THÈSE

pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité
Mathématiques Appliquées

présentée par :

Malika Remaki

Sujet de la thèse :

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LES ÉQUATIONS DE MAXWELL INSTATIONNAIRES EN MILIEU HÉTÉROGÈNE

Soutenue le 08 décembre 1999 devant le jury composé de :

Directeur de thèse :	**Loula**	**Fezoui**
Président :	**Frédéric**	**Poupaud**
Rapporteurs :	**Thierry**	**Gallouët**
	Olivier	**Pironneau**
Examinateurs :	**Armel**	**De La Bourdonnaye**
	Isabelle	**Terrasse**
	Serge	**Piperno**

A mon père
pour son soutien
durant toutes mes études,
et son dévouement sans
égal.

A ma mère
pour ses encouragements
et son affection.
Et enfin, à tous
mes frères et soeurs.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer mes plus chaleureux remerciements à madame Loula Fezoui qui m'a proposé ce sujet de thèse et m'a accompagné tout au long de sa réalisation avec beacoup d'intêret et de disponibilité.

Je voudrais également remercier monsieur Armel de la Bourdonnaye de m'avoir acceuilli dans son projet, et pour toutes les discussions constructives sur l'électromagnétisme.

Je tiens à présenter toute ma gratitude à monsieur Frédéric Poupaud pour son aide scientifique. Je voudrais aussi remercier Natahlie Olivier-Glinsky pour ses conseils très constructifs aussi bien sur le plan scientifique qu'humain.

Je remercie Serge Piperno d'avoir répondu à mes questions avec beaucoup de disponibilité et de gentillesse.

Je remercie monsieur Olivier Pironneau et monsieur Thierry Gallouet d'avoir accepté la lourde tâche d'être les rapporteurs, et je remercie également les autres membres du jury.

Je voudrais également remercier ma famille, qui malgré l'éloignement géographique, m'a toujours apporté son soutien.

Je tiens également à exprimer toute mon amitié à toute l'équipe du CERMICS (anciens et nouveaux), sans oublier la bande du tennis et des soirées bowling.

Titre : Méthodes numériques pour les équations de maxwell instationnaires en milieu hétérogène

Résumé

La première partie de ce travail est consacrée à la démonstration d'un théorème d'existence et d'unicité de la solution du système de Maxwell dans le cas général, où les coefficients sont des tenseurs symétriques définis positifs, qui dépendent d'une façon non régulière de la variable d'espace. Dans ces conditions, le milieu de propagation pourrait être aussi bien isotrope qu'anistrope. Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés à l'étude et au développement de plusieurs méthodes numériques dans un domaine isotrope où les coefficients peuvent être discontinus ; nous avons étudié deux méthodes de type volumes finis, une basée sur un calcul de flux décentrés, et l'autre basée sur un calcul de flux centrés. Nous avons également adapté une méthode d'éléments finis dite Galerkin Discontinue, et enfin une méthode hybride volumes finis / différences finies avec une étude de stabilité de cette dernière. Pour des raisons géométriques, nous avons chosi les éléments du maillage comme volumes d'intégration. De nombreuses validations et comparaisons numériques ont montré que ces méthodes sont bien adaptées au cas hétérogène. Néanmoins, il semble que la méthode volumes finis avec flux centrés et une discrétisation temporelle de type saute-mouton est la plus optimale en terme de compromis entre la qualité des résultats et le coût en temps de calcul.

Mots clés : électromagnétisme - existence - unicité - volumes finis - Galerkin Discontinue - hybride - stabilité.

———-

Title : Numerical Methods for Solving Maxwell's Equations in Heterogeneous Media

Abstract

The first part of this work is devoted to the derivation of the existence and uniqueness of the solution of Maxwell's system when the parmeability and the permittivity matrix belong to L^∞ are symetric, positive definite. In the second part, we develop and study several numerical methods for Maxwell's system in isotropic and heterogeneous media; we developed two types of finite volume methods, the first one is based on an upwind scheme in space discretization, and the second one is based on a centered flux formula. We have also extend a finite element method called Discontinuous Galerkin method to solve our problem, and lastly we construct a hybrid finite volume / finite difference scheme and a stability analysis is presented. Several numerical experiments and comparisons are performed, and we deduce that these methods are well suited for solving Maxwell's system in an heterogeneous medium. However, the finite volume method which uses centred flux

and leapfrog scheme for time discretization seems to be the most appropriate method to obtain the better compromise between the quality of the solution and the CPU time.
key words : electromagnetism - existence - uniqueness - finite volumes - Discontinuous Galerkin - hybrid - stability.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Le concept d'onde est né de l'observation de la propagation des ondes (vagues) à la surface de l'eau. Par la suite, cette notion s'est également appliquée à d'autres phénomènes physiques, tel que le son, les ondes de compression et d'oscillation comme les ondes sismiques, et l'exemple qui nous intéresse ici est celui de la propagation des ondes électromagnétiques comme la lumière dans un milieu qui n'est pas nécessairement le vide. La modélisation mathématique de ces phénomènes a connu une évolution importante depuis les représentations géométriques de Christiaan Huygens dans son **traité de la lumière** (1690), jusqu'aux équations aux dérivées partielles de Maxwell (1873), ce modèle a rajouté la dimension en temps par rapport à ses prédécesseurs.
L'électromagnétisme porte sur la notion de champ électromagnétique qui est définie à l'aide de deux vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ appelés respectivement champ électrique et induction magnétique. Ainsi, la force (dite force de **Lorentz**) qui s'exerce sur une charge $\mathbf{q}$, de vitesse $\mathbf{v}$ est donnée par $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \mathbf{q}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.
La propagation du champ électrique dans un matériau tel qu'un diélectrique est caractérisée par la création d'un autre champ qui vient s'ajouter au champ appliqué au départ. On dit que le milieu se polarise. Ce champ est appelé polarisation du milieu, on le note par $\mathbf{P}$. On introduit un nouveau champ $\mathbf{D}$ appelé le déplacement électrique défini par :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

où la quantité ε_0 est appelée la permittivité du vide. Dans le cas de présence de charges électriques, de densité volumique ρ, on a la loi dite de Gauss suivante : $\varepsilon_o div\mathbf{E} = \rho$. On distingue deux distributions de charges, l'une extérieure et l'autre intérieure :

$$\rho = \rho_{ex} + \rho_{in}.$$

Dans le cas de neutralité globale, on a la propriété suivante : $div\mathbf{P} = -\rho_{in}$, ce qui nous donne une relation entre le déplacement électrique et la charge extérieure :

$$div\mathbf{D} = \rho_{ex}.$$

La loi de conservation de la charge est donnée par : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -div\mathbf{J}$, et en particulier $\dfrac{\partial \rho_{ex}}{\partial t} = -div\mathbf{J_{ex}}$. Où $\mathbf{J}$ (respectivement $\mathbf{J_{ex}}$) représente le courant électrique (courant électrique extérieur) du milieu. Les milieux dits linéaires sont caractérisés par une relation linéaire entre la polarisation volumique $\mathbf{P}$ et le champ électrique $\mathbf{E}$; $\mathbf{P} = \chi \times \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Où χ, appelé susceptibilité diélectrique, ne dépend pas de $\mathbf{E}$.

Nous nous proposons d'étudier les phénomènes électromagnétiques dans un milieu linéaire, isotrope, et hétérogène, tels que les diélectriques, et où les dimensions caractéristiques des objets ainsi considérés sont de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde. Nous devons considérer divers points essentiels dans la résolution du système de Maxwell, dont la recherche de schémas robustes qui permettent d'obtenir des solutions très précises, et qui tiennent compte de la géométrie du domaine de calcul qui pourrait être très complexe. Nous avons également à tenir compte des conditions de saut des champs à travers les interfaces des matériaux composant le milieu, et le traitement des courants électriques. Pour résoudre numériquement le système dans ces conditions, nous proposons différentes méthodes numériques ; des méthodes volumes finis, une méthode d'éléments finis, et une méthode hybride volumes finis/différences finies. L'avantage de ces méthodes est leur capacité à tenir compte des points cités ci-dessus.

Méthodes numériques pour l'électromagnétisme

Nous résumons ici les différentes méthodes numériques utilisées dans la littérature pour résoudre les équations de Maxwell. Nous distinguons tout d'abord deux types de problèmes : les problèmes temporels où le temps est considéré comme une variable, c'est ce qu'on appelle les problèmes d'évolution ou transitoires, et les problèmes en fréquence, où le temps n'intervient que par l'intermédiaire de la fréquence de la source (donc comme paramètre), ainsi la solution recherchée est en fonction des variables en espace et périodique en temps, ce sont des solutions harmoniques en temps. La modélisation mathématique de ces deux types de problèmes est très différente, et le passage d'un modèle à l'autre n'est pas toujours facile à justifier, notamment dans le cas où les coefficients sont discontinus. Par conséquent on distingue deux familles de méthodes numériques adaptées à chaque modèle :

Méthodes numériques pour les problèmes fréquentiels :

Nous avons parmi les méthodes numériques pour les problèmes en fréquence, des méthodes de décomposition de domaine, où l'idée de base est de décomposer le domaine de calcul en sous-domaines disjoints, et de résoudre des sous problèmes sur chacun de ces sous-domaines. La jonction entre les interfaces des sous-domaines se fait d'une manière itérative. Ces méthodes permettent de résoudre par exemple l'équation de Helmholtz en milieu hétérogène [4].
Nous avons également une méthode de type équations intégrales qui a pour but d'étendre les équations intégrales classiques qui ont été développées pour résoudre des problèmes de diffraction par des obstacles réfléchissants au cas d'obstacles absorbants. Ceci se fait à l'aide d'une condition aux limites de type impédance [6]. Il existe aussi une méthode de discrétisation microlocale pour les équations intégrales. C'est une méthode qui résoud

des problèmes à hautes fréquences où la matrice à inverser pour résoudre les problèmes de diffraction est presque creuse dans le sens où certains termes de la matrice sont éliminés car ils sont négligeables par rapport aux autres [35].

Méthodes numériques pour les problèmes temporels :

Il existe dans la littérature des méthodes d'éléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse. Ces méthodes sont adaptées aux problèmes où le rapport entre l'objet étudié et la longueur d'onde est très grand [34]. Nous avons également la méthode aux différences finies développée par K.S.Yee [83], qui est basée sur un schéma décalé en temps et en espace. Cette dernière a l'avantage d'être peu coûteuse et facile à implémenter, néanmoins elle présente de sérieuses limites quant à son application à des géométries complexes.

Parmi les méthodes temporelles qui nous intéressent ici, nous avons les méthodes de volumes finis. L'attrait principal de ces dernières pour résoudre numériquement un système conservatif est leur grande tolérance vis-à-vis de la régularité du maillage et/ou des paramètres de calcul (discontinuité des coefficients et/ou de la solution). A priori, le maillage pourrait être quelconque : de type élément fini conforme ou non, mono-élément (maillage triangulaire en 2-D par exemple) ou multi-éléments (maillage hybride avec des triangles et des quadrangles). Des résultats encourageants ont été obtenus depuis l'introduction de ces méthodes au calcul numérique en électromagnétisme [76, 19]. Cependant la définition du volume de contrôle la plus utilisée est le polygone centré au noeud, ce qui rend l'indépendance de la méthode vis-à-vis du maillage toute relative. En particulier, le calcul des gradients (qui est parfois nécessaire pour monter en précision) devient lourd et coûteux dans le cas de maillages hybrides et la méthode n'est plus adaptée (même sans calcul de gradients) dans le cas de systèmes linéaires à coefficients discontinus (cas des équations de Maxwell en milieu linéaire hétérogène). Un autre choix de volumes finis a été présenté par J.Durlofsky, S.Osher et B.Engquist [41] dans le cadre de la dynamique des fluides. Ce choix a été motivé par une meilleure prise en compte des conditions aux limites. Nous avons adopté ce choix pour résoudre les équations de Maxwell. Nous nous sommes intéressés à deux types de méthodes de volumes finis, l'une basée sur un schéma décentré en espace, et une discrétisation de type Runge-Kutta en temps (ce qui permet d'obtenir des schémas d'ordre élevé). Cette méthode permet de tenir compte des conditions de transmission entre deux milieux différents en passant par un schéma de Godunov pour les calculs de flux numériques, et de bien traiter les problèmes avec des sources de courants surfaciques (linéiques dans le cas bidimensionnel). Nous pouvons également appliquer un bon procédé pour le calcul des gradients sans altérer la robustesse de la méthode dans le cas hétérogène [70]. La deuxième méthode est basée sur un schéma centré en espace et un schéma de type saute-mouton en temps, son avantage est son coût relativement faible comparé aux autres méthodes volumes finis, et ce schéma respecte également la nature hétérogène du problème. Une autre méthode qu'on appelle méthode de Galerkin Discontinue nous parait bien adaptée à la résolution du système de Maxwell dans le cas hétérogène. Cette méthode a été développée en particulier pour la mécanique des fluides [32] par B.Cockburn et C.W.Shu, et nous l'avons adapté au système de Maxwell [71]. C'est une méthode d'éléments finis qui est basée sur un choix de bases locales qui nous permet d'obtenir une matrice de masse locale facile à inverser (sans passer par des procédés numériques). Le caractère local de la méthode donne lieu à un calcul de flux numérique entre les éléments d'intégration où les fonctions de bases sont définies. Pour ce faire, nous avons utilisé un solveur de Riemann exact.

Parmi les méthodes les plus récentes se trouvent les méthodes hybrides. Ce sont des schémas qui combinent deux méthodes afin d'avoir un rapport qualité/prix intéressant. Nous étudions ici les méthodes qui combinent des schémas volumes finis et des schémas aux différences. Ceci permet de résoudre le problème dans la partie complexe de la géométrie avec une méthode volumes finis, et dans la partie la plus régulière avec une méthode aux différences finies en l'occurence le schéma de Yee [83]. Des méthodes de ce type ont été développées récemment (voir [84] et [85] par exemple). En général, tous ces schémas font appel à une grille duale pour la partie non structurée ce qui complique la construction de maillages en trois dimensions. Nous proposons d'utiliser ici une méthode de type volumes finis où tous les champs sont calculés aux mêmes points. Cette formulation nous parait mieux adaptée pour résoudre des problèmes dans des milieux hétérogènes tout en relaxant la contrainte sur le maillage. Nous utilisons pour la discrétisation spatiale des flux centrés qui nous permettent d'obtenir un schéma peu diffusif. La discrétisation en temps est obtenue par un schéma saute-mouton.

Le plan de cette thèse est organisé comme suit :

Dans le deuxième chapitre, on présente les équations de Maxwell, ainsi que la formulation conservative de cette dernière. On détaille également les aspects mathématiques de ces équations, dont une démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cas général. Cette démonstration est basée sur le théorème de Hille-Yosida.

Au chapitre trois, nous présentons une comparaison qualitative et quantitative entre deux méthodes de volumes finis, dans le vide. La différence entre ces deux méthodes réside dans le choix du volume de contrôle, ou le volume d'intégration. On verra que ce choix est capital pour traiter des problèmes divers comme le calcul d'un champ électromagnétique généré par un courant linéique, ou la diffration d'une onde par un matériau revêtu. D'où notre choix pour une méthode volumes finis où tous les degrés de liberté sont localisés aux centres des éléments du maillage, on appelera cette méthode, la méthode volumes finis centrés-éléments. Nous présentons également des résultats sur la convergence des schémas volumes finis obtenus par plusieurs auteurs dont [43], [80], [51], et [65].

Dans le chapitre quatre, on présente l'extension de la méthode volumes finis centrés-éléments au cas hétérogène, nous appliquons un schéma en espace qui tient compte du caractère hétérogène du milieu, et une formulation spécifique du calcul du gradient de la solution par volume de contrôle, afin d'obtenir un schéma d'ordre élevé.

Le chapitre cinq expose une méthode d'éléments finis dite Galerkin Discontinue, pour la résolution du système de Maxwell dans le cas hétérogène. Cette méthode a la caractéristique d'être locale, et ceci grâce à un choix de base locale. Les solutions obtenues sont discontinues en espace, et respectent les conditions de saut. Nous comparons les solutions obtenues par cette méthode et celles obtenues par une méthode volumes finis, du point de vue qualitatif et quantitatif.

Dans le sixième chapitre, nous présentons une nouvelle formulation de la méthode volumes finis basée sur un calcul de flux centrés et un schéma saute-mouton pour la discrétisation en temps. Cette méthode est facile à implémenter et semble la mieux adaptée pour un couplage avec une méthode aux différences finies.

Le septième chapitre est consacré à l'étude d'un schéma hybride volumes finis/différences finies combinant le schéma volumes finis cité au chapitre six et le schéma de Yee [83]. Ce schéma présente l'avantage d'être peu coûteux, et permet de résoudre des problèmes avec des géométries complexes.

Chapitre 2

Aspects mathématiques des équations de Maxwell

Ce chapitre est une version plus étendue d'une note au C.R.A.S réalisée en collaboration avec Frédéric Poupaud[1] et intitulée "Existence et unicité des solutions du système de Maxwell pour des milieux hétérogènes non réguliers".

1. Universite de Nice, UMR CNRS 6621, 06108 Sophia-Antipolis.

2.1 Le système de Maxwell

La propagation d'ondes électromagnétiques en domaine temporel est gouvernée par les équations de Maxwell qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + rot(\mathbf{E}) = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - rot(\mathbf{H}) = -\mathbf{j}, \\ div(\mathbf{D}) = \rho\,, \\ div(\mathbf{B}) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où **B** et **H** désignent respectivement l'induction et le champ magnétiques et **D** et **E**, le déplacement et le champ électriques. Les densités de charge ρ et de courant $\mathbf{j}$ sont reliées par la loi de conservation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\mathbf{j}) = 0.$$

Cette loi se déduit aisément de (2.1), en prenant la divergence de la deuxième équation et en la combinant avec la troisième.

Lois constitutives

Les inductions et les champs sont reliés par des lois constitutives qui s'écrivent pour des milieux linéaires :

$$\begin{cases} B_i = \sum_{j=1}^{j=3} \mu_{ij} H_j, \\ D_i = \sum_{j=1}^{j=3} \varepsilon_{ij} E_j, \end{cases} \tag{2.2}$$

où D_i et Bi représentents les composantes du champ électromagnétique. $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ et $\mu = (\mu_{ij})$ sont des matrices 3×3 définies positives.

2.2 Existence et unicité des solutions du système de Maxwell pour des milieux hétérogènes non réguliers

2.2.1 Introduction

La plupart des problèmes de la physique mathématique sont modélisés par des équations aux dérivées partielles. Par exemple les phénomènes électromagnétiques sont régis par les équations (ou le système) de Maxwell. Le modèle le plus général est celui où les coefficients du système, qui représentent les indices du milieu de la propagation de l'onde électromagnétique, sont des tenseurs symétriques qui dépendent d'une façon non régulière de la variable d'espace. Nous proposons de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ce système, en considérant deux types de conditions aux limites, la première est de type métallique (cas de métal parfait), et la deuxième est de type absorbant pour modéliser le bord infini. Nous sommes amenés à étudier les propriétés d'un opérateur différentiel dont nous nous servirons pour appliquer un théorème d'existence et d'unicité de solutions de problèmes d'évolution (théorème de Hille-Yosida [14]). Le système de Maxwell peut s'écrire sous la forme d'un problème d'évolution du premier ordre :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{U} = 0.$$

Du fait que les tenseurs sont symétriques et bornés, l'opérateur $\mathbf{A}$ présente des propriétés de monotonie (on peut également dire que $\mathbf{A}$ est accrétif), il est de plus maximal. Nous verrons en détail la définition de ces propriétés et leur intérêt dans la démonstration. Nous nous intéressons au cas général qui nous permet de considérer la propagation des ondes dans un milieu qui peut être aussi bien isotrope qu'anisotrope. Les conditions aux limites considérées sont une condition métallique et une condition absorbante, cette dernière est une approximation du champ à l'infini. Dans le cas où les coefficients sont réguliers, nous disposons de plusieurs résultats d'existence et d'unicité de solutions des problèmes hyperboliques. Nous pouvons citer ici les travaux de H. Barucq et B. Hanouzet [2] concernant les problèmes d'électromagnétisme du premier ordre et du second ordre. Nous avons également les résultats d'existence et d'unicité pour les systèmes de Friedricks symétrisables [7]. L'unicité des solutions des systèmes hyperboliques linéaires à coefficients non réguliers est un problème difficile et largement ouvert. Dans le cas le plus simple, celui d'une équation du premier ordre, on dispose de la théorie des solutions renormalisées de R. Diperna et P.L. Lions [40]. Elle requiert que les coefficients appartiennent à l'espace de Sobolev $W^{1,1}$ et que la divergence du champ de vecteur correspondant soit bornée, (voir [39] pour une amélioration de la dernière hypothèse). Quand les coefficients sont de type compressifs,

(plus précisément vérifient une borne Lipshitzienne par au dessus) on a aussi une bonne théorie (voir [67]), grâce aux caractéristiques de Filippov [45]. Enfin, une étude pratiquement exhaustive du cas 1D se trouve dans [12] avec une théorie de solutions en dualité. La complexité de la situation pour une équation laisse peu d'espoir de traiter le cas général des systèmes.
Il existe cependant des exceptions notables. Il est alors très classique d'avoir existence et unicité de la solution de l'équation de l'acoustique ou des ondes :

$$\rho(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \mathbf{div}c(x).\nabla u = 0, \tag{2.3}$$

pour le problème de Cauchy quand les coefficients ρ et c sont uniquement bornés et minorés par des constantes positives [7]. Remarquons que cette équation peut se mettre sous la forme d'un système du premier ordre.
L'objectif de ce travail est de montrer que le système de Maxwell

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \mathbf{rot}(\varepsilon^{-1}(x)\mathbf{D}) = 0, \qquad t > 0, x \in I\!R^3 \\ &\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} - \mathbf{rot}(\mu^{-1}(x)\mathbf{B}) = 0, \qquad t > 0, x \in I\!R^3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

est essentiellement de même nature pour des matrices de permittivité $\varepsilon(x)$ et de perméabilité $\mu(x)$ symétriques définies positives majorées et minorées. Il est important de noter que le système de Maxwell est une version vectorielle de (2.3), mais ne peut pas se ramener à une équation du second ordre.

2.2.2 Problèmes aux limites et résultats

Soit Ω un ouvert non nécessairement borné de $I\!R^3$ de classe C^2 et de frontière bornée $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où Γ_1 et Γ_2 sont deux ouverts disjoints de Γ. On note $\mathbf{n}$(x) la normale extérieure en $x \in \Gamma$. On cherche des solutions
$\mathbf{B}$, $\mathbf{D} \in C^0([0, +\infty[,(L^2(\Omega))^3)$ de (2.4)qui vérifient

$$\mathbf{B}(0,x) = \mathbf{B}_0(x), \quad \mathbf{D}(0,x) = \mathbf{D}_0(x) \quad \text{pp } x \in \Omega. \tag{2.5}$$

$$\mathbf{n}(x) \wedge (\varepsilon^{-1}\mathbf{D}(t,x)) = 0, \;\; t > 0, x \in \Gamma_1 \tag{2.6}$$

(Condition de conducteur parfait).

$$\mathbf{n}(x) \wedge (\varepsilon^{-1}\mathbf{D}(t,x)) + Z\mathbf{n}(x) \wedge (\mathbf{n}(x) \wedge (\mu^{-1}\mathbf{B}(t,x))) = 0, \;\; t > 0, x \in \Gamma_2 \tag{2.7}$$

(Condition de Silver-Müller).

