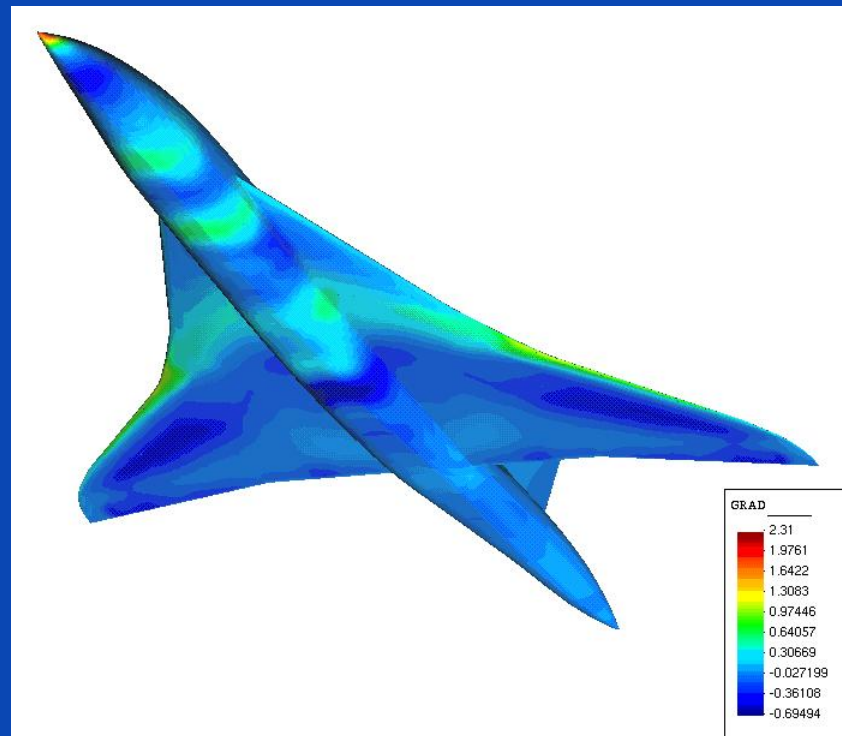


APPLICATION D'UN PRECONDITIONNEMENT MULTINIVEAU EN OPTIMISATION DE FORMES

François Courty, INRIA, Sophia-Antipolis

e-mail: `francois.courty@sophia.inria.fr`



- Quels préconditionneurs en opt. de formes?
- Préconditionnement multiniveau
- Application au bang sonique

Quels préconditionneurs en Optimisation de formes ?

$$u_{n+1} = u_n - \rho g_n$$

Quels préconditionneurs en Optimisation de formes ?

$$u_{n+1} = u_n - \rho B g_n$$

Quels préconditionneurs en Optimisation de formes ?

$$u_{n+1} = u_n - \rho B g_n$$

- Eliminer les hautes fréquences: Jameson, Mohammadi:

- Opérateur de Beltrami $B = (\mu Id - \Delta)^{-1}$

- Identifier la perte de régularité avec la transformée de Fourier du symbole du hessien: Arian - Ta'asan

- Si degré = 2: opérateur de Beltrami $B = (\mu Id - \Delta)^{-1}$

- Si degré = +1 ou - 1 : opérateur pseudo-différentiel Dirichlet-Neumann

Références: Arian, E. and Ta'asan, S., Analysis of the Hessian for aerodynamic optimization: Inviscid flow., Comput. Fluids, 28, 7, p.853-877, 1999

Mohammadi, B. and Pironneau, O., Applied shape optimization for fluids, Clarendon Press - Oxford, 2001

Optimisation de formes pour un problème de Dirichlet

Trouver le déplacement de frontière γ dans la direction normale:

$$\gamma = \text{ArgMin } J(Z); \Delta Z = 1 \text{ in } \Omega_\gamma; Z|_{\partial\Omega_\gamma} = 0$$

Formule de Hadamard avec déplacement normal:

$$\gamma \longmapsto \gamma - \rho \frac{\partial Z}{\partial n} \frac{\partial \Pi}{\partial n}$$

Application non bornée de C^k dans C^{k-1} .

Perte de un degré de régularité.

Références: Dervieux et Palmerio, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, Serie A, 1975, p. 1761-1764.

Murat et Simon, Sur le contrôle d'un domaine géométrique.

