Théorie des types
I) Logique et λ-calcul

Joëlle Despeyroux
INRIA Sophia-Antipolis

Module
"Méthodes formelles et fiabilité du logiciel"
Dea d'informatique, Nice, automne 2000

Le langage mathématique sur ordinateur

double: $x \mapsto 2x$
puissance: $x, n \mapsto x * \cdots * x$, n fois.
sinus: $x \mapsto x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots$

Déf. par récurrence: $\begin{cases} puissance(x, 0) = 1 \\ puissance(x, n+1) = x * puissance(x, n) \end{cases}$

Déf. par spécification: $\begin{cases} \forall x \ f(x) \geq 0 \\ \forall x \ f(x) * f(x) = x \\ \text{racine est l'unique f vérifiant ces équations} \end{cases}$

puissance$=\{f \ / \ \forall x \ f(x, 0) = 1 \text{ et } f(x, n+1) = x * f(x, n)\}$

Si non unicité de l'objet f: Opérateur de choix (ϵ de Hilbert).
Ex: $\{x \ / \ x * x = 9\} = \{3, -3\}$

Un programme est une fonction f tel que $P(f)$

Programmation certifiée

Le langage mathématique sur ordinateur
(suite)

Notion de calcul.

Exécution d'un programme: règles d'évaluation, ou de réécriture. La plus simple est la β-reduction: substitution d'une variable par une valeur. Ex: $(5+x)[2/x] = 5+2 = 7$

Langages:

- fonctionnels: fonctions, avec un opérateur de récursion,
- impératifs: C++, Java, etc...,
- déclaratifs (ens. d'équations): Prolog, lang. par contraintes.

Fonctions non calculables. Ex: pb de l'arret. Suppose le tiers exclu.

Intuitionisme (constructivisme) ou classique?

Thm. Sans le tiers exclu, toutes les fonctions sont calculables.

Une démonstration constructive de l'existence de $\{f/P(f)\}$ fournit f, que l'on peut exécuter.

"Exécution" en logique: élimination des coupures.
Gestion des ressources: Logique linéaire.

Les démonstrations sont des objets $\rightarrow$ la théorie des types.

La logique du premier ordre

Langage logique: variables, symboles d'individu, de fonction et de prédicat, avec leur arité.
Ex. l'arithmétique: $\{\{x_0, x_1, \cdots\}, 0, \{S, +, *\}, =\}$.

Les termes (Ex. $S(0) + S(S(0))$):

- les variables sont des termes,
- les symboles d'individu sont des termes,
- si f est un symbole de fonction d'arité n et $t_1 \cdots t_n$ des termes alors $f(t_1, \cdots, t_n)$ est un terme.

Les propositions (Ex. $\forall x.\ \neg(S(x) = x)$):

- si P est un symbole de prédicat d'arité n et $t_1 \cdots t_n$ des termes alors $P(t_1, \cdots, t_n)$ est une proposition,
- $\bot$ est une proposition, si A est une proposition alors $\neg A$ est une proposition, si A et B sont des propositions alors $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ et $A \Leftrightarrow B$ sont des propositions,
- si A est une proposition et x une variable alors $\forall x.\ A$ et $\exists x.\ A$ sont des propositions.

Notation non ambigüe.
Ex. "Il y a un nombre entier supérieur à tout nombre entier":

- $\forall x.\ \exists y.\ y \geq x$ "Pour chaque nombre il existe un nombre qui lui est supérieur"
- $\exists y.\ \forall x.\ y \geq x$ "Il existe un nombre qui est supérieur à tous les nombres"

La logique du premier ordre (suite)

Les démonstrations:
Axiomes et règles.
Exemple: l'égalité: 2 axiomes:

$\forall x.\ x = x$ Principe d'identité
$\forall x.\ \forall y.\ ((x = y) \Rightarrow (A[x/z] \Rightarrow A[y/z]))$ Axiome de Leibnitz

Définition:
Substitution: $A[t/x]$ déf. par récurrence sur la structure de A.

Exemple: l'arithmétique: les axiomes de Peano:

$\forall x.\ \forall y.\ (S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$
$\forall x.\ \neg(0 = S(x))$
$(A[0/z] \wedge (\forall x.\ (A[x/z] \Rightarrow A[S(x)/z]))) \Rightarrow \forall y.\ A[y/z]$
$\forall x.\ (0 + x = x)$
$\forall x.\ \forall y.\ (S(x) + y = S(x + y))$
$\forall x.\ (0 * x = 0)$
$\forall x.\ \forall y.\ (S(x) * y = (x * y) + y)$

Les systèmes de Hilbert

Axiomes logiques:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
$A \Rightarrow B \Rightarrow (A \wedge B)$
$(A \wedge B) \Rightarrow A$
$(A \wedge B) \Rightarrow B$
$A \Rightarrow (A \vee B)$
$B \Rightarrow (A \vee B)$
$(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C))$
$(A \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg A$
$A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \bot)$
$\bot \Rightarrow A$
$(\forall x\ (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x\ B)$ si $x \notin A$
$\forall x\ A \Rightarrow A[t/x]$
$A[t/x] \Rightarrow \exists x\ A$
$\exists x\ A \Rightarrow ((\forall x\ (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B)$ si $x \notin B$

En logique classique, on ajoute l'axiome: $A \vee \neg A$

Les systèmes de Hilbert *(suite)*

Une **démonstration** dans Γ peut être obtenue par:

- axiome: si A est un axiome logique ou une proposition de Γ,
- modus ponens: $\dfrac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$,
- généralisation: $\dfrac{A}{\forall x.\ A}$ x non libre dans Γ.

Représentation par un *arbre de dérivation*:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B)) \qquad A}{B \Rightarrow (A \wedge B)} \qquad B}{A \wedge B} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \qquad \mathcal{C}}{\mathcal{B} \Rightarrow (A \Rightarrow A)} \qquad \mathcal{B}}{A \Rightarrow A}$$

où $\mathcal{B}$ est $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ et $\mathcal{C}$ est $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$.

Les systèmes de Hilbert *(suite)*

Lemme de déduction:
$A \Rightarrow B$ est démontrable dans Γ ssi B est démontrable dans Γ, A.

Preuve.

- ($\Rightarrow$) Si il y a une démonstration π de $A \Rightarrow B$ dans Γ, alors

  $\dfrac{\dfrac{\pi}{A \Rightarrow B)} \qquad A}{B}$ est une démonstration de B dans Γ, A.

- ($\Leftarrow$) On montre par récurrence sur la hauteur de la démonstration de B dans Γ, A l'existence d'une démonstration de $A \Rightarrow B$ dans Γ.

  * Cas où B est un axiome. $\dfrac{B \Rightarrow (A \Rightarrow B) \qquad B}{A \Rightarrow B}$ est une démonstration de $A \Rightarrow B$.
  * Cas où $B = A$. cf la démonstration de $A \Rightarrow A$.
  * Cas modus ponens: $\dfrac{C \Rightarrow B \quad C}{B}$.
    Par hypothèse de récurrence, il existe une démonstration π_1 de $A \Rightarrow (C \Rightarrow B)$ et une démonstration π_2 de $A \Rightarrow C$.
    [...] est une démonstration de $A \Rightarrow B$.
  * Cas généralisation ($B = \forall x.\ C$): $\dfrac{C}{\forall x.\ C}$ x non libre dans Γ.
    Par hypothèse de récurrence, il existe une démonstration π de $A \Rightarrow C$ dans Γ.
    [...] est une démonstration de $A \Rightarrow B$ dans Γ.

La logique du premier ordre (suite)

Langages avec plusieurs sortes: types simples associés aux variables, fonctions et prédicats.

La déduction modulo un système de réécriture (qui doit être confluent et terminant).
Ex.: règles de réécriture pour l'addition et la multiplication:

$$\begin{aligned} 0 + y &\hookrightarrow y \\ S(x) + y &\hookrightarrow S(x + y) \\ 0 * y &\hookrightarrow 0 \\ S(x) * y &\hookrightarrow (x * y) + y \end{aligned}$$

La déduction naturelle

Déf. Un *séquent* est une paire $\Gamma \vdash A$.

On prend l'axiome $\Gamma \vdash A$ *si* $A \in \Gamma$, et la règle: $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$.

Les 3 1ers axiomes du système de Hilbert deviennent prouvables:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash A}{\Gamma, A \vdash B \Rightarrow A}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash A \quad \Gamma, A, B \vdash B}{\Gamma, A, B \vdash A \wedge B}}{\Gamma, A \vdash B \Rightarrow (A \wedge B)}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))}$$

On remplace l'axiome $A \Rightarrow B \Rightarrow (A \wedge B)$ par la règle $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$
Cet axiome peut maintenant se prouver: [...].

On remplace l'axiome $(A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C))$ par la règle: $\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma \vdash A \Rightarrow C \quad \Gamma \vdash B \Rightarrow C}{\Gamma \vdash C}$ ou mieux par $\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$.

On obtient ainsi des **règles d'introduction et d'élimination** des opérateurs logiques, selon que l'opérateur concerné apparaît en conclusion ou en prémisse de la règle.

Modus ponens $\dfrac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$ devient la règle d'élimination de $\Rightarrow$.

La règle de généralisation $\dfrac{A}{\forall x.\ A}$ x non libre dans Γ devient la règle d'introduction de $\forall$.

La déduction naturelle: le système

ax : $\Gamma \vdash A \quad si\ A \in \Gamma$

$\Rightarrow_I$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$ $\quad$ $\Rightarrow_E$: $\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$

$\wedge_I$: $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$ $\quad$ $\wedge_{E1}$: $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$ $\quad$ $\wedge_{E2}$: $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$

$\vee_{I1}$: $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $\quad$ $\vee_{I2}$: $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$

$\vee_E$: $\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$

$\neg_I$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$ $\quad$ $\neg_E$: $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\bot_I)$ $\quad$ $\bot_E$: $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$

$\forall_I$: $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x.\ A}\ (x \notin \Gamma)$ $\quad$ $\forall_E$: $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x.\ A}{\Gamma \vdash A[t/x]}$

$\exists_I$: $\dfrac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x.\ A}$ $\quad$ $\exists_E$: $\dfrac{\Gamma \vdash \exists x.\ A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (x \notin \Gamma, B)$

Thm. Si A est démontrable à partir de Γ dans le système de Hilbert, $\Gamma \vdash A$ est démontrable en déduction naturelle.

La déduction naturelle classique

En logique classique on ajoute le tiers exclu: $\Gamma \vdash A \vee \neg A$

Alternatives:

$\neg_I$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$ $\quad$ $\neg_E$: $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$

tiers exclu : $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$

Exemple en logique classique: Proposition de Peirce:

$$\dfrac{\dfrac{\dots}{\Gamma \vdash \neg\neg(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P)}}{\Gamma \vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P}$$

La déduction naturelle: les coupures

Les coupures: Introduction suivie d'une élimination.

Ex: $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A} \hookrightarrow \dfrac{\pi_1}{A}$ $\qquad$ $\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash \forall x.\ A}}{\Gamma \vdash A[t/x]} \hookrightarrow \dfrac{\pi[t/x]}{\Gamma \vdash A[t/x]}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B} \hookrightarrow \dfrac{\pi}{\Gamma \vdash B}$$

π: π_1 où on enlève A dans tous les contextes et on remplace

les axiomes $\Gamma, A, \Delta \vdash A$ par $\dfrac{\pi_2[\text{on rajoute l'hypothèse } \Delta \text{ partout}]}{\Gamma, \Delta \vdash A}$.

Thm. Le processus d'élimination des coupures termine.

Le calcul des séquents

Motivation: la recherche automatique de démonstrations.
Règles structurelles (manipulation explicite des contextes).
Règles intro/élim symétriques.

$axiome:\ A \vdash A$ $\qquad$ $coupure:\ \dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$

$aff:\ \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$ $\quad$ $contr:\ \dfrac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$ $\quad$ $perm:\ \dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$

$\Rightarrow_I:\ \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$ $\qquad$ $\Rightarrow_E:\ \dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C}$

$\wedge_I:\ \dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$ $\qquad$ $\wedge_E:\ \dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$

$\vee_{I1}:\ \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $\quad$ $\vee_{I2}:\ \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $\quad$ $\vee_E:\ \dfrac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$

$\forall_I:\ \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x.\ A}\ (x \notin \Gamma)$ $\qquad$ $\forall_E:\ \dfrac{\Gamma, A[t/x] \vdash B}{\Gamma, \forall x.\ A \vdash B}$

$\exists_I:\ \dfrac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x.\ A}$ $\qquad$ $\exists_E:\ \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \exists x.\ A \vdash B}\ (x \notin \Gamma, B)$

$\neg_I:\ \dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$ $\qquad$ $\neg_E:\ \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash B}$ $\qquad$ $\bot_E:\ \Gamma, \bot \vdash A$

Le calcul des séquents (suite)

Thm. Tout séquent démontrable en déduction naturelle est démontrable en calcul des séquents, et vis et versa.

Plus exactement:
À une preuve de $\Gamma \vdash_s A$ correspond une déduction $\Gamma \vdash_d A$.
Une déduction $\Gamma \vdash_d A$ peut être représentée dans le calcul des séquents, mais pas de manière unique.

Démonstration: *Proofs and Types* de J.Y. Girard page 35, etc...

Le calcul des séquents classique

On peut rajouter la règle:

tiers exclu : $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$

Un système plus élégant définit le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ où Δ est une liste de propositions, possiblement vide ($\bot$).
$A_1, \cdots, A_n \vdash B_1, \cdots, B_m$ signifie "A_1 et ... $A_n \Rightarrow B_1$ ou ... B_m".

Le calcul intuitioniste est la restriction de ce système au cas où Δ est réduit à une seule proposition B ou $\bot$, excepté pour la règle $\vee_E$, qui est: $\vee_E : \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta}$.

Le système:

$axiome : \ A \vdash A$ $\qquad$ $coupure : \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$

$aff_l : \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, B \vdash \Delta}$ $\qquad$ $aff_r : \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash B, \Delta}$

$contr_l : \dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}$ $\qquad$ $contr_r : \dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$

$perm_l : \dfrac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}$ $\qquad$ $perm_r : \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, B\Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}$

Le calcul des séquents classique (suite)

$\Rightarrow_I$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$ $\quad$ $\Rightarrow_E$: $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Delta'}$

$\wedge_I$: $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}$

$\wedge_{E1}$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$ $\quad$ $\wedge_{E2}$: $\dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$

$\vee_{I1}$: $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$ $\quad$ $\vee_{I2}$: $\dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$

$\vee_E$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'}$

$\neg_I$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$ $\quad$ $\neg_E$: $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$

$\forall_I$: $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x.\ A, \Delta}\ (x \notin \Gamma, \Delta)$ $\quad$ $\forall_E$: $\dfrac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x.\ A \vdash \Delta}$

$\exists_I$: $\dfrac{\Gamma \vdash A[t/x], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x.\ A, \Delta}$ $\quad$ $\exists_E$: $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x.\ A \vdash \Delta}\ (x \notin \Gamma, \Delta)$

La théorie des types simples

Motivation initiale: définir une théorie des ensembles cohérente.
Le paradoxe de Russel: L'ensemble $\{x/\neg x \in x\}$ appartient à lui-même ssi il ne s'appartient pas à lui-même.
Pour l'éviter: 2 possibilités:
Toute proposition n'est pas obligatoirement un objet
→ La *théorie des ensembles* de Zermelo-Fraenkel.
Toute proposition ne peut pas s'appliquer à tout objet
→ la *théorie des types* simples, où l'on distingue les objets selon leur fonctionnalité: objets de bases, fonctions, etc...

Types: i et o sont des types; Si A et B sont des types alors $A \to B$ est un type.
Ex. $0 : i$, $\quad S : i \to i$, $\quad =: i \to i \to o$, $\quad \vee : o \to o \to o, \ldots$.
Il faut ajouter pour chaque type:
$=_A$: $\ A \to A \to o$, $\quad \forall_A, \exists_A :\ (A \to o) \to o$,
avec éventuellement des axiomes d'extensionalité:
$\forall f, g.\ (\forall x.\ f(x) = g(x)) \Rightarrow (f = g)$.

Le λ-calcul simplement typé

types : $A ::= \alpha \mid A \to A'$
termes : $M ::= x \mid \lambda x : A.M' \mid (M\ M')$
contextes : $\Gamma ::= \ . \mid \Gamma, x : A$
reduction : $(\lambda x : A.M\ \ N) \hookrightarrow_\beta M[N/x]$
Un contexte est légal si tous les x_i sont distincts.

$$var\ \frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}\ \Gamma \text{ légal} \qquad lam\ \frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.M\ \ :\ \ A \to B}$$

$$app\ \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (M\ N) : B}$$

Exemples:

$$\vdash \lambda x : A.x : A \to A$$
$$y : B \quad \vdash \lambda x : A.y : A \to B$$
$$y : B, z : A \ \vdash (\lambda x : A.y\ \ z) : B$$
$$\vdash \lambda x : A.\lambda y : B.x : A \to B \to A$$

Le terme $\lambda x.\ (x\ x)$ n'est pas bien typé.

Problème de **capture de variable**:
$\lambda x.\lambda x.x \equiv \lambda x'.\lambda x.x$ ou $\lambda x.\lambda x'.x$?

Solution: **α-conversion:** $\lambda x.x \equiv \lambda y.y$ et $\lambda x.\lambda x.x \equiv \lambda x.\lambda y.y$.

Autres réductions:

$\lambda x : A.M \hookrightarrow_\alpha \lambda y : A.M[y/x]$ – renommage
$\lambda x : A.(M\ x) \hookrightarrow_\eta M$ si $x \notin M$ – Ex : $\lambda x : i.\ (S\ x) = S$

Le λ-calcul simplement typé: propriétés

Unicité du type: Pour tout contexte Γ et terme t, il existe au plus un type A tel que $\Gamma \vdash t : A$.

Il existe un algorithme qui étant donnés un contexte Γ et terme t, décide si t est typable dans Γ et donne son type, s'il existe.

Confluence: Si $t \hookrightarrow u_1$ et $t \hookrightarrow u_2$ alors il existe v tq $t \hookrightarrow v$.

Un terme *normal* est de la forme $\lambda x_1 : A_1.\ ...\lambda x_n : A_n.\ (x\ u_1\ ...\ u_p)$.

t est *faiblement normalisable* si il existe v normal tq $t \hookrightarrow^* v$.

t est *fortement normalisable* si toute suite de réduction issue de t est finie.

Thm. Tout terme est fortement normalisable (pour β), et la forme normale est unique.

Thm. Tout terme est faiblement normalisable pour $\beta\eta$.

Déf. Un terme t de type $A_1 \to ... \to A_n \to B$ est en *forme β-normale η-longue* s'il est de la forme $\lambda x_1 : A_1.\ ...\lambda x_n : A_n.\ (x\ u_1\ ...\ u_p)$, où les u_i sont en forme β-normale η-longue; Cette forme est unique.

Sémantique (interprétations de la logique)

Sémantique de Tarski: (tables de vérité)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A$
t	t	t	t	t	f
f	t	f	t	t	t
t	f	f	t	f	
f	f	f	f	t	

Sémantique de Heyting-Kolmogorov:

- Une démonstration de $A \Rightarrow B$ est une fonction qui associe à toute démonstration de A une démonstration de B,
- Une démonstration de $A \wedge B$ est un couple formé d'une démonstration de A et d'une démonstration de B,
- Une démonstration de $A \vee B$ est un couple (i, p), où soit $i = 0$ et p est une démonstration de A, soit $i = 1$ et p est une démonstration de B,
- Une démonstration de $\neg A$ est une démonstration de $A \Rightarrow \bot$, où $\bot$ n'a aucune démonstration,
- Une démonstration de $\forall x.\ A$ est une fonction qui associe à tout objet t une démonstration de $A[t/x]$,
- Une démonstration de $\exists x.\ A$ est un couple (t, p), où t est un object, et p est une démonstration de $A[t/x]$.

L'isomorphisme de Curry-Howard

Les types:

Une formule de la logique *est représentée par un type* du λ-calcul:

- Les prop. atomiques $A, B, \cdots$ sont des types atomiques.
- À $A \Rightarrow B$ correspond $A \to B$, à $A \wedge B$ correspond $A \times B$.

Une preuve d'une formule A est un terme de type A:

Les termes:

logique	$\lambda -$ calcul
$\Gamma \vdash A \quad (A \in \Gamma)$	$x_1 : A_1 \ \cdots \ x_n : A_n] \vdash x_i : A_i$
$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.\ t : A \to B}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : A \to B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (t\ a) : B}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : (A \times B)}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : (A \times B)}{\Gamma \vdash \text{fst}\ t : A}$
$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : (A \times B)}{\Gamma \vdash \text{snd}\ t : B}$

Bibliographie

References

[Dow97] G. Dowek. Théories des types, 1997. Notes de cours du DEA : Sémantique, preuve et programmation.

[GLT89] Jean-Yves Girard, Yves Lafont, and Paul Taylor. *Proofs and Types*. Cambridge University Press, 1989.