Hypothèses

On suppose que Γ_2 est la frontière délimitant localement un milieu homogène et isotrope (μ et ε sont des constantes dans le voisinage de Γ_2). Par conséquent, l'impédance $Z = \sqrt{\mu.\varepsilon^{-1}}$ est un scalaire constant au voisinage de Γ_2. On fait l'hypothèse que les matrices ε et $\mu \in (L^\infty(\Omega))^{3\times 3}$ sont symétriques définies positives pour presque tout $x \in \Omega$ et que

$$\begin{aligned} &\exists\ \alpha > 0, \quad \beta > 0, \\ &\alpha Id \leq \epsilon \leq \beta Id \qquad \alpha Id \leq \mu \leq \beta Id \quad \text{pp } x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ces inégalités sont considérées dans le sens suivant :

$$\begin{aligned} \forall \xi : \alpha|\xi|^2 \leq \epsilon\xi.\xi \leq \beta|\xi|^2. \\ \forall \xi : \alpha|\xi|^2 \leq \mu\xi.\xi \leq \beta|\xi|^2. \end{aligned}$$

Les inductions et les champs sont reliés par des lois constitutives qui sont données pour des milieux linéaires et anisotropes par les équations (2.2). Avant de définir précisement ce qu'on entend par solution du problème constitué des équations (2.4), (2.5), (2.6), et (2.7) et noté (M) dans la suite, rappelons la définition du théorème de Hille-Yosida concernant l'existence et l'unicité de solutions des problèmes d'évolution, et quelques résultats sur les traces des fonctions $H(\mathbf{rot},\Omega)$.

2.2.2.1 Définitions

Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert, et un opérateur $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ linéaire non-borné.
. On dit que $\mathbf{A}$ est monotone si :

$$(\mathbf{A}v,v) \geq 0 \quad \forall v \in D(\mathbf{A})$$

$\mathbf{A}$ est maximal monotone si de plus, on a :
$\forall f \in \mathbf{H},\ \exists U \in D(\mathbf{A})$ tel que :

$$U + \mathbf{A}U = f.$$

. Soit $\mathbf{A}^*\ : \mathbf{D}(\mathbf{A}^*) \subset \mathbf{H}' \rightarrow \mathbf{H}'$ l'adjoint de $\mathbf{A}$, on a la relation suivante :

$$(v,\mathbf{A}u)_{\mathbf{H}',\mathbf{H}} = (\mathbf{A}^*v,u)_{\mathbf{H}',\mathbf{H}},\ \forall u \in \mathbf{D}(\mathbf{A}),\ \forall v \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^*).$$

On fera dans la suite l'identification $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$, alors nous avons l'équivalence suivante :

Lemme 1
A est maximal monotone si seulement si A est fermé, $\mathrm{D(A)}$ est dense, A et l'adjoint de A noté A^* sont monotones.

Dans le souci d'être complet, nous donnons la démonstration du lemme qui est laissée en exercice dans [14].

Démonstration du lemme 1

Montrons d'abord l'implication :
a) $\mathbf{A}$ maximal monotone $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ fermé, $\mathbf{D(A)}$ dense, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^*$ monotones.

Soit une suite $u_n \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ qui converge vers $u \in \mathbf{H}$, et $\mathbf{A}u_n$ converge vers f dans $\mathbf{H}$. Il faut montrer que (u,f) appartient au graphe de $\mathbf{A}$. Notons d'abord que le noyau $N(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \{0\}$. En effet pour $u \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ telle que $u + \mathbf{A}u = 0$, on déduit en la multipliant par u, et en tenant compte de la monotonie de $\mathbf{A}$, que $u = 0$. par ailleurs, nous avons $u_n + \mathbf{A}u_n \to u + f$ dans $\mathbf{H}$, et grâce au fait que $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ est bijectif, nous pouvons écrire :

$$u_n = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(u_n + \mathbf{A}u_n) \to (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(u + f).$$

On obtient par passage à la limite :

$$u = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(u + f).$$

Ce qui implique que $u \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{A}u = f$, et par conséquent $\mathbf{A}$ est fermé. Pour montrer que $\mathbf{D(A)}$ est dense dans $\mathbf{H}$, il suffit de voir que pour toute fonction $f \in \mathbf{H}$ telle que $< f,u >= 0 \ \forall u \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$, alors $f = 0$. En effet, il existe $v \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ tel que $v + \mathbf{A}v = f$, et nous avons en particulier $< f,v >= 0$ ce qui implique $< v,v > + < \mathbf{A}v,v >= 0$, et grâce à la monotonie de l'opérateur $\mathbf{A}$, on obtient $v = 0$ ce qui donne $f = 0$. Il reste à montrer que $\mathbf{A}^*$ est monotone ; soit $v \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^*)$. Comme $\mathbf{A}$ est monotone maximal, l'application : $(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A})$ est bijective de $\mathbf{D(A)}$ sur $\mathbf{H}$ pour tout $\lambda > 0$ (pour la preuve, voir H. Brezis [14]).
La résolvante $\mathbf{J}_\lambda = (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A})^{-1}$ vérifie :

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathbf{J}_\lambda v = v, \ \forall v \in \mathbf{H}.$$

Posons $u_\lambda = \mathbf{J}_\lambda v \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$, on a :

$$\begin{aligned} < \mathbf{A}^* v,v >= \lim_{\lambda \to 0} < \mathbf{A}^* v,\mathbf{J}_\lambda v > &= \lim_{\lambda \to 0} < \mathbf{A}^* v,u_\lambda >. \\ &= \lim_{\lambda \to 0} < v,\mathbf{A}u_\lambda >. \\ &= \lim_{\lambda \to 0} < (\mathbf{I} + \lambda\mathbf{A})u_\lambda,\mathbf{A}u_\lambda >. \\ &= \lim_{\lambda \to 0} < u_\lambda,\mathbf{A}u_\lambda > + \lim_{\lambda \to 0} \lambda < \mathbf{A}u_\lambda,\mathbf{A}u_\lambda > \ \geq 0, \end{aligned}$$

car $\mathbf{A}$ est monotone, et $\lambda > 0$. Cela prouve la monotonie de $\mathbf{A}^*$.

Montrons maintenant l'implication suivante :
b) $\mathbf{A}$ fermé, $\mathbf{D(A)}$ dense, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^*$ monotones $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ maximal monotone.

Il suffit de montrer que l'image $\mathbf{R}(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \mathbf{H}$. Montrons d'abord que $\mathbf{R}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ est dense dans $\mathbf{H}$. Soit $g \in \mathbf{H}$ tel que $< g,f >= 0 \;\; \forall f \in \mathbf{R}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$, montrons que $g = 0$. Ceci implique que $\forall u \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$,

$$< g,u + \mathbf{A}u >= 0,$$

et donc

$$< g,\mathbf{A}u >=< -g,u >,$$

ce qui implique que $g \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^*)$ et $\mathbf{A}^* g = -g$. Comme $\mathbf{A}^*$ est monotone, nous avons :

$$\|g\|^2 =< g,g >=< g, -\mathbf{A}^* g > \leq 0.$$

Nous obtenons ainsi $g = 0$, ce qui prouve la densité de $\mathbf{R}(\mathbf{I}+\mathbf{A})$ dans $\mathbf{H}$. Soit maintenant $f \in \mathbf{H}$,

$$\exists f_n = u_n + \mathbf{A}u_n \in \mathbf{R}(\mathbf{I}+\mathbf{A}),\;\; u_n \in \mathbf{D}(\mathbf{A}),\;\; f_n \to f \;\; dans \;\; \mathbf{H}.$$

On obtient alors :

$$\forall n,m,\;\; \|u_n - u_m\|^2 + < \mathbf{A}(u_n - u_m),u_n - u_m >=< f_n - f_m,u_n - u_m > .$$

Cela implique grâce à la monotonie de $\mathbf{A}$:

$$\|u_n - u_m\| \leq \|f_n - f_m\|.$$

u_n donc est une suite de cauchy, et par conséquent $\mathbf{A}u_n = f_n - u_n$ est aussi une suite de cauchy.
Comme $\mathbf{A}$ est fermé, on obtient :

$$\begin{aligned} &u_n \to u \in \mathbf{D}(\mathbf{A}), \\ &\mathbf{A}u_n \to \mathbf{A}u, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$f = \lim_n f_n = \lim_n (u_n + \mathbf{A}u_n) = u + \mathbf{A}u \;\in \mathbf{R}(\mathbf{I}+\mathbf{A}).$$

On a bien $\mathbf{R}(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \mathbf{H}$, et donc $\mathbf{A}$ est maximal monotone.

2.2.2.2 Rappels

Théorème de Hille-Yosida
Soit* A *un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert* H*.
Alors pour tout* $U_0 \in D(\mathbf{A})$*, il existe une unique fonction
$U \in C^1([0,+\infty);\mathbf{H}) \cap C^0([0,+\infty);D(\mathbf{A}))$***, solution de :***

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + \mathbf{A}U = 0 & sur[0,+\infty), \\ U(X,0) = U_0 & X \in D(\mathbf{A}), \end{cases} \tag{2.9}$$

De plus on a :

$$|U(t)| \leq |U_0| \qquad \forall t \geq 0,$$

$$|\frac{dU}{dt}(t)| \leq |\mathbf{A}U_0|, \quad \forall t \geq 0.$$

(Pour la preuve de ce théorème voir par exemple [14]).
Définissons les espaces de Hilbert suivants :

$$H(\mathbf{rot},\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega)^3; \mathbf{rot}v \in L^2(\Omega)^3 \right\}.$$

$$TH^s(\Gamma) = \left\{ v \in (H^s(\Gamma))^3; v.\mathbf{n} = 0 \right\}, s \in IR$$

$\mathbf{n}$ étant la normale extérieure à Γ. $TH^s(\Gamma)$ est ainsi l'ensemble des champs de vecteurs tangents sur Γ ayant la régularité $H^s(\Gamma)$.

Rappels sur les traces

Soit Ω un ouvert connexe, de frontière Γ lipschitzienne. Il existe une application trace tangentielle γ_T continue de $H(\mathbf{rot},\Omega)$ dans $TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, qui prolonge l'application de $[C^\infty(\Omega)]^3$: $\varphi \to \varphi - (\varphi.\mathbf{n})\mathbf{n}|_\Gamma$. Il existe également une application trace γ_τ de $H(\mathbf{rot},\Omega)$ dans $TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, qui prolonge l'application de $[C^\infty(\Omega)]^3$: $\varphi \to \varphi \wedge \mathbf{n}|_\Gamma$, mais il est connu que ces applications ne sont pas surjectives. Pour obtenir un résultat de surjectivité, on introduit les espaces optimaux suivants :

$$H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ v \in TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); rot_\Gamma v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}.$$

$$H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ v \in TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma); div_\Gamma v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}.$$

où div_Γ et rot_Γ définissent respectivement la divergence surfacique et le rotationnel tangentiel définis par :

$$div_\Gamma v = div\tilde{v}|_\Gamma,$$

$$rot_\Gamma v = rot(\tilde{v}.\tilde{\mathbf{n}})|_\Gamma,$$

où $\tilde{v}$ et $\tilde{\mathbf{n}}$ sont des prolongements du champ v et de la normale $\mathbf{n}$ respectivement définis dans un voisinage de Γ.

$H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sont des espaces de Hilbert, et on a le résultat de dualité suivant :

$$H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))' = TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma) + \nabla_\Gamma(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

$$H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))' = TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma) + \overrightarrow{rot}_\Gamma(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

$\overrightarrow{rot}_\Gamma$ et ∇_Γ sont des opérateurs différentiels opérant sur les champs de distributions tangentes à Γ, continus respectivement de $TH^{\frac{1}{2}}$ dans $H^{-\frac{1}{2}}$ et de $H^{\frac{1}{2}}$ dans $TH^{-\frac{1}{2}}$. Pour la preuve voir [63]. Nous avons ainsi le théorème de trace suivant :

Théorème

1-γ_T ***se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu et surjectif de*** $H(\mathbf{rot},\Omega)$ ***dans*** $H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

2-γ_τ ***se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu et surjectif de*** $H(\mathbf{rot},\Omega)$ ***dans*** $H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

3- ***on a la formule de Green suivante :***

$$\forall q, v \in H(\mathbf{rot},\Omega), \ \int_\Omega v\,\mathbf{rot} q - \int_\Omega q\,\mathbf{rot} v = - < \gamma_\tau(q), \gamma_T(v) >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}, H_{rot}^{-\frac{1}{2}}},$$

Nous introduisons l'opérateur de Laplace-Beltrami scalaire défini sur une fonction u par :

$$\Delta_\Gamma u = div_\Gamma \nabla_\Gamma u = -rot_\Gamma \overrightarrow{rot}_\Gamma u.$$

Ainsi que l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel défini sur un champ tangent :

$$\Delta_\Gamma v = \nabla_\Gamma div_\Gamma v - \overrightarrow{rot}_\Gamma rot_\Gamma v, \tag{2.10}$$

où $\overrightarrow{rot}_\Gamma u$ est donné par:

$$\overrightarrow{rot}_\Gamma u = \nabla_\Gamma u \wedge \mathbf{n},$$

et:

$$\nabla_\Gamma u = \nabla \tilde{u}|_\Gamma.$$

Remarque

Tout champ de vecteur v tangent à une surface Γ peut s'écrire dans la base des vecteurs propres de $-\Delta_\Gamma$ vectoriel sous la forme suivante :

$$v(x) = \sum_{j=1}^{j=N} \gamma_j \overrightarrow{u}_j + \sum_{i=0}^{i=\infty} \alpha_i \nabla_\Gamma Y_i + \beta_i \overrightarrow{rot}_\Gamma Y_i,$$

où Y_i sont les fonctions propres de l'opérateur $-\Delta_\Gamma$ scalaire. $\overrightarrow{rot} Y_i$, $\nabla_\Gamma Y_i$, et $\overrightarrow{u}_j$ sont les vecteurs propres de $-\Delta_\Gamma$ vectoriel.

(Pour plus de détails voir [63], [1], [5], et [61]).

Lemme 2 (H. Baruq et B. Hanouzet [2])
Soit un champ de vecteur v ***appartenant à l'espace*** $H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ***alors*** $v \in TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$***, et on a le produit de dualité suivant :***

$$< v,v >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}},H_{rot}^{-\frac{1}{2}}} = \int_\Gamma |v|^2 d\Gamma.$$

Démonstration du lemme 2

Nous déduisons du fait que $v \in H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, que l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel défini par l'équation (2.10) vérifie :

$$\Delta_\Gamma v \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma),$$

et donc $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Comme $v.\mathbf{n} = 0$, on déduit finalement que $v \in TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Cela permet d'écrire :

$$< v,v >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}},H_{rot}^{-\frac{1}{2}}} = \int_\Gamma |v|^2 d\Gamma.$$

2.2.3 Théorème d'existence et d'unicité

On va travailler avec l'espace de Hilbert $\mathbf{H} = (L^2(\Omega))^6$. Soit l'espace :

$$\mathbf{V} = \left\{ \begin{array}{c} (u,v) \in \mathbf{H}; (\mu^{-1}u,\varepsilon^{-1}v) \in [H(\mathbf{rot},\Omega)]^2; \gamma_T(\varepsilon^{-1}v) = 0\, sur\, \Gamma_1, \\ \gamma_\tau(\varepsilon^{-1}v) - Z\gamma_T(\mu^{-1}u) = 0\, sur\, \Gamma_2 \end{array} \right\}. \quad (2.11)$$

Nous avons alors le théorème suivant :

Théorème
Le système (M) admet une unique solution dans $C^1([0,+\infty);\mathbf{H})\cap C^0([0,+\infty);\mathbf{V})$ ***pour tout*** $(\mathbf{B}_0,\mathbf{D}_0)\in\mathbf{V}$***. De plus si*** $\mathbf{div}\mathbf{B}_0 = \mathbf{div}\mathbf{D}_0 = 0$***, on a pour tout*** $t\geq 0$***,*** $\mathbf{div}\mathbf{B}(t,.) = \mathbf{div}\mathbf{D}(t,.) = 0$***.***

Le point difficile dans ce type de problème est l'unicité. L'existence de solution s'obtient par une régularisation standard des coefficients et un passage à la limite. Pour démontrer l'unicité, on doit justifier des intégrations par parties qui permettent d'obtenir une conservation de l'énergie. Cette justification est basée sur une régularisation cette fois de la solution. A partir de là, plusieurs techniques de démonstration sont possibles. On choisit ici une approche de type Hille-Yosida [[14], [86]].

Démonstration

Les matrices μ et ε étant symétriques définis positives, on peut alors définir $(\sqrt{\mu})^{-1}$ et $(\sqrt{\varepsilon})^{-1}$. Introduisons maintenant les variables suivantes :

$$\mathbf{b} = (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{B}, \quad et \quad \mathbf{d} = (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{D}.$$

Le système de Maxwell s'écrit en fonction de $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$ comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\sqrt{\mu})^{-1}\,\mathbf{rot}((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) \ = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} - (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\,\mathbf{rot}((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) \ = 0, \\[2ex] \mathbf{b}(0,.) = \mathbf{b}_0(.) = (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{B}_0(.), \\[2ex] \mathbf{d}(0,.) = \mathbf{d}_0(.) = (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{D}_0(.). \end{array}\right. \tag{2.12}$$

Ce système peut se mettre sous la forme (2.9). On note

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

On obtient l'équation suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\mathbf{Q}}{dt} + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q} = 0, \\[2ex] \mathbf{Q}(0,x) = \mathbf{Q}_0 = (\mathbf{b_0},\mathbf{d_0}), \quad x\in\Omega. \end{array}\right. \tag{2.13}$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{rot}((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) \\ \\ -(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{rot}((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) \end{pmatrix},$$

et les conditions aux limites s'écrivent de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{n}(x) \wedge ((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}(t,x)) = 0,\ t > 0, x \in \Gamma_1, \\ \\ \mathbf{n}(x) \wedge ((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}(t,x)) + Z\mathbf{n}(x) \wedge (\mathbf{n}(x) \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}(t,x))) = 0,\ t > 0, x \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{2.14}$$

On notera encore par (M) le problème avec les nouvelles variables (équations 2.13, et 2.14).

Introduisons l'opérateur non borné $\mathbf{A}$ défini sur $\mathbf{H}$ de domaine

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q} = (\mathbf{b},\mathbf{d}) \in \mathbf{H}; (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b},(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) \in [H(\mathbf{rot},\Omega)]^2; \gamma_T((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) = 0\, sur\, \Gamma_1, \\ \gamma_\tau((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) - Z\gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) = 0\, sur\, \Gamma_2 \end{array} \right\}.$$

Tel que :

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}) = \mathbf{A}(\mathbf{b},\mathbf{d}) =^t ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{rot}(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}, -(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{rot}(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}). \tag{2.15}$$

On est ramené à démontrer que $\mathbf{A}$ est maximal monotone. Pour cela il suffit de montrer que $\mathbf{A}$ est fermé, $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ dense dans $\mathbf{H}$, et que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^*$(adjoint de $\mathbf{A}$) sont monotones (voir lemme 1).

L'opérateur A est monotone

Pour $\mathbf{Q}$=($\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$) $\in \mathbf{D}(\mathbf{A})$, nous avons :

$$< \mathbf{AQ},\mathbf{Q} >= \int_\Omega \mathbf{b}.[(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{rot}(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}] - \mathbf{d}.[(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{rot}(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}],$$

Du fait que Z est une constante au voisinage de Γ_2 et grâce au théorème de traces cité précédemment, nous déduisons en tenant compte du fait que les tenseurs ε et μ sont symétriques et donc autoadjoints, la formulation suivante :

$$< \mathbf{AQ},\mathbf{Q} >= \int_\Omega (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}.\mathbf{rot}(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b} - \int_\Omega (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}.\mathbf{rot}(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{b}$$

$$+ < (\mathbf{n} \wedge (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}),(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b} >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

$$< \mathbf{AQ},\mathbf{Q} >= - < Z\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b})),(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b} >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}.$$

$$= -Z < \mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) \wedge \mathbf{n} >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} .$$

$$= Z < \mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),\mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} .$$

Grâce à la condition : $\gamma_\tau((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) - Z\gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) = 0$ sur Γ_2, on déduit que $\mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) \in H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \cap H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$. D'où, en appliquant le lemme 2 à $v = \mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b})$, on obtient :

$$< \mathbf{AQ},\mathbf{Q} >= Z(\mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),\mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}))_{(L^2(\Gamma_2))^3}.$$

$$\boxed{< \mathbf{AQ},\mathbf{Q} >= Z\|\mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b})\|^2_{(L^2(\Gamma_2))^3} \geq 0}$$

$$\Rightarrow \forall \mathbf{Q} \in \mathbf{D}(\mathbf{A}) \quad < \mathbf{AQ},\mathbf{Q} > \ \geq 0.$$

Ce qui montre que $\mathbf{A}$ est monotone. Il reste à montrer que $\mathbf{A}$ est fermé, $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ est dense dans $\mathbf{H}$ et que l'adjoint $\mathbf{A}^*$ de $\mathbf{A}$ est monotone.

1) A est fermé :

Soit une suite $(u_n = (\mathbf{b}_n,\mathbf{d}_n))$ dans $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ telle que :

$u_n \to u = (\mathbf{b},\mathbf{d})$ dans $\mathbf{H}$ et $\mathbf{A}u_n \to f = (f_1,f_2)$ dans $\mathbf{H}$.

Il reste à montrer que (u,f) appartient au graphe de $\mathbf{A}$. Du fait que les matrices ε et μ sont majorées et minorées, on déduit que :

$$((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}_n,(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}_n) \to ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b},(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) \text{ dans } \mathbf{H}, \text{ et que}$$

$$\mathbf{rot}((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}_n) \to \sqrt{\mu}f_1, \quad \text{et} \quad -\mathbf{rot}((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}_n) \to \sqrt{\varepsilon}f_2.$$

Ceci étant vrai au sens des distributions et par unicité de la limite, on déduit que

$$f_1 = (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{rot}((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) \quad \text{et} \quad f_2 = -(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{rot}((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}).$$

Ce qui prouve que

$$\mathbf{rot}((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) \in L^2(\Omega)^3, \quad \text{et que}$$

$$\mathbf{rot}((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) \in L^2(\Omega)^3.$$

Ainsi, $(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}_n$ et $(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}_n$ convergent respectivement vers $(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}$ et $(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}$ dans $H(\mathbf{rot},\Omega)$.
Nous avons par ailleurs

$$\mathbf{n}\wedge((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}_n)=0 \text{ sur } \Gamma_1, \text{ et } \mathbf{n}\wedge(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}_n|_{\Gamma_2}+Z\mathbf{n}\wedge(\mathbf{n}\wedge((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}_n|_{\Gamma_2}))=0.$$

Comme γ_T et γ_τ sont des opérateurs continus de $H(\mathbf{rot},\Omega)$ dans respectivement $H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, nous obtenons après passage à la limite :

$$\begin{cases} \mathbf{n}\wedge((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d})=0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1, \\ \\ \mathbf{n}\wedge(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}|_{\Gamma_2}+Z\mathbf{n}\wedge(\mathbf{n}\wedge((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}|_{\Gamma_2}))=0. \end{cases}$$

Ceci implique que $u\in\mathbf{D}(\mathbf{A})$ et que finalement

$$f=\mathbf{A}u.$$

A est donc un opérateur fermé.