Publication 76015, Lab. d'Analyse Numérique, Univ. Paris 6, 1976.

Pironneau, Optimal shape design for elliptic systems, Springer-Verlag, 1984.

Formule de Hadamard formelle pour Euler: Perte de Régularité

$$\begin{aligned}
 j'(\gamma_0, \theta) &= - \int_{\partial\Omega_{\gamma_0}} \left(F(W) \frac{\partial \Pi}{\partial x} + G(W) \frac{\partial \Pi}{\partial y} + H(W) \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) (\vec{n} \cdot \vec{V}) \theta \, d\partial\Omega_{\gamma_0} \\
 &+ \int_{\partial\Omega_{\gamma_0}} (\nabla p \Pi + p \nabla \Pi) (\vec{n} \cdot \vec{V}) \theta \, d\partial\Omega_{\gamma_0} \\
 &+ \int_{\partial\Omega_{\gamma_0}} (\Pi_5 p + W_1 \Pi_1 + W_2 \Pi_2 + W_3 \Pi_3 + W_4 \Pi_4 + W_5 \phi_5) \frac{\partial q}{\partial \gamma} \delta \gamma \, d\partial\Omega_{\gamma_0}
 \end{aligned}$$

- Dérivées spatiales de la pression p
- Projections normales (dérivées spatiales du déplacement de la frontière γ)

Formellement, un degré de régularité est perdu à chaque itération

Référence: Beux, Dervieux, Exact-gradient shape optimization of a 2D Euler flow, Finite Elements in Analysis and Design, 12, p.281-302, 1992

II. Préconditionneurs multiniveaux additifs

$$(Au, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, f \text{ donné dans } V'.$$

$$V_1 \subset \cdots \subset V_k \subset \cdots \subset V$$

Pour tout $u \in V, v \in V_k, (Q_k u, v) = (u, v)$. **projecteur**

$$Cg = \sum_k^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{a+\epsilon}} \right)^k (Q_k g - Q_{k-1} g)$$

Propriétés: - a_{opt} = degré de l'opérateur.

- Si $a = a_{opt}$, alors la convergence est indépendante du maillage.
- C est borné de $H_0^s(\Omega)$ dans $H_0^{s+a}(\Omega)$
- CA est compact de $H_0^s(\Omega)$ dans $H_0^s(\Omega)$

Références: Bramble, Pasciak, and Xu, Parallel multilevel preconditioners, Math. Comput., 1990, 55, 191, p 1-22

Kunoth, PhD thesis, University of Berlin, 1994.

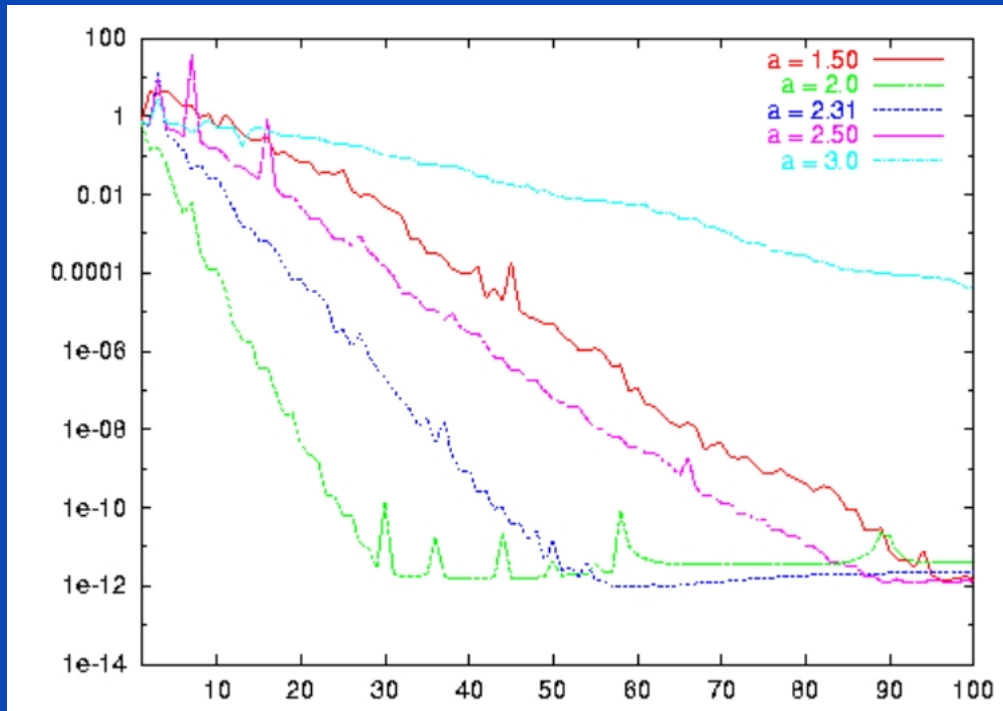
Courty, Dervieux, Multilevel Functional Preconditioning for Shape Optimization, à paraître.

Application à un problème modèle

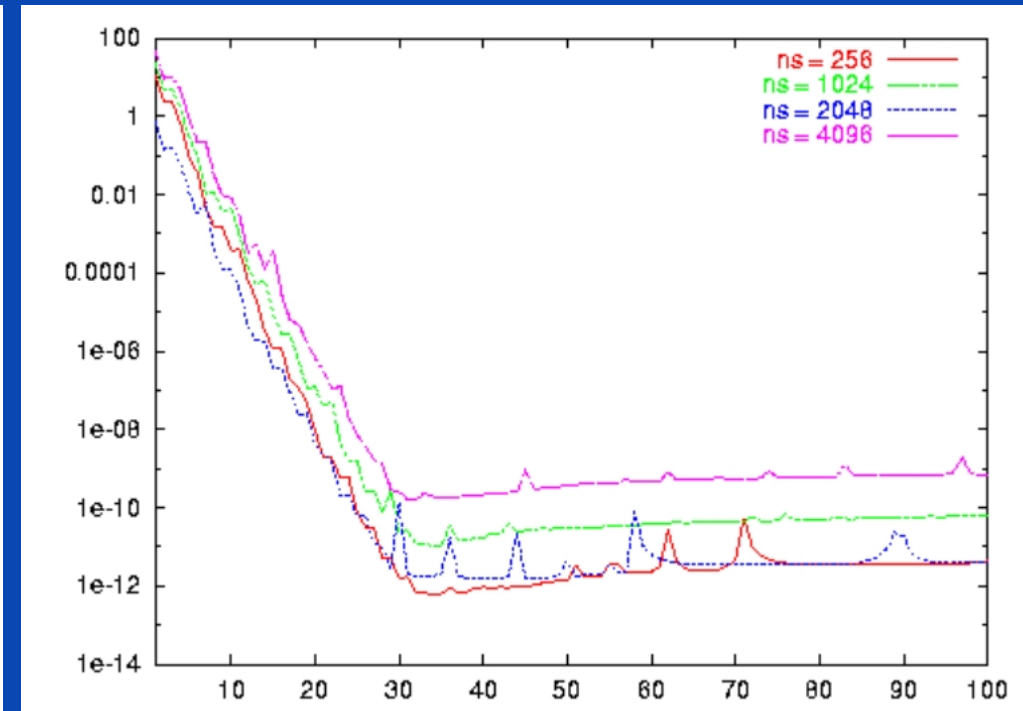
$$u_{opt} = \text{ArgMin} \frac{1}{2} \int (|\nabla u|^2 - fu) \, dv$$

Application à un problème modèle

$$u_{opt} = \text{ArgMin} \frac{1}{2} \int (|\nabla u|^2 - fu) dv$$

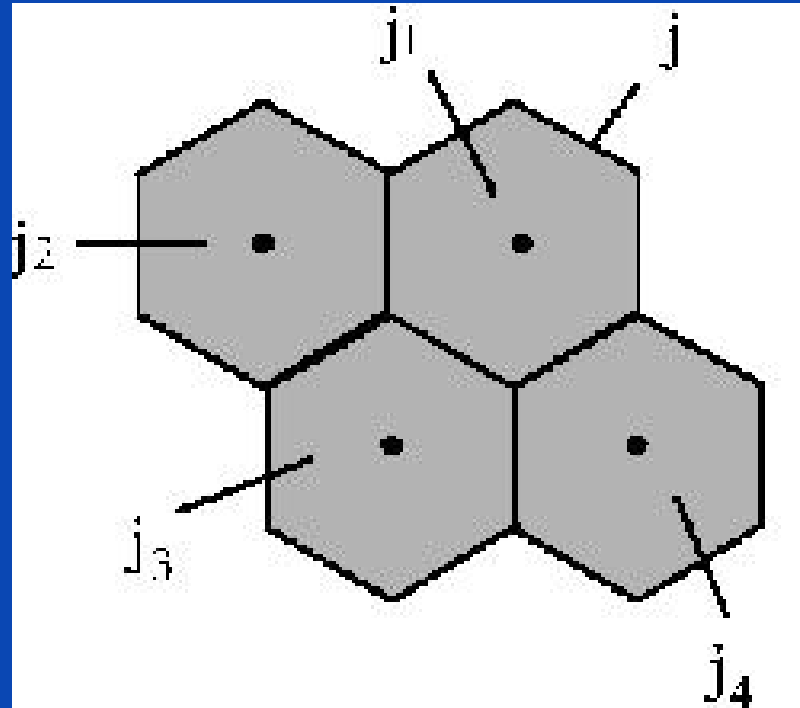


Vérification du a optimal



Convergence maillage indépendante

III. Principe de la méthode d'agglomération



4 volumes finis groupés en une unique macro-cellule

Références: Lallemand, Steve, Dervieux, Unstructured multigriding by volume agglomeration : current status, *Computer Fluids*, 21, 3, 397-433, 1992

Marco, Dervieux, Multilevel parametrization for aerodynamical optimization of 3D shapes, *Finite Elements in Analysis and Design*, 26, p. 259-277, 1997

Opérateurs de transfert et de lissage

\mathcal{P} : opérateur de prolongation d'un niveau grossier vers un niveau fin.

\mathcal{P}^* : opérateur de restriction d'un niveau fin vers un niveau grossier.

\mathcal{L} : opérateur de lissage (\mathcal{L}^* son transposé) défini par :

$$(\mathcal{L}u)_i = (1 - \theta)u_i + \theta \frac{\sum_{j \in \mathcal{V}(i) \cup \{i\}} Aire(j) u_j}{\sum_{j \in \mathcal{V}(i) \cup \{i\}} Aire(j)}$$

où j parcourt les cellules $\mathcal{V}(i)$ du voisinage de i ,

$Aire(j)$ est l'aire de chacune d'entre elles.

Construction du préconditionneur en non structuré

$$Q_k = \prod_{1 \leq m \leq k} \mathcal{L}_m \mathcal{P}_m \mathcal{P}_m^* \mathcal{L}_m^*$$

$$Cg = \sum_k^n \left(\frac{1}{2^{a+\epsilon}} \right)^k (Q_k g - Q_{k-1} g)$$

Référence: A. Dervieux, F. Courty, M. Vázquez, B. Koobus, "Additive multilevel optimization and its application to sonic boom reduction", Numerical Methods for Scientific Computing - JP60 Meeting, Variational Problems and Applications, Jyväskylä, Finland, June 14-15, 2002, to be published by CIMNE

Algorithme de gradient conjugué préconditionné (Polak-Ribière +)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et soit $g_0 = Ax_0 - b$, $d_0 = -h_0 = C^{-T}C^{-1}g_0$.

Pour $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\alpha_k = \frac{\langle g_k, h_k \rangle}{\langle d_k, Ad_k \rangle}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

$$g_{k+1} = g_k + \alpha_k Ad_k$$

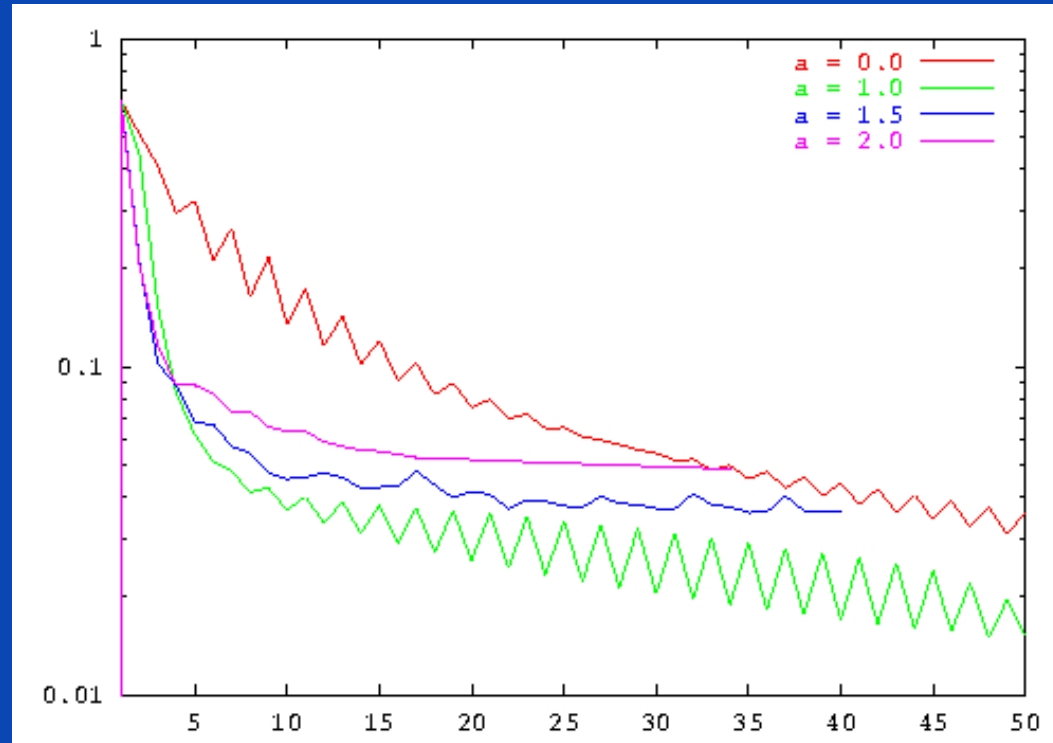
$$h_{k+1} = C^{-T}C^{-1}g_{k+1}$$

$$\beta_k = \text{Max}\left(\frac{\langle g_{k+1} - g_k, g_{k+1} \rangle}{\|g_k\|^2}, 0\right)$$

$$d_{k+1} = -h_{k+1} + \beta_k d_k$$

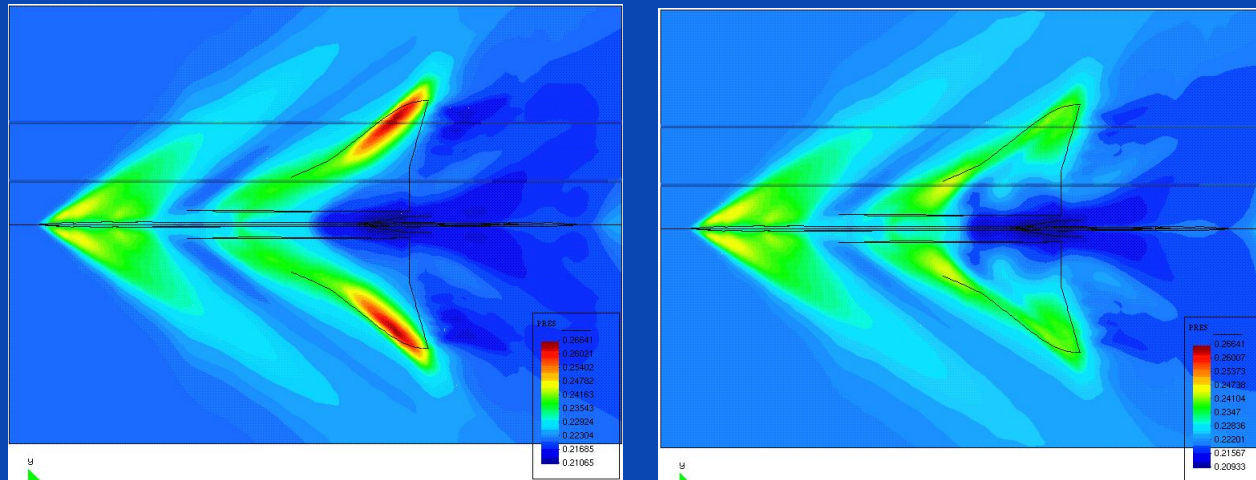
tant que $g_k \neq 0$.

Vérification du a optimal

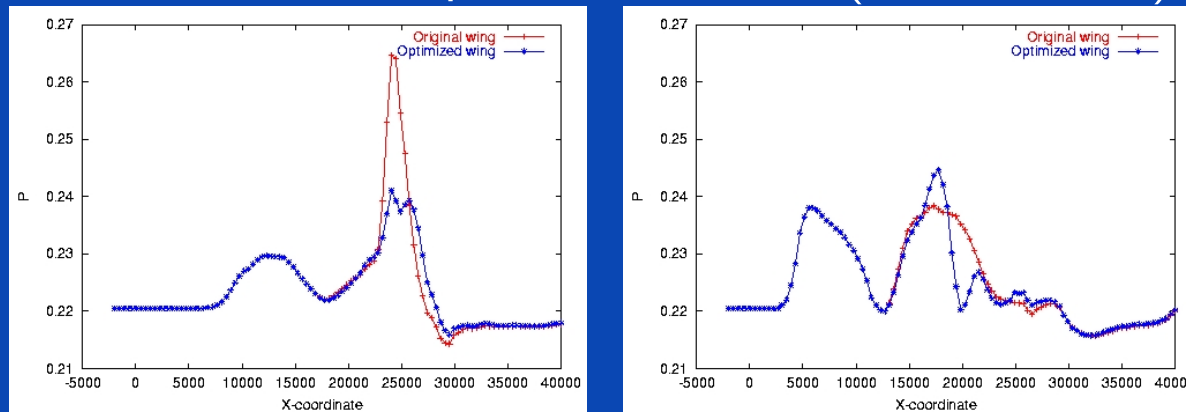


Convergences du gradient pour différentes valeurs de a

Optimisation de la voilure à portance et trainée constantes



Pression dans un plan sous l'avion (10 itérations)

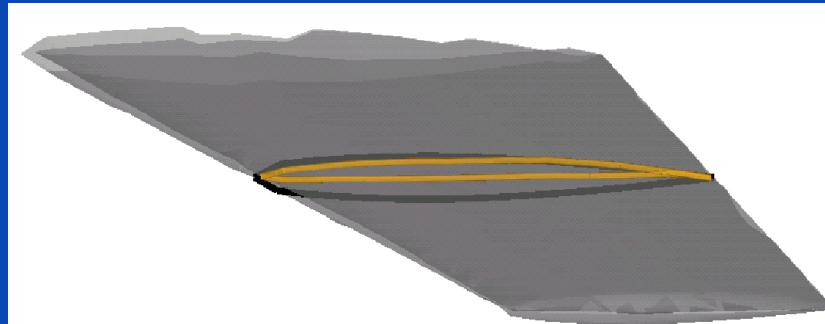


Pression dans deux coupes parallèles à l'axe de symétrie

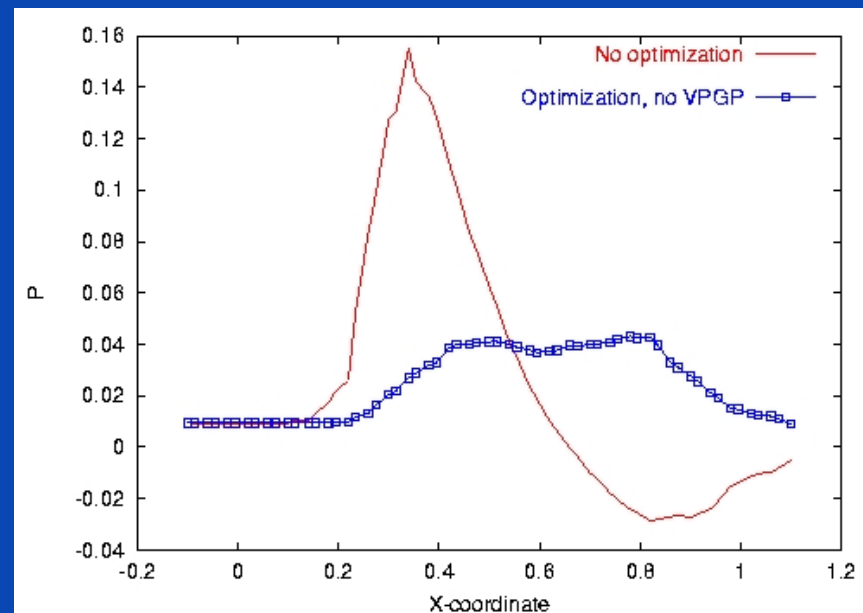
Bilan ...

- Préconditionneur multiniveau adapté aux problèmes d'optimisation de formes.
- Application à un problème réel de minimisation du bang sonique.

Ailes Optimisées



Aile ONERA M6. Ailes optimisées, sans conservation du volume.



Aile ONERA M6. Pression sous l'aile.