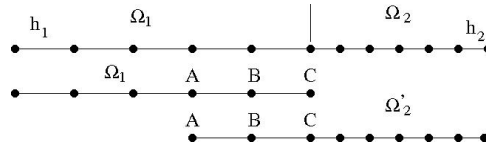


FIGURE 5.3: 1D model, 2 subdomains splitting

One global time step of the proposed multirate explicit scheme (for 2 subdomains) is performed as follows :

- Add to Ω_2 two grid points of Ω_1 , let Ω'_2 be the new subdomain obtained (see Figure 5.3).

- Specify a boundary condition for U (free or fixed) at point C (see Figure 5.3) and advance one global time step Δt_1 in Ω_1 .
- Specify a boundary condition for U (free or fixed) at point A (see Figure 5.3) and advance n small time steps $\Delta t_2 = \Delta t_1/n$ in Ω'_2 .
- U_A is obtained from Ω_1 , U_C from Ω'_2 , $U_B =$ mean values obtained from Ω_1 and Ω'_2 , where B is the point between A and C (see Figure 5.3).

The same procedure can be performed with more than 2 subdomains splitting, and in the multidimensional case.

The above multirate scheme was implemented with a second order explicit finite element scheme (Taylor-Galerkin method of Donea).

Three test-cases were considered :

- A transient solution of a 1D shock tube problem (Sod).
- A transient solution of a 2D supersonic inviscid flow around a circular cylinder.
- A steady-state solution of a 2D supersonic inviscid flow past a wedge.

The first two test-cases were chosen in order to show that shocks can be handled by the method without problems. The third test-case illustrates the gain in CPU-time that can be obtained with the multirate approach. A speedup of 2 between the multirate scheme and its single-rate counterpart is achieved.

5.2.3.5 The work of Kirby on a multirate forward Euler scheme for hyperbolic conservation laws, 2002 [64]

This work deals with one-dimensional hyperbolic conservation laws

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(y(t, x))}{\partial x} = 0.$$

After semi-discretization by a finite volume MUSCL scheme, a system of EDOs is obtained

$$\dot{y}_i(t) = f_i(y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad i = 1, \dots, n$$

that is partitioned in fast and slow subsystems

$$\dot{y}_F = f_F(y_F, y_S) \quad (\text{fast solution subsystem, explicit Euler time step } \Delta t/m)$$

$$\dot{y}_S = f_S(y_F, y_S) \quad (\text{slow solution subsystem, explicit Euler time step } \Delta t).$$

A multirate scheme based on forward Euler steps is proposed for the solution of these subsystems :

- For y_F : m steps integration from t^n to t^{n+1}
 $y_F^{n+\eta_k} = y_F^{n+\eta_{k-1}} + \sigma_k \Delta t f_F(y_F^{n+\eta_{k-1}}, y_S^n), \quad k = 1, \dots, m-1$
 $y_F^{n+1} = y_F^{n+\eta_{m-1}} + \sigma_m \Delta t f_F(y_F^{n+\eta_{m-1}}, y_S^n)$
- For y_S : 1 step integration from t^n to t^{n+1}
 $y_S^{n+1} = y_S^n + \Delta t f_S(y_F^n, y_S^n)$

where $\sum_{k=1}^m \sigma_k = 1$ with $0 < \sigma_k \leq 1, \eta_l = \sum_{k=1}^l \sigma_k, \eta_0 = 0$ and $t^{n+\eta_k} = t^n + \eta_k \Delta t$.

It is shown that the proposed multirate scheme satisfies the TVD property and a maximum principle under local CFL conditions, but it is only first order time accurate. No application has been presented in this theoretical work.

5.2.3.6 The work of Constantinescu and Sandu on multirate RK methods for hyperbolic conservation laws, 2007 [26]

One-dimensional scalar hyperbolic equations are considered in this study :

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(y(t, x))}{\partial x} = 0.$$

The objective of this work is to develop a second-order accurate multirate scheme that inherits stability properties (maximum principle, TVD, TVB, monotonicity-preservation, positivity) of the single rate integrator.

After a semi-discrete finite volume approximation (which satisfies some of the above stability properties), a system of EDOs is obtained

$$\dot{y}_i(t) = f_i(y_1(t), \dots, y_n(t)), \quad i = 1, \dots, n$$

which is partitioned into slow and fast subsystems

$$\dot{y}_F = f_F(y_F, y_S), \quad \text{fast subsystem}$$

$$\dot{y}_S = f_S(y_F, y_S), \quad \text{slow subsystem.}$$

This partitioning can be represented schematically by Figure 5.4 :

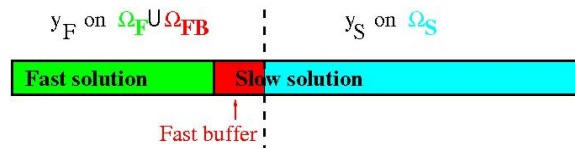


FIGURE 5.4: Partitioning into fast and slow subsystems

where

Ω_F is the subdomain corresponding to a fast characteristic time and where a small time step $\Delta t/m$ is used in the multirate scheme ($m =$ integer corresponding to the number of small time steps per large time step Δt),

Ω_S denotes the subdomain with a slow characteristic time and where a large time step Δt is used in the multirate scheme,

Ω_{FB} (fast buffer) is the subdomain with a slow characteristic time but a small time step $\Delta t/m$ is used in the multirate scheme (the size of the fast buffer is equal to half of the stencil size),

the **Fast solution** is the part of the solution which corresponds to a fast characteristic time,

the **Slow solution** denotes the part of the solution which corresponds to a slow characteristic time,

the **Fast buffer solution** is the solution defined on the fast buffer Ω_{FB} ,

y_F denotes the **fast solution** \cup **fast buffer solution** for which the time integration is based on the small time step $\Delta t/m$,

y_S is the **slow solution** \setminus **fast buffer solution** for which the time integration uses the large time step Δt .

Note that y_F is different from the fast solution, and that y_S is different from the slow solution. The fast buffer Ω_{FB} , which bridges the transition between Ω_F and Ω_S , is introduced for the purpose that the multirate scheme satisfies the stability properties of the single rate scheme.

The following general multirate partitioned RK scheme, associated with a base RK method noted RK_B , is proposed (the Butcher notation is used, see Section 2) :

Hereafter, RK_F denotes the RK method which applies on y_F defined on $\Omega_F \cup \Omega_{FB}$, and RK_S the RK method which applies on y_S defined on $\Omega_S \setminus \Omega_{FB}$ (see Figure 5.5).

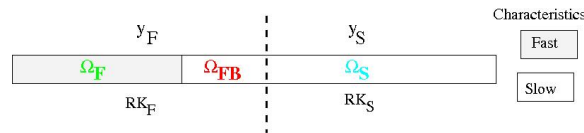


FIGURE 5.5: RK_F applies on y_F , and RK_S applies on y_S

Base method (RK_B) :

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Fast method (RK_F) : $\dot{y}_F = f_F(y_F, y_S)$ **Slow method** (RK_S) : $\dot{y}_S = f_S(y_F, y_S)$

$$\begin{array}{c|ccc}
 \frac{1}{m}c & \frac{1}{m}A & & \\
 \frac{1}{m}\mathbf{1} + \frac{1}{m}c & \frac{1}{m}\mathbf{1}b^T & \frac{1}{m}A & \\
 \vdots & \vdots & & \\
 \frac{m-1}{m}\mathbf{1} + \frac{1}{m}c & \frac{1}{m}\mathbf{1}b^T & \dots & \frac{1}{m}\mathbf{1}b^T & \frac{1}{m}A \\
 \hline
 & \frac{1}{m}b^T & \frac{1}{m}b^T & \dots & \frac{1}{m}b^T
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|ccc}
 c & A & & \\
 c & & A & \\
 \vdots & & & \ddots \\
 c & & & A \\
 \hline
 & \frac{1}{m}b^T & \frac{1}{m}b^T & \dots & \frac{1}{m}b^T
 \end{array}$$

One can notice that **the same weight coefficients are taken for RK_F and RK_S** ($b_{F_i} = b_{S_i} = \frac{b_i}{m}$), for the purpose of second order accuracy and conservation properties of the multirate scheme.

For the case $RK_B = RK2$ and $m = 2$ (2 small time steps $\Delta t/2$ per large time step Δt), the previous multirate scheme based on RK_B , RK_F and RK_S becomes :

$ \begin{array}{c cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} $	$ \begin{array}{c cccc} 0 & 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & & \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & \\ 1 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} $	$ \begin{array}{c cccc} 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} $
Base method (RK_B)	Fast method (RK_F)	Slow method (RK_S)

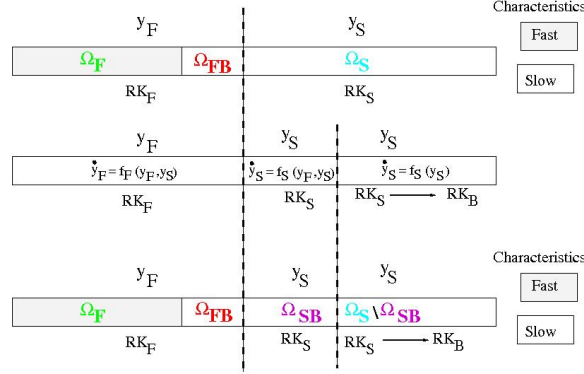
which corresponds to the following **RK_B**, **RK_F** and **RK_S** stages :

<p>RK_B ($\dot{y} = f(y)$) :</p> $ \begin{aligned} k^1 &= f(y^n) \\ y^{(1)} &= y^n + \Delta t k^1 \\ k^2 &= f(y^{(1)}) \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{\Delta t}{2}(k^1 + k^2) \end{aligned} $	<p>RK_F ($\dot{y}_F = f_F(y_F, y_S)$) :</p> $ \begin{aligned} k_F^1 &= f_F(\mathbf{y}_F^n, \mathbf{y}_S^n) \\ y_F^{(1)} &= y_F^n + \frac{\Delta t}{2}k_F^1 \\ k_F^2 &= f_F(\mathbf{y}_F^{(1)}, \mathbf{y}_S^{(1)}) \\ y_F^{(2)} &= y_F^n + \frac{\Delta t}{4}k_F^1 + \frac{\Delta t}{4}k_F^2 \\ k_F^3 &= f_F(\mathbf{y}_F^{(2)}, \mathbf{y}_S^n) \\ y_F^{(3)} &= y_F^{(2)} + \frac{\Delta t}{2}k_F^3 \\ k_F^4 &= f_F(\mathbf{y}_F^{(3)}, \mathbf{y}_S^{(3)}) \\ y_F^{n+1} &= y_F^n + \frac{\Delta t}{4}(k_F^1 + k_F^2 + k_F^3 + k_F^4) \end{aligned} $	<p>RK_S ($\dot{y}_S = f_S(y_F, y_S)$) :</p> $ \begin{aligned} k_S^1 &= f_S(\mathbf{y}_F^n, \mathbf{y}_S^n) \\ y_S^{(1)} &= y_S^n + \Delta t k_S^1 \\ k_S^2 &= f_S(\mathbf{y}_F^{(1)}, \mathbf{y}_S^{(1)}) \\ y_S^{(2)} &= y_S^n \\ k_S^3 &= f_S(\mathbf{y}_F^{(2)}, \mathbf{y}_S^n) \\ y_S^{(3)} &= y_S^n + \Delta t k_S^3 \\ k_S^4 &= f_S(\mathbf{y}_F^{(3)}, \mathbf{y}_S^{(3)}) \\ y_S^{n+1} &= y_S^n + \frac{\Delta t}{4}(k_S^1 + k_S^2 + k_S^3 + k_S^4) \end{aligned} $
---	---	---

Note that at each stage of the multirate formula, the flux functions are evaluated at the same argument values so that the conservation properties are satisfied by the multirate scheme.

In order to decouple y_S from y_F and to show that the major part of y_S is advanced

in time using the large time step Δt , a slow buffer region Ω_{SB} of size $m \times$ half of stencil size is introduced (see Figure 5.6) so that f_S depends only on y_S in $\Omega_S \setminus \Omega_{SB}$ (we recall that m denotes the number of small time steps per large time step Δt).


 FIGURE 5.6: Slow buffer Ω_{SB}

The previous multirate scheme (case $RK_B = RK2$ and $m = 2$) becomes

$$\Omega_F \cup \Omega_{FB}, RK_F : \\ (\dot{y}_F = f_F(y_F, y_S))$$

$$\Omega_{SB}, RK_S : \\ (\dot{y}_S = f_S(y_F, y_S))$$

$$\Omega_S \setminus \Omega_{SB}, RK_S \rightarrow RK_B : \\ (\dot{y}_S = f_S(y_S))$$

$$\begin{aligned} k_F^1 &= f_F(\mathbf{y}_F^n, \mathbf{y}_S^n) \\ y_F^{(1)} &= y_F^n + \frac{\Delta t}{2} k_F^1 \\ k_F^2 &= f_F(\mathbf{y}_F^{(1)}, \mathbf{y}_S^{(1)}) \\ y_F^{(2)} &= y_F^n + \frac{\Delta t}{4} k_F^1 + \frac{\Delta t}{4} k_F^2 \\ k_F^3 &= f_F(\mathbf{y}_F^{(2)}, \mathbf{y}_S^n) \\ y_F^{(3)} &= y_F^{(2)} + \frac{\Delta t}{2} k_F^3 \\ k_F^4 &= f_F(\mathbf{y}_F^{(3)}, \mathbf{y}_S^{(3)}) \\ y_F^{n+1} &= y_F^n + \frac{\Delta t}{4} (k_F^1 + k_F^2 + k_F^3 + k_F^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_S^1 &= f_S(\mathbf{y}_F^n, \mathbf{y}_S^n) \\ y_S^{(1)} &= y_S^n + \Delta t k_S^1 \\ k_S^2 &= f_S(\mathbf{y}_F^{(1)}, \mathbf{y}_S^{(1)}) \\ y_S^{(2)} &= y_S^n \\ k_S^3 &= f_S(\mathbf{y}_F^{(2)}, \mathbf{y}_S^n) \\ y_S^{(3)} &= y_S^n + \Delta t k_S^3 \\ k_S^4 &= f_S(\mathbf{y}_F^{(3)}, \mathbf{y}_S^{(3)}) \\ y_S^{n+1} &= y_S^n + \frac{\Delta t}{4} (k_S^1 + k_S^2 + k_S^3 + k_S^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_S^1 &= f_S(\mathbf{y}_S^n) \\ y_S^{(1)} &= y_S^n + \Delta t k_S^1 \\ k_S^2 &= f_S(\mathbf{y}_S^{(1)}) \\ \{y_S^{(2)} &= y_S^n\} \\ \{k_S^3 &= f_S(\mathbf{y}_S^n) = \mathbf{k}_S^1\} \\ \{y_S^{(3)} &= y_S^n + \Delta t k_S^3 = y_S^{(1)}\} \\ \{k_S^4 &= f_S(\mathbf{y}_S^{(3)}) = \mathbf{k}_S^2\} \\ y_S^{n+1} &= y_S^n + \frac{\Delta t}{2} (k_S^1 + k_S^2) \end{aligned}$$

Expressions in braces (last column) indicate that they are not evaluated.

The proposed multirate partitioned RK scheme satisfies the following properties :

- second order accurate
- conservative
- nonlinear stable (positivity, maximum principle preserving, TVB)

The theoretical speedup (single rate/multirate) is given by :

$$\text{Speedup} = \frac{m(N_{\Omega_F} + N_{\Omega_{FB}} + N_{\Omega_S})}{m(N_{\Omega_F} + N_{\Omega_{FB}} + N_{\Omega_{SB}}) + N_{\Omega_S} - N_{\Omega_{SB}}} = \frac{m(N_{\Omega_F} + N_{\Omega_{FB}} + N_{\Omega_S})}{m(N_{\Omega_F} + N_{\Omega_{FB}} + N_{int}m\Delta) + N_{\Omega_S} - N_{int}m\Delta}$$

where N_{Ω_X} denotes the number of nodes in Ω_X , Δ is the half of stencil size, and N_{int} the number of interface nodes between $N_{\Omega_{FB}}$ and N_{Ω_S} .

It is deduced that :

- the speedup depreciates as m grows, but in practical applications large m can be avoided through nested partitioning.
- in practice, $N_{\Omega_{SB}} \ll \min(N_{\Omega_F} + N_{\Omega_{FB}}, N_{\Omega_S})$
 \Rightarrow Speedup $\simeq \frac{m(N_{\Omega_F} + N_{\Omega_{FB}} + N_{\Omega_S})}{m(N_{\Omega_F} + N_{\Omega_{FB}}) + N_{\Omega_S}}$
 \Rightarrow Speedup close to the ideal value of m if $N_{\Omega_F} + N_{\Omega_{FB}} \ll N_{\Omega_S}$.

The applications presented in this work concern the following points :

- a multirate RK2 scheme with $m = 2$ ($\Delta t/2$) and $m = 3$ ($\Delta t/3$), and 2 levels of partitioning, is used,
- the problem of a 1D advection equation (initial solutions : step, triangular and exponential shapes), on fixed and moving grids, discretized with a 2nd order limited FV scheme, is considered,
- the case of a 1D burger equation (initial solutions : step and exponential shapes), on fixed grids, discretized with a 3rd order TVD FV scheme, is also presented.

It was checked that the numerical solutions are second order accurate, positive, obey the maximum principle, TVD, wiggle free, and the integration is conservative.

By way of example, for the case of the Burger equation (fast region $\simeq 10\%$ entire domain), the speedup (single rate/multirate) is given by the following Table :

Time ratio	Single rate time (sec)	Multirate time (sec)	Experimental Speedup	Theoretical Speedup
$m = 2$	25.28	13.71	1.84	1.80
$m = 3$	36.73	15.07	2.43	2.45

5.2.3.7 The work of Seny *et al.* on a parallel implementation of multirate RK methods, 2014 [138]

The work of Seny *et al.* focuses on the efficient parallel implementation of explicit multirate RK schemes in the framework of discontinuous Galerkin methods.

The multirate RK scheme used is the approach proposed by Constantinescu [26] and introduced in the previous subsection.

In order to optimize the parallel efficiency of the multirate scheme, they propose a solution based on multi-constraint mesh partitioning. The objective is to ensure that the workload, for each stage of the multirate algorithm, is almost equally shared by each computer core i.e. the same number of elements are active on each core, while minimizing inter-processor communications. The METIS software is used for the mesh decomposition, and the parallel programming is performed with the Message Passing Interface.

The efficiency of the parallel multirate strategy is evaluated on three test cases : the wind driven circulation in a square basin and the propagation of a tsunami wave using a shallow water model (two-dimensional), and the acoustic propagation in a turbofan engine intake using the linearized Euler equations (three-dimensional). It is shown that the multi-constraint partitioning strategy increases the efficiency of the parallel multirate scheme compared to the classical single-constraint partitioning. However, they observe that strong scalability is achieved with more difficulty with the multirate algorithm than with its single-rate counterpart, especially when the number of processors becomes important compared to the number of mesh elements. The possible low number of elements per multirate group and per processor is a limiting factor for the proposed approach.

5.2.4 Conclusion

A review on multirate schemes is performed in this document. Some important works have been reviewed, ranging from that of Rice [123] in 1960 on first order differential equations to recent works on time integration of PDEs associated with hyperbolic conservation laws [26, 138]. On the basis of this review, it can be said that few works on multirate methods were conducted for the solution of hyperbolic conservation laws and rare applications in CFD were performed [83, 138]. There is therefore a need to develop such methods in the field of CFD.

Standard J. Generic article category

**Emmanuelle Itam · Stephen Wornom · Bruno
Koobus · Alain Dervieux**

A Volume-agglomeration multirate time advancing for high Reynolds number flow simulation

Abstract

A frequent configuration in computational fluid mechanics combines an explicit time advancing scheme for accuracy purposes and a computational grid with a very small portion of much smaller elements than in the remaining mesh. Examples of such situations are the travel of a discontinuity followed by a moving mesh, and the large eddy simulation of high Reynolds number flows around bluff bodies where together very thin boundary layers and vortices of much more important size need to be captured. For such configurations, explicit time advancing schemes with global time stepping are very costly. In order to reduce this problem, the multirate time stepping approach represents an interesting improvement. The objective of such schemes, which allow to use *different time steps* in the computational domain, is to avoid penalizing the computational cost of the time advancement of unsteady solutions which can become large due to the use of small global time steps imposed by the smallest elements such as those constituting the boundary layers. In the present work, a new multirate scheme based on control volume agglomeration is proposed for the solution of the compressible Navier-Stokes equations possibly equipped with turbulence models. The method relies on a prediction step where large time steps are performed with an evaluation of the fluxes on macro-cells for the smaller elements for stability purpose, and on a correction step in which small time steps are employed only for the smaller elements. The accuracy and efficiency of the proposed method are evaluated on several benchmarks flows: the problem of a moving contact discontinuity (inviscid flow), the computation with a hybrid turbulence model of flows around bluff bodies like a tandem cylinders at Reynolds number 1.66×10^5 , a circular

E. Itam and B. Koobus
IMAG, Université de Montpellier, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex, France
E-mail: itamemmanuelle@gmail.com, koobus@umontpellier.fr

S. Wornom
LEMMA, 2000 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France
E-mail: Stephen.Wornom@inria.fr

A. Dervieux
INRIA, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France
E-mail: alain.dervieux@sophia.inria.fr

cylinder at Reynolds number 8.4×10^6 , and a flow around a space probe model at Reynolds number 10^6 .

Keywords: computational fluid dynamics, multirate time advancing, explicit scheme, volume agglomeration, unstructured grid, hybrid turbulence model.

1 INTRODUCTION

A frequent configuration in CFD calculations combines an explicit time advancing scheme for accuracy purpose and a computational grid with a very small portion of much smaller elements than in the remaining mesh. Two typical examples are the following: A first example is the hybrid RANS/LES simulation of high Reynolds number flows around bluff bodies. In that case, very thin boundary layers need be addressed with extremely small cells. When applying explicit time advancing, the computation is penalized by the very small time-step to be applied (CFL number of order 1). But this is not the only interesting region of the computational domain. An important part of the meshing effort is devoted to large regions of medium cell size in which the motion of vortices need be accurately captured. For these vortices, the efficient and accurate time-step is of order of the ratio of local mesh size by vortex velocity. We can apply an implicit scheme with such a time-step, which would produce a local CFL of order 1 for the vortices and a local CFL of order hundreds for the boundary layer. But the implicit scheme used with a too small time step will be of larger cost than the explicit one, with a cost increasing importantly with formal accuracy, think of implicit RK schemes. For higher time lapse, implicit schemes like BDF1/2 show much more dissipation than explicit schemes and are much less accurate.

Our second example concerns an important complexity issue in unsteady mesh adaptation. Indeed, unsteady mesh adaptive calculations are penalized by the very small time-step imposed by accuracy requirements on regions involving small space-time scales. This small time step is for example an important computational penalty for mesh adaptive methods of AMR type [5]. This is also the case for unsteady fixed-point mesh-adaptive methods as in [4]. Conversely, using an implicit scheme and large time steps will strongly degrade the accuracy. In that latter method, the loss of efficiency is even more crucial when the anisotropic mesh is strongly locally strongly stretched. In [4], this loss is evaluated as limiting the numerical convergence order for discontinuities to 8/5 instead of second-order convergence.

This limitation also applies to mesh adaptation by mesh motion. Our second example will concentrate on the computation of an isolated traveling discontinuity. The discontinuity needs to be followed by the mesh, preferably in a mesh-adaptive mode. Except if the adaptation works in a purely Lagrangian mode, an implicit scheme will smear the discontinuity of the solution. An explicit scheme will applied a costly very small time step on the whole computational domain.

In order to overcome these problems, the multirate time stepping approach represents an interesting alternative. A part of the computational domain is advanced in time with the small time-step imposed by accuracy and stability constraints. Another part is advanced with the larger time-step giving a good compromise between accuracy and efficiency. Many works have been published on multirate methods in the field of ODE, see for example [24, 1, 9, 29] and [25, 2, 15, 8, 7, 14, 13, 27], but fewer works were conducted on multirate time advancing schemes for the solution of PDE and hyperbolic conservation laws [6, 26, 23, 18, 28, 21], and rare applications were performed in Computational Fluid Dynamics (CFD), for shock propa-

gation in [21] and for shallow water computations in [28]. Therefore, there is still much work to do to provide viable multirate methods for CFD applications.

In this work, we propose a new multirate scheme based on control volume agglomeration which is at the same time very simple and well suited to a large class of finite volume approximations. The agglomeration produces macro-cells by grouping together several neighboring cells of the initial mesh. The method relies on a prediction step where large time steps are used with an evaluation of the fluxes performed on the macro-cells for the region of smallest cells, and on a correction step advancing solely the region of small cells, this time with a small time step.

We demonstrate the method in a numerical framework using a vertex centered approximation, the mixed finite volume/finite element formulation.

Target applications are three-dimensional unsteady flows modeled by the compressible Navier-Stokes equations equipped with turbulence models and discretized on unstructured possibly deformable meshes. The numerical illustration involves the two above examples.

The proposed algorithm is described in Section 2. Section 3 provides some motivations of this construction. Section 4 gives several examples of applications.

2 Multirate time advancing by volume agglomeration

2.1 Finite-Volume Navier-Stokes

The multirate time advancing scheme based on volume agglomeration is developed for the solution of the three-dimensional compressible Navier-Stokes equations. The main assumption is that the computational domain is split into computational finite volume cells such that cells intersect only by their boundaries and cover the whole computational domain. The discrete Navier-Stokes system is assembled by into a flux summation Ψ_i summing convective and diffusive fluxes evaluated at all the interfaces separating two cells. More precisely, the finite-volume spatial discretization combined with an explicit forward-Euler time-advancing writes for the Navier-Stokes equations possibly equipped with a $k - \varepsilon$ model:

$$vol_i w_i^{n+1} = vol_i w_i^n + \Delta t \Psi_i, \quad \forall i = 1, \dots, ncell,$$

where vol_i is the volume of $cell_i$, Δt the time step,

$$w_i^n = (\rho_i^n, (\rho u)_i^n, (\rho v)_i^n, (\rho w)_i^n, E_i^n, (\rho k)_i^n, (\rho \varepsilon)_i^n)$$

are as usually the density, moments, total energy, turbulent energy and turbulent dissipation at $cell_i$ and time level t^n , and $ncell$ the total number of cells in the mesh.

Given an explicit -conditionally stable- time advancing, we assume that we can define a maximal stable time step (*local time step*) $\Delta t_i, i = 1, \dots, ncell$ on each node. The stable local time step is classically defined by the combination of a viscous stability limit and an advective one according to the following formula:

$$\Delta t_i \leq \frac{CFL \times \Delta l_i^2}{\Delta l_i (||\mathbf{u}_i|| + c_i) + 2 \frac{\gamma}{\rho_i} \left(\frac{\mu_i}{Pr} + \frac{\mu_{t_i}}{Pr_t} \right)} \quad (1)$$

where Δl_i is a local characteristic mesh size, \mathbf{u}_i the local velocity, c_i the sound celerity, γ the ration of specific heats, ρ_i the density, $\frac{\mu_i}{Pr} + \frac{\mu_{t_i}}{Pr_t}$ the sum of local viscosity to Prandtl ratio, laminar and turbulent, and CFL a parameter depending of the time advancing scheme,

5.3. A Volume-agglomeration explicit multirate approach

4

of the order of unity. Using the local time step Δt_i leads to a stable but not consistent time advancing.

A consistent and stable time advancing should use a *global/uniform time step* defined by:

$$\Delta t = \min_{1,ncell} \Delta t_i.$$

2.2 Inner and outer zones

We first define the inner zone and the outer zone, the coarse grid, and the construction of the fluxes on the coarse grid, ingredients on which our multirate time advancing scheme is based. For this splitting into two zones, the user is supposed to choose a (integer) *time step factor* $K > 1$.

– **Definition of the Inner and Outer zones :**

- We define the **outer zone** as the set of cells i for which the explicit scheme is stable for a time step $K \Delta t$

$$\Delta t_i \geq K \Delta t,$$

- the **inner zone** is the set of cells for which

$$\Delta t_i < K \Delta t.$$

– **Definition of the coarse grid :**

– **Objective :**

- Advancement in time is performed with time step $K \Delta t$
- Advancement in time preserves accuracy in the outer zone
- Advancement in time is consistent in the inner zone

In the example given below, the accuracy of the initial scheme can be defined as a third-order spatial accuracy on smooth meshes, through the use of a MUSCL-type upwind-biased finite volume, combined with a fourth-order time accuracy through the use of the standard Runge-Kutta scheme, see [19] for details.

- A **coarse grid** is defined on the inner zone by applying cell agglomeration in such a way that on each macro-cell, the maximal local stable time step is at least $K \Delta t$. Agglomeration consists in considering each cell and aggregating to it neighboring cells which are not yet aggregated to an other one (Figure 1). Agglomeration into macro-cell is re-iterated until macro-cells with maximal time step smaller then $K \Delta t$ have disappeared.

– **Time-advancing on the macro-cells :**

- We advance in time the chosen explicit scheme on the coarse grid with $K \Delta t$ as time step.

– **Construction of the flux on the coarse grid**

- The nodal fluxes Ψ_i are assembled on the fine cells (as usual)
- Fluxes are summed on the macro-cells I (inner zone) :

$$\Psi^I = \sum_{k \in I} \Psi_k \tag{2}$$

Remark 1: Stability can be reinforced by adding a smoothing of the coarse flux (inner zone) :

$$\Psi^I = \left(\sum_{K \in \mathcal{V}(I)} \Psi^K \text{vol}^K \right) / \left(\sum_{K \in \mathcal{V}(I)} \text{vol}^K \right). \quad (3)$$

We did not need to apply this flux-smoothing. \square

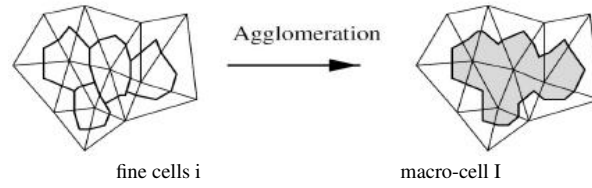


Fig. 1 Sketch (in 2D) of the agglomeration of 4 cells into a macro-cell. Cells are dual cells of triangles, bounded by sections of triangle medians.

2.3 Multirate time advancing

The multirate algorithm is then based on a **prediction step** and a **correction step** as defined hereafter :

Step 1 (prediction step) :

The solution is advanced in time with time step $K \Delta t$, on the macro-cells in the inner zone and on the fine cells in the outer zone :

For $\alpha = 1, RK \text{ step}$

$$\text{outer zone : } \quad \text{vol}_i w_i^{(\alpha)} = \text{vol}_i w_i^{(0)} + b_\alpha K \Delta t \Psi_i^{(\alpha-1)} \quad (4)$$

$$\text{inner zone : } \quad \text{vol}^I w^{I,(\alpha)} = \text{vol}^I w^{I,(0)} + b_\alpha K \Delta t \Psi^{I,(\alpha-1)} \quad (5)$$

$$w_i^{(\alpha)} = w^{I,(\alpha)} \quad \text{for } i \in I \quad (6)$$

EndFor α .

where b_α denote the Runge-Kutta parameters, and vol^I the volume of macro-cell I.

Step 2 (correction step) :

- The unknowns are frozen in the outer zone at level $t^n + K \Delta t$.
- The outer unknowns near the boundary of the outer zone which are necessary for advancing the inner zone are interpolated in time.
- In the inner zone, using these interpolated values, the solution is advanced in time with the chosen explicit scheme and time step Δt .

This time advancing writes:

For $kt = 1, K$
 For $\alpha = 1, RK\ step$

$$\text{inner zone : } \quad vol_i w_i^{(\alpha)} = vol_i w_i^{(0)} + b_\alpha \Delta t \Psi_i^{(\alpha-1)} \quad (7)$$

EndFor α .
 EndFor kt .

Remark 2: The complexity, proportional to the number of points in the inner zone, is therefore mastered. \square

3 Elements of analysis

3.1 Stability

The central question concerning the coarse grid is the stability resulting from its use in the computation.

Considering (1), we expect that the viscous stability limit will improve by a factor four for a twice larger cell. The viscous stability limit can therefore be considered as more easily addressed by our coarsening. For the advective stability limit, we can be a little more precise. The coarse mesh is an unstructured partition of the domain in which cells are polyhedra. Analyses of time advancing schemes on unstructured meshes are available in L^2 norm for unstructured meshes, see [3, 11, 10]. Here we solely propose a L^∞ analysis of the first order advection scheme. The gain in L^∞ stability can be analysed for a first-order upwind advection scheme. We get the following (obvious) lemma:

Lemma : The upwind advection scheme is positive on the mesh made of macro-cells as soon as for all macro-cell I :

$$\Delta t \|V_I\| < \left[\sum_{J \in \mathcal{N}(I)} \int_{\partial cell(I) \cap \partial cell(J)} d\Sigma \right]^{-1} \int_{cell(I)} dx$$

where $\mathcal{N}(I)$ holds for the neighbouring macro-cells of I . \square

Thanks to the application of an adequate neighboring-cell agglomeration, macro-cell shapes will not degrade and the ratio in RHS will be increased, producing finally a K -times larger stability limit.

3.2 Accuracy

In contrast to more sophisticated multirate algorithms, the proposed method has not a strong control of the accuracy. Let us first remark that the generic situation involves variable-size meshes, which limits the unsteady accuracy on small scales, already before applying the multirate method.

However the two following remarks tend to show that the scheme accuracy - on the coarser grid- is conserved:

- the predictor step involves a sum of the fluxes and is at least as accurate as an equivalent coarse-grid approximation,
- the corrector step will improve the result in a way which depends on mesh smoothness, *i.e.* in better extent if the transition from small cells to larger cells is a smooth one.

3.3 Efficiency

The proposed two-level multirate depends on only one parameter, the ratio K between the large and small time step. Considering a mesh with N vertices, a short loop on the mesh will produce the function $K \mapsto N^{small}(K) \leq N$ which gives the number of cells in the inner region for K .

If $CPU_{ExpNode}(\Delta t)$ denotes the CPU per node and per time step Δt of the underlying explicit scheme, a model for the multirate cpu per Δt would be

$$CPU_{MR(K)}(\Delta t) = \left(\frac{N}{K} + N^{small}(K) \right) \times CPU_{ExpNode}(\Delta t)$$

to be compared with the explicit case:

$$CPU_{Expli}(\Delta t) = N \times CPU_{ExpNode}(\Delta t).$$

Once we have evaluated $K \mapsto N^{small}(K)$ for a given mesh it is possible to predict a theoretical optimum K_{opt} for minimising the CPU time in scalar execution.

3.4 Parallelism

The proposed method is experimented with a parallel MPI software which relies on mesh partitioning. Cell-agglomeration is applied inside partitions to save communications.

In first study, we have not optimised the MPI partitioning in order to adapt it to the two different steps of the multirate algorithm, predictor over the whole mesh, corrector on the inner cells only. The efficiency with respect to non-parallel calculation may then deteriorate. If the inner zone is large, mesh partition can be optimised by splitting uniformly the inner zone between the processors. We have not applied this strategy because, in the experiments we performed, we have observed that the inner zone can be of very small size, and, on the other hand, we have preferred to keep the present domain decomposition which optimizes the (many) intercore communications that occur during a computation. A consequence is a poor parallel efficiency for the correction step, related to a defavourable ratio between computation and communication, and not related to unbalanced load when a small inner zone is involved.

In a second study, we use a special partition, the multi-constrained partition of Karypis, [17] which is incorporated in the METIS library. The principle is apply the partition optimizer by minimizing the communications while imposing the two constraints than both the whole domain and the inner zone are balanced by the partition. In practice, we have applied the Karypis algorithm to a vertex partition and then transposed to elements for running our CFD code.

If the partition is ideally perfectly balanced for the inner nodes and for all nodes, then for $nproc$ processors, both $CPU_{MR(K)}(\Delta t)$ and $CPU_{expli}(\Delta t)$ will be $nproc$ smaller and the

theoretical gain is as for the scalar case.

Remark 3 : Another idea, not implemented in this work, is to organize concurrency between the corrector step and a part of the predictor. Indeed, the corrector only needs the predicted values of an intermediate zone in the coarse cells region located near the interface with the fine cells region. Then a possible improvement of parallel efficiency could be to first compute the predictor step in the intermediate zone, then communicate in order to allow a concurrent computation of (the rest of, with some overlapping) the predictor step together with the corrector step (to be concentrated on a very few processors). \square

4 Applications

The multirate algorithm is implemented into the parallel (MPI) CFD code AIRONUM shared by INRIA Sophia-Antipolis, LEMMA company and University of Montpellier. A description of this tool, which solves with a mixed element/volume method on unstructured meshes the compressible Euler and Navier-Stokes equations possibly equipped with a turbulence model, can be found in [22] and [16].

4.1 Contact discontinuity

In this first example, we consider the case of a moving contact discontinuity. For this purpose, the compressible Euler equations are solved in a rectangular parallelepiped as computational domain where the density is initially discontinuous at its middle (see Figure 2) while velocity and pressure are uniform.

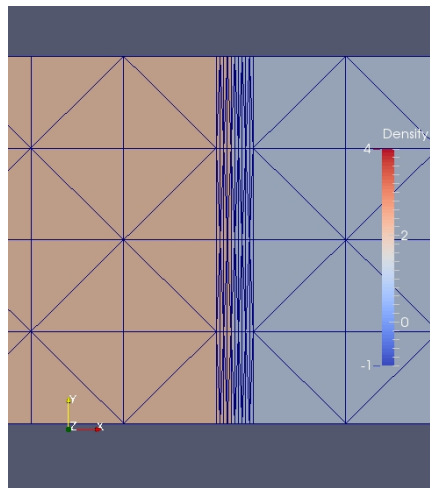


Fig. 2 ALE calculation of a traveling contact discontinuity. Instantaneous mesh with mesh concentration in the middle of zoom and corresponding advected discontinuous fluid density.

The uniform velocity is a purely horizontal one. As can be seen in Figure 2, small cells are present on either side of the discontinuity. The mesh moves during the computation in such a way that the nodes located at the discontinuity are still the same, and that the number of small cells are equally balanced on either side of the discontinuity. An Arbitrary

K	CPU explicit (s/ Δt /node)	$N^{small}(K)/N$ (%)	Expected gain (scalar)	CPU pred. phase (s/ $K\Delta t$)	CPU correc. phase (s/ $K\Delta t$)	Measured gain (parallel)
5	$4.96 \cdot 10^{-6}$	1.3	4.7	0.124	0.244	1.7
10	$4.96 \cdot 10^{-6}$	1.3	8.8	0.124	0.482	2.0
15	$4.96 \cdot 10^{-6}$	1.3	12.5	0.124	0.729	2.2

Table 1 ALE propagation of a contact discontinuity: Time step factor K , CPU of the explicit scheme per explicit time-step Δt and per node, percentage of nodes in the inner region, theoretical gain in scalar mode, CPU of the prediction phase per time-step $K\Delta t$, CPU of the correction phase per time-step $K\Delta t$, and measured parallel gain.

Lagrangian-Eulerian formulation is then used to solve the Euler equations on the resulting deforming mesh. Our long term objective is to combine the multirate time advancing with a mesh adaptation algorithm in such a way that the small time steps imposed by the necessary good resolution of the discontinuity remain of weak impact on the global computational time.

The mesh used in this simulation contains 25000 nodes and 96000 tetrahedra. The computational domain is decomposed into 2 subdomains. When integer K , used for the definition of the inner and outer zones, is set to 5, 10 and 15, the percentage of nodes located in the inner zone is always 1.3%, which corresponds to the vertices of the small cells located on either side of the discontinuity.

The multirate scheme with the aforementioned values of K , as well as a 4-stage Runge-Kutta method, are used for the computation. Each simulation was run on 2 cores of a Bullx B720 cluster. In Table 1, CPU times (prediction phase / correction phase) are given for the multirate approach and different time step factors K . An improvement in the efficiency of about 1.7, 2.0 and 2.2 is observed when K is set to 5, 10 and 15, respectively. Though a gain up to 2.2 is reached, the small number of inner nodes, leading to a poor computation/communication ratio in the correction phase, can explain that the obtained gain is rather moderate when compared to the scalar theoretical case.

4.2 Tandem cylinders

Our main study concerning the application of multirate is the calculation of a flow around a tandem cylinders at Reynolds number 1.66×10^5 . This was a test case of an AIAA workshop, see [20]. It is a challenging computation since several complex flow features need to be captured around multiple bodies (stagnation zones, boundary layers, shear layers, separations, laminar-turbulent transition, recirculations, vortex sheddings, wakes). Furthermore, small cells are necessary for a proper prediction of the very thin boundary layers, which implies very small global time steps so that classical explicit calculations become very costly. The application of our multirate scheme to the tandem cylinders benchmark is also made more difficult by the fact that we use a hybrid turbulence model based on RANS and VMS-LES approaches [16], so that additional equations associated with turbulent variables need to be advanced in time.

In order to illustrate the quality of resolution, the Q-criterion isosurfaces are shown in Figure 5. It shows the complex flow features and the very small structures that need to be captured by the numerical model and the turbulence model, which renders this simulation particularly challenging. Further information concerning the comparison between computation and experiments are available in [16].

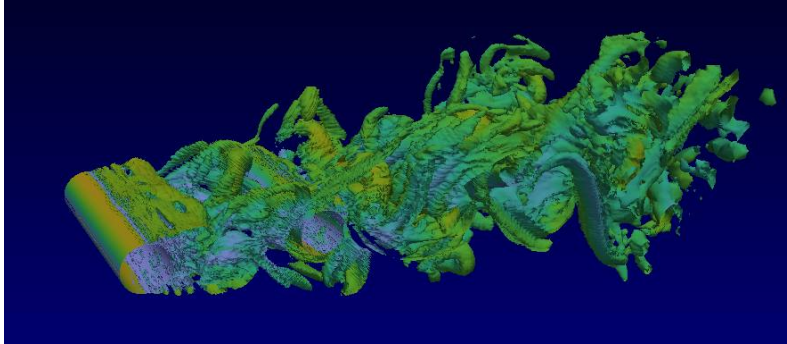


Fig. 3 Tandem cylinders - coarse mesh : instantaneous Q-criterion isosurfaces.

Two meshes were used for this study : a coarse mesh which contains 2.6 million nodes and 15 million tetrahedra, and a fine mesh with 16 million nodes and 96 million tetrahedra. For both meshes, the smallest cell thickness is $1.2 \cdot 10^{-4}$.

– Coarse mesh

The computational domain is decomposed into 192 subdomains. The CFL number is set to 0.5 for the explicit and multirate computations. When integer K , used for the definition of the inner and outer zones, is set to 2, 5 and 10, the percentage of nodes located in the inner zone is 4%, 16% and 25%, respectively.

CPU times (prediction phase / correction phase) are given in Table 2 for the multirate approach and different time step factors K . For this test case, the multirate scheme is not very efficient due to a too costly correction phase (a large number of inner nodes not equally distributed among the subdomains). It is also true that the theoretical scalar gain is rather small. One can notice that with an implicit simulation and a CFL number set to 30, the gain is large compared to the explicit option. However, the accuracy is degraded with the implicit approach compared to the multirate option (see the relative error in Table 2 and Figure 4).

K	CPU explicit (s/ Δt /node)	$N^{small}(K)/N$ (%)	Expected gain (scalar)	CPU pred. phase (s/ $K\Delta t$)	CPU cor. phase (s/ $K\Delta t$)	Measured gain (parallel)	Error (%)
2	$3.5 \cdot 10^{-7}$	4	1.85	0.92	0.86	1.03	$1.67 \cdot 10^{-5}$
5	$3.5 \cdot 10^{-7}$	16	2.77	0.92	4.10	0.92	$2.57 \cdot 10^{-5}$
10	$3.5 \cdot 10^{-7}$	25	2.86	0.92	8.48	0.98	$7.67 \cdot 10^{-4}$
Implicit						53	$2.5 \cdot 10^{-1}$

Table 2 Tandem cylinder - coarse mesh: Time step factor K , CPU of the explicit scheme per explicit time-step Δt and per node, percentage of nodes in the inner region, theoretical gain in scalar mode, CPU of the prediction phase per time-step $K \Delta t$, CPU of the correction phase per time-step $K \Delta t$, measured parallel gain, and relative error.

– Fine mesh

The computational domain is decomposed into 768 subdomains, and as many cores on a Bullx cluster were used to perform these computations. When integer K , used for the definition of the inner and outer zones, is set to 5, 10 and 20, the percentage of nodes located in the inner zone is 18%, 24% and 35%, respectively (see Table 3).

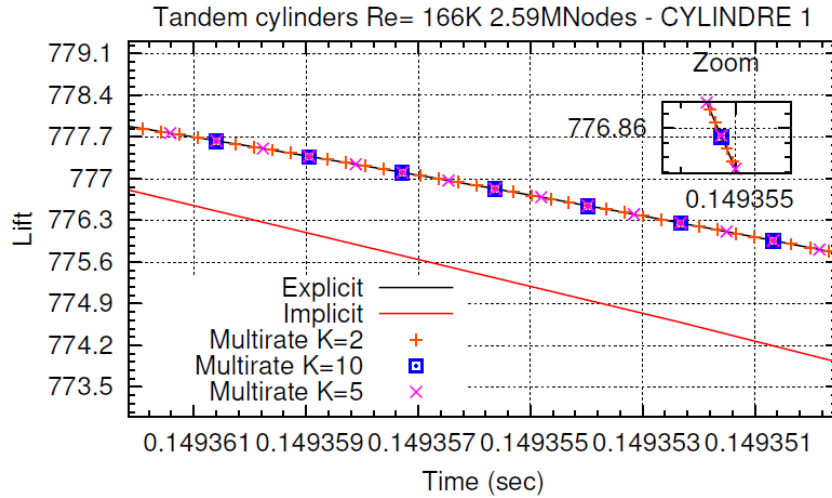


Fig. 4 Tandem cylinder - coarse mesh : zoom of the lift curves obtained with explicit, implicit and multirate schemes for the first cylinder.

The CPU times for the explicit and multirate schemes are shown in Table 3. As for the coarse mesh and for the same reason, the multirate option turns out to be not very efficient. Again, the theoretical scalar gain is rather small in this case (see Table 3).

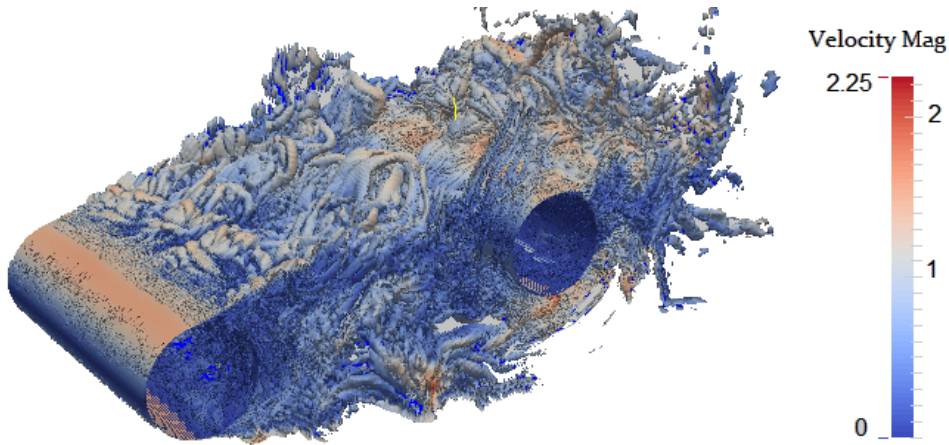


Fig. 5 Tandem cylinders - fine mesh : instantaneous Q-criterion isosurfaces. (coloured with velocity modulus).

4.3 Circular cylinder at very high Reynolds number

The third application concerns the simulation of the flow around a circular cylinder at Reynolds number 8.4×10^6 . As for the previous benchmark, the computational domain is made of small cells around the body in order to allow a proper representation of the very thin boundary layer that occurs at such a high Reynolds number. On the other hand, the same hybrid RANS/VMS-LES model as that of the previous benchmark is used to compute this flow, which implies again that both the fluid and turbulent variables need to be advanced by the time integration

5.3. A Volume-agglomeration explicit multirate approach

12

K	CPU explicit (s/ Δt /node)	$N^{small}(K)/N$ (%)	Expected gain (scalar)	CPU pred. phase (s/ $K\Delta t$)	CPU cor. phase (s/ $K\Delta t$)	Measured gain (parallel)
5	10^{-7}	18	2.63	1.55	6.93	0.91
10	10^{-7}	24	2.94	1.52	14.15	0.99
20	10^{-7}	35	2.50	1.53	28.94	1.02

Table 3 Tandem cylinder - fine mesh: Time step factor K , CPU of the explicit scheme per explicit time-step Δt and per node, percentage of nodes in the inner region, theoretical gain in scalar mode, CPU of the prediction phase per time-step $K\Delta t$, CPU of the correction phase per time-step $K\Delta t$, and measured parallel gain.

scheme, and therefore also the multirate method. Figure 6 depicts the Q-criterion isosurfaces and shows the very small and complex structures that need to be captured by the numerical and the turbulence models, which renders this simulation very challenging.

The mesh used in this simulation contains 4.3 million nodes and 25 million tetrahedra. The smallest cell thickness is $2.5 \cdot 10^{-6}$. The computational domain is decomposed into 768 subdomains. When integer K , used for the definition of the inner and outer zones, is set to 5, 10 and 20, the percentage of nodes located in the inner zone is 15%, 19% and 24%, respectively (see Table 4).

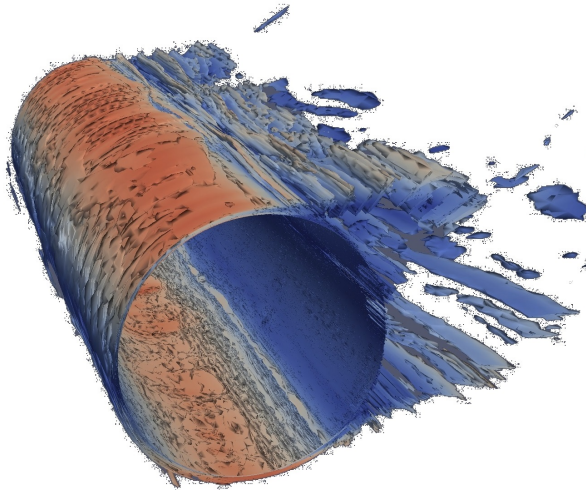


Fig. 6 Circular cylinder at Reynolds number 8.4×10^6 : instantaneous Q-criterion isosurfaces (coloured with velocity modulus).

The explicit scheme is the 4-stage Runge-Kutta method. For each simulation, 768 cores were used on a Bullx B720 cluster, and the CFL number was set to 0.5. CPU times for the explicit and multirate schemes with different values of K are given in Table 4. One can observe that the efficiency of the multirate approach is rather moderate, probably less than 1%. The cost of the correction phase is indeed relatively high compared to the prediction phase. This is certainly due to an important number of inner nodes (which implies also a moderate theoretical scalar gain) and a non uniform distribution of these nodes among the computational cores. An implicit simulation, with a CFL number set to 30, was also performed. An impor-

K	CPU explicit (s/ Δt /node)	$N^{small}(K)/N$ (%)	Expected gain (scalar)	CPU pred. phase (s/ $K\Delta t$)	CPU cor. phase (s/ $K\Delta t$)	Measured gain (parallel)	Error (%)
5	$8.4 \cdot 10^{-8}$	15	2.86	0.39	1.53	1.02	$4.4 \cdot 10^{-4}$
10	$8.4 \cdot 10^{-8}$	19	3.45	0.39	3.12	1.11	$7.8 \cdot 10^{-4}$
20	$8.4 \cdot 10^{-8}$	24	3.45	0.39	6.24	1.18	$2.6 \cdot 10^{-3}$
Implicit						12.12	1.0

Table 4 Circular cylinder: Time step factor K , CPU of the explicit scheme per explicit time-step Δt and per node, percentage of nodes in the inner region, theoretical gain in scalar mode, CPU of the prediction phase per time-step $K\Delta t$, CPU of the correction phase per time-step $K\Delta t$, measured parallel gain, and relative error.

tant gain is observed compared to the multirate case, but at the cost of a notable degradation of the accuracy (see Table 4 and Figure 7) .

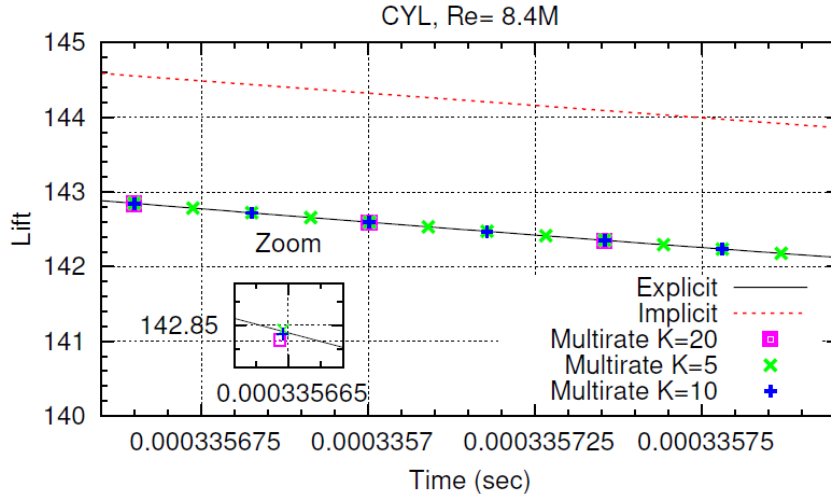


Fig. 7 Circular cylinder at Reynolds number 8.4×10^6 : zoom of the lift curves obtained with explicit, implicit and multirate schemes.

4.4 Spatial probe

The last case is the supersonic flow around a probe model for Exomars (see for example [12]). The Reynolds number is 1 million with respect to probe diameter. Delicate features in this simulation are a separation arising on a highly curved wall and relatively large recirculation zone at afterbody. Hybrid RANS-LES calculation brings more information than pure RANS does. The mesh involves 4.38 million nodes, 26 million tetrahedra, and the smallest mesh thickness is 2.10^{-5} . A sketch of this flow is presented in Figure 8. The gain in efficiency varies from 2.93 with $K = 10$ and 56 cells in the inner zone to a maximum of 3.82 with $K = 40$ and 151 cells in the inner zone (located in the high curvature region of the boundary layer where few very small cells are present). For $K = 40$, only 15 subdomains have inner cells (mean number 15 inner cells). On the other hand, the impact of the multirate approach on accuracy is very low compared to the implicit case, even for $K = 40$ which corresponds to an effective CFL number of 20 (see Table 4.4 and Figure 9).

5.3. A Volume-agglomeration explicit multirate approach

14

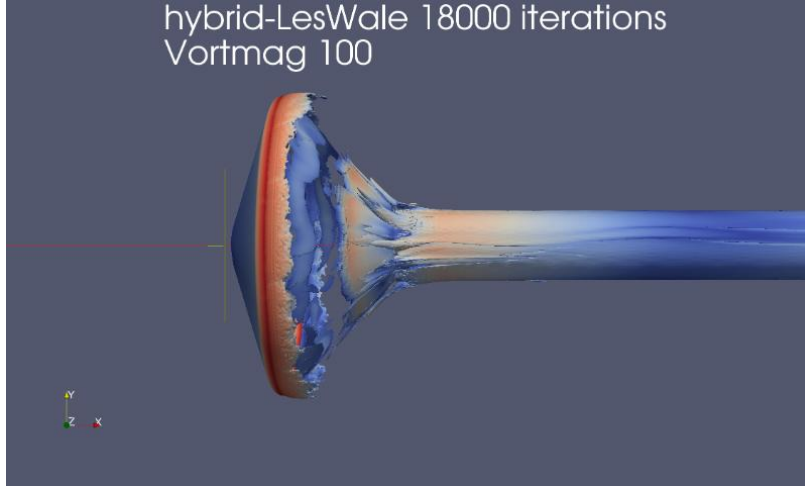


Fig. 8 Flow around a probe model at Reynolds number 1 million. Q criterion.

K	CPU explicit (s/ Δt /node)	$N^{small}(K)/N$ (%)	Expected gain (scalar)	CPU pred. phase (s/ $K\Delta t$)	CPU cor. phase (s/ $K\Delta t$)	Measured gain (parallel)	Error (%)
10	$4.13 \cdot 10^{-7}$	0.015	8.69	1.81	4.36	2.93	$1 \cdot 10^{-5}$
40	$4.13 \cdot 10^{-7}$	0.040	15.38	1.83	17.35	3.82	$1.6 \cdot 10^{-4}$
Implicit						36.88	$2 \cdot 10^{-2}$

Table 5 Spatial probe: Time step factor K , CPU of the explicit scheme per explicit time-step Δt and per node, percentage of nodes in the inner region, theoretical gain in scalar mode, CPU of the prediction phase per time-step $K\Delta t$, CPU of the correction phase per time-step $K\Delta t$, measured parallel gain, and relative error.

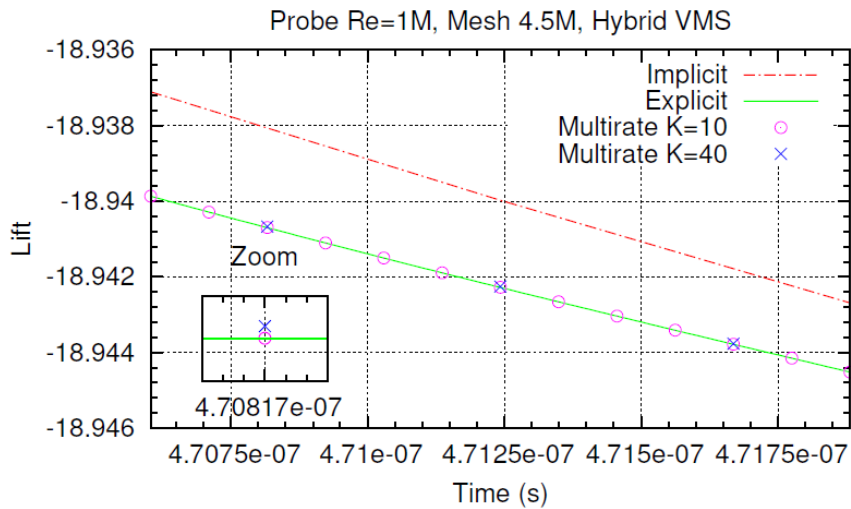


Fig. 9 Spatial probe : zoom of the lift curves obtained with explicit, implicit and multirate schemes.

4.5 Numerical experiments with a constrained partition

In this section we use a multi-constrained partitioning described in [17] and included in the METIS library.

The motivation of multi-constrained partitioning is to produce a partition which is quasi op-

Test case	Mesh size (vertices)	nproc	K	Measured gain (usual partition)	Measured gain (MCP)
Single cylinder Re=8.4M	4.3M	384	20	1.18	1.51
Tandem cylinder Re=166K	2.59M	192	20	1.2	1.29
Tandem cylinder Re=166K	16M	192	20	not computed	1.77
Tandem cylinder Re=166K	16M	768	20	1.02	2.0

Table 6 Gains obtained by parallel multirate simulations using usual partitions and parallel multirate simulations using multi-constrained partitions (noted MCP), when compared to the parallel explicit simulations using the same partitions.

timal for the several steps of the parallel MPI multirate algorithm of the considered code.

The two constraints in our case are:

- balance the predictor phase applying to the whole mesh,
- balance the corrector phase applying to the inner-nodes submesh

New multi-constrained partition have been built for the cylinder and the tandem problems using the METIS library. Table 6 shortly presents the main output of this new series of computations. Better parallel gains, when compared to the explicit scheme on the same partitions, are observed with the multirate method on multi-constrained partitions. However, it should be noted that we could not obtain a perfect partition on the considered meshes which would have allowed for an equally shared workload between the computational cores for both the predictor step and the correction step.

5 Conclusion

A new simplified multirate strategy for unstructured finite volume CFD is proposed in this work. The motivation of this research is two folds. The first motivation is related to the computation of high Reynolds number flows. Hybrid turbulence simulations with Reynolds numbers ranging from hundreds of thousands to millions can be computed with implicit time advancing methods in order to maintain a reasonable computational cost. But in many cases this is achieved with an important degradation of the accuracy with respect to computations based on smaller time steps on the same mesh. The second motivation is related to the arising of novel anisotropic mesh adaptation methods. The complexity of computations with large and very small cells in a mesh needs to be mastered with new methods. Now, since the average hybrid turbulence algorithm is already very complex, it is important to develop multirate methods which are simple and for which the programming into existing CFD is only slightly intrusive. The proposed method is based on control volume agglomeration, and relies on a prediction step where large time steps are used and where the fluxes for the smaller elements are evaluated on macro-cells for stability purpose. A correction step follows in which only the smaller elements are advanced in time with a small time step. The modifications in an existing explicit unstructured code, required by the implementation of such a multirate algorithm, demand little effort. Preliminary interesting results are given. They show that the proposed multirate strategy can be applied to complex unsteady CFD problems such as the prediction of three-dimensional flows around bluff bodies with an hybrid RANS/LES turbulence model.

Simulations, representative of problems that can be encountered in industrial applications, up to a Reynolds number as high as 8.4 million, are performed. For the considered flow calculations, the fully explicit option is still usable but of high computational cost. We observed that the proposed multirate strategy offers a really superior efficiency when the number of inner nodes, associated with very small cells in the mesh, is rather moderate. Thanks to the use of an explicit Runge- Kutta time advancing, the time accuracy of the multirate scheme remains high and the dissipation remains low, by comparison with an implicit computation. Only very small time-scales are lost with respect to a pure explicit computation.

The case of a simplified mesh adaptive calculation is also studied. Due to its simplicity, the proposed method can be easily extended to several multirate layers corresponding to different time step stability regions in order to separate, for example in the case of three layers, very small scales from intermediate ones, and intermediate scales from larger ones.

In a first series of numerical experiments, CPU gains are obtained with a usual mesh partition. We also performed calculations using a particular partition constrained by the balancing of both global mesh and inner nodes submesh. Ideally, the workload should be equally shared for both Step1 (prediction phase) and Step2 (correction phase) of the multirate algorithm. However, we could not obtain such an ideal partition with our meshes. Further work on partitioning is probably necessary to get perfectly balanced workloads without too large communication times.

In summary, the proposed multirate method is easy to program into a complex CFD code, is very stable in practice and the loss of accuracy with respect to an explicit scheme is very low, in contrast to implicit BDF2-based calculations, although we applied the implicit scheme with a CFL of 30, not much larger than with the multirate calculation (CFL= 10 for $K = 20$ in our simulations). Implicit accuracy is limited not only by the intrinsic scheme accuracy but also by the conditions required to achieve greater efficiency which involve a sufficiently large time-step and a short, parameter dependant, convergence of the linear solver performed in the time advancing step. In contrast, explicit and multirate computations are parameter safe, and the accuracy of the multirate method is optimal in regions complementary to the inner zone, that is, in our vortex shedding flow simulations, where it can be necessary to propagate accurately vortices, for example from the first cylinder to the second one in the case of the tandem cylinders. A future work will assess the effect of the better accuracy provided by the multirate scheme on vortex propagation in LES and hybrid turbulence simulations.

References

1. J.F. Andrus. Numerical solution of systems of ordinary differential equations separated into subsystems. *SIAM J. Numerical Analysis*, 16(4), 1979.
2. J.F. Andrus. Stability of a multi-rate method for numerical integration of ODE's. *Computers Math. Applic.*, 25, No 2:3–14, 1993.
3. F. Angrand and A. Dervieux. Some explicit triangular finite element schemes for the Euler equations. *Int. J. for Numer. Methods in Fluids*, 4:749–764, 1984.
4. A. Belme, A. Dervieux, and F. Alauzet. Time accurate anisotropic goal-oriented mesh adaptation for unsteady flows. *J. Comput. Phys.*, 239:6323–6348, 2012.
5. M. J. Berger and P. Colella. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 82:64–84, 1989.
6. E. Constantinescu and A. Sandu. Multirate timestepping methods for hyperbolic conservation laws. *J. sci. Comp*, 33(3):239–278, 2007.

7. C. Engstler and C. Lubich. Multirate extrapolation methods for differential equations with different time scales. *Computing*, 58:173–185, 1997.
8. C. Engstler and C. Lubich. Mur8: a multirate extension of the eight-order Dormer-Prince method. *Applied Numerical Mathematics*, 25:185–192, 1997.
9. C.W. Gear and D.R. Wells. Multirate linear multistep methods. *BIT*, pages 484–502, 1984.
10. M.B. Giles. Energy stability analysis of multi-step methods on unstructured meshes. *CFDL Report 87-1, MIT Dept. of Aero. and Astro.*, 1987.
11. M.B. Giles. Stability analysis of a Galerkin/Runge-Kutta Navier-Stokes discretisation on unstructured tetrahedral grids. *Journal of Computational Physics*, 132(2):201–214, 1997.
12. A. Guelhan, J. Klevanski, and S. Willems. Experimental study of the dynamic stability of the exomars capsule. In: *Proceedings of 7th European Symposium on Aerothermodynamics. ESA Communications. 7th European Symposium on Aerothermodynamics, 9.-12. Mai 2011, Brugge, Belgium*, 2011.
13. M. Günther, A. Kvaerno, and P. Rentrop. Multirate partitioned Runge-Kutta methods. *BIT*, 41(3):504–514, 2001.
14. M. Günther, A. Kvaerno, P. Rentrop, A. Guelhan, J. Klevanski, and S. Willems. Multirate partitioned Runge-Kutta methods. *BIT*, 38(2):101–104, 1998.
15. M. Günther and P. Rentrop. Multirate row methods and latency of electric circuits. *Applied Numerical Mathematics*, 13:83–102, 1993.
16. E. Itam, S. Wornom, B. Koobus, B. Sainte-Rose, and A. Dervieux. Simulation of multiple blunt-body flows with a hybrid variational multiscale model. *Conference on Modelling Fluid Flow (CMFF 15) The 16th International Conference on Fluid Flow Technologies Budapest, Hungary, September 1-4, 2015*.
17. G. Karypis and V. Kumar. Multilevel algorithms for multi-constraint graph partitioning. Internal Report 98-019, University of Minnesota, Department of Computer Science / Army HPC Research Center Minneapolis, MN 55455, 1998.
18. R. Kirby. On the convergence of high resolution methods with multiple time scales for hyperbolic laws. *Mathematics of Computation*, 72(243):129–1250, 2002.
19. B. Koobus, F. Alauzet, and A. Dervieux. Some compressible numerical models for unstructured meshes. In F. Magoulès, editor, *CFD Handbook*. CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, 2011.
20. D. Lockard. Summary of the tandem cylinder solutions from the benchmark problems for airframe noise computations-I. *Proceedings of Workshop AIAA-2011-35*, 2011.
21. R. Löhner, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. The use of domain splitting with an explicit hyperbolic solver. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 45:313–329, 1984.
22. C. Moussaed, M.V. Salvetti, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux. Simulation of the flow past a circular cylinder in the supercritical regime by blending rans and variational-multiscale les models. *Journal of Fluids and Structures*, 47:114–123, 2014.
23. P.R. Mugg. Construction and analysis of multi-rate partitioned Runge-Kutta methods. *Thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, California, June 2012*.
24. J. R. Rice. Split Runge-Kutta method for simultaneous equations. *Journal of Research of the National Bureau of Standards - B. Mathematics and Mathematical Physics*, 64B(3), 1960.
25. J. Sand and S. Skelboe. Stability of backward Euler multirate methods and convergence of waveform relaxation. *BIT*, 32:350–366, 1992.
26. A. Sandu and E. Constantinescu. Multirate explicit Adams methods for time integration of conservation laws. *J. Sci. Comp*, 38:229–249, 2009.

27. V. Savcenco, W. Hundsdorfer, and J.G. Verwer. A multirate time stepping strategy for stiff ordinary differential equations. *BIT*, 47:137–155, 2007.
28. B. Seny, J. Lambrechts, T. Toulorge, V. Legat, and J.-F. Remacle. An efficient parallel implementation of explicit multirate Runge-Kutta schemes for discontinuous Galerkin computations. *J. of Comp. Phys.*, 256:135–160, 2014.
29. S. Skelboe. Stability properties of backward differentiation multirate formulas. *Applied Numerical Mathematics*, 5:151–160, 1989.

Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse, mené au sein du laboratoire IMAG de l'université de Montpellier, est une contribution à la simulation numérique d'écoulements turbulents autour d'obstacles. L'objectif de ce travail a été de développer et de mettre en œuvre des méthodes de simulation performantes pour la prédiction d'écoulements turbulents massivement décollés et dominés par de grandes structures tourbillonnaires dans un but d'applications industrielles. Les études réalisées dans cette thèse portent à la fois sur le modèle de turbulence et le modèle numérique. Plus précisément, les contributions de cette thèse concernent le développement et l'évaluation d'une méthode hybride RANS/VMS-LES, d'une méthode hybride combinant les approches DDES et VMS-LES, ainsi qu'un schéma explicite multirate par agglomération de volumes finis.

Dans le Chapitre 1, nous avons commencé par décrire la physique des écoulements autour de cylindres circulaires et carrés. Il s'agit de cas tests, et ce d'autant plus pour le cylindre de section circulaire, que nous avons utilisés intensivement pour l'évaluation des modèles de turbulence de la famille LES ou hybrides développés et mis en œuvre dans notre code AIRONUM. Ces écoulements, de part la richesse et la complexité de leur physique, ont en effet des caractéristiques que l'on retrouve fréquemment dans les problèmes d'écoulement de type industriel que nous visons. D'autre part, ils sont aussi largement décrits et analysés dans la littérature. Les principales caractéristiques des écoulements turbulents sont aussi rappelées et une introduction au problème de la modélisation de la turbulence conclut ce chapitre.

Un des ingrédients importants pour la simulation des écoulements turbulents est le modèle numérique. Nous rappelons donc dans le Chapitre 2 les ingrédients numériques que nous utilisons dans nos simulations. Nous décrivons en particulier la discrétisation spatiale qui est fondée sur une formulation éléments finis/volume finis. Dans ce modèle, la dissipation du schéma discrétisant les termes hyperboliques est basée sur des dérivées sixièmes de façon à laisser agir au mieux la dissipation du modèle de turbulence tout en assurant la stabilité des calculs.

Un autre ingrédient qui joue de façon évidente un rôle primordial dans les simulations visées est le modèle de turbulence mis en œuvre. Dans le Chapitre 3, nous

rappelons les principales modélisations de la turbulence, à savoir les approches RANS, LES et hybride. Nous présentons aussi quelques modèles de turbulence, dans chacune des trois familles de modélisation, qui sont parmi les plus utilisés dans la littérature. Enfin, nous décrivons les modèles de turbulence développés et mis en œuvre dans nos simulations qui sont spécifiques à notre équipe et à nos collaborateurs : un modèle VMS-LES qui utilise une procédure par agglomération de volumes finis pour séparer petites et grandes échelles résolues, et une approche hybride qui combine un modèle $k - \epsilon$ avec le modèle VMS-LES. Il est à noter qu'une fonction dite « bouclier » (shielding function) a été introduite dans la fonction d'hybridation de notre modèle hybride avec l'objectif que le modèle RANS soit activé dans la couche limite et donc de réduire au mieux le phénomène de non coïncidence dans la zone logarithmique (« log-layer mismatch ») qui peut apparaître lorsque le modèle LES est utilisé dans la couche limite dans un calcul avec un modèle hybride. Pour ce qui est de la composante RANS, on a introduit la correction de Menter dans le modèle $k - \epsilon$ avec pour objectif de limiter la viscosité de turbulence, en particulier dans les zones de stagnation en amont des obstacles, et d'améliorer la prédiction des écoulements en présence de gradients de pression adverses qui s'opposent à l'écoulement dans la couche limite et qui caractérisent la majorité des cas tests présentés dans ce mémoire. Enfin, une nouvelle approche hybride qui combine DDES et VMS-LES est proposée à la fin de ce chapitre.

Le chapitre 4 est consacré aux applications de nos modèles de turbulence VMS-LES et hybrides à la simulation d'écoulements turbulents autour de différentes géométries : cylindre circulaire - cylindre carré - cylindres en tandem - cylindre de section rectangulaire 5 :1.

Dans une première étude, nous avons évalué l'impact de la procédure dynamique du modèle de sous-maille dans les approches VMS-LES et hybride RANS/VMS-LES pour la simulation d'écoulements autour de cylindres seuls et de cylindres en tandem. Nous avons pu vérifier que dans l'approche hybride RANS/VMS-LES, la combinaison du modèle de sous-maille dynamique et du modèle VMS-LES, qui sont complémentaires dans leurs effets puisque le premier ajuste spatialement (et temporellement) la constante du modèle alors que le second repose sur une bande d'application fréquentielle de la viscosité de turbulence (les petites échelles résolues) - donne des résultats en bon accord avec les données expérimentales disponibles dans la littérature, et se compare favorablement aux résultats numériques d'autres équipes et en particulier à ceux obtenus avec l'approche DDES. On a observé que le comportement du modèle hybride RANS/VMS-LES est soit amélioré soit inchangé, selon le cas-test considéré, lorsque la procédure dynamique est introduite dans l'approche VMS-LES.

Dans un deuxième travail, et dans le but de développer un modèle de turbulence hybride qui bénéficie des qualités d'un modèle DDES tout en améliorant le comportement de ce modèle dans la zone de sillage, nous nous sommes in-

téressés au comportement d'un modèle hybride qui combine les modèles DDES et VMS-LES pour la simulation d'écoulements en régime sous-critique autour d'un cylindre circulaire. Bien que ces cas d'écoulements ne soient pas *a priori* favorables à l'utilisation d'un modèle hybride puisque la couche limite est de nature laminaire, nous avons pu observer le comportement satisfaisant des modèles hybrides DDES/VMS-LES et DDES dans le cas d'un nombre de Reynolds faible (3900) ou modéré (20000) du régime sous-critique, corroborant ainsi certains résultats de la littérature. En effet, il s'est avéré que la viscosité de turbulence introduite par le modèle RANS est suffisamment faible pour que ses effets soient négligeables pour les deux nombres de Reynolds considérés. On a pu aussi noter une amélioration des résultats avec l'approche hybride DDES/VMS comparativement au modèle DDES dans le cas du nombre de Reynolds modéré. Dans le cas du nombre de Reynolds plus élevé (140000) de la plage de régime sous-critique, nous avons eu confirmation que la couche limite est calculée comme turbulente par les modèles hybrides DDES/VMS-LES et DDES, entraînant une dégradation des résultats, même si la prédiction est meilleure avec l'approche hybride DDES/VMS. On a d'autre part pu vérifier que seule l'approche VMS-LES donne des résultats satisfaisants pour les trois nombres de Reynolds sous-critique considérés, cette méthode n'étant cependant pas applicable aux nombres de Reynolds élevés caractérisant le régime supercritique, contrairement aux modèles hybrides, dû à un coût CPU encore trop important sur les plateformes de calcul actuelles. Enfin, dans une troisième étude, et comme étape préliminaire avant de considérer des nombres de Reynolds plus élevés et de mettre en œuvre le modèle hybride RANS/VMS-LES, nous avons appliqué le modèle VMS-LES à la simulation d'écoulements autour d'un cylindre rectangulaire 5 :1 pour des nombres de Reynolds modérés. L'objectif était d'évaluer les performances du modèle VMS-LES sur ce cas-test qui représente des difficultés supplémentaires par rapport à un cylindre de section carrée. Nous avons pu observer que les premiers résultats obtenus sont en très bon accord avec les données expérimentales.

Le dernier chapitre commence par une revue des travaux importants sur les schémas d'avancement en temps multirate depuis le travail précurseur de Rice en 1960. La suite du chapitre est consacrée à une nouvelle méthode explicite multirate par agglomération de volumes finis que nous avons développée et mise en œuvre dans le code AIRONUM. Les simulations parallèles d'écoulements turbulents massivement décollés avec un modèle de turbulence hybride, qui ont été considérées dans les applications, ont montré les aptitudes de ce schéma multirate à pouvoir être appliqué à des calculs d'écoulements complexes instationnaires de type industriel. Deux cas de partitionnement de maillage ont été mis en œuvre, l'un classique (qui ne tient pas compte des spécificités du schéma multirate) et l'autre à deux contraintes dans le but de mieux distribuer la charge de travail entre les cœurs de calcul pour les différentes étapes de notre algorithme multirate (phase de prédiction et phase de correction). Dans les deux cas, le schéma

multirate a montré une efficacité supérieure au schéma explicite classique. Cependant, nous n'avons pas pu obtenir un partitionnement idéal de nos maillages qui permette une très bonne distribution de la charge de travail sur tous les sous-domaines pour chaque phase de notre schéma multirate tout en minimisant les communications entre les cœurs de calcul.

En perspectives, et concernant les aspects modélisation de la turbulence, il serait intéressant de mettre en œuvre dans la composante RANS du modèle hybride RANS/VMS-LES un modèle de transition de la turbulence afin de mieux prendre en compte ce phénomène physique qui apparaît fréquemment dans les problèmes d'écoulements autour de corps et dans les configurations industrielles. Ceci nous permettrait, par exemple, une meilleure prédiction de la courbe de *drag crisis* (chute de la traînée) pour le cas du cylindre circulaire, un problème qui reste très difficile pour les modélisations de turbulence actuelles. Il serait aussi intéressant de mettre en œuvre dans AIRONUM un modèle de type IDDES (voir chapitre 3) afin de l'évaluer sur les cas tests présentés dans ce mémoire et de le combiner avec l'approche VMS-LES comme on l'a fait avec le modèle DDES. L'approche IDDES a en effet la bonne propriété d'éviter le problème de non coïncidence dans la zone logarithmique (*log-layer mismatch*). Concernant les cas tests, nous envisageons de poursuivre l'étude commencée sur le cylindre rectangulaire 5 :1 avec le modèle VMS-LES en mettant en place des approches de turbulence hybrides. Pour ce qui est du modèle multirate proposé, une perspective intéressante serait de considérer plus de deux groupes multirate (i.e. des ensembles de nœuds qui partagent des caractéristiques comparables en termes de stabilité) afin d'augmenter l'efficacité du schéma. Un autre point sur lequel investiguer serait l'amélioration du partitionnement des maillages utilisés afin de mieux équidistribuer la charge de travail sur tous les cœurs de calcul, à la fois dans la phase de prédiction et dans la phase de correction de l'algorithme multirate proposé, tout en cherchant à minimiser les communications entre sous-domaines de calcul voisins.

Bibliographie

- [1] A. Al-Jamal and C. Dalton. Vortex induced vibrations using large eddy simulation at a moderate reynolds number. *Journal of Fluids and Structures*, 19 :73–92, 2004.
- [2] J. Allain, M. Braza, D. Faghani, and H. Persillon. The role of natural vortex dislocations in the transition to turbulence of the flow past a circular cylinder by dns. In : *P. Voke and N. D. Sandham and L. Kleiser. Symposium on Direct and Large Eddy Simulations, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, U.K. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, pages 347–357, 1999.
- [3] J. F. Andrus. Numerical solution of systems of ordinary differential equations separated into subsystems. *SIAM J. Numerical Analysis*, 16 No 4, 1979.
- [4] J. F. Andrus. Stability of a multi-rate method for numerical integration of ode's. *Computers Math. Applic.*, 25 No 2 :3–14, 1993.
- [5] B. S. Baldwin and T. J. Barth. A one-equation turbulence transport model for high reynolds number wall-bounded flows. *NASA TM-102947*, 1990.
- [6] T. J. Barth. Aspects of unstructured grids and finite volume solvers for the euler and navier-stokes equations. *Von Karman Institute Lecture Notes*, 1994.
- [7] G. K. Batchelor. *An introduction to Fluid Dynamics*. 1967.
- [8] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, and D. M. Causon. On the choice of wave speeds for the HLLC riemann solver. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(6) :1553–1570, 1997.
- [9] P. Batten, U. Goldberg, and S. Chakravarthy. Interfacing statistical turbulence closures with large-eddy simulation. *AIAA J*, 42(3) :485–492, 2004.
- [10] P. W. Bearman. On vortex shedding from a circular cylinder in the critical reynolds number regime. *J. of Fluid Mech.*, 37 :577–585, 1969.

-
- [11] H. M. Blackburn and R. D. Henderson. A study of two-dimensional flow past an oscillating cylinder. *J. of Fluid Mech.*, 385 :255–286, 1999.
- [12] R. Blevins. *Flow-Induced Vibration, deuxième édition*. 1990.
- [13] M. S. Bloor. The transition to turbulence in the wake of a circular cylinder. *J. of Fluid Mech.*, 19, pages 290–304, 1964.
- [14] I. Borazjani and F. Sotiropoulos. Vortex-induced vibrations of two cylinders in tandem arrangement in the proximity-wake interference region. *J. of Fluid Mech.*, 621 :321–364, 2009.
- [15] G. Bosch and W. Rodi. Simulation of vortex shedding past a square cylinder with different turbulence models. 28 :601–616, 1998.
- [16] J. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mém. prés. par div. savant à l'Acad. Sci.*, 23 :1–680, 1877.
- [17] M. Braza, P. Chassaing, and H. Ha-Minh. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *J. of Fluid Mech.*, 165 :79–130, 1986.
- [18] L. Bruno, M. V. Salvetti, and F. Ricciardelli. Benchmark on the aerodynamics of a rectangular 5 :1 cylinder : An overview after the first four years of activity. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, 126 :87–106, 2014.
- [19] B. Cantwell and D. Coles. An experimental study of entrainment and transport in turbulent near wake of a circular cylinder. *J. of Fluid Mech.*, 136, pages 321–374, 1983.
- [20] T. Cebeci and A. M. O. Smith. Analysis of turbulent boundary layers. *Academic Press.*, 5, 1974.
- [21] B. Chaouat. Modélisation et simulation des écoulements turbulents dans les propulseurs à propergol solide. *Note technique ONERA*, Mars 1995.
- [22] M. R. J. Charest, T. R. Canfield, N. R. Morgan, J. Waltz, and J. G. Wohlbiert. A high-order vertex-based central eno finite-volume scheme for three-dimensional compressible flows. *Computers and fluids*, 114 :172–192, 2015.
- [23] P. Chassaing. Turbulence en mécanique des fluides : analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur. 2000.
- [24] F. H. Clauser. The turbulent boundary layer. *Adv Appl Mech*, 4 :1–51, 1956.

BIBLIOGRAPHIE

- [25] D. Cokljat, D. Caradi, G. Link, R. Lechner, and F. R. Menter. Embedded les methodology for general-purpose cfd solvers. *Proc. Turbulent Shear Flow Phenomena, 6th Int. Symp. Turbulence and Shear Flow Phenomena. Seoul, Korea, 1191-1196, 22-24 June 2009.*
- [26] E. Constantinescu and A. Sandu. Multirate timestepping methods for hyperbolic conservation laws. *J. sci. Comp*, 33(3) :239–278, 2007.
- [27] V. D’Alessandro, S. Montelpare, and R. Ricci. Detached eddy simulations of the flow over a cylinder at $Re = 3900$ using OpenFOAM a low-diffusion MUSCL scheme for LES on unstructured grids. *Computers and Fluids*, 136 :152–169, 2016.
- [28] H. Dütsch, F. Durst, S. Becker, and H. Lienhart. Low-reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low keulegan-carpenter numbers. *J. of Fluid Mech.*, 360 :249–271, 1998.
- [29] C. Engstler and C. Lubich. Multirate extrapolation methods for differential equations with different time scales. *Computing*, 58 :173–185, 1997.
- [30] C. Engstler and C. Lubich. Mur8 : a multirate extension of the eight-order dormer-prince method. *Applied Numerical Mathematics*, 25 :185–192, 1997.
- [31] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Series*. Springer, New York, 2004.
- [32] R. Eymard, T. R. Gallouët, and R. Herbin. *On the choice of wavespeeds for the HLLC Riemann solve*The finite volume method *Handbook of Numerical Analysis*.
- [33] C. Farhat, A. Rajasekharan, and B. Koobus. A dynamic variational multiscale method for large eddy simulation on unstructured meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :1667–1667, 2006.
- [34] L. Fezoui and A. Dervieux. Finite-element non oscillatory schemes for compressible flows. In *Symposium on Computational Mathematics and Applications*, volume 730, Pavia, Italy, 1989.
- [35] J. Fontoura. Méthode de minimisation adaptée à la technique des éléments finis pour la simulation des écoulements avec conditions non linéaires de proche paroi. *Thèse Ecole Centrale de Lyon*, 1990.
- [36] J. Frohlich and D. Von Terzi. Hybrid les/rans methods for the simulation of turbulent flows. *Prog. Aerosp. Sci.*, 44(5) :349–377, 2008.

-
- [37] A. Garbaruk, M. L. Shur, M. Strelets, P. R. Spalart, and R. Balakrishnan. DDES and IDDES of tandem cylinders. In *Proceedings of the Benchmark problems for Airframe Noise Computations BANC*, volume anl-10/26. Argonne National Laboratory, 2010.
- [38] C. W. Gear and D. R. Wells. Multirate linear multistep methods. *BIT*, pages 484–502, 1984.
- [39] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, 3(7) :1760–1765, 1991.
- [40] J. Gerrard. The mechanics of the formation of vortices behind bluff bodies. *J. of Fluid Mech.*, 25 :401, 1966.
- [41] J. Gerrard. The wakes of cylindrical bluff bodies at low reynolds number. *Phil. Transactions of the Royal Soc. London, Series A*, 288(A1354) :351–382, 1978.
- [42] B. Goelling. Experimental investigations of separating boundary-layer flow from circular cylinder at reynolds numbers from 10^5 up to 10^7 ; three-dimensional vortex flow of a circular cylinder. In G.E.A. Meier and K.R. Sreenivasan, editors, *Proceedings of IUTAM Symposium on One Hundred Years of Bloundary Layer Research*, pages 455–462, The Netherlands, 2006. Springer.
- [43] U. Goldberg and D. Ota. A $k-\varepsilon$ near-wall formulation for separated flows. Technical Report 91–1482, AIAA 22nd Fluid Dynamics, Plasma Dynamics & Lasers Conference, June 1990.
- [44] U. Goldberg, O. Peroomian, and S. Chakravarthy. A wall-distance-free $k-\varepsilon$ model with enhanced near-wall treatment. *Journal of Fluids Engineering*, 120 :457–462, 1998.
- [45] N. Gourvitch, G. Rogé, I. Abalakin, A. Dervieux, and T. Kozubskaya. A tetrahedral-based superconvergent scheme for aeroacoustics. *INRIA Report, RR-5212*, 2004.
- [46] H. Guillard and C. Viozat. On the behaviour of upwind schemes in the low mach number limit. *Computers and Fluids*, 28 :63–86, 1999.
- [47] M. Günther, A. Kvaerno, and P. Rentrop. Multirate partitioned rungekutta methods. *BIT*, 38 No 2 :101–104, 1998.
- [48] M. Günther, A. Kvaerno, and P. Rentrop. Multirate partitioned rungekutta methods. *BIT*, 41 No 3 :504–514, 2001.
- [49] M. Günther and P. Rentrop. Multirate row methods and latency of electric circuits. *Applied Numerical Mathematics*, 13 :83–102, 1993.

- [50] New York Habitat. 1989-2017.
- [51] X. Han and S. Krajnović. An efficient very large eddy simulation of turbulent flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 71 :1341–1360, 2013.
- [52] J. O. Hinze. Turbulence. *McGraw-Hil New-Yorkl*, 1959.
- [53] E. Hofer. A partially implicit method for large stiff systems of odes with only few equations introducing small time-constants. *SIAM J. Numerical Analysis*, pages 645–666, 1976.
- [54] L. Huang, Y. Deng, and B. Wang. Flow simulation of suspension bridge cable based on lattice-boltzmann method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016 :7 pages, 2016.
- [55] T. J. R. Hughes, L. Mazzei, and K. E. Jansen. Large eddy simulation and the variational multiscale method. *Comput. Vis. Sci.*, 3 :47–59, 2000.
- [56] T. Igarashi. Characteristics of the flow around two circular cylinders arranged in tandem : 1st report. *Bulletin of JSME*, 24 :323–331, 1981.
- [57] @jackchilvers. Elements : the more the merrier? *Website : the Tame Aerodynamicist*, December 2014.
- [58] L. Jenkins, M. Khorrami, M. Choudhari, and C. McGinley. Characterization of unsteady flow structures around tandem cylinders for component interaction studies in airframe noise. *AIAA*, pages 2005–2812, 2005.
- [59] D. A. Johnson and L. S. King. A new turbulence closure model for boundary layer flows with strong adverse pressure gradients and separation. *AIAA Paper*, pages 84–0175, 1984.
- [60] W. P. Jones and B. E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15(2) :301–314, 1972.
- [61] N. G. Jorgensen, H. Koss, and J. C. Bennetsen. Embedded-les and experiment of turbulent boundary layer flow around a floor-mounted cube. *The Seventh International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics and Applications (BBAA7) Shanghai, China*, September 2-6, 2012.
- [62] G. E. Karniadakis and G. S. Triantafyllou. Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects. *J. of Fluid Mech.*, 238 :1–30, 1992.
- [63] H. Kim, J. Lee, J. Kim, and H. Choi. Characteristics of flow over a circular cylinder at $re_d = 140000$. *In Proceedings of the 8th international symposium on turbulence and shear flow phenomena (TSFP-8)*, 2013.

-
- [64] R. Kirby. On the convergence of high resolution methods with multiple time scales for hyperbolic laws. *Mathematics of Computation*, 72 Number 243 :129–1250, 2002.
- [65] A. N. Kolmogorov. Equations of turbulent motion of an incompressible turbulent fluid. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Phys. VI*, 1-2, 1942.
- [66] B. Koobus and C. Farhat. A variational multiscale method for the large eddy simulation of compressible turbulent flows on unstructured meshes-application to vortex shedding. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 193 :1367–1383, 2004.
- [67] A. Kourta, H. C. Boisson, P. Chassaing, and H. H. Minh. Nonlinear interaction and the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder. *J. of Fluid Mech.*, 181 :141, 1987.
- [68] S. G. Kovaszney. Structure of the turbulent boundary layer. *Phys. Fluids*, 10 :25–30, 1967.
- [69] A. G. Kravchenko and P. Moin. Numerical studies of flow over a circular cylinder at $re=3900$. *Phys. Fluids*, 12(2) :403–417, 2000.
- [70] E. Lamballais and J. H. Silvestrini. Direct numerical simulation of interactions between a mixing layer and a wake around a cylinder. *Journal of Turbulence*, 3, 2002.
- [71] J. Laufer. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. *N.A.C.A Technical report 2954*, 1954.
- [72] B. E. Launder and B. I. Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Trans.*, 1 :131–138.
- [73] B. E. Launder and D. B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer 21 Methods in Applied Mechanics and Energy*, 3 :269–289, 1974.
- [74] B. E. Launder and D. B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 3 :269–289, 1979.
- [75] B. E. Lee. The effect of turbulence on the surface pressure field of a square prism. *J. Fluid Mech.*, 69 :263–282, 1975.
- [76] P. Van Leer. Towards the ultimate conservative scheme. iv : A new approach to numerical convection. *J. Comp. Phys.*, 23 :276–299, 1977.
- [77] M. Lesieur and O. Métais. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 28 :45–82, 1996.

BIBLIOGRAPHIE

- [78] J. H. Lienhard. *Synopsis of lift drag and vortex frequency data for rigid circular cylinders*. 1966.
- [79] H. Lim and S. Lee. Flow control of circular cylinders with longitudinal grooved surfaces. *AIAA Paper*, 40(10) :2027-2035, 2002.
- [80] J. C. Lin, Y. Yang, and D. Rockwell. Flow past two cylinders in tandem : Instantaneous and averaged flow structure. *Journal of Fluids and Structures*, 16 (8) :1059–1071, 2002.
- [81] D. P. Lockard. Summary of the tandem cylinder solutions from the benchmark problems for airframe noise computations-i. In *Proceedings of Workshop AIAA-2011-353*, Jan 2011.
- [82] R. Löhner. *Applied CFD techniques. An introduction based on finite element methods*. John Wiley & Sons, Ltd, New York, 2001.
- [83] R. Löhner, K. Morgan, and O. C. Zienkiewicz. The use of doamin splitting with an explicit hyperbolic solver. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 45 :313–329, 1984.
- [84] S. C. Luo, X. H. Tong, and B. C. Khoo. Transition phenomena in the wake of a square cylinder. *J. of Fluids and Structures*, 23 :227–248, 2007.
- [85] D. A. Lyn, S. Einav, W. Rodi, and J-H. Park. A laser-doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder. *J. of Fluid Mech.*, 304 :285–319, 1995.
- [86] C. Mannini, A. Soda, R. Vob, and G. Schewe. Unsteady rans simulations of flow around a bridge section. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 98 (12) :742–753.
- [87] A. Mariotti, L. Siconolfi, and M. V. Salvetti. Stochastic sensitivity analysis of large-eddy simulation predictions of the flow around a 5 :1 rectangular cylinder. *European Journal of Mechanics - B/Fluids (ISSN : 0997-7546)*, 62 (3) :149–165.
- [88] R. Martin and H. Guillard. A second-order defect correction scheme for unsteady problems. *Comput. & Fluids*, 25(1) :9–27, 1996.
- [89] F. Menter, M. Kuntz, and R. Bender. A scale-adaptative simulation model for turbulent flow predictions. *AIAA paper*, 2003.
- [90] F. R. Menter. Influence of freestream values on $k - \omega$ turbulence model predictions. *A.I.A.A. J.*, 30(6) :1657–1659, 1992.
- [91] F. R. Menter. Zonal two-equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper 93-2906*, 1993.

-
- [92] F. R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA J.*, 32 :1598–1605, 1994.
- [93] F. R. Menter, A. Garbaruk, and P. Smirnov. Scale adaptive simulation with artificial forcing. *Proc. 3rd Symposium on Hybrid RANS-LES Methods*, 2009.
- [94] F. R. Menter and M. Kuntz. Adaptation of eddy-viscosity turbulence models to unsteady separated flows behind vehicles. *In Symposium on the aerodynamics of heavy vehicles : trucks, buses and trains (ed. Springer)*, pages 2–6.
- [95] P. Moin. Progress in large eddy simulation of turbulent flows. *AIAA pap.*, 97 :0749, 1997.
- [96] C. Moussaed. *Modèles variationnels dynamique et hybride pour la simulation numérique d'écoulements turbulents*. PhD thesis, Université Montpellier II, Montpellier, France, 2013. (in French).
- [97] C. Moussaed, M. V. Salvetti, S. Wornom, B. Koobus, and A. Dervieux. Simulation of the flow past a circular cylinder in the supercritical regime by blending RANS and variational-multiscale LES models. *Journal of Fluids and Structures*, 47 :114–123, 2014.
- [98] P. R. Mugg. Construction and analysis of multi-rat partitioned rungekutta methods. *Thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, California*, June 2012.
- [99] Bibliothèque nationale de France. 2015.
- [100] D. Neuhart, L. Jenkins, M. Choudhari, and M. Khorrami. Measurements of the flowfield interaction between tandem cylinders. *AIAA Paper*, 2009-3275, 2009.
- [101] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62 :183–200, 1999.
- [102] C. Norberg. Effects of Reynolds number and low-intensity free-stream turbulence on the flow around a circular cylinder. *Publ. No. 87/2, Department of Applied Thermosc. and Fluid Mech., Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden*, 1987.
- [103] C. Norberg. Ldv-measurements in the near wake of a circular cylinder. *In Advances in understanding of bluff body wakes and vortex-induced vibration, Washington, DC*, pages 1–12, 1998.

BIBLIOGRAPHIE

- [104] C. Norberg. Flow around circular cylinders : aspects of fluctuating lift. *Journal of Fluids and Structures*, 15 :459–469, 2001.
- [105] C. Norberg. Fluctuating lift on a circular cylinder : review and new measurements. *J. Fluids Struct.*, 17 :57–96, 2003.
- [106] AIAA Discussion Group on Benchmark Experiments and Computations for Airframe Noise. 4th AIAA workshop on benchmark problems for airframe noise computations (banc-IV). *Website : info.aiaa.org*, 2016.
- [107] Magazine Onera. La simulation du bruit du train d’atterrissage passe par la CFD. 2011.
- [108] L. Ong and J. Wallace. The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder. *Exp. Fluids*, 20 :441–453, 1996.
- [109] S. A. Orszag. Analytical theories of turbulence. *Journal of Turbulence*, 41(2) :363–386, 1970.
- [110] V. Papaioannou, D. K. P. Yue, M. S. Triantafyllou, and E. Karniadakis. Three-dimensionality effects in flow around two tandem cylinders. *J. of Fluid Mech.*, 558 :387–413, 2006.
- [111] P. Parnaudeau, J. Carlier, D. Heitz, and E. Lamballais. Experimental and numerical studies of the flow over a circular cylinder at reynolds number 3900. *Phys. Fluids*, 20(085101), 2008.
- [112] P. Parnaudeau, D. Heitz, E. Lamballais, and J. H. Silvestrini. Direct numerical simulations of vortex shedding behind cylinders with spanwise linear nonuniformity. *Journal of Turbulence*, 8, 2007.
- [113] U. Piomelli and E. Balaras. Wall-layer models for large-eddy simulations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34 :349–374, 2002.
- [114] J. P. Pontaza. Numerical simulations of riser vortex-induced vibrations. *Society of Naval Architects and Marine Engineers*, 113 :453–465, 2006.
- [115] L. Prandtl. Uber die ausgebildete turbulenz. *ZAMM*, 5 :136–139.
- [116] A. Prasad and C. H. K. Williamson. The instability of the shear layer separating from a bluff body. *J. of Fluid Mech.*, 333 :375–402, 1997.
- [117] A. Prasad and C. H. K. Williamson. A method for the reduction of bluff body drag. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 69-71 :155–167, 1997.
- [118] K. R. Reddy. A new formulation for delayed detached eddy simulation based on the smagorinsky les model. 2015.

-
- [119] P. Rentrop. Partitioned runge-kutta methods with stiffness detection and step-size control. *Numer. Mathematik*, 47 :545–564, 1985.
- [120] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *The Royal Society of London*, 174 :935–982, 1883.
- [121] O. Reynolds. On the dynamical theory of turbulent incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. R. Soc. London*, A 186 :123–161, 1894.
- [122] C. Le Ribault. Simulation des écoulements turbulents compressibles par une méthode mixte « éléments finis-volumes finis ». *Thèse Ecole Centrale de Lyon*, 1991.
- [123] J. R. Rice. Split runge-kutta method for simultaneous equations. *Journal of Research of the National Bureau of Standards - B. Mathematics and Mathematical Physics*, 64B, No3, 1960.
- [124] W. Rodi, J. H. Ferziger, M. Breuer, and M. Pourquié. Status of large eddy simulation : Results of a workshop. *J. Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 119 :248–262, 1997.
- [125] P. Roe. Approximate Riemann solvers parameters vectors and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 43 :357–372, 1981.
- [126] M. Rokyta and D. Kroëner. *Higher order finite volume method for convection dominated diffusion equation in 2D*, pages 62–70. Matfyzpress, Praha, 1997.
- [127] A. Roshko. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high reynolds number. *J. of Fluid Mech.*, 10 (3), pages 345–356, 1961.
- [128] J. C. Rotta. Statistische theorie nichthomogener turbulenz. *zeitschrift fur physik*. 129 :547–572, 1951.
- [129] P. Sagaut, S. Deck, and M. Terracol. *Multiscale and multiresolution approaches in turbulence*. 2006.
- [130] A. Saha, K. Muralidhar, and G. Biswas. Experiments in fluids. 29 :553, 2000.
- [131] E. Salvatici and M. V. Salvetti. Large-eddy simulations of the flow around a circular cylinder : effects of grid resolution and subgrid scale modeling. *Wind and Structures*, 6(6) :419–436, 2003.

BIBLIOGRAPHIE

- [132] J. Sand and S. Skelboe. Stability of backward euler multirate methods and convergence of waveform relaxation. *BIT*, 32 :350–366, 1992.
- [133] A. Sandu and E. Constantinescu. Multirate explicit adams methods for time integration of conservation laws. *J. Sci. Comp*, 38 :229–249, 2009.
- [134] V. Savcenco, W. Hundsdorfer, and J. G. Verwer. A multirate time stepping strategy for stiff ordinary differential equations. *BIT*, 47 :137–155, 2007.
- [135] G. Schewe. On the force fluctuations acting on a circular cylinder in cross-flow from subcritical up to transcritical reynolds numbers. *J. of Fluid Mech.*, 133 :265–285, 1995.
- [136] R. Schiestel. Modélisation et simulation des écoulements turbulents. *Traité des Nouvelles Technologies, série Mécanique, Hermès, Paris*, 1993.
- [137] H. Schlichting and K. Gersten. Boundary-layer theory. *McGraw-Hill Book Company*, pages 1–817, 1979.
- [138] B. Seny, J. Lambrechts, T. Toulorge, V. Legat, and J.-F. Remacle. An efficient parallel implementation of explicit multirate runge-kutta schemes for discontinuous galerkin computations. *JCP*, 256 :135–160, 2014.
- [139] W .C. L. Shih, C. Wang, D. Coles, and A. Roshko. Experiments on flow past rough circular cylinders at large reynolds numbers. *J. Wind Eng. Indust. Aerodyn.*, 49 :351–368, 1993.
- [140] M. L. Shur, P. R. Spalart, M. Kh. Strelets, and A. K. Travin. A hybrid rans-les approach with delayed-des and wall-modelled les capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29 :1638–1649, 2008.
- [141] S. Skelboe. Stability properties of backward differentiation multirate formulas. *Applied Numerical Mathematics*, 5 :151–160, 1989.
- [142] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 91(3) :99–164, 1963.
- [143] A. Sohankar, C. C. Norberg, and L. Davidson. Simulation of three dimensional flow around a square cylinder at moderate reynolds numbers. *Phys. FluidsA*, 11 :288–306, 1999.
- [144] A. Sohankar, C. Norberg, and L. Davidson. Low-reynolds-number flow around a square cylinder at incidence : study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. *Numerical methods in Fluids*, 26.
- [145] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. A one-equation turbulence model for for aerodynamics flows. *Technical Report AIAA-92-0439, AIAA*, 1992.

-
- [146] P. R. Spalart, S. Deck, M. Strelets, M. L. Shur, A. Travin, and K. D. Squires. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 20 :181–195, 2006.
- [147] P. R. Spalart, W-H. Jou, M. Strelets, and S. R. Allmaras. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. In C. Liu and Z. Liu, editors, *Advances in DNS/LES, 1st AFOESR Int. Conf. On DNS/LES, (1997), Ruston, LA*, pages 137–147. Greyden Press, Columbus, OH, 1997.
- [148] C. G. Speziale. Analytical methods for the development of reynolds-stress closures in turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23 :107–157, 1991.
- [149] J. L. Steger and R. F. Warming. Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic equations with applications to the finite difference methods. *J. Comp. Phys.*, 40(2) :263–293, 1981.
- [150] B. Stoufflet, J. Periaux, L. Fezoui, and A. Dervieux. Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite element. In *AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting, AIAA-1987-0560*, Reno, NV, USA, Jan 1987.
- [151] B. Sumer and J. Fredsoe. *Hydrodynamics around cylindrical structures*. 1997.
- [152] D. Sumner, M. D. Richards, and O. O. Akosile. Two staggered circular cylinders of equal diameter in cross-flow. *Journal of Fluids and Structures*, 20 :255–276, 2005.
- [153] G. Taylor. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. *Proc. R. Soc. Lond.Ser. A.*, 135 :685–702.
- [154] D. A. Terz, J. Froehlich, and W. Rodi. Hybrid techniques for large-eddy simulations of complex turbulent flows. *High Performance Computing in Science and Engineering*, 2008.
- [155] M. C. Thompson and K. Hourigan. The shear-layer instability of a circular cylinder wake. *Phys. Fluids*, 17(2) :021702 :1–4, 2005.
- [156] Offshore Energy Today. BMT’s riser monitoring system for aasta hansteen. 2014.
- [157] A. A. Townsend. The structure of the turbulent boundary layer. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 47 :375, 1951.
- [158] A. Travin, M. L. Shur, M. Strelets, and P .R. Spalart. Detached-eddy simulations past a circular cylinder. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63 :293–313, 1999.

BIBLIOGRAPHIE

- [159] A. Travin, M. L. Shur, M. Strelets, and P. R. Spalart. Physical and numerical upgrades in the detached–eddy simulation of complex turbulent flows. *In :412 EUROMECH Colloquium on LES of complex transitional and turbulent flows Munich*, 2000.
- [160] R. W. C. P. Verstappen and A. E. P. Veldman. Direct numerical simulation of turbulence at lower costs. *Journal of Engineering Mathematics*, 32 :143–159, 1997.
- [161] B. J. Vickery. Fluctuating lift and drag on a long cylinder of square cross–section in a smooth and in a turbulent stream. *Fluid Mech*, 25 :481–494, 1966.
- [162] M. Wang, P. Catalano, and G. Iaccarino. Prediction of high reynolds number the flow over a circular cylinder using les. Annual research briefs, Center for Turbulence Research, Stanford, 2001.
- [163] R. Weiner, M. Arnold, P. Rentrop, and K. Strehme. Partitioning strategies in runge-kutta type methods. *IMA J. of Numer. Analysis*, 13 :303–319, 1993.
- [164] M. Weinmann, R. D. Sandberg, and C. Doolan. Flow and noise prediction for a tandem cylinder configuration using novel hybrid rans/les approaches. *AIAA Paper*, 2010-3787, 2010.
- [165] E. W. Weisstein. Cylinder drag. *Wolfram Research*, 1996-2007.
- [166] D. C. Wilcox. Re-assessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA journal*, 26 no. 11 :1299–1310.
- [167] D. C. Wilcox. Turbulence modeling for cfd, 3rd edition. *DCW industries, California, USA*, 1993.
- [168] D. C. Wilcox. Simulation of transition with a two-equation turbulence model. *AIAA J*, 32 :247–254, 1994.
- [169] C. Williamson. The natural and forced formation of spot-like vortex dislocations in the transition of a wake. *J. Fluid Mech.*, 243 :393–442, 1992.
- [170] C. H. K. Williamson. The existence of two stages in the transition to threedimensionality of a cylinder wake. *Phys. Fluids*, 31,11, pages 3165–3168, 1988.
- [171] C. H. K. Williamson. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low reynolds number. *J. of Fluid Mech.*, 31(11) :3165–3168, 1988.

- [172] C. H. K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Ann. Rev. Fluid Mech*, 28 :477–539, 1996.
- [173] V. Yakhot and L. M. Smith. The renormalization group, the ϵ -expansion and derivation of turbulence models. *Journal of Scientific Computing*, 7 (1) :35–61, March 1992.
- [174] Y. Nakayama. *Introduction to Fluid Mechanics, 1st Edition*. 1998.
- [175] M. M. Zdravkovich. Review of flow interferences between two circular cylinders in various arrangements. *Journal of Fluids Engineering*, 99 :618–633, 1977.
- [176] M. M. Zdravkovich. Different modes on vortex shedding : an overview. *Journal of Fluids and Structures*, 10(5) :427–437, 1996.
- [177] M. M. Zdravkovich. *Flow around circular cylinders Vol 1 : Fundamentals*. Oxford University Press, 1997.

Simulation numérique d'écoulements autour de corps non profilés par des modèles de turbulence hybrides et un schéma multirate

Résumé : Ce travail est une contribution à la simulation numérique d'écoulements turbulents autour de corps non profilés. Après avoir précisé les ingrédients numériques et les modèles de turbulence utilisés dans nos simulations, nous présentons une étude sur l'évaluation des effets de la procédure dynamique des modèles de sous-maille dans un modèle VMS-LES et une approche hybride RANS/VMS-LES. Des problèmes d'écoulements autour d'un cylindre seul et en tandem sont considérés. Nous étudions ensuite le comportement de modèles de turbulence hybrides pour la simulation d'écoulements en régime sous-critique autour d'un cylindre circulaire. Le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre de section rectangulaire par l'approche VMS-LES est aussi présenté. Enfin, dans une dernière partie, après avoir fait une revue des travaux importants sur les schémas d'avancement en temps multirate, nous proposons une nouvelle approche explicite multirate par agglomération de volumes finis que nous appliquons à des calculs d'écoulements turbulents complexes en utilisant un modèle de turbulence hybride.

Mots-clés : Eléments finis/volumes finis, maillage non structuré, VMS-LES, modèles de turbulence hybrides, procédure dynamique, cylindres, cylindres en tandem, schéma multirate.

Numerical simulation of flows around bluff bodies with hybrid models and a multirate scheme

Abstract : This work is a contribution to the numerical simulation of turbulent flows around bluff bodies. After specifying the numerical ingredients and the turbulence models used in our simulations, we present a study on the impact of the dynamic sub-grid scale modeling in VMS-LES model and a RANS/VMS-LES hybrid turbulence approach. Simulations of flows around a cylinder and a tandem are performed. Next, we assess the behaviour of some hybrid turbulence models for the simulation of flows around a circular cylinder in the subcritical regime. The computation of the flow around a rectangular cylinder with the VMS-LES approach is also presented. At last, after a review of some important works on multirate time advancing schemes, we propose a new volume-agglomeration explicit multirate approach that is applied to the computation of complex turbulent flows by a hybrid turbulence model.

Keywords : Finite element/finite volume, unstructured grid, VMS-LES, hybrid turbulence model, dynamic procedure, cylinders, tandem cylinders, multirate scheme.

Emmanuelle ITAM