2) D(A) est dense dans H :

C'est le point clé de la démonstration. Notons $D(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω. $I\!D(\Omega)=[D(\Omega)]^6$ est dense dans $\mathbf{H}$. Cependant $I\!D(\Omega)$ n'est pas inclus dans $\mathbf{D(A)}$. néanmoins, nous avons :

$$\forall(\mathbf{b},\mathbf{d})\in I\!D(\Omega), \text{ la suite}$$

$$(\mathbf{b}_k,\mathbf{d}_k)=(\sqrt{\mu}(\rho_k*(\sqrt{\mu}^{-1}\mathbf{b})),\sqrt{\varepsilon}(\rho_k*(\sqrt{\varepsilon}^{-1}\mathbf{d})))\in\mathbf{D}(\mathbf{A}),$$

où ρ_k est une suite régularisante. La suite $(\sqrt{\mu}(\rho_k*(\sqrt{\mu}^{-1}\mathbf{b})),\sqrt{\varepsilon}(\rho_k*(\sqrt{\varepsilon}^{-1}\mathbf{d})))$ tend vers $(\mathbf{b},\mathbf{d})$ pour la norme **H** et ceci grâce au fait que les tenseurs ε et μ sont bornés. Ainsi, nous déduisons que pour toute fonction de **H**, nous pouvons l'approcher par une suite de $I\!D(\Omega)$, qu'on peut approcher à son tour par une suite de $\mathbf{D(A)}$ pour la norme **H**. Ce qui prouve la densité de $\mathbf{D(A)}$ dans **H**.

3) A* est monotone :

L'opérateur $\mathbf{A}^*:\mathbf{D}(\mathbf{A}^*)\subset\mathbf{H}\longrightarrow\mathbf{H}$ est l'adjoint de **A** défini par :

$$<\mathbf{AQ},\mathbf{Q}^*>=<\mathbf{Q},\mathbf{A}^*\mathbf{Q}^*>,\ \forall\mathbf{Q}=(\mathbf{b},\mathbf{d})\in\mathbf{D}(\mathbf{A}),\ \forall\mathbf{Q}^*=(\mathbf{b}^*,\mathbf{d}^*)\in\mathbf{D}(\mathbf{A}^*). \tag{2.16}$$

On a immédiatement

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}^*) \subset \mathbf{W} = \left\{ \mathbf{Q} = (\mathbf{b},\mathbf{d}) \in \mathbf{H}; (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{d},(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{b}) \in [H(\mathbf{rot},\Omega)]^2 \right\}. \tag{2.17}$$

En effet, la relation (2.16) est vérifiée en particulier pour :

$$\mathbf{Q} = (0,\sqrt{\varepsilon}\,u),\ avec\ u \in [D(\Omega)]^3,\ on\, a\ \ :$$

$$< \mathbf{AQ},\mathbf{Q}^* >= \int_\Omega (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^*.\mathbf{rot}u. \tag{2.18}$$

Nous pouvons reécrire (2.18) pour $u \in [D(\Omega)]^3$ de la manière suivante :

$$< \mathbf{AQ},\mathbf{Q}^* >=< \mathbf{rot}(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^*,u >.$$

Comme

$$| < \mathbf{AQ},\mathbf{Q}^* > | \leq \|\mathbf{A}^*\mathbf{Q}^*\|\|\mathbf{Q}\| \leq \beta\|\mathbf{A}^*\mathbf{Q}^*\|\|u\|_{(L^2(\Omega))^3},$$

on en déduit que

$$(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^* \in H(\mathbf{rot},\Omega).$$

Avec le même raisonnement en choisissant cette fois-ci :

$$\mathbf{Q} = ((\sqrt{\mu}\,u,0),\ avec\ u \in [D(\Omega)]^3,$$

on obtient :

$$(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* \in H(\mathbf{rot},\Omega).$$

Ce qui montre (2.17).
Soit maintenant $\mathbf{Q} = (\mathbf{b},\mathbf{d}) \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$, et $\mathbf{Q}^* = (\mathbf{b}^*,\mathbf{d}^*) \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^*) \subset \mathbf{W}$, nous avons après

intégration par parties :

$$(\mathbf{AQ},\mathbf{Q}^*) = \int_\Omega (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}.\mathbf{rot}(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^* - (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}.\mathbf{rot}(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^*$$
$$+ < \mathbf{n}\wedge((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}),(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^* - \mathbf{n}\wedge((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

$$(\mathbf{AQ},\mathbf{Q}^*) = -\int_\Omega (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}.\mathbf{rot}(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* - (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}.\mathbf{rot}(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^*$$
$$- < \mathbf{n}\wedge((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$$
$$+ < \mathbf{n}\wedge((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}),(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^* >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}$$
$$- < \mathbf{n}\wedge((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}.$$

$$(\mathbf{AQ},\mathbf{Q}^*) = -\int_\Omega (\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}.\mathbf{rot}(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* - (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}.\mathbf{rot}(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^*$$
$$+ < \gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),\mathbf{n}\wedge(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* >_{H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$$
$$+ < \gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),-Z\mathbf{n}\wedge(\mathbf{n}\wedge(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^*) >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}$$
$$+ < \gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),\mathbf{n}\wedge((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^*) >_{H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)}.$$

On en déduit d'abord que

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{Q}^*) = -^t((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{rot}(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* - (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{rot}(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^*),$$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned} &< \gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),\mathbf{n}\wedge(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* >_{H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &+ < \gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),-Z\mathbf{n}\wedge(\mathbf{n}\wedge(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^*) >_{H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \\ &+ < \gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}),\mathbf{n}\wedge((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^*) >_{H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} \quad = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Rappelons que Γ_1 et Γ_2 sont deux ouverts disjoints de Γ. Soit u_Γ un élément quelconque de $H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$; par surjectivité de l'application trace, il existe $u \in H(\mathbf{rot},\Omega)$ avec $\gamma_T(u) = u_\Gamma$.

On peut toujours supposer que u s'annule sur un voisinage de Γ_2. On vérifie aisément que $(\sqrt{\mu}\,u,0) \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ et (2.19) devient :

$$< u_\Gamma,\mathbf{n} \wedge (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* >_{H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = 0. \tag{2.20}$$

On en déduit que $\mathbf{n} \wedge (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^* = 0$ sur Γ_1.
Soit maintenant u_Γ un élément quelconque de $TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \subset H_{rot}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$. Il existe $u \in H(\mathbf{rot},\Omega)$ avec $\gamma_T(u) = u_\Gamma$. Comme Z est scalaire (car par hypothèse, les milieux sont homogènes au voisinage de Γ_2), on a $Z\gamma_T(u) \in TH^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \subset H_{div}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$. Par conséquent il existe $v \in H(\mathbf{rot},\Omega)$ avec $\gamma_\tau(v) = Z\gamma_T(u)$ et on peut toujours supposer que u et v s'annulent au voisinage de Γ_1. On a alors $(\sqrt{\mu}\,u,\sqrt{\varepsilon}\,v) \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ et (2.19) devient :

$$< u_\Gamma,\gamma_\tau((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^*) + Z\gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^*) >_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2),H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} = 0. \tag{2.21}$$

On en déduit que $\gamma_\tau((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}^*) + Z\gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}^*) = 0$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$.
Le domaine de définition de l'opérateur adjoint $\mathbf{A}^*$ vérifie donc :

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}^*) \subset \mathbf{X} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q} = (\mathbf{b},\mathbf{d}) \in \mathbf{H};(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b},(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) \in [H(\mathbf{rot},\Omega)]^2;\gamma_T((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) = 0\, sur\, \Gamma_1, \\ \gamma_\tau((\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d}) + Z\gamma_T((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) = 0\, sur\, \Gamma_2 \end{array} \right\}.$$

On vérifie aisément qu'on a l'égalité $\mathbf{D}(\mathbf{A}^*) = \mathbf{X}$. En effet, soit $\mathbf{Q} = (\mathbf{b},\mathbf{d})$ un élément de $\mathbf{X}$, on a :

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{Q}) = -{}^t((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{rot}(\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{d} - (\sqrt{\varepsilon})^{-1}\mathbf{rot}(\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b}) \in \mathbf{H}.$$

Ce qui montre que $\mathbf{Q} \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^*)$, et par conséquent $\mathbf{X} \subset \mathbf{D}(\mathbf{A}^*)$.
Il en résulte que pour $\mathbf{Q}$=($\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$) $\in \mathbf{D}(\mathbf{A}^*)$

$$< \mathbf{A}^*\mathbf{Q},\mathbf{Q} >= Z\|\mathbf{n} \wedge ((\sqrt{\mu})^{-1}\mathbf{b})\|^2_{(L^2(\Gamma_2))^3} \geq 0.$$

D'où la monotonie de l'opérateur $\mathbf{A}^*$. Ce qui implique que l'opérateur $\mathbf{A}$ est monotone maximal. Les conditions du théorème de **Hille-Yosida** étant vérifiées, nous déduisons l'existence et l'unicité de la solution du système de Maxwell (M) dans un milieu non régulier au sens où les indices du milieu sont des matrices à coefficients non réguliers.

2.2.4 Remarque

Afin d'obtenir des solutions à divergence nulle, il suffit de prendre des conditions initiales à divergence nulle. On peut constater que si on appliquait l'opérateur divergence aux équations (2.4), on obtiendrait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} div\mathbf{B} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t} div\mathbf{D} = 0, \end{array} \right.$$

au sens des distributions. Donc il suffit de prendre :

$$\begin{cases} div\mathbf{B}(0,.) = 0, \\ \\ div\mathbf{D}(0,.) = 0, \end{cases}$$

dans $D'(\Omega)$ (espace des distributions), pour avoir :

$$\begin{cases} div\mathbf{B}(t,.) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty), \\ \\ div\mathbf{D}(t,.) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

dans $D'(\Omega)$ pour tout t.

Commentaire

I) Régularité par rapport à la condition initiale

Supposons que $u_0 = (\mathbf{b_0},\mathbf{d_0})$ n'est pas dans $\mathbf{D(A)}$, mais seulement dans $\mathbf{H}$, alors il existe une suite $(u_{0n}) \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$ qui converge dans $\mathbf{H}$ vers u_0.
Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + \mathbf{A}u_n = 0, \\ \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \tag{2.22}$$

D'apès le théorème de Hille-Yosida, il existe une solution u_n à ce problème telle que $u_n \in C^1([0, +\infty); \mathbf{H}) \cap C^0([0, +\infty); D(\mathbf{A}))$, et que :

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|u_{0n} - u_{0m}\|, \; \forall n,m, \; \forall t \geq 0.$$

Ce qui implique que la suite $u_n(t)$ converge uniformément vers une limite $u(t)$ sur $[0, +\infty[$ et que $u \in C^0([0, +\infty; \mathbf{H}[)$, mais rien n'assure que $u(t) \in \mathbf{D}(\mathbf{A})$. Par contre $u(t)$ est une solution faible du problème (2.13).

II) Le système de Maxwell avec second membre

Si on considère le système de Maxwell avec second membre :

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{Q}}{dt} + \mathbf{AQ} = \mathbf{f}, \\ \\ \mathbf{Q}(0,x) = \mathbf{Q}_0 = (\mathbf{b_0},\mathbf{d_0}), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

où $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{A}$ sont ceux que nous avons considérés tout au long de ce chapitre avec les mêmes conditions aux limites (métallique et absorbante), alors
1) Si $\mathbf{f} \in C^1([0,T]; \mathbf{H})$, le problème précédent admet une solution unique
$\mathbf{Q} \in C^1([0,T]; \mathbf{H}) \cap C^0([0,T]; \mathbf{D(A)})$, et elle est donnée par :

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{S_A}(t)\mathbf{Q}_0 + \int_0^t \mathbf{S_A}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \tag{2.24}$$

où $\mathbf{S_A}$ est le semi-groupe continu de contraction engendré par $\mathbf{A}$.
2) Si maintenant on suppose $\mathbf{f}$ juste dans $L^2(0, \mathrm{T}; \mathbf{H})$, alors la solution donnée par (2.24) est une solution faible de notre problème. Voir par exemple [50], [64], [78], et [14] en ce qui concerne la régularité des solutions des problèmes d'évolution.

2.2.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que si on imposait à la condition initiale $(\mathbf{B_0},\mathbf{D_0})$ d'être dans $(L^2)^6$ telle que $(\mu^{-1}\mathbf{B_0},\varepsilon^{-\mathbf{1}}\mathbf{D_0})$ appartient à $[H(\mathbf{rot},\Omega)]^2$, le système de Maxwell considéré avec des conditions aux limites mixtes; une condition métallique et une condition de type absorbant, admettait une unique solution L^2 en espace et C^1 en temps, et ceci dans des milieux matériels quelconques. Nous avons utilisé le caractère monotone et maximal de l'opérateur différentiel du système écrit sous forme d'un problème d'évolution du premier ordre pour démontrer ce résultat. Nous avons également vu que du fait que les conditions de divergence sont redondantes, il suffit de prendre des conditions initiales à divergence nulle pour obtenir des solutions à divergence nulle.

2.3 Milieu isotrope

Les milieux isotropes sont caractérisés par le fait que les coefficients du milieu de propagation sont des fonctions scalaires qui dépendent éventuellement de la variable d'espace. Nous donnons ici quelques caractéristiques du système de Maxwell quand le domaine considéré est linéaire et isotrope :

2.3.1 Formulation conservative et hyperbolicité

Le système de Maxwell peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F_1}(\mathbf{Q})_x + \mathbf{F_2}(\mathbf{Q})_y + \mathbf{F_3}(\mathbf{Q})_z = -\mathbf{J} \,, \tag{2.25}$$

avec :

$$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{c} B_x \\ B_y \\ B_z \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{array} \right\}, \quad \mathbf{F_1}(\mathbf{Q}) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -D_z/\varepsilon \\ D_y/\varepsilon \\ 0 \\ B_z/\mu \\ -B_y/\mu \end{array} \right\}, \quad \mathbf{F_2}(\mathbf{Q}) = \left\{ \begin{array}{c} D_z/\varepsilon \\ 0 \\ -D_x/\varepsilon \\ -B_z/\mu \\ 0 \\ B_x/\mu \end{array} \right\}, \quad \mathbf{F_3}(\mathbf{Q}) = \left\{ \begin{array}{c} -D_y/\varepsilon \\ D_x/\varepsilon \\ 0 \\ B_y/\mu \\ -B_x/\mu \\ 0 \end{array} \right\},$$

soit sous forme condensée :

$$\mathbf{Q}_t + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(\mathbf{Q}) = -\mathbf{J} \ , \tag{2.26}$$

avec $\mathbb{F}(\mathbf{Q}) = {}^t(\mathbf{F_1}(\mathbf{Q})\,;\,\mathbf{F_2}(\mathbf{Q})\,;\,\mathbf{F_3}(\mathbf{Q}))$.

Cette formulation conservative s'exprime donc en fonction de l'induction magnétique $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ et du déplacement électrique $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{x},t)$. On note $\varepsilon = \varepsilon(x,y,z)$ la permittivité du milieu et $\mu = \mu(x,y,z)$ la perméabilité magnétique. Le système (2.26) est hyperbolique. En effet, considérons la combinaison linéaire de flux suivante :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{Q},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}.\mathbb{F}(\mathbf{Q}) \ ,$$

où $\boldsymbol{\eta} = {}^t(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ est un vecteur non nul quelconque de $\mathbb{R}^3$. La matrice jacobienne $\mathcal{A}$ définie par :

$$\mathcal{A}(\mathbf{Q},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}.\mathbb{F}'(\mathbf{Q}) = \eta_1\mathcal{A}_1 + \eta_2\mathcal{A}_2 + \eta_3\mathcal{A}_3 \quad , \quad (\mathcal{A}_i)_{i=1,\ldots,3} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}}\mathbf{F_i}(\mathbf{Q}) \ ,$$

est diagonalisable pour tout vecteur $\boldsymbol{\eta}$ non nul de $\mathbb{R}^3$ et pour tout vecteur $\mathbf{Q}$ de $\mathbb{R}^6$. Ses trois valeurs propres réelles de multiplicité double sont données par :

$$\lambda_1 = c \parallel \boldsymbol{\eta} \parallel \ , \lambda_2 = -c \parallel \boldsymbol{\eta} \parallel \ , \lambda_3 = 0 \ , \tag{2.27}$$

où $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\,\mu}}$ désigne la vitesse de la lumière dans le milieu de propagation. Ces propriétés du système de Maxwell sont à la base de certains schémas décentrés (exemple de méthodes volumes finis à flux décentrés).

2.3.2 Unités et adimensionnement

Rappelons ici les unités des quantités physiques que nous manipulons dans ce travail, nous avons les champs électromagnétiques, **E** dont l'unité est en Volts/mètre (V/m), et **H** dont l'unité est en *tesla*. Les indices du milieu qui sont donnés par la permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ, fonctions dépendantes de la variable en espace peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \\ \\ \mu = \mu_0 \mu_r, \end{cases}$$

où ε_r et μ_r sont des valeurs adimensionnelles relatives du milieu (ce sont les quantités qui seront considérées tout au long de cette thèse). Quant aux valeurs ε_0 et μ_0, elles représentent les indices du vide et sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-9} F/m \quad \text{(Farads/mètre)}, \\ \\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m \qquad\qquad \text{(Henrys/mètre)}. \end{cases}$$

La vitesse de la lumière dans le vide est donnée par :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 m/s \quad \text{(mètres/seconde)}.$$

Nous considérons les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{H}} = Z_0 \mathbf{H}, \\ \\ \tilde{\mathbf{j}} = Z_0 \mathbf{j}, \\ \\ \tau = c_0 t, \end{cases}$$

avec $= Z_0 = \sqrt{\mu \varepsilon^{-1}}$. Les nouvelles quantités s'expriment alors dans les unités suivantes :

$\star\tau$ en mètre (m).

$\star\mathbf{E}$ et $\tilde{\mathbf{H}}$ en Volts/mètre (V/m).

$\star\varepsilon_r$ et μ_r sont sans dimension.

Le système de Maxwell s'écrit avec les nouvelles variables de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mu_r \dfrac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \tau} + rot(\mathbf{E}) = 0, \\ \varepsilon_r \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} - rot(\tilde{\mathbf{H}}) = -\tilde{\mathbf{j}}. \end{cases}$$

Pour simplifier les écritures, on notera dans la suite :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{H}=\tilde{\mathbf{H}}.\\ \mathbf{j}=\tilde{\mathbf{j}}.\\ \varepsilon=\varepsilon_r.\\ \mu=\mu_r.\\ t=\tau.\end{array}\right.$$

On notera également :

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{B}=\mu_r\tilde{\mathbf{H}}.\\ \\ \mathbf{D}=\varepsilon_r\mathbf{E}.\end{array}\right.$$

Remarque

Nous ne considérons pour toutes les approximations numériques dans la suite de cette thèse que des matériaux isotropes.

Chapitre 3

Comparaison de deux méthodes de volumes finis en milieu homogène

Ce chapitre a fait l'objet d'un rapport INRIA (N^o 3166) réalisé avec Jean Pierre Cioni.

3.1 Introduction

Il est maintenant devenu relativement classique de considérer les équations de Maxwell instationnaires en tant que système conservatif hyperbolique [20, 59, 76]. L'utilisation de volumes finis pour la résolution numérique est alors naturelle et permet d'obtenir des schémas explicites en temps y compris pour des maillages non structurés de type éléments finis. De plus, des schémas numériques précis à la fois en temps et en espace ainsi qu'adaptés à divers dispositifs et matériaux peuvent être construits, en gardant le caractère conservatif du système.

La méthode des volumes finis est basée sur une partition du domaine de calcul en volumes (cellules d'intégration). Le choix du type de volumes de contrôle n'est pas unique en maillage non structuré et l'on peut en distinguer classiquement au moins deux : les volumes finis centrés aux noeuds du maillage (notés centrés-noeuds et constitués de polygones ou polyèdres centrés aux noeuds) et les volumes finis centrés aux éléments (notés centrés-éléments et qui sont les éléments du maillage initial). La formulation centrés-noeuds pour la résolution des équations de Maxwell a été validée pour de nombreux dispositifs [20, 21, 23, 24]. D'autre part, des résultats théoriques ont été établis en ce qui concerne la précision et la stabilité des schémas numériques employés [36, 37].

L'intérêt du développement d'une formulation centrée aux éléments est essentiellement d'ordre géométrique, puisqu'elle permet de considérer beaucoup plus naturellement (en comparaison avec la formulation centrés-noeuds) des couches de matériaux différents ou des surfaces métalliques par exemple. Les applications de cette formulation (centrés-élements) ont été développées en électromagnétisme par ([11], et [25] par exemple) où les schémas employés sont respectivement d'ordre deux et trois en temps. Dans ce chapitre, nous proposons des schémas d'ordre élevé à la fois en temps et en espace pour la formulation centrés-éléments. D'autre part, l'originalité de ce travail consiste en des comparaisons d'ordre qualitatif et quantitatif des deux formulations centrés-éléments et centrés-noeuds sur un ensemble d'applications numériques bidimensionnelles. En effet, les deux approches n'ont pas à notre connaissance été réellement confrontées. Bien que les différences doivent s'accroître avec la complexité des dispositifs étudiés, nous avons axé nos comparaisons autour d'applications assez simples afin de tester les schémas d'ordre élevé et les conditions aux limites qui ont été prises en compte différemment.

3.1.1 Ondes électromagnétiques en deux dimensions d'espace

Nous considérons ici des milieux isotropes et homogènes où les indices ε et μ sont des constantes. En deux dimensions d'espace, les équations de Maxwell peuvent être découplées en deux systèmes de trois équations analogues associés aux ondes transverses magnétiques (TM) et aux ondes transverses électriques (TE) [47]. Nous avons choisi ici la direction suivant l'axe O_z comme direction privilégiée et le champ électromagnétique ne dépend que des deux variables d'espace x et y. La polarisation de l'onde précise alors la direction des champs de vecteurs.

Pour les ondes transverses magnétiques TM_z $(\mathbf{H}.\mathbf{z} = 0)$, on a $\mathbf{B} = {}^t(B_x,B_y,0)$ et $\mathbf{D} = {}^t(0,0,D_z)$ en coordonnées cartésiennes. Seules les composantes non nulles des déplacements électrique et magnétique sont considérées. La formulation conservative bidimensionnelle en champ total et associée aux ondes transverses magnétiques s'écrit :

$$\mathbf{Q}_t + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(\mathbf{Q}) = 0 \,, \tag{3.1}$$

avec :

$$\mathbb{F}(\mathbf{Q}) = (\mathbf{F}(\mathbf{Q}), \mathbf{G}(\mathbf{Q})).$$

$\mathbf{Q} = {}^t(Q_1,Q_2,Q_3) = {}^t(B_x,B_y,D_z)$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -Q_3/\varepsilon \\ -Q_2/\mu \end{array} \right\} \quad , \quad \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \left\{ \begin{array}{c} Q_3/\varepsilon \\ 0 \\ Q_1/\mu \end{array} \right\} .$$

Pour les ondes transverses électriques TE_z $(\mathbf{E}.\mathbf{z} = 0)$, le système conservatif garde la même forme que celle du cas TM_z, seule la définition du vecteur $\mathbf{Q}$ change (voir annexe 2). Nous nous intéresserons donc par la suite uniquement au cas transverse magnétique et l'on renvoie le lecteur à l'annexe (4.6.1) pour la forme explicite du système associé à la polarisation TE. Le caractère hyperbolique des systèmes de Maxwell bidimensionnels TM et TE se montre de la même façon que pour le système de Maxwell tridimensionnel. D'autre part, la matrice jacobienne pour le système TM devient :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_2/\varepsilon \\ 0 & 0 & -\eta_1/\varepsilon \\ \eta_2/\mu & -\eta_1/\mu & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.2}$$

Les valeurs propres, au nombre de trois et distinctes, restent identiques à celles du système complet (cf . Eq. (2.27)). Dorénavant, nous nous restreindrons aux problèmes bidimensionnels de propagation d'onde qui sont régis par les équations (3.1).

3.2 Approximation numérique

3.2.1 Présentation des deux méthodes de volumes finis

Le système de Maxwell en régime transitoire que nous étudions ici est linéaire, hyperbolique et conservatif en la variable $\mathbf{Q}$. Ceci justifie l'approximation numérique basée sur des schémas décentrés que nous avons choisie ici, parfaitement adaptés et développés à l'origine pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques et conservatifs. Le choix des volumes finis est en particulier dicté par la possibilité d'obtenir des schémas conservatifs explicites, y compris pour des maillages tridimensionnels non structurés de type éléments finis [20]. Il est également possible de définir des schémas d'ordre élevé pour ce type de méthode [36, 37]. L'idée de base de ces méthodes est de diviser le domaine spatial considéré en cellules appelées volumes finis et de former les équations discrètes à partir de la formulation faible du système de lois de conservation, écrite pour chaque cellule.

A partir d'un même maillage bidimensionnel de type éléments finis triangulaires, plusieurs choix sont alors possibles pour la définition des cellules, tout en gardant le même type de schémas numériques pour la résolution des équations.

Une méthode de volumes finis (que l'on notera centrés-noeuds par la suite) a été développée pour des volumes de contrôles constitués de polygones centrés autour des noeuds du maillage en dimension deux (figure 3.1) passant par les barycentres des triangles et les milieux des arêtes, et de polyèdres en dimension trois. Cette approche a notamment été validée en dimensions deux et trois d'espace pour les équations de Maxwell [20, 21, 22, 23].

Une autre possibilité est de prendre comme volumes de contrôle les éléments du maillage, plus précisément des triangles pour le cas bidimensionnel considéré (fig. 3.2). Les volumes finis sont alors dits centrés aux éléments et nous référencerons dans la suite par centrés-éléments cette deuxième approche, qui a été proposée initialement par Durlofsky, Osher et Engquist pour les équations d'advection et de Burgers [41].

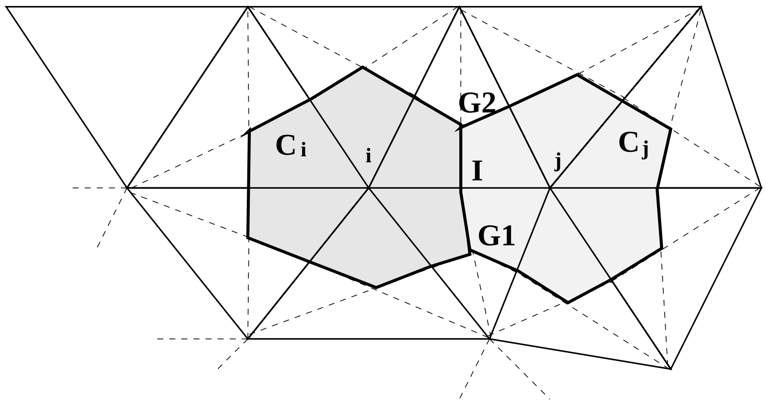


FIG. 3.1 – *Cellule d'intégration C_i (méthode centrés-noeuds).*

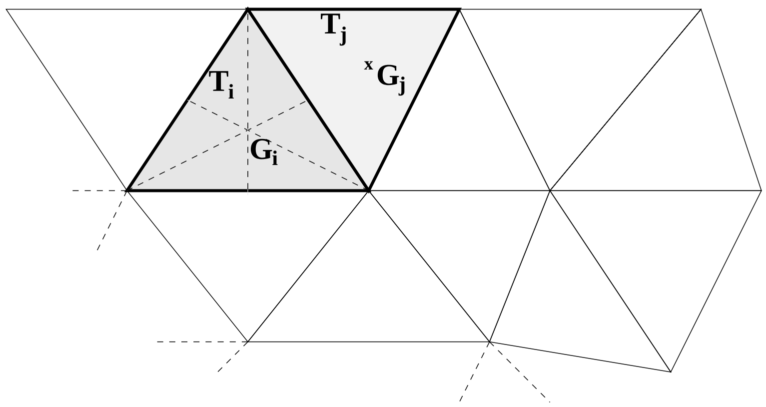


FIG. 3.2 – *Cellule d'intégration T_i (méthode centrés-éléments).*

Remarque 3.2.1 *L'interface entre deux cellules pour la méthode centrés-noeuds est une réunion de deux segments* $[I,IG1]$ *et* $[I,IG2]$ *(cf. fig. 3.1). En revanche, pour la méthode centrés-éléments, les interfaces entre deux triangles (ou cellules) sont des segments de la triangulation (fig. 3.2).*

Les parties relatives aux schémas numériques sont très similaires pour les deux méthodes. Nous avons donc choisi de présenter ici la méthode centrés-éléments en mettant en valeur ses particularités et différences par rapport à la méthode centrés-noeuds ainsi que les différents choix possibles inhérents à cette seconde approche (en ce qui concerne les conditions aux limites et le calcul des gradients par exemple). Nous renvoyons d'autre part le lecteur à [20, 19] pour plus de détails concernant la méthode de volumes finis centrés-noeuds.

3.2.2 Formulation faible et flux décentré d'ordre un

Formulation faible

Soit une discrétisation par éléments finis P1 du domaine de calcul bidimensionnel Ω donnée par : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{nt} T_i$, où T_i est un triangle et nt le nombre d'éléments.

Une formulation faible est obtenue en intégrant le système (3.1) sur chaque volume de contrôle ou triangle T_i en prenant comme fonction test les fonctions caractéristiques des cellules. En supposant la dérivée partielle $\mathbf{Q}_t$ constante en espace sur T_i, on obtient en utilisant une formule de Green, l'équation pour chaque triangle du maillage :

$$Aire(T_i)\,(\mathbf{Q}_t)_i + \int_{\partial T_i} \mathbb{F}(\mathbf{Q}).\boldsymbol{\nu}\, d\sigma = 0 \;, \tag{3.3}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale unitaire extérieure à ∂T_i.
Le terme intégral dans l'équation (3.3) peut alors être décomposé en une somme de flux internes et de termes de bord :

$$Aire(T_i)\,(\mathbf{Q}_t)_i + \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\Phi_{ij}} + \text{termes de bord} = 0 \;, \tag{3.4}$$

où $\boldsymbol{\Phi_{ij}}$ est une approximation que nous allons définir du flux interne $\displaystyle\int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbb{F}(\mathbf{Q}).\boldsymbol{\nu}\, d\sigma$.

Flux décentré d'ordre un

Nous allons maintenant présenter la manière dont nous discrétisons les flux internes. Ce terme intégral est évalué comme suit :

$$\mathbf{\Phi_{ij}} = \widehat{\mathbb{F}}(\mathbf{Q}_h).\boldsymbol{\eta} \ ,$$

où $\boldsymbol{\eta} = {}^t(\eta_1,\eta_2) = \displaystyle\int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \boldsymbol{\nu}\, d\sigma$ et $\widehat{\mathbb{F}}(\mathbf{Q}_h)$ est une valeur approchée de $\mathbb{F}(\mathbf{Q}_h)$ le long de l'interface $\partial T_i \cap \partial T_j$. Nous nous sommes ainsi ramenés à l'évaluation de flux dans la direction de la normale $\boldsymbol{\eta}$ et donc à un problème monodimensionnel. On introduit alors une fonction de flux numérique $\mathbf{\Phi}$ dépendant des deux états $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_h(T_i)$ et $\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_h(T_j)$ de part et d'autre de l'interface $\partial T_i \cap \partial T_j$:

$$\mathbf{\Phi_{ij}} \quad = \quad \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}_i,\mathbf{Q}_j) \ .$$

Définition 3.2.1 *Soient* $\mathbb{F} =^t (\mathbf{F}(\mathbf{Q})\,;\,\mathbf{G}(\mathbf{Q}))$ *et* $\mathcal{A}$ *définis respectivement par (3.1) et (3.2).*
Le flux numérique $\mathbf{\Phi}$ *est dit décentré s'il vérifie :*

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad = \quad \frac{\mathbb{F}(\mathbf{u}) + \mathbb{F}(\mathbf{v})}{2} \cdot \boldsymbol{\eta} \ - \ \frac{1}{2} \mid \mathcal{A} \mid (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + O(\mid \mathbf{v} - \mathbf{u} \mid^2) \ ,$$

pour deux états voisins $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$*. La matrice* $\mid \mathcal{A} \mid$ *est définie dans l'Annexe 2 (Annexe 4.6.2).*

Ceci est une extension directe de la définition du schéma décentré monodimensionnel de Lax, Harten et Van Leer (cf. [57, 44]) que nous avons appliquée au système de Maxwell en deux dimensions d'espace.

Remarque 3.2.2 *Dans le cas présent, le système étudié est linéaire à coefficients constants et la matrice jacobienne* $\mathcal{A}$ *ne dépend pas des variables* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$*. Le terme en* $O(\mid \mathbf{v} - \mathbf{u} \mid^2)$ *est donc nul.*

Il résulte de la linéarité du système de Maxwell et du fait que les coefficients sont constants que tous les flux décentrés d'un schéma linéaire d'ordre un sont identiques ; il n'y a donc pas de choix parmi les schémas décentrés pour résoudre numériquement les équations de Maxwell en milieu homogène. Ils se réduisent tous en fait à un schéma ICR (Isaacson-Courant-Rees) vectoriel. On trouvera dans l'annexe (4.6.2) le flux $\mathbf{\Phi_{ij}}$ explicité dans le cas du système de Maxwell bidimensionnel.

Remarque 3.2.3 *Les schémas d'ordre un étant identiques en milieu homogène, on peut donc utiliser indifféremment un solveur de Riemann exact ou la définition (3.2.1) pour calculer les flux internes. En revanche, seul un solveur de Riemann exact permet de construire le schéma adéquat en milieu hétérogène*[1] *vérifiant les conditions de saut des composantes tangentielles [24, 46].*

Remarque 3.2.4 *Ce schéma d'ordre un est similaire pour les méthodes centrés-noeuds et centrés-éléments mais les flux sont échangés à travers des interfaces de cellules différentes (cf. figures 3.1 et 3.2).*

Ces schémas conservatifs ne sont que d'ordre un en espace et nous allons maintenant décrire comment obtenir des schémas d'ordre supérieur à partir de la fonction de flux numérique $\mathbf{\Phi}$.

3.2.3 Schémas d'ordre supérieur

Nous construisons maintenant un schéma d'ordre élevé en espace en utilisant l'extension de la méthode MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) de Van Leer aux éléments finis [44, 79].

Une manière d'obtenir un schéma d'ordre supérieur est d'augmenter le degré de l'interpolation dans une cellule et d'évaluer les flux à l'aide de valeurs extrapolées $\mathbf{Q}_{ij}$ et $\mathbf{Q}_{ji}$ à l'interface $\partial T_i \cap \partial T_j$. Cette extension nécessite l'évaluation du gradient de la solution sur chaque cellule. On notera que l'obtention de schémas d'ordre supérieur est assez directe par cette méthode puisque seule une modification des arguments de la fonction $\mathbf{\Phi}$ est à réaliser par rapport au flux d'ordre un. La fonction de flux d'ordre supérieur s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{ij}} &= \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}_{ij},\mathbf{Q}_{ji}) \ , \\ \mathbf{Q}_{ij} &= \mathbf{Q}_i + \overrightarrow{\nabla} \mathbf{Q}_{T_i}(G_i).\overrightarrow{\mathbf{G}_i\mathbf{G}_{ij}} \ , \\ \mathbf{Q}_{ji} &= \mathbf{Q}_j + \overrightarrow{\nabla} \mathbf{Q}_{T_j}(G_j).\overrightarrow{\mathbf{G}_j\mathbf{G}_{ij}} \ , \end{aligned} \right. \tag{3.5}$$

où G_i et G_j sont les centres de gravité des triangles T_i et T_j, et G_{ij} le point milieu de l'arête $\partial T_i \cap \partial T_j$.

Pour des raisons de précision et de stabilité [38], nous calculons en fait les nouvelles valeurs aux interfaces des cellules en introduisant un paramètre de décentrage et les schémas résultants sont connus sous le nom de β-schémas.

1. la jacobienne dépend alors des caractéristiques du milieu

Ces valeurs interpolées sont calculées de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_i + \dfrac{1}{2}\{\,(1-2\,\beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) + 4\,\beta \vec{\nabla}\mathbf{Q}_{T_i}(G_i).\overrightarrow{\mathbf{G}_i\mathbf{G}_{ij}}\,\} \\ \mathbf{Q}_{ji} = \mathbf{Q}_j - \dfrac{1}{2}\{\,(1-2\,\beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) + 4\,\beta \vec{\nabla}\mathbf{Q}_{T_j}(G_j).\overrightarrow{\mathbf{G}_j\mathbf{G}_{ij}}\,\} \end{array}\right. ,\beta \in (0{,}1)\ , \qquad (3.6)$$

où $\vec{\nabla}\mathbf{Q}_{T_i}$ est un gradient de la solution sur le triangle T_i qui reste encore à définir.

Finalement, nous prenons $\beta = \frac{1}{3}$ comme paramètre de décentrage afin d'obtenir un schéma d'ordre trois en espace dans le cas de maillages structurés qui minimise la dispersion numérique. L'ordre trois de ce schéma a notamment été montré pour le système de Maxwell bidimensionnel [36], dans le cadre de la méthode centrés-noeuds et en utilisant des gradients qui sont des moyennes de gradients de Galerkin aux noeuds du maillage.

Dans la deuxième approche centrés-éléments, nous proposons pour la définition des gradients deux méthodes de calcul que nous testons et comparons numériquement.

3.2.3.1 Calcul des gradients par une moyenne des gradients de Galerkin aux noeuds

Nous proposons ici d'utiliser les fonctions linéaires sur chaque triangle du maillage. Il nous faut cependant définir dans un premier temps des valeurs aux noeuds du maillage puisque nous ne disposons que de valeurs constantes par triangles avec la méthode centrés-éléments.

Les valeurs aux noeuds sont calculées à l'aide d'une moyenne pondérée par les aires des triangles :

$$\mathbf{Q}(S_i) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j,\ S_i \in T_j} Aire(T_j)} \sum_{j,\ S_i \in T_j} Aire(T_j)\ \mathbf{Q}|_{T_j}\ ,$$

où $\{S_i,\ i = 1{,}ns\}$ est l'ensemble des noeuds du maillage et $\mathbf{Q}|_{T_j}$ la valeur constante de la solution au barycentre de la cellule T_j.

A partir de l'interpolation linéaire sur les triangles, on obtient alors les gradients $\vec{\nabla}\mathbf{Q}_{T_i}$ constants par triangle :

$$\vec{\nabla}\mathbf{Q}_{T_i} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{Q}(S_i^k)\ \ {}^t\vec{\nabla} p_i^k\ . \qquad (3.7)$$

où S_i^k $(k = 1{,}3)$, sont les trois sommets du triangle T_i et p_i^k $(k = 1{,}3)$, les fonctions de base linéaires associées aux trois points, définies localement sur T_i. Cette définition des gradients a été utilisée en particulier dans [59]. Comme cette définition utilise les gradients de Galerkin définis à partir des valeurs de la solution aux noeuds, on référencera par la suite cette définition par (GN).

3.2.3.2 Calcul des gradients par interpolation linéaire sur un maillage dual

La première approche proposée pour le calcul des gradients de la solution sur les cellules triangulaires comporte cependant quelques inconvénients. La formule (3.7) réalise en effet une moyenne faisant intervenir de nombreuses valeurs autour de la cellule considérée. On se retrouve confronté notamment à des problèmes de définition des champs aux noeuds du maillage en milieu hétérogène, où certaines composantes des champs sont discontinues à travers les arêtes.

On cherche donc, à partir de valeurs données aux barycentres des triangles, à définir des gradients faisant intervenir uniquement les valeurs adjacentes à une cellule donnée. Nous avons repris ici une idée de Durlofsky, Osher et Engquist [41] qui proposent un schéma d'ordre deux en maillage triangulaire. Dans cette étude, nous avons adapté au système de Maxwell bidimensionnel et au β-schéma cette idée initialement proposée pour l'équation d'advection linéaire et l'équation de Burgers. Nous allons maintenant rappeler brièvement la définition des gradients proposés.

Trois interpolations linéaires associées à des triangles peuvent être définies sur $T_i = (ABC)$. Les trois candidats sont repérés sur la figure (3.3) par L_1, L_2 et L_3.

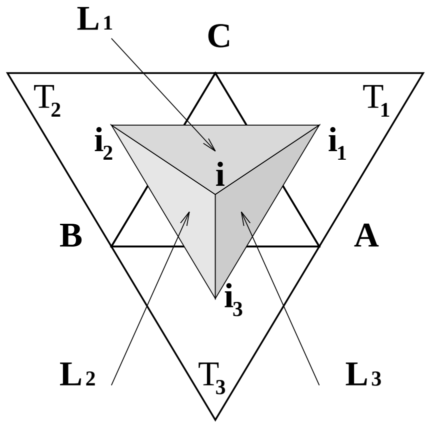


FIG. 3.3 – *Interpolations possibles sur (ABC).*

Les gradients sur le triangle $L_1 = (i\, i_1\, i_2)$ sont alors calculés classiquement à partir de l'interpolation linéaire :

$$\overrightarrow{\nabla}\mathbf{Q}_{L_1} = \mathbf{Q}|_{T_i} \ \ {}^t\overrightarrow{\nabla} p_1^i(\mathbf{x}) \ + \ \sum_{k=1}^{2} \mathbf{Q}|_{T_k} \ \ {}^t\overrightarrow{\nabla} p_1^k(\mathbf{x}) \ ,$$

où p_1^k est la fonction de base linéaire définie localement sur le triangle L_1 et associée au noeud i_k (la fonction p_1^i étant associée au noeud i). On obtient des formules tout à fait analogues pour les triangles L_2 et L_3 avec une permutation circulaire de l'indice k.

On propose donc de calculer le gradient sur le triangle $T_i = (ABC)$ comme suit :

$$\vec{\nabla}\mathbf{Q}_{T_i} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} Aire(L_j)} \sum_{j=1}^{3} Aire(L_j)\ \vec{\nabla}\mathbf{Q}_{L_j}\ ,$$

où $\{L_j,\ j = 1{,}3\}$ est l'ensemble des trois candidats possibles (cf. fig 3.3). Nous avons supposé dans cette section que les trois points constituants chaque triangle L_j ne sont pas alignés. Comme cette définition utilise les gradients de Galerkin définis à partir des valeurs de la solution aux barycentres des triangles, on référencera par la suite cette définition par (GB).

3.2.4 Traitement des conditions aux limites

Pour imposer les conditions aux limites dans un problème en électromagnétisme (et en particulier de diffraction), il est classique de distinguer la frontière de l'objet Γ_b et la frontière artificielle Γ_∞ délimitant le domaine de calcul.

On utilise sur la frontière artificielle Γ_∞ des conditions absorbantes afin de minimiser l'effet des ondes parasites dues à la troncature du domaine de propagation. En particulier, nous avons utilisé ici sur Γ_∞ la condition d'ordre un de Silver-Müller (voir [42] et [62]) .

Pour un objet métallique parfaitement conducteur, on impose sur Γ_b la condition (en terme de champ électrique total ici) : $\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{E} = 0$. La bonne prise en compte de cette conditon aux limites est essentielle pour l'obtention de solutions de qualité. L'utilisation dans la méthode centrés-noeuds de cellules centrées aux noeuds nous amène à tronquer les cellules du bord délimitant le domaine de calcul puisque des noeuds sont placés sur le bord du domaine (fig. 3.4). Nous sommes donc amenés à résoudre des équations aux dérivées partielles sur des semi-ouverts et ce défaut géométrique nous entraine à faire un traitement qui n'est pas naturel avec l'utilisation de volumes finis et d'échanges de flux.

En revanche, dans l'approche centrés-éléments des volumes finis, la même démarche que pour les points internes (échange de flux et techniques de décentrage) peut être développée pour ce type de conditions aux limites. Les cellules internes et au bord sont en effet identiques (fig. 3.5).

Nous proposons donc pour la méthode centrés-éléments de calculer les flux associés à la condition aux limites $\boldsymbol{n} \wedge \mathbf{E} = 0$ par l'intermédiaire d'un "demi-problème de Riemann", nommé ainsi puisque l'état au-delà de la frontière n'est pas connu.

Remarque 3.2.5 *En ce qui concerne les flux internes, nous rappelons que tous les schémas*

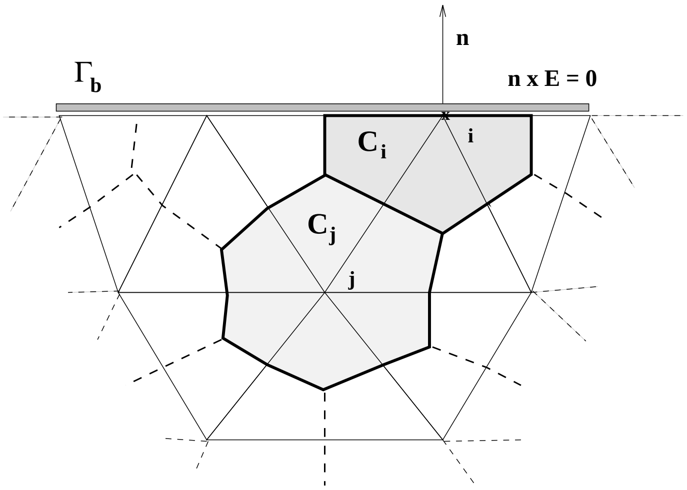


FIG. 3.4 – *Cellule d'intégration C_i au bord (méthode centrés-noeuds).*

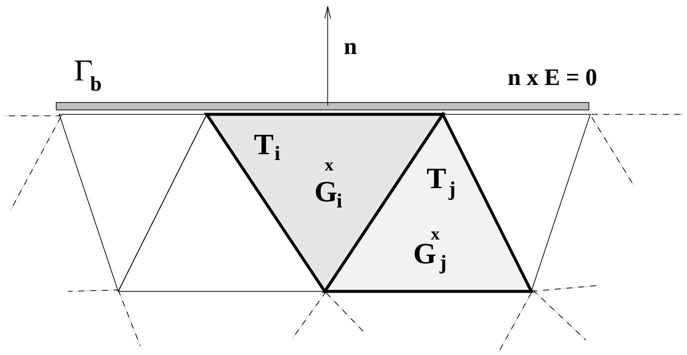


FIG. 3.5 – *Cellule d'intégration T_i au bord (méthode centrés-éléments).*

décentrés d'ordre un sont identiques dans le cadre de notre étude. Nous avons choisi ici de les expliciter à l'aide de la définition de Lax-Harten-Van Leer (cf. def. 3.2.1). Une autre possibilité est de les présenter comme le résultat de la résolution exacte d'un problème de Riemann (exemple du schéma de Godunov, [24, 46, 57]). Dans le cas où les cellules sont internes, les états sont connus de part et d'autre de l'interface.

On considère maintenant le système de Maxwell dans la direction de la normale au bord Γ_b notée $\mathbf{n} = {}^t(n_1,n_2)$. Le demi-problème de Riemann considéré est alors le problème de Cauchy et aux limites suivant (voir figure 3.6) :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_t + \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathcal{A}(\mathbf{Q}) = 0 & , \mathbf{r} \in T_i,\ t \in [t^n, t^{n+1}] \ , \\ \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t = t^n) = \mathbf{Q}^n & , \mathbf{r} \in T_i \ , \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) & , \mathbf{r} \in \Gamma_b \cap \partial T_i \ . \end{cases} \tag{3.8}$$

La donnée initiale $\mathbf{Q}^n$ est constante sur le triangle T_i et correspond à la solution approchée des équations de Maxwell au temps t^n. En se plaçant dans la direction de la normale, on peut alors ne considérer qu'un problème monodimensionnel facile à résoudre.

Le champ $\mathbf{E}^{inc} = {}^t(E_1^{inc}, E_2^{inc}, E_3^{inc})$ est une fonction vectorielle donnée. Dans des problèmes de diffraction, $\mathbf{E}^{inc}$ peut être le champ électrique incident éclairant l'obstacle lorsque les équations sont résolues en champ diffracté. Pour une résolution en champ total, cette fonction vectorielle est nulle.

La solution dans l'espace-temps du demi-problème de Riemann considéré est schématisée sur la figure (3.6) Elle est composée de deux états constants $\mathbf{Q}^n$ (donnée initiale) et $\mathbf{Q}^*$ qui reste à déterminer pour expliciter les flux aux bords qui s'écrivent :

$$\mathbf{\Phi}_b = \mathcal{A}\mathbf{Q}^* \ .$$

Les deux états $\mathbf{Q}^n$ et $\mathbf{Q}^*$ sont séparés par la droite de discontinuité d'équation

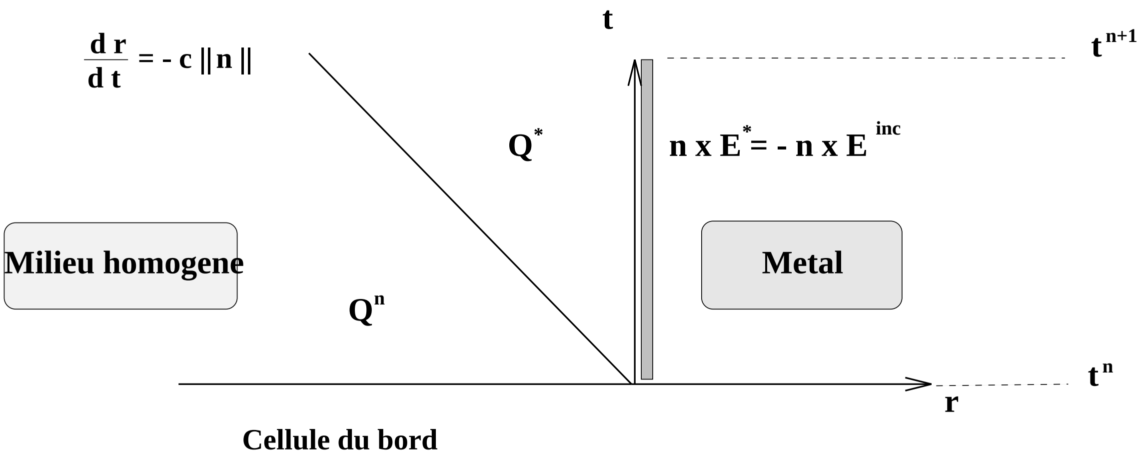


FIG. 3.6 – *Problème de Riemann au bord.*

$\dfrac{dr}{dt} = -c \,||\, \boldsymbol{n} \,||$. On pose $\mathbf{Q}^* = {}^t(Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*)$ où les composantes sont dans un premier temps celles associées à la polarisation TM. De $\mathbf{E}^{inc} = {}^t(0,0,E_3^{inc})$, on obtient alors à partir de la condition aux limites l'équation $Q_3^* = -\varepsilon\, E_3^{inc}$.

D'autre part, on a la relation de saut suivante :

$$\mathcal{A}(\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q^n}) = -c \,||\, \boldsymbol{n} \,||\, (\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q^n}) \ ,$$

qui permet d'expliciter entièrement le flux au bord :

$$\mathbf{\Phi}_b = ||\ \ \boldsymbol{n}\ || \begin{pmatrix} -(n_2\, E_3^{inc}) \\ \\ (n_1\, E_3^{inc}) \\ \\ (n_2\, Q_1^n - n_1\, Q_2^n)/\mu \,+\, Q_3^n/\varepsilon \,+\, E_3^{inc} \end{pmatrix} .$$

3.2.5 Intégration en temps

Après avoir explicité la discrétisation spatiale, on obtient le système semi-discret suivant associé à chaque cellule T_i (les indices sont ici omis) :

$$\mathbf{Q}_t \,+\, \mathbf{\Psi}(\mathbf{Q}) \,=\, 0 \ ,$$

où $\mathbf{\Psi}$ représente la discrétisation spatiale.
Les problèmes instationnaires nécessitent une intégration en temps très précise. Une manière de construire des schémas précis en temps est d'utiliser une méthode explicite de Runge-Kutta multi-pas. On obtient finalement pour un schéma à k pas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q}^0 \,=\, \mathbf{Q}^n \ , \\ \mathbf{Q}^l \,=\, \mathbf{Q}^0 - \dfrac{\Delta t}{(k+1-l)}\, \mathbf{\Psi}(\mathbf{Q}^{l-1}) \quad l = 1,2,..k \ , \\ \mathbf{Q}^{n+1} \,=\, \mathbf{Q}^k \ . \end{array} \right.$$

où Δt est le pas de discrétisation en temps. Comme le système de Maxwell est linéaire, le schéma explicite à trois pas ($k = 3$) est d'ordre trois en temps. Associé au β-schéma en espace, le schéma ainsi construit est à la fois d'ordre trois en espace et d'ordre trois en temps dans le cas de grilles structurées [38]. Le lecteur trouvera également des détails complémentaires sur la stabilité du β-schéma pour le système de Maxwell et la formulation centrés-noeuds dans [37].

3.3 Expériences numériques

La méthode volumes finis centrés-éléments

3.3.1 Evolution d'un mode dans une cavité carrée

On considère une cavité métallique carrée de côté $a = 1\,m$. Les expressions analytiques des modes de résonance sont connus pour cette géométrie [49] et nous proposons ici de suivre l'évolution en temps du mode (1,1) pour le cas transverse magnétique. Cette expérience académique nous permet de valider le β-schéma appliqué à la formulation centrés-éléments et le traitement des conditions aux limites de métal parfait avec le solveur de Riemann exact. Nous avons pris comme donnée initiale l'expression analytique du mode (1,1) au temps $t = 0$.
L'erreur en norme $||\,.\,||_2$ de la solution numérique par rapport à la solution exacte a ensuite été calculée après un temps $t = 5\,ns$. Le schéma utilisé pour l'approche centrés-éléments est un β-schéma en espace avec β=1/3, et un schéma de Runge-Kutta à trois pas pour l'intégration en temps.

On note E1, E2 et E3 les erreurs associées aux composantes H_x, H_y et E_z. Nous avons reporté dans le tableau (3.1) ces erreurs en fonction du pas d'espace pour un ensemble de trois grilles régulières (maillages en triangles). Nous rappelons que les calculs ont été

grille	E1	E2	E3	itérations
20×20	$3.2\ 10^{-5}$	$3.2\ 10^{-5}$	$1.4\ 10^{-5}$	58
40×40	$3.2\ 10^{-6}$	$3.2\ 10^{-6}$	$1.7\ 10^{-6}$	117
80×80	$4.0\ 10^{-7}$	$4.0\ 10^{-7}$	$2.0\ 10^{-7}$	234

TAB. 3.1 – *Erreur en norme* $||\,.\,||_2$ *en fonction du pas d'espace (formulation centrés-éléments).*

effectués pour une même condition CFL, d'où une variation du nombre d'itérations en temps suivant la grille pour atteindre le temps requis. Les comparaisons avec la solution exacte se révèlent très satisfaisantes et l'on peut également remarquer que pour ce cas test, l'erreur est divisée par au moins huit en divisant le pas d'espace par deux. Il semble donc que l'on retrouve les mêmes caractéristiques que celles du schéma en formulation centrés-noeuds. En effet, les résultats théoriques obtenus dans [37] montrent que ce schéma est d'ordre trois en grilles structurées pour la formulation centrés-noeuds.

3.3.2 Comparaison des deux méthodes

Il existe différentes façons de comparer les méthodes et nous avons ici retenu comme critère de base l'utilisation de maillages identiques. Deux types de cas test seront étudiés : un calcul de spectre de résonance et un calcul de SER (Surface Equivalente Radar). D'autre part, nous avons utilisé pour les deux formulations centrés-éléments et centrés-noeuds d'ordre supérieur les gradients définis à partir des valeurs aux noeuds du maillage (gradients GN).

Calcul de modes de résonance

Nous proposons maintenant de calculer le spectre de résonance de la même cavité carrée métallique. Cette expérience est également intéressante puisque les solutions exactes sont connues [49]. Dans un premier temps, le champ électromagnétique est initialisé par une gaussienne centrée en un point de la cavité et après que la solution a atteint le régime périodique, on effectue une transformée de Fourier de la solution pour obtenir le spectre. Nous avons reporté sur la figure (3.7) le spectre du champ total E_z en fonction de la fréquence. Il a été obtenu après 2364 itérations en temps pour les deux méthodes (même pas de temps et un maillage qui correspond à environ 20 points par longueur d'onde pour la premiere fréquence qui est égale à 0.2121 GHZ). Les flèches verticales représentent les fréquences de résonance exactes de la cavité. Sur les dix premiers modes, la plupart sont capturés par les deux méthodes (le spectre est calculé en des points différents par les deux méthodes, ce qui explique la différence en fréquence des modes de résonance). Cependant on peut remarquer que la formulation centrés-éléments est plus précise dans la bande de hautes fréquences du spectre étudié, et elle est également meilleure en basses fréquences.

Calcul de SER

Ce cas test consiste à éclairer un disque de rayon $R = 2.5\,m$ par une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = (2 * \pi)/k = 3\,m$. Le maillage utilisé est composé de 6016 noeuds et la discrétisation spatiale correspond environ à 14 points par longueur d'onde. Le champ électrique diffracté E_z après convergence vers l'état périodique est représenté pour les deux méthodes sur la figure (3.8). Les deux approches ont reproduit des résultats très similaires.

A l'aide d'une transformée de Fourier en temps et d'une formule de rayonnement des champs, on obtient le diagramme de SER. Il représente l'intensité du champ diffracté à l'infini dans le domaine fréquentiel, cette quantité étant repérée en coordonnées polaires (angles de 0 à 360^o). Nous avons reporté sur la figure (3.9) les diagrammes de SER relatifs à la solution exacte et aux solutions approchées obtenues par les deux formulations. On

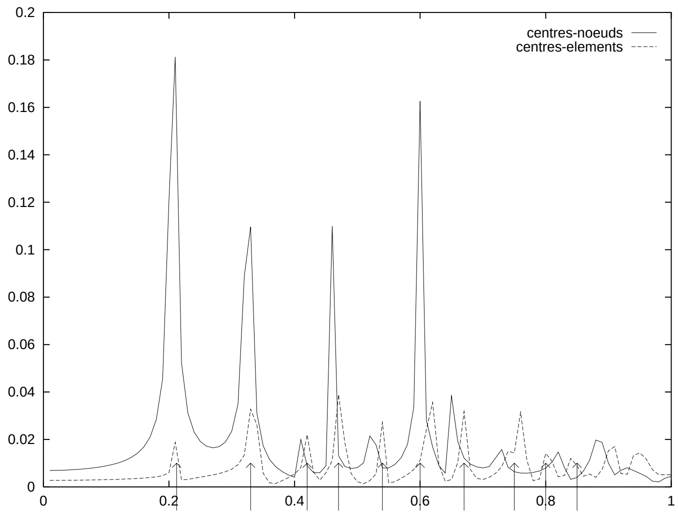


FIG. 3.7 – *Spectre de résonance de la cavité carrée.*

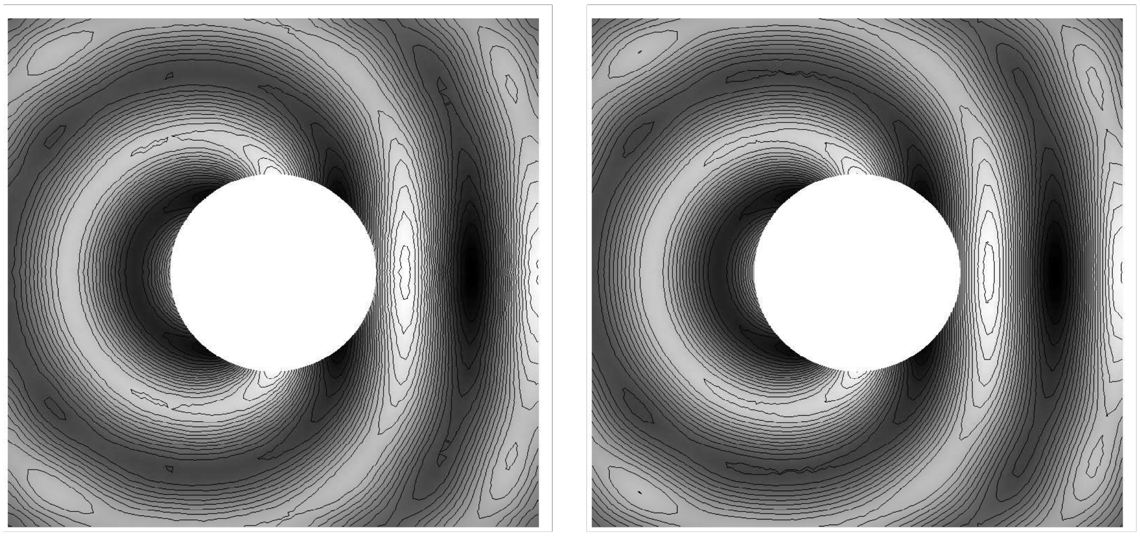


FIG. 3.8 – *Champ diffracté E_z (méthode centrés-éléments à gauche, centrés-noeuds à droite).*

peut remarquer que les solutions numériques se comparent bien à la solution exacte et qu'elles sont de même qualité.
Ensuite, nous avons calculé l'écho radar (à $\theta = 0$) en fonction de la fréquence (à maillage fixé). Les deux méthodes donnent des résultats comparables jusqu'à k*R=15, k étant le vecteur d'onde et R le rayon du disque (environ 14 points par longueur d'onde), mais la méthode centrés-éléments s'avère plus précise sur l'ensemble des fréquences étudiées (figure 3.10). En effet, la méthode centrés-noeuds ne donne plus de résultats significatifs à partir de k*R=30 (environ 7 points par longueur d'onde), alors que la formulation centrés-éléments permet d'atteindre k*R=50. Nous déduisons à travers ce cas test que cette dernière méthode permet de résoudre des problèmes avec des fréquences plus élevées.

Coûts CPU

On représente dans le tableau (3.2) les coûts en temps CPU des méthodes centrés-éléments et centrés-noeuds pour le cas test précédent (calcul de SER). On peut remarquer que le temps de calcul ramené à une itération est pratiquement le même pour les deux méthodes. Ceci est tout à fait logique puisque le nombre de flux à évaluer est identique dans les deux cas. Cependant, la formulation centrés-éléments requiert une valeur du nombre CFL inférieure à celle utilisée avec la méthode centrés-noeuds d'où un coût plus important de la simulation globale.

méthode	centrés-éléments	centrés-noeuds
CFL	1	1.3
temps/itération (s)	0.98	0.99
temps global (s)	400	324

TAB. 3.2 – *Coûts en temps CPU.*

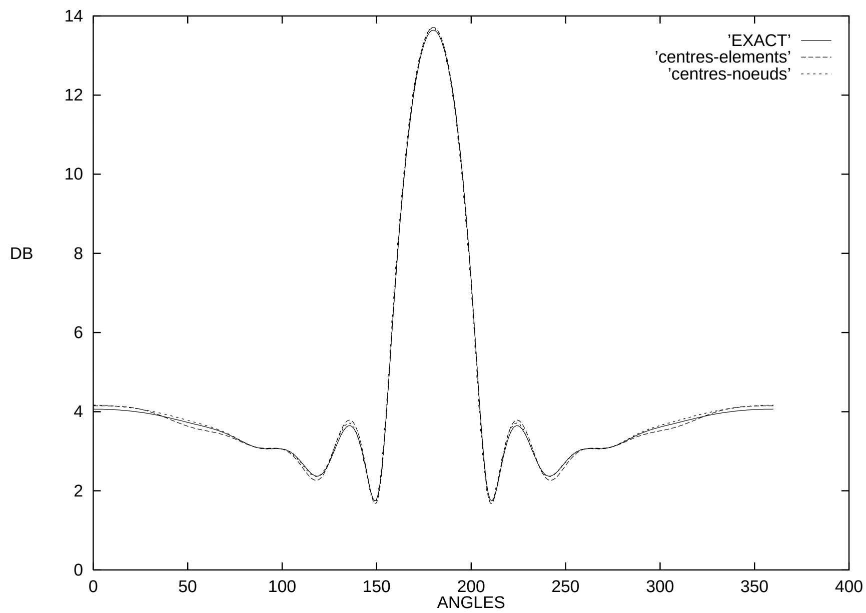


FIG. 3.9 – *Diagrammes de SER du disque pour les méthodes centrés-éléments et centrés-noeuds.*

Conclusion

Pour certains calculs comme ceux dits internes (cavités) ou externes (SER), les méthodes centrés-noeuds et centrés-éléments donnent des résultats de qualité équivalente pour des maillages identiques. On notera d'autre part que la formulation centrés-éléments est environ une fois et demi plus coûteuse (à cause de la condition CFL). Elle a cependant l'avantage de traiter des problèmes avec des fréquences deux fois plus grandes que celles tolérées par la méthode centrés-noeuds. Ce résultat n'est pas surprenant puisque l'on a environ deux fois plus de degrés de liberté pour la méthode centrés-éléments.

3.3.3 Comparaison des deux méthodes de calcul du gradient

Dans le cadre de la formulation centrés-éléments, nous avons proposé deux approches pour le calcul des gradients de la solution. Nous n'avons jusqu'à présent utilisé que le gradient (GN) qui est défini à partir des valeurs de la solution aux sommets du maillage initial. Dans cette section, plusieurs cas tests nous serviront à comparer les deux méthodes de calcul du gradient (GN) et (GB) (définition à partir des valeurs aux noeuds et aux barycentres).

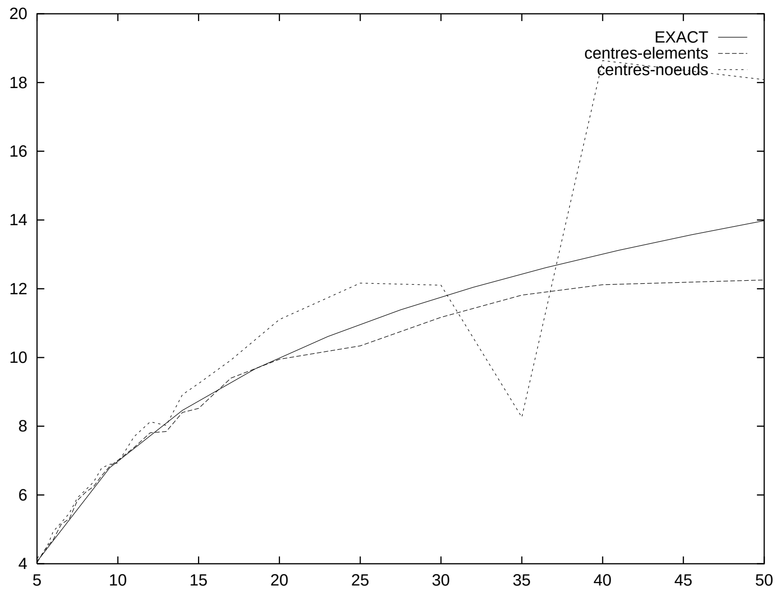


FIG. 3.10 – *Echo radar en fonction de k*R ($\theta = 0$) pour les deux méthodes centrés-éléments et centrés-noeuds .*

Calcul d'erreur pour le mode de résonance (1,1)

Nous avons ici repris le cas test associé à la cavité carrée de la section (3.3.1). La figure (3.11) représente les coupes (en $y = 0$) des solutions numériques obtenues avec les gradients (GN) et (GB). Les solutions sont données au temps $t = 13{,}33\,ns$ (soit 317 itérations du schéma de Runge-Kutta à trois pas) et le nombre CFL a été fixé à 1.

Sur la figure (3.12), les courbes représentent l'évolution en temps du mode de résonance en un point de la cavité. On remarque que les deux courbes se comparent bien dans les deux cas et approchent bien la solution exacte.

D'autre part, nous avons évalué sur une grille structurée l'erreur en norme $||\ .\ ||_2$ des trois composantes du champ électromagnétique (cf. section 3.3.1). On note toujours E1, E2 et E3 les erreurs associées aux composantes H_x, H_y et E_z. Le calcul d'erreur a été effectué pour la grille 20×20 au temps $t = 13{,}33\,ns$ (cf. Tab. 3.3).

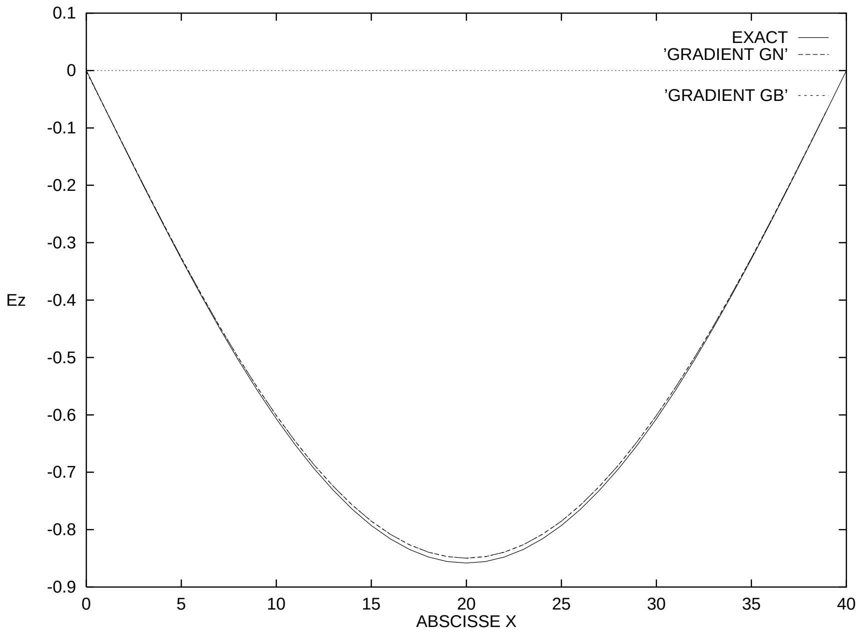


FIG. 3.11 – *Coupe en $y = 0$ pour le mode de résonance (1,1).*

type de gradient	E1	E2	E3
GN	$3.2\ 10^{-5}$	$3.2\ 10^{-5}$	$1.4\ 10^{-5}$
GB	$7.3\ 10^{-5}$	$7.3\ 10^{-5}$	$2.3\ 10^{-5}$

TAB. 3.3 – *Erreur en norme $||\ .\ ||_2$ pour les deux types de gradient.*

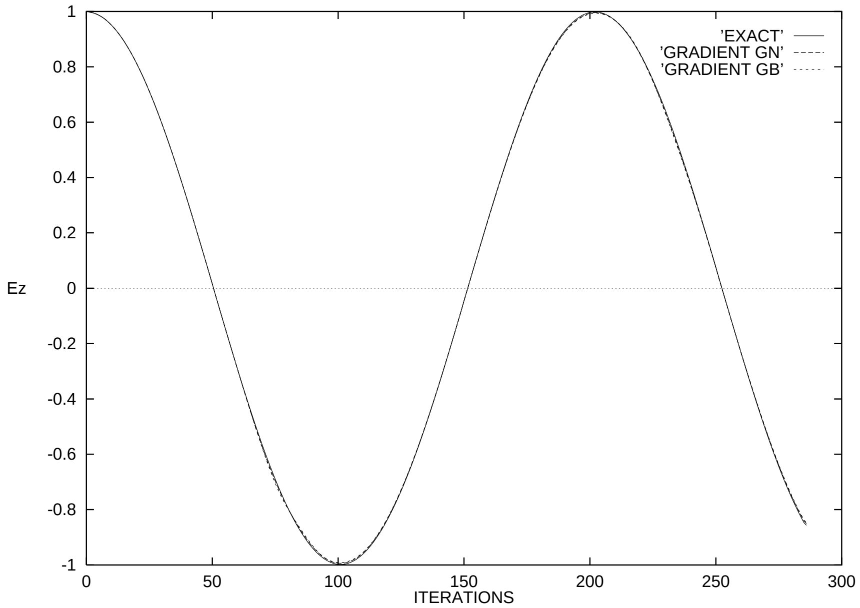


FIG. 3.12 – *Evolution en temps du mode de résonance (1,1).*

On remarque que les erreurs calculées sur les trois champs sont faibles quelque soit le type de gradient employé. Cependant, l'erreur est plus faible pour le gradient utilisant les valeurs aux noeuds (GN).

Spectre de résonance

La même expérience que celle présentée à la section (3.3.2) a été réalisée. Le spectre du champ E_z est représenté sur la figure (3.13) et les deux courbes associées aux gradients (GN) et (GB) sont très proches.

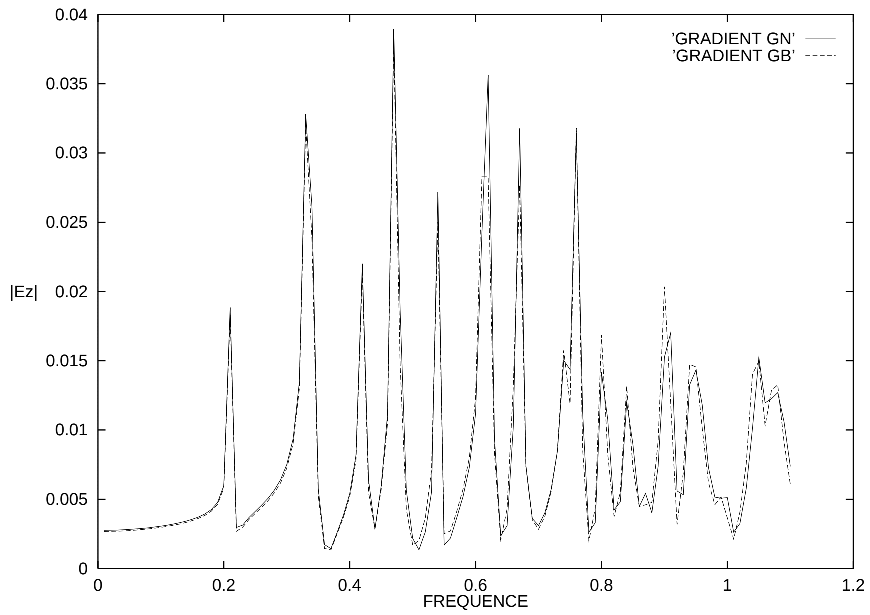


FIG. 3.13 – *Spectre de résonance de la cavité carrée.*

Calcul de SER

Nous avons ici repris la géométrie du disque définie dans la section (3.3.2) et l'on a calculé le diagramme de SER. La figure (3.14) représente les courbes obtenues par la méthode centrés-éléments en utilisant les deux méthodes de calcul du gradient. Toutes deux se comparent bien à la solution exacte.

On peut noter également le peu de différences entre les deux gradients sur les isovaleurs du champ électrique pour une régularité C_∞ de l'onde incidente (fig. 3.15).

Diffraction par une impulsion

On s'intéresse maintenant à la simulation de la diffraction par une impulsion sur le disque. L'onde incidente illumine le côté droit de l'obstacle et elle est obtenue après troncature d'une onde plane, en prenant le signal sur une demi-longueur d'onde pour une

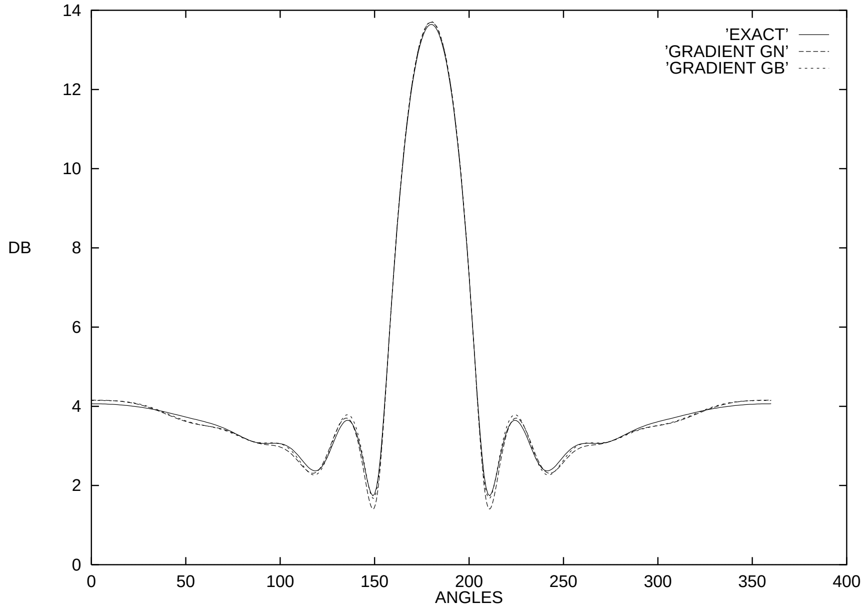


FIG. 3.14 – *Diagramme de SER du disque.*

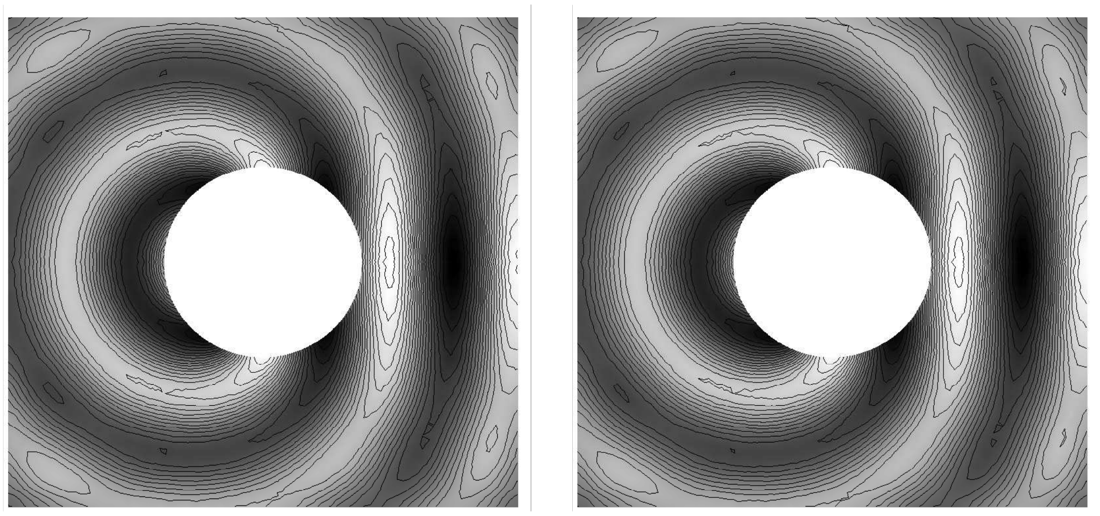


FIG. 3.15 – *Champ diffracté E_z pour une onde plane (gradients GN à gauche, GB à droite) .*

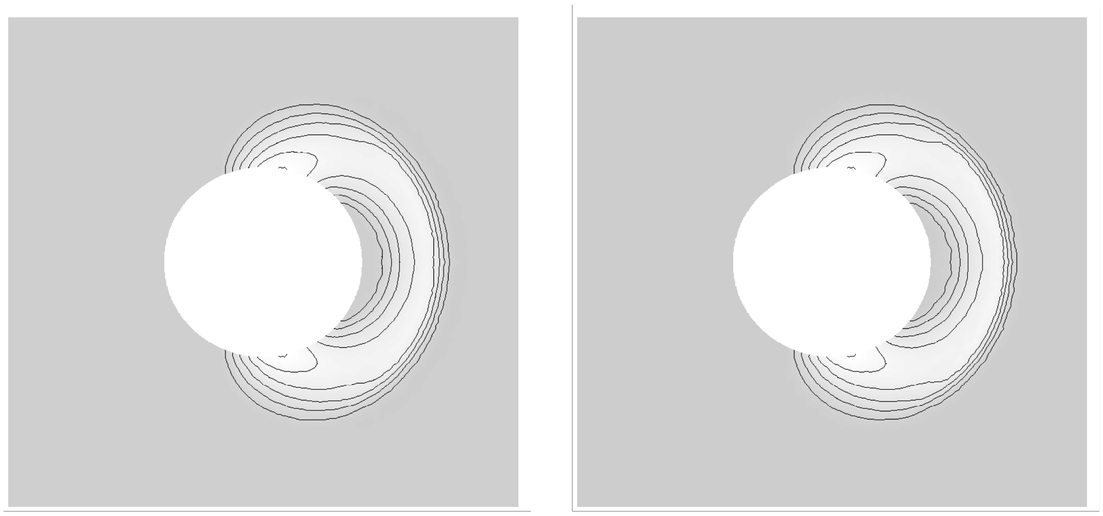


FIG. 3.16 – *Champ diffracté E_z pour une impulsion (gradients GN à gauche, GB à droite) .*

fréquence de $0.1\,GHz$ et nul sinon. On notera que la composante E_z associée à cette impulsion est de classe C_0 sur $\mathbb{R}$ contrairement à la solution de la figure (3.15). La figure (3.16) représente les isovaleurs du champ diffracté E_z après un temps de simulation $t = 3{,}33\,ns$. Les isovaleurs associées aux deux gradients sont de même qualité.

Coûts CPU

Nous avons reporté dans le tableau (3.4) le coût CPU ramené à une itération des deux types de gradients pour la même application. On peut noter que le gradient (GN) est trois fois moins coûteux que le gradient (GB). Ceci n'est pas surprenant puisque le calcul du gradient (GB) fait intervenir trois triangles pour chaque cellule T_i.

type de gradient	GN	GB
temps (s)	2.10^{-2}	6.10^{-2}

TAB. 3.4 – *Temps CPU pour les deux types de gradients.*

3.4 Conclusion

Les deux méthodes de volumes finis (centrés-éléments et centrés-noeuds) ont été confrontées sur la base de plusieurs types d'applications numériques, qu'il s'agisse de calculs de surface équivalente radar, de champ diffracté ou de résonance. Des comparaisons à la fois d'ordre quantitatif et qualitatif montrent que les deux méthodes donnent des résultats de bonne qualité. Bien que la formulation centrés-noeuds soit moins coûteuse du fait d'une condition CFL moins restrictive, la méthode centrés-éléments présente l'avantage de résoudre des problèmes avec des fréquences plus élevées (à maillage identique).

Il est donc intéressant de poursuivre le développement de l'approche centrés-éléments, notamment dans le cas hétérogène. Elle devrait effectivement permettre de considérer plus naturellement des dispositifs incluant des couches de matériaux ou des surfaces infiniment minces. D'autre part, l'étude des gradients définis à partir de valeurs aux barycentres (GB) constitue une première étape aux spécificités de la formulation centrés-éléments. Cependant, la recherche d'une méthode de calcul des gradients la mieux adaptée est nécessaire, car comme on a vu dans ce chapitre cette dernière formulation du gradient discret est relativement coûteuse.

3.5 Annexe 1

Convergence des schémas volumes finis

Nous rappelons dans cette section des théorèmes de convergence des méthodes volumes finis obtenus par plusieurs auteurs, dont [43], [80], et [51]. Nous présentons d'abord les résultats obtenus dans le cas scalaire dus en particulier aux travaux de R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin [43], et S. Champier [17]. Ensuite nous donnons des résultats de convergence dans le cas général des systèmes conservatifs, nous présentons les travaux de D. Kröner, M. Rokyta, et M. Wierse qui concerne la généralisation du théorème de Lax-Wendroff pour les schémas volumes finis en deux dimensions d'espace [51], et les travaux de J.P. Vila qui montre une estimation $h^{1/2}$ pour une méthode volumes finis appliquée aux systèmes de Friedrichs [80].

3.5.1 Cas scalaire

Pour les problèmes hyperboliques scalaires, les schémas volumes finis convergent vers la solution faible du problème étudié. Pour montrer la convergence, l'idée est d'imposer à la condition initiale d'être L^∞. Moyennant une condition de CFL et une hypothèse de régularité sur le maillage, on montre la stabilité L^∞ de la solution approchée. Ceci n'étant pas suffisant pour montrer la convergence, on établit une estimation faible de la variation totale pondérée. La solution approchée étant dans L^∞, on peut extraire une sous-suite qui converge dans L^∞ pour la topologie faible *. Grâce à la deuxième estimation (variation

totale pondérée), on montre que la fonction limite est solution faible du problème étudié [43].
Nous donnons ici un exemple.
On considère l'équation hyperbolique linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lr} u_t(x,y,t) + \overrightarrow{v}\nabla u(x,y,t) = 0 & t \in [0,T],(x,y) \in R^d, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) & (x,y) \in R^d. \end{array} \right. \tag{3.9}$$

1-Hypothèses sur les données :

$*u_0 \in L^\infty$ à support compact, $u_0 \in [u_m,u_M]$.
$*\overrightarrow{v}/div\overrightarrow{v} = 0,\ \overrightarrow{v} \in C^1(R^d \times R^+,R^d)$.
$*|\overrightarrow{v}(x,t)| \leq\ v,v \in R$.

Ces hypothèses assurent la propagation de l'onde en temps fini.

2-Hypothèses sur le maillage :

Soit τ une discrétisation en triangles, $K \in \tau$.
$\exists h > 0,\alpha > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha h^d \leq m(K). \\ m(\partial K) \leq h^{d-1}. \\ \delta(K) \leq h. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

$m(\partial K)$ est la mesure de K.
$\delta(K)$ est le diamètre de K.

Schéma numérique :

$$m(K)\frac{u_K^{n+1} - u_K^n}{\Delta t} + \sum_{l \in N(K)} (v_{K,l}^n F(u_K^n,u_l^n) - v_{l,K}^n F(u_l^n,u_K^n) = 0. \tag{3.11}$$

$F \in C(R^2,R)$ le flux numérique est tel que :

$-F(a_1,a_2)$ est croissant en a_1, et décroissant en a_2.

$-F(a_1,a_2)$ est lipschitzienne pour $a_1,a_2 \in [U_m,U_M]$.

$-F(a,a)$=a pour tout $a \in [u_m,u_M]$ (consistance).

Δt est le pas de temps.

$N(K)$: voisins du volume de contrôle K.

3-Condition CFL :

$\exists\gamma,\ \exists\beta,\ \ \Delta t \leq \frac{\alpha h}{2\beta v}(1-\gamma)$.

Résultats :

(1)-Monotonie du schéma et estimation L^∞ :

$||u^{n+1}||_{L^\infty(R^d)} \leq ||u^n||_{L^\infty(R^d)}||u_0||_{L^\infty(R^d)}$. Avec

$$||u^n||_{L^\infty(R^d)} = \sup_{K\in\tau} |u^n_K|_{L^\infty(R^d)}.$$

(2)-Estimation faible sur la variation totale pondérée :

$\Delta t \sum_n \sum_{a\in B} l(a)|n.n_a||u^n_{K_i} - u^n_{K_j}|^2 \leq c$.

B est l'ensemble des arêtes a appartenant à une boule de R^2.
K_j est voisin de K_i.
Cette estimation montre que la solution approchée satisfait le problème étudié avec une erreur r telle que r $\rightarrow 0$, quand $h \rightarrow 0$.

On pose :
$u_{\tau,\Delta t} = u^n_K$, $x \in K$, $t \in [n\Delta t,(n+1)\Delta t]$.

Convergence dans $L^\infty_{\omega^*}$

Grâce à l'estimation (1), on peut extraire une sous-suite qu'on appellera encore $u_{\tau,\Delta t}$ qui converge dans $l^\infty_{\omega^*}$ vers une fonction u ($u_{\tau,\Delta t} \rightarrow u$ qd h,$\Delta t \rightarrow 0$), et grâce à l'estimation (2), on montre que la fonction u est solution faible du problème (3.9).

3.5.2 Cas des systèmes

I) **Cas général**

On présente ici une généralisation du théorème de Lax-Wendroff pour les schémas volumes finis 2-D [51].

Le problème à étudier

On considère ici un problème hyperbolique de lois de consevation :

$$\begin{cases} U_t + \partial_x f_1(U) + \partial_y f_2(U) = 0 & R^2 \times R, \\ U(x,y,0) = U_0(x,y) & R^2. \end{cases} \tag{3.12}$$

$U \ : \ R^2 \times R \to R^m, \ \ f_1,f_2 : R^m \to R^m \ \ m \in N.$

1-Hypothèses sur les données :

On suppose que f_1 et f_2 sont des applications suffisamment régulières, et la condition initiale $U_0 \in L^\infty(R^2)^m$.

2-Hypothèses sur le maillage :

Soit $\Omega \in R^2$, $\Omega = \cup T_j$ (T_i est un polygone), $h = \sup_j diam(T_j)$.

$*\exists c_1, \sup_j \dfrac{h^2}{|T_j|} \leq c_1.$

$*\forall \leq l \leq k$ (k nonbre de voisin d'une cellule T_i).

$*\sum_{T_j} |T_j| - |T_{jl}| = o(1)$, T_{jl} voisin de T_j.

$* \cup_j T_j = \cup_j T_{jl}.$

3-Condition CFL :

$\exists c_2,c_3 \geq 0, \ \ 0 < c_2 \leq \dfrac{\Delta t}{h} \leq c_3$, Δt est le pas de temps.

Schéma numérique

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{|T_j|} \sum_{l \in N(K)} F_{jl}(U_j^n, U_l^n) = 0. \tag{3.13}$$

F est le flux numérique tel que :

$*\forall\, R > 0, \forall\, U, V, U', V' \in B_R(0).$

$*|F_{jl}(U,V) - F_{jl}(U',V')| \leq c(R)h(|U - U'| + |V - V')$ (continuité lipschitzienne).

$*F_{jl}(U,V) = -F_{lj}(V,U)$ (conservativité).

$*F_{jl} = \nu_{jl_x} f_1(U) + \nu_{jl_y} f_2(U)$ (consistance).

On pose $U_h = U_j^n$.

Convergence

Si en plus des hypothèses précédentes, on a :

$(0_1) \sup\limits_h \sup\limits_{x,y,t} |U_h(x,y,t)| \leq c.$

$(0_2) |U - U_h|_{L^2_{loc}(R^2 \times R)} \to 0,\ \Delta t, h \to 0.$

Alors :

U est solution faible du problème (3.12) au sens des distributions :

$$\int_{R^2 \times R} U \partial\phi + \int_{R^2 \times R} (f_1(U)\partial_x \phi + f_2(U)\partial_y \phi) + \int_{R^2} U_0 \phi(.,0) = 0. \tag{3.14}$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(R^2 \times [0,\infty[).$

II) **Les systèmes de Friedrichs**

On présente ici une estimation $h^{1/2}$ pour les méthodes volumes finis pour les systèmes de Friedrichs [80] :

$$\begin{cases} \partial_t U + \sum\limits_{i=1}^{d} A^i \partial_i U, \\ \\ U(x,0) = U_0(x), \end{cases} \tag{3.15}$$

A^i sont des $q \times q$ matrices réelles disonalisables à coefficients constants où q est la dimension de U.

1-Hypothèses sur le maillage

soit τ_h un maillage polygonal tel que :
$\exists \alpha,\ \beta > 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha h^d \leq m(K). \\ m(\partial K) \leq \beta h^{d-1}. \\ \delta(K) \leq h. \end{array}\right. \tag{3.16}$$

d est la dimension spaciale du problème.
$m(\partial K)$ est la mesure de K.
$\delta(K)$ est le diamètre de K.

le Schéma numérique

$$U_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K U_0(x)dx$$

$$U_K^{n+1} = U_K^n - \frac{\Delta t}{m(K)} \sum_{j \in N(K)} (A_{LK}^+ U_K^n + A_{LK}^- U_L^n) m(LK), \tag{3.17}$$

où A_{LK}^+ et A_{LK}^- sont respectivement la partie positive et négative de la matrice $A_{LK} = \sum_{i=1}^d A^i(n_{LK})$, n_{LK} est la normale extérieure à l'interface $\partial K \cap \partial L$.
On note $U_h = U_K^n$ pour $x \in K$, et $t \in [n\Delta t,(n+1)\Delta t]$.
$N(K)$: voisins du volume K.

2-Condition CFL :

$$\exists \alpha \in]0,1[,\ \Delta t \leq \sup_{K \in \tau_h} \frac{(1-\alpha)m(K)}{\lambda m(\partial K)}\ (*).$$

Résultats :

Si $U_0 \in C^q$, et vérifie la condition CFL (*) alors :

(0_1) $\forall n \in N,\ \forall K \in \tau_h$,

$$|U_K^{n+1}| - |U_K^n| + \frac{\Delta t}{m(K)} \sum_{e \in \partial K} [(U_K^n)^t . A_{e,K}^+ . U_K^n + (U_{Ke}^n)^t . A_{e,K}^- . U_{Ke}^n] m(e)$$

$$+\alpha \sum_{e \in \partial K} (U_K^n - U_{Ke}^n)^t . (-A_{e,K}^-) . (U_K^n - U_{Ke}^n) m(e) \leq 0.$$

(0_2) $\forall n \in N, \ \sum_{K \in \tau_h} |U_K^n|^2 m(K) \leq ||U_0||_{L^2}^2.$

(0_3) $\forall n \in N, \ \sum_{K \in \tau_h} |U_K^{n+1} - U_K^n|^2 m(K) \leq K_1(U_0)\Delta t^2.$

(0_4) $\sum_{n \in N} \sum_{e \in S_h} (U_K^n - U_{Ke}^n)^t . |A_{e,K}| . (U_K^n - U_{Ke}^n) m(e) \Delta t \leq \frac{K_2(U_0)}{\alpha}.$

Où $|A_{e,K}| = A_{e,K}^+ - A_{e,K}^-$, S_h l'ensemble des interfaces du maillage, et Ke le voisin de la cellule K par l'interface e.

Convergence de la méthode

Si $U_0 \in [H^s(R^d)]^q$ à support compact avec $s > 1 + \frac{d}{2}$, et si on a la condition CFL (*), alors : U_h converge vers la solution U du problème (3.15) dans $L^2([0,T] \times R^d)$, avec l'estimation d'erreur suivante :
$||U - U_h||_{L^2([0,T] \times R^d)} \leq C(U_0,T)(h + \Delta t)^{\frac{1}{2}}.$

Chapitre 4

Un schéma volumes finis décentré en milieu hétérogène

L'essentiel de ce chapitre est tiré du rapport INRIA (N^o 3351) réalisé avec Loula Fézoui[1] et Frédéric Poupaud[2]

Ce travail a également fait l'objet d'une communication au congrès d'Analyse Numérique CANUM'97, (France) .

1. CERMICS-INRIA, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis.
2. Universite de Nice, UMR CNRS 6621, 06108 Sophia-Antipolis

4.1 Introduction

Nous présentons ici, la méthode des volumes finis décrite dans le chapitre précédent appliquée aux milieux hétérogènes (les coefficients du système de Maxwell ε et μ sont discontinus). Cela demande une nouvelle formulation du flux numérique, qui tient compte des conditions de saut à travers les interfaces de matériaux d'indices différents. Nous présentons également une amélioration significative de cette méthode en abandonnant l'interpolation linéaire dans le calcul des gradients (comme présentée dans [41] et [25]) au profit d'une définition de gradients 'faibles' qui se calculent alors comme des flux. Ce procédé a l'avantage de respecter la structure du maillage et de plus il est plus facile à implémenter et moins coûteux que les procédés plus classiques.

Polarisations TE et TM

L'étude que nous présentons a été effectuée dans un cadre bidimensionnel. Nous reprenons ici le système décrit dans le paragraphe précédent (3.1.1), qui s'écrit en présence de charge et de courant :

$$\left\{\begin{array}{lllcl} \dfrac{\partial \mathbf{B_x}}{\partial t} & +\dfrac{\partial \mathbf{E_z}}{\partial y} & & = & 0 \quad , \\ \dfrac{\partial \mathbf{B_y}}{\partial t} & -\dfrac{\partial \mathbf{E_z}}{\partial x} & & = & 0 \quad , \\ \dfrac{\partial \mathbf{D_z}}{\partial t} & +\dfrac{\partial \mathbf{H_x}}{\partial y} & -\dfrac{\partial \mathbf{H_y}}{\partial x} & = & -\mathbf{j}_z \quad . \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Le cas TE s'écrit de façon analogue en considérant les champs $B = {}^t(O,O,B_z)$ et $D = {}^t(Dx,Dy,0)$.

Lois constitutives

Les inductions et les champs sont reliés par des lois constitutives qui s'écrivent pour des milieux linéaires et isotropes :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \end{array}\right. \tag{4.2}$$

où la perméabilité magnétique μ et la permittivité électrique ε sont supposées ici constantes par morceaux.
Notons que les milieux hétérogènes considérés ici sont constitués de matériaux homogènes (ie μ et ε sont constantes par morceaux) .

4.2 Approximation numérique

Nous rappellerons brièvement la méthode des volumes finis et insisterons sur le calcul des gradients qui est l'ingrédient nouveau que nous introduisons ici.
Considérons le système de Maxwell en mode TM par exemple dans un domaine Ω borné du plan. On discrétise ce domaine par des triangles tels que : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{NT} T_i$, où NT est le nombre de triangles. On obtient une formulation faible en intégrant le système (4.1) écrit sous sa forme conservative $\mathbf{Q}_t + \overrightarrow{\nabla}.\mathbb{F}(\mathbf{Q}) = -\mathbf{J}$ (voir paragraphe 3.1.1) sur Ω avec les fonctions caractéristiques des triangles commes fonctions tests. Rappelons d'abord que $\mathbb{F}$ est une fonction linéaire de $I\!R^3$ dans $I\!R^3 \times I\!R^3$, et donc sa différentielle est égale à elle même, c'est-à-dire $\mathbb{F}$.
En supposant maintenant que la derivée par rapport au temps du champ $\mathbf{Q}$ est constante en espace sur chaque triangle, on obtient finalement :

$$Aire(T_i)\left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}\right)_i + \int\limits_{\partial \mathbf{T_i}} \mathbb{F}(\mathbf{Q}).\nu_\mathbf{i}\,\mathbf{d}\sigma = -\mathbf{J_i}, \tag{4.3}$$

où ν_i est la normale unitaire extérieure à ∂T_i et $\mathbf{J}_i$ est une projection du courant (connu) sur le triangle T_i.
On distingue dans le terme intégral de (4.3), les flux internes, flux s'échangeant à l'interface entre T_i et un triangle (voisin par arête, figure 4.1) et les termes de bords qui expriment les conditions aux limites :

$$Aire(T_i)(\mathbf{Q})_i + \sum_{j=1}^{3} \mathbf{\Phi}_{ij} + \text{termes de bord} = -\mathbf{J}_i, \tag{4.4}$$

où $\mathbf{\Phi}_{ij}$ est une approximation des flux internes.

4.2.1 Le schéma de Godunov d'ordre un

Les coefficients ε et μ sont supposés constants par triangle, mais présentent des sauts aux interfaces de deux milieux différents, et par conséquent le choix du schéma numérique à l'ordre un n'est plus réduit au schéma ICR (Issacson-Courant-Rees) (voir remarque 3.2.3). On rappelle brièvement le schéma de Godunov adapté à la résolution numérique d'un système à coefficients non constants (voir [20] pour plus de détails).
On peut écrire le flux de Godunov sous la forme :

$$\mathbf{\Phi}_{ij} = \mathcal{A}(\eta_{ij})\mathbf{Q}^G(Q_i,Q_j).$$

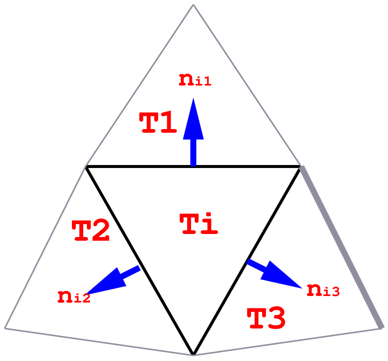


FIG. 4.1 – *les trois voisins par arête du triangle T_i*

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{Q} = \mathbb{F}(\mathbf{Q}).\boldsymbol{\eta}$$

$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta})$ est linéaire de IR^3 dans IR^3.
$\mathcal{A}\mathbf{Q}^G(Q_i,Q_j)$ est la valeur du flux à l'interface. Plus précisément si $\mathbf{Q}$ est la solution de :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\mathcal{A}\mathbf{Q}) = 0,$$

avec la donnée initiale :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r},\mathbf{0}) = \begin{cases} Q_i & \text{si } r < r_{ij}, \\ Q_j & \text{si } r > r_{ij}, \end{cases}$$

où r joue le rôle de l'abcisse dans la direction de la normale η, et r_{ij} est l'abcisse du point de contact entre les deux triangles T_i et T_j.
On pose alors : $\mathbf{Q^G(Q_i,Q_j) = Q(r = r_{ij},0^+)}$.

Remarque

$\mathbf{Q(r = r_{ij},0^+)} \neq \mathbf{Q(r = r_{ij},0^-)}$, mais par contre
$\mathcal{A}\mathbf{Q(r = r_{ij},0^+)} = \mathcal{A}\mathbf{Q(r = r_{ij},0^-)}$.

Nous avons fait le choix du schéma de Godunov (basé sur la résolution exacte d'un problème de Riemann) pour satisfaire exactement les conditions d'interface ($\mathbf{n} \wedge [\mathbf{E}] = 0$, et $\mathbf{n} \wedge [\mathbf{H}] = \mathbf{J}$) ce qui n'est pas le cas d'un solveur de Riemann approché tel que le schéma de Steger et Warming par exemple. On pourra se référer à ([46]) pour l'expression de la solution exacte du problème de Riemann et pour des comparaisons entre ces deux solveurs.

Malgré la qualité des solutions obtenues par le schéma de Godunov, la précision spatiale reste d'ordre un; pour améliorer cette précision nous modifions le calcul des valeurs aux interfaces entre les triangles comme expliqué ci-après.

4.2.2 Les schémas d'ordre supérieur

Supposons définis les gradients $\vec{\nabla}\mathbf{Q}_{T_i}$, la procédure pour étendre à un ordre supérieur (deux ou trois) le schéma décrit ci-dessus, est obtenue par la formule (3.6).

Calcul des gradients

La procédure pour définir le gradient approché d'une fonction à partir d'une représentation constante par morceaux n'est certes pas unique. Nous avons comparé dans ([25]) deux méthodes utilisant toutes deux une interpolation linéaire et nous avons conclu qu'aucune d'elles n'était réellement adaptée au cas des milieux hétérogènes sans parler de leur coût relativement élevé pour des simulations tridimensionnelles.
Nous proposons ici une procédure simple basé sur le même principe que le calcul des flux. Nous définissons un gradient moyen (ou faible) comme suit :

$$\text{Aire}(T_i)\vec{\nabla}\mathbf{Q}_{T_i} \simeq \int_{\partial T_i} \vec{\nabla}\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{Q}\mathbf{n}_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{B}_{ij}\eta_{ij}, \tag{4.5}$$

où $\mathbf{B}_{ij}$ est une valeur approchée de $\mathbf{Q}$ à l'interface entre T_i et T_j . Si nous prenons $\mathbf{B}_{ij} = \dfrac{\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j}{2}$ on obtient :

$$2\text{Aire}(T_i)\vec{\nabla}\mathbf{Q}_{T_i} = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{Q}_i\eta_{ij} + \sum_{j=1}^{3} \mathbf{Q}_j\eta_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{Q}_j\eta_{ij},$$

car la somme des normales η_{ij} (non unitaires!) est nulle.
On notera par la suite cette définition des gradients par (GVF).

Condition aux limites

Pour calculer le flux sur la frontière métallique Γ, nous avons utilisé la même technique qu'au paragraphe (3.2.4) en résolvant un demi problème de Riemann avec une condition initiale et une condition aux limites, et le problème est ainsi bien posé. Soit $\mathbf{Q_b}$ la valeur de $\mathbf{Q}$ dans un triangle T_b du bord. On résout :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_t + \dfrac{\partial}{\partial r}\mathcal{A}(\boldsymbol{n})\mathbf{Q} = 0 & , r > 0 \ , \\ \mathbf{Q}(r,t=0) = \mathbf{Q}_b & , r > 0 \ , \\ Q_3(r,t) = -\frac{1}{\varepsilon}E_3^{inc} & , r = 0 \ , \end{cases} \tag{4.6}$$

on pose alors : $\mathbf{Q_\Gamma^G} = \mathbf{Q(r = 0,t > 0)}$.
Le flux $\mathbf{\Phi}_b$ sur le bord est défini alors comme dans (4.2.1) par : $\mathbf{\Phi}_b = \mathcal{A}(\boldsymbol{n})\mathbf{Q_\Gamma^G}$.
E_3^{inc} représente le champ incident, et $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire au bord. (Pour plus de détails voir [25]).

4.3 Deux méthodes de calcul du gradient

Nous reprenons ici la méthode proposée par J. Durlofsky, S. Osher et B. Engquist [41] pour calculer un gradient approché sur un triangle (la méthode est décrite au paragraphe 3.2.3.2), nous avons noté cette définition (GB). Nous proposons dans ce paragraphe de comparer les deux méthodes de calcul du gradient approché (GVF) et (GB). Nous les avons comparées à travers deux cas tests, le premier consiste à calculer le gradient d'une fonction régulière sinusoïdale, et le deuxième cas consiste à calculer le gradient d'une fonction discontinue.
Considérons la fonction régulière u_1, et la fonction discontinue u_2 données par :

$$u_1(x,y) = cos(\omega * x) * sin(y) \tag{4.7}$$

$$u_2(x,y) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{a} * sin(\dfrac{\pi}{b} * y) * sin(\omega * x) \ si \ x < 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{a} * sin(\dfrac{\pi}{b} * y) * sin(\omega * x) \ si \ x > 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

a et b étant deux réels strictement positifs ($a = 1,b = 2$), $\omega = 2\pi f$ avec $f = 0.1$.
Les figures (4.2) et (4.3) représentent la dérivée en x des deux fonctions citées ci-dessus calculée avec les deux méthodes. Comparées au calcul exact, on constate que les deux méthodes de calcul donnent des résultats similaires que ce soit pour calculer des gradients de fonctions continues ou discontinues (figures 4.2 et 4.3). ces comparaisons sont effectuées sur un maillage structuré.
Nous avons ensuite comparé les deux gradients à travers le cas test discontinu précédent (avec $f = 0.6$) sur un maillage non structuré (figure 4.4). Les résultats restent comparables (figure 4.5).

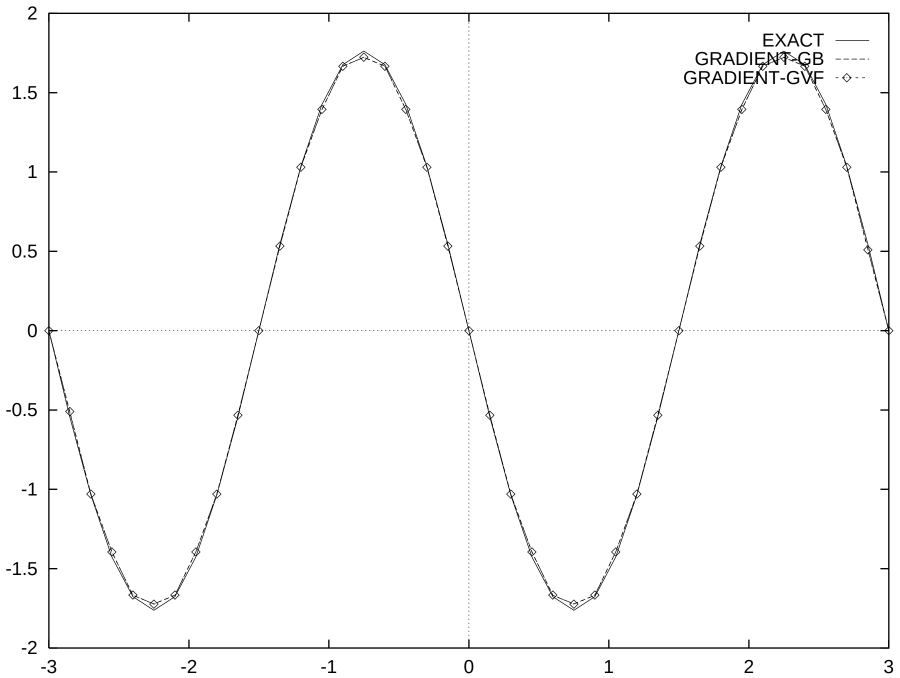


FIG. 4.2 – *Gradients approchés et exact d'une fonction régulière*

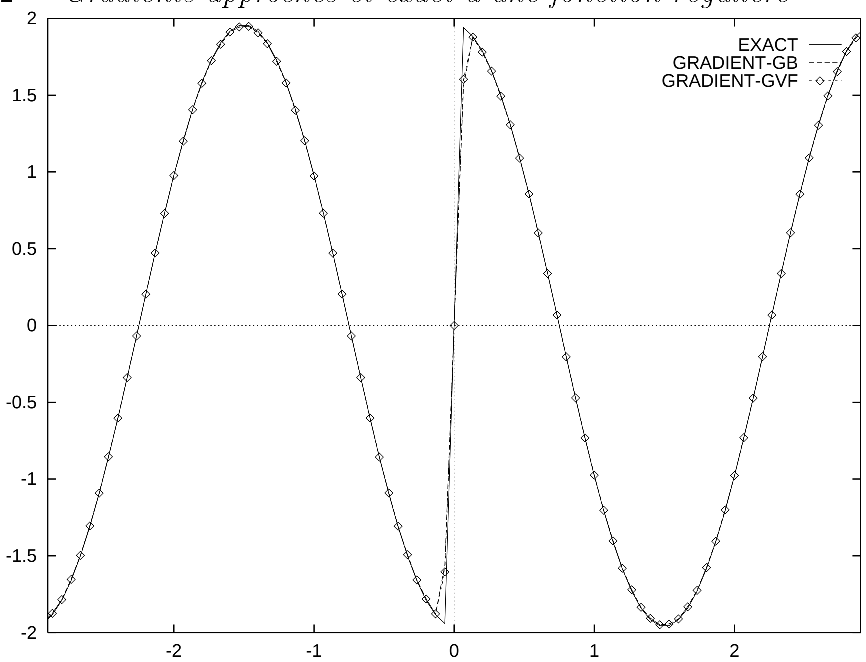


FIG. 4.3 – *Gradients approchés et exact d'une fonction discontinue*

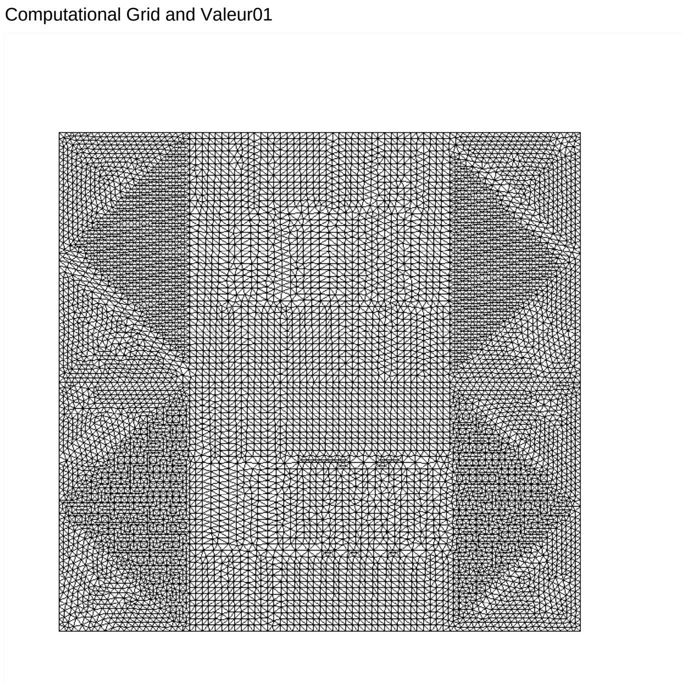


FIG. 4.4 – *maillage non structuré*

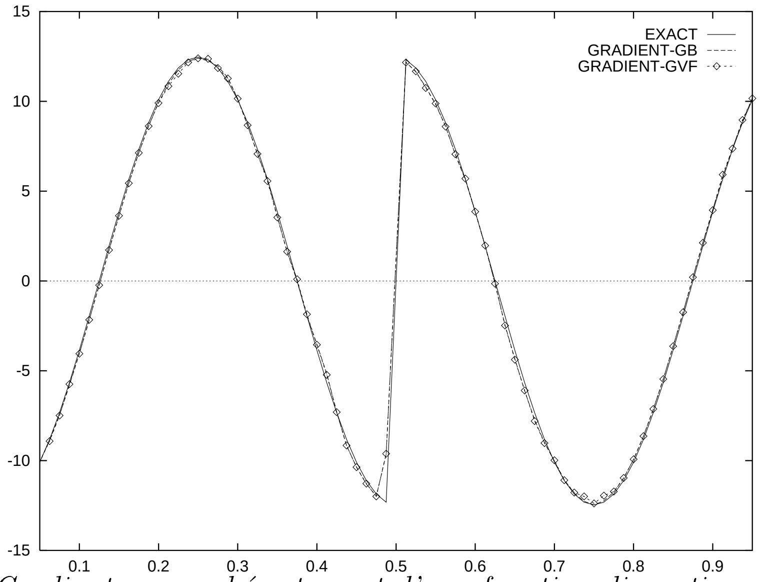


FIG. 4.5 – *Gradients approchés et exact d'une fonction discontinue*

Coût CPU

Nous avons également comparé le temps de calcul des deux gradients pour une itération et on peut constater d'après le tableau (4.1) que le gradient (GVF) est six fois moins coûteux que le gradient (GB). On peut donc déduire que l'avantage de la méthode (GVF) par rapport à la méthode (GB) est qu'elle est facile à implémenter, et d'un coût relativement faible. Elle est également deux fois moins coûteuse que la méthode (GN) qu'on a vu dans le chapitre précédent.

type de gradient	GB	GVF
temps (s)	6.10^{-2}	1.10^{-2}

TAB. 4.1 – *Temps CPU pour les deux types de gradients.*

4.4 Résultats numériques

Afin de vérifier la qualité de notre méthode d'approximation, nous avons effectué une série de cas tests numériques. Nous présentons ici la simulation numérique de la propagation d'un pulse à l'intérieur d'une cavité carrée composée du vide et du verre, la diffraction d'une onde plane sur un matériau revêtu d'une couche de diélectrique, et enfin la simulation d'un champ électromagnétique généré par un courant source surfacique. Les maillages ulilisés dans tous les cas tests (sauf mention contraire) correpondent à environ 15 points par longueur d'onde.

4.4.1 Simulation d'un pulse

On simule ici l'évolution d'une pulsation en mode TM, dans une cavité carrée semi ouverte de longueur d= $6m$. à droite de $x = 0$ le vide et à gauche du verre (matériau d'indice $\varepsilon = 4\varepsilon_0, et\, \mu = \mu_0$ où ε_0 et μ_0 sont les indices du vide) (figure 4.6). On envoie une onde de type pulse dans la partie vide, de longueur d'onde $\lambda = 3m$ donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_z(x,y) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{n=3} \alpha_n cos(2n\omega(cos\theta(x - \frac{y_0}{4}) + sin\theta(y - \frac{y_0}{4}))\chi_{[y_0 - \frac{\lambda}{4}, y_0 + \frac{\lambda}{4}]}, \\ \mathbf{H}_y(x,y) = \mathbf{E}_z, \\ \mathbf{H}_x(x,y) = sin\theta \mathbf{E}_z. \end{cases} \tag{4.9}$$

Avec $\alpha_0 = 0.43750$, $\alpha_1 = -0.53125$, $\alpha_2 = 0.06250$, et $\alpha_3 = 0.03125$; $\chi_{[a,b]}$ est la fonction caractéristique de $[a,b]$ et θ l'angle d'incidence. L'onde venant frapper sur le verre se décompose en une partie transmise et une partie réfléchie (figures 4.7 et 4.8). La solution calculée numériquement après un temps $t = 6.66ns$ approche bien la solution exacte (figure 4.8).

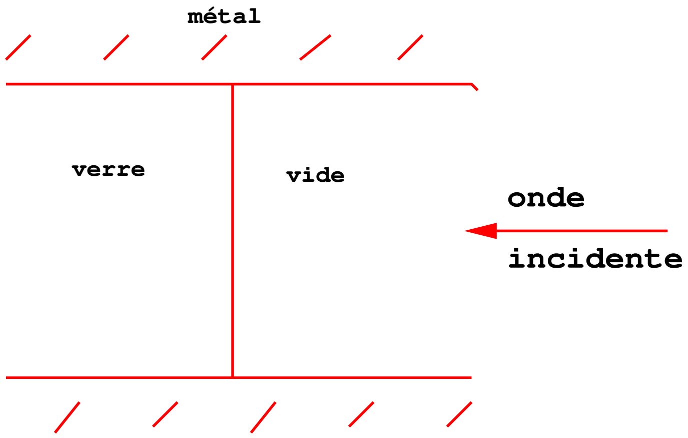


FIG. 4.6 – *boite métallique*

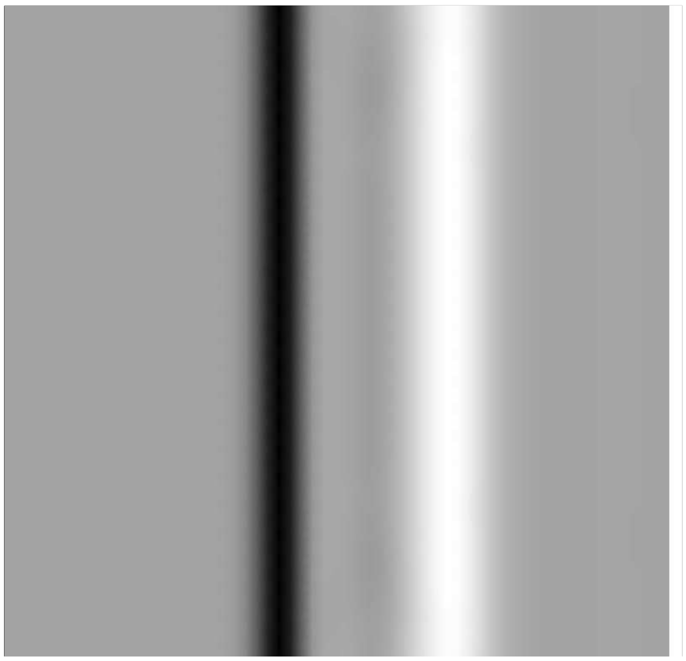


FIG. 4.7 – *simulation du champ électrique d'un pulse*

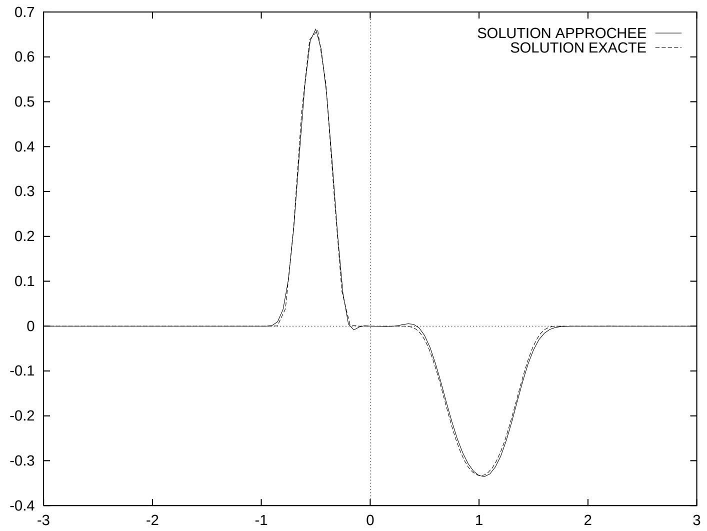


FIG. 4.8 – *coupe en y du champ électrique après un temps $t = 6.66ns$*

4.4.2 La diffraction d'onde sur un matériau revêtu

Nous rappelons que le but de ce travail est la recherche d'une méthode pour résoudre essentiellement des problèmes dans des milieux hétérogènes. Nous présentons ici un cas test où "l'hétérogénéité" du milieu varie suivant les directions. Nous avons étudié la diffraction d'une onde plane sur un disque de rayon $R = 0.459m$, revêtu d'une couche de diélectrique d'épaisseur $e = 0.1m$. Cette couche inclut une répartition périodique de disques métalliques totalement réfléchissants, avec une périodicité de $0.1m$, le rayon de ces disques est égal à $0.025m$. Nous avons utilisé un maillage correspondant à environ 14 points par longueur d'onde (figure 4.9), et nous avons effectué ce cas test dans les deux cas de polarisation (magnétique et électrique).

4.4.2.1 Cas des ondes transverses magnétiques

La figure (4.10) représente le champ diffracté E_z, on note la faible influence des disques réfléchissants sur l'onde diffractée. Nous avons comparé cette solution à celle obtenue par une méthode d'éléments finis par Anabelle Zebic [87], où le maillage utilisé correspond à environ 20 points par longueur d'onde. les deux solutions sont qualitativement comparables.

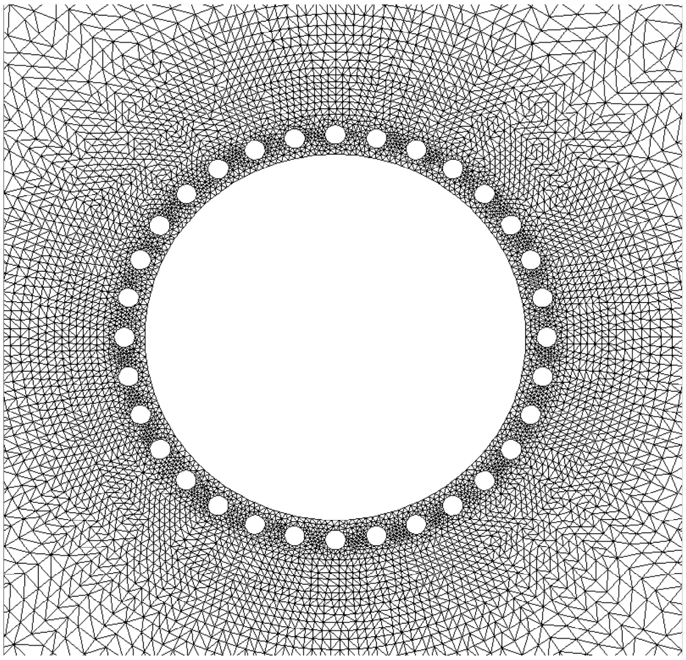


FIG. 4.9 – *un zoom du maillage du disque revêtu*

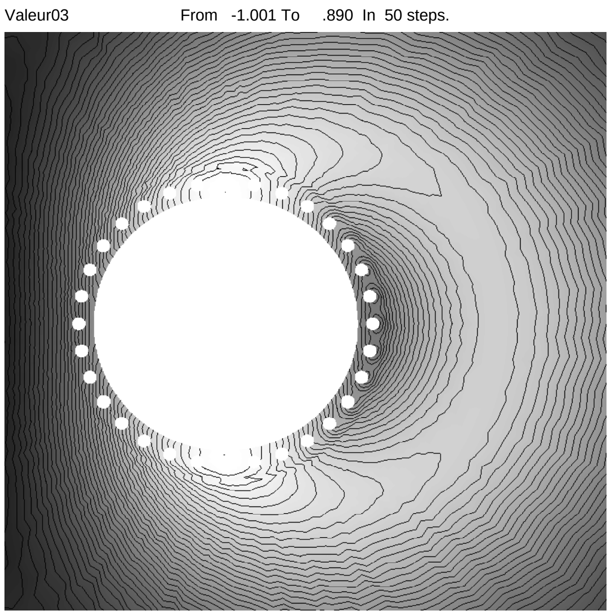


FIG. 4.10 – *champ électrique diffracté*

4.4.2.2 Cas des ondes transverses électriques

Nous avons effectué la même expérience qu'au paragraphe (4.4.2.1) avec cette fois-ci une polarisation électrique. La figure (4.11) représente le champ diffracté H_z. Contrairement au cas précédent (polarisation magnétique), ici l'influence des disques est importante et ceci est dû aux conditions sur le bord.

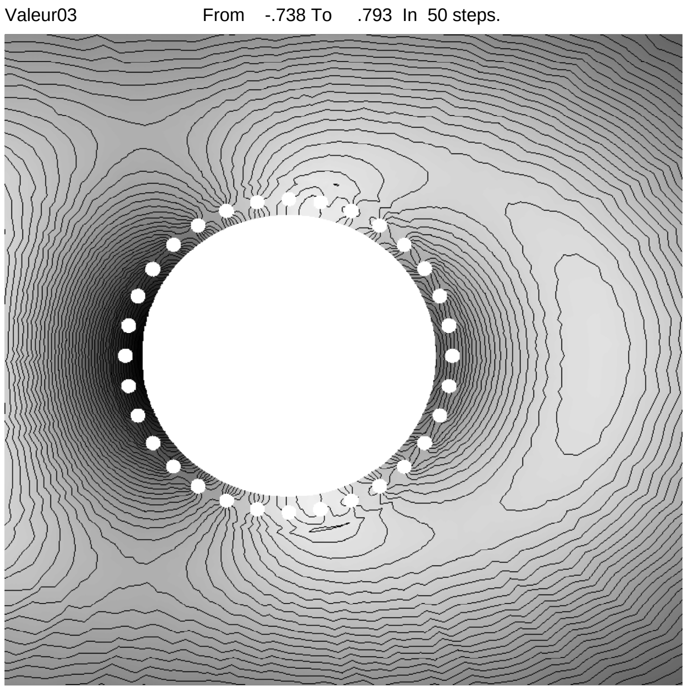


FIG. 4.11 – *champ magnétique diffracté*

4.4.3 Le courant source surfacique

Dans un mileu linéaire, nous avons la relation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - rot(\mathbf{H}) = -\mathbf{J}. \tag{4.10}$$

Nous considérons maintenant un courant $\mathbf{J}_s$ traversant la section $\mathbf{s}$ déterminée par $(x = 0)$ d'un guide d'onde (figure 4.12).

$$\mathbf{J_s}(y) = \sqrt{2} sin(\frac{\pi y}{d}) cos(\omega t) \delta_x, \tag{4.11}$$

où δ est la masse de Dirac.
L'onde se propageant à l'intérieur du guide d'onde en mode TM est donnée par :

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E_z}^+ &= -\frac{\sqrt{2}\mathbf{Z_0}}{2} sin(\frac{\pi y}{d}) cos(\omega t - \beta x) \\
\mathbf{H_y}^+ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} sin(\frac{\pi y}{d}) cos(\omega t - \beta x) \\
\mathbf{H_x}^+ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\mathbf{Z_0}}{\eta}\frac{f_c}{f} cos(\frac{\pi y}{d}) sin(\omega t - \beta x)
\end{aligned}\right\} x > 0 \tag{4.12}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{E_z}^+ &= -\frac{\sqrt{2}\mathbf{Z_0}}{2} sin(\frac{\pi y}{d}) cos(\omega t + \beta x) \\
\mathbf{H_y}^+ &= \frac{\sqrt{2}}{2} sin(\frac{\pi y}{d}) cos(\omega t + \beta x) \\
\mathbf{H_x}^+ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\mathbf{Z_0}}{\eta}\frac{f_c}{f} cos(\frac{\pi y}{d}) sin(\omega t + \beta x)
\end{aligned}\right\} x < 0 \tag{4.13}$$

Paramètres du guide d'onde

fréquence (cutoff)	$f_c = \frac{1}{2d\sqrt{\varepsilon\mu}}$
constante de propagation	$\beta = k\sqrt{1 - (\frac{f_c}{f})^2},\ f > f_c$
impédance	$\mathbf{Z_0} = \frac{\omega\mu}{\beta}$

Pour plus de détails voir dans [74] page 97.

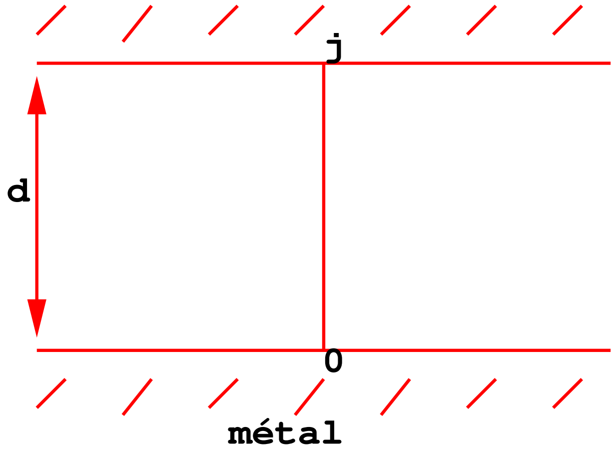
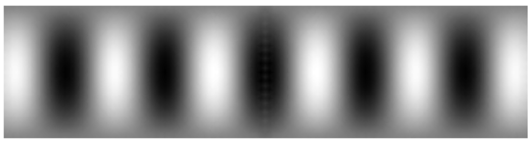


FIG. 4.12 – *Courant surfacique dans un guide d'onde rectangulaire*

Nous avons considéré une fréquence $f = 0.3$ GHZ, et $d = 1$ m.
La figure (4.13) représente le champ électrique et le champ magnétique. On note bien la discontinuité du champ magnétique en $x = 0$. Les coupes en $y = \frac{d}{2}$ des deux champs (figures 4.14 et 4.15), comparées aux solutions exactes montrent la bonne qualité des solutions approchées.



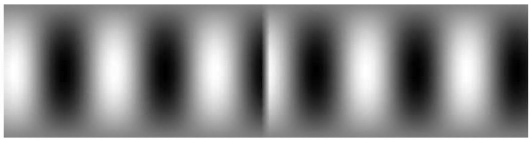


FIG. 4.13 – *champ électrique à gauche et champ magnétique à droite*

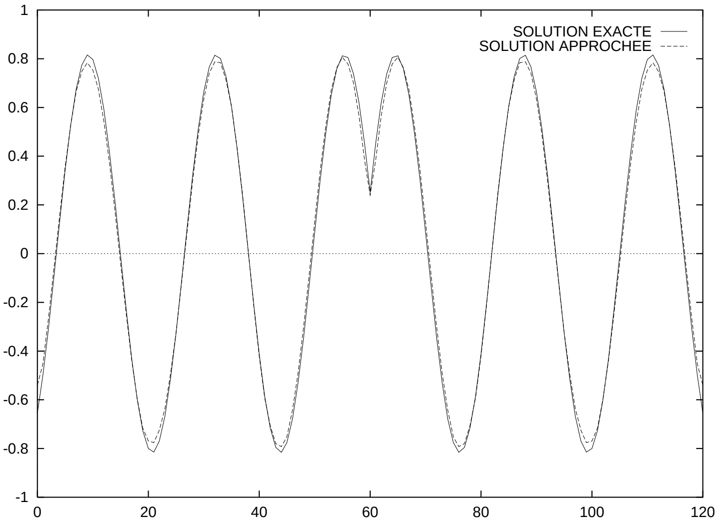


Fig. 4.14 – *coupe en y du champ électrique*

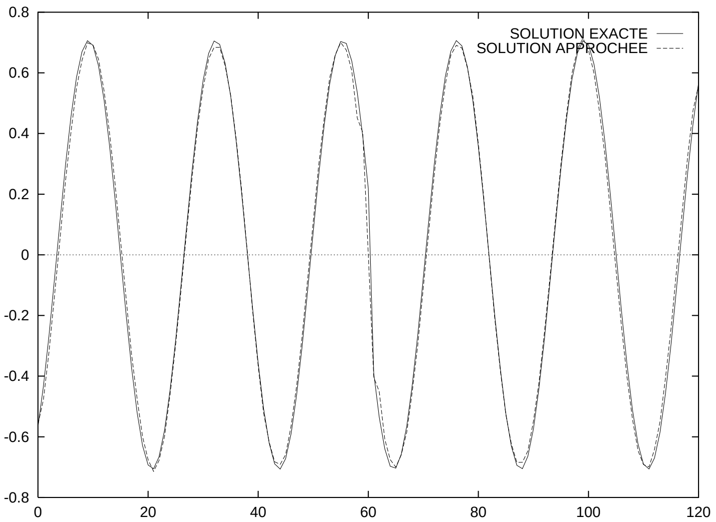


Fig. 4.15 – *coupe en y du champ magnétique*

4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, une méthode numérique visant à traiter des problèmes d'électromagnétisme dans des domaines hétérogènes. Le choix des volumes de contrôle qui sont les éléments de la discrétisation, et la méthode de calcul des gradients volumes finis, semblent bien adaptés à notre résolution. En effet, ces volumes de contrôle permettent de bien définir l'interface entre deux matériaux d'indices différents, et le calcul du gradient volumes finis (GVF) fait intervenir peu de points autour de la cellule considérée, et les compraisons avec une autre méthode de calcul proposée par L.J. Durlofsky, S. Osher, et B. Engquist et notée ici par (GB), ont montré que la méthode (GVF) est aussi performante et a l'avantage d'être moins coûteuse.
L'utilisation d'un solveur de Riemann exact nous a permis de prendre en compte les conditions de saut. Les différentes expériences numériques (courant surfacique, diffraction d'onde sur un matériau revêtu...etc) ont montré le bon comportement de la méthode, et aucune oscillation n'apparait à la surface des discontinuités.

4.6 Annexe 2

Annexe 4.6.1 : Forme conservative des équations de Maxwell en polarisation transverse électrique $\mathbf{TE_z}$.

La formulation conservative bidimensionnelle en champ total et associée aux ondes transverses électriques s'écrit :

$$\mathbf{Q}_t \,+\, \mathbf{F}(\mathbf{Q})_x \,+\, \mathbf{G}(\mathbf{Q})_y \,=\, 0 \;,$$

et les composantes non nulles du champ électromagnétique sont :

$$\mathbf{Q} \,=\, {}^t(-D_x \,,\, -\, D_y \,,\, B_z) \quad .$$

On obtient alors :

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) \,=\, \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -Q_3/\mu \\ -Q_2/\varepsilon \end{array} \right\} \quad , \quad \mathbf{G}(\mathbf{Q}) \,=\, \left\{ \begin{array}{c} Q_3/\mu \\ 0 \\ Q_1/\varepsilon \end{array} \right\} \;.$$

On peut remarquer que les flux $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ redonnent exactement ceux du cas TM en interchangeant seulement ε et μ dans les équations.

Annexe 4.6.2 : Flux numériques décentrés d'ordre un pour le système de Maxwell.

Soient $\mathbb{F} ={}^t (\mathbf{F}(\mathbf{Q})\,;\,\mathbf{G}(\mathbf{Q}))$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ définis respectivement par (3.1) et (3.2). On pose alors $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{Q},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}.\mathbb{F}(\mathbf{Q})$.
En milieu homogène, les flux échangés d'une cellule T_j vers une cellule adjacente T_i s'écrivent alors pour le système de Maxwell bidimensionnel :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_{ij} \;&= \boldsymbol{\Phi}\;(\mathbf{Q}_i,\mathbf{Q}_j,\boldsymbol{\eta}) \;, \\ &= \frac{\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}_i,\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}_j,\boldsymbol{\eta})}{2} \;-\; \frac{\mid \mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}) \mid}{2}\,(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) \;, \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\eta} =\; {}^t(\eta_1,\eta_2)$ est la normale à l'interface $\partial T_i \cap \partial T_j$ orientée de T_i vers T_j.

En posant maintenant $\xi_1 = \dfrac{\eta_1}{||\;\boldsymbol{\eta}\;||}, \xi_2 = \dfrac{\eta_2}{||\;\boldsymbol{\eta}\;||}$, on obtient :

$$| \mathcal{A} |= c \,||\, \boldsymbol{\eta} \,|| \begin{pmatrix} (\xi_2)^2 & -\xi_1\,\xi_2 & 0 \\ -\xi_1\,\xi_2 & (\xi_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \text{ et } \quad \boldsymbol{\mathcal{F}} =||\, \boldsymbol{\eta} \,|| \begin{pmatrix} (\xi_2\,Q_3)/\varepsilon \\ -(\xi_1\,Q_3)/\varepsilon \\ -(\xi_1\,Q_2\,-\,\xi_2\,Q_1)/\mu \end{pmatrix} .$$

Annexe 4.6.3 : Matrices de passage pour la diagonalisation du système de Maxwell bidimensionnel.

La matrice $\mathcal{A}$ définie par (3.2) est diagonalisable dans $I\!R$ et la matrice de ses valeurs propres associées s'écrit :

$$\Lambda = c \,||\, \boldsymbol{\eta} \,|| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice $\mathcal{A}$ peut donc se mettre sous la forme $\mathcal{A} = T\Lambda T^{-1}$ avec :

$$T = \begin{pmatrix} \xi_2 & -\xi_2 & \xi_1 \\ -\xi_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ Z & Z & 0 \end{pmatrix} \;, \; T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_2 & -\xi_1 & 1/Z \\ -\xi_2 & \xi_1 & 1/Z \\ 2\xi_1 & 2\xi_2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

où $Z = \mu c$ est l'impédance du milieu de propagation et $\boldsymbol{\xi}$ le vecteur défini dans l'annexe 4.6.2.

Chapitre 5

La méthode Galerkin Discontinue

Ce chapitre a fait l'objet d'un rapport INRIA (N^o 3501) réalisé avec Loula Fézoui[1]

Les travaux présentés dans ce chapitre ont également fait l'objet de deux communications, une à la 20ième rencontre annuelle de la société de mathématiques appliquées et industrielles (Canada, 1999), et l'autre au "The 15th Annual Review of progress in Applied Computational Electromagnetics (USA, 1999)" .

1. CERMICS-INRIA, 2004 Route des Lucioles, 06902 Sophia-Antipolis, France.

5.1 Introduction

Parmi les méthodes numériques d'ordre élevé développées pour la résolution des systèmes hyperboliques avec des géométries complexes qui nécessitent des maillages non structurés, nous citons ici les méthodes d'éléments finis et en particulier la méthode Galerkin Discontinu [32]. Nous présentons dans ce chapitre une adaptation de cette dernière au système de Maxwell en milieu hétérogène, cette méthode a été construite pour la résolution des problèmes conservatifs et hyperboliques de la forme :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U} + div\mathbb{F}(\mathbf{U}) = 0 \quad \text{sur}\, \Omega \times [0,T], \tag{5.1}$$

où Ω est un ouvert de IR^d.
Cette méthode a été introduite par Reed et Hill en 1973 [68] pour la résolution de l'équation de transport de neutrons. Une analyse mathématique a été menée par LeSaint et Raviart [58], Johnson et Pitkaränta [56], Richter [73], et Peterson [66], et ceci dans le cas des équations scalaires hyperboliques et linéaires.
B.Cockburn et S.W.Shu ont développé et étendu cette méthode aux autres formes d'équations et systèmes non linéaires (advection, dynamique des gaz...etc) [26]–[32].
L'idée de base est de choisir un espace d'éléments finis discontinus V_h^k où les solutions approchées sont des polynômes de degré k sur chaque volume T_i tel que $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{i=M} T_i$. La solution approchée est calculée à partir d'une formulation faible du problème à résoudre. Pour se faire, on multiplie l'équation (ou le système) par une fonction test $v(x) \in V_h^k$, et on intègre sur chaque volume T_i. Dans le cas monodimensionnel ($d = 1$), où T_i est un segment, on choisit comme fonctions tests, les éléments d'une base locale (sur chaque segment), et afin d'obtenir une matrice de masse diagonale, on peut choisir comme base les polynômes de Legendre. A partir du nombre de degrés de liberté fixé, on choisit une formule de quadrature appropriée pour calculer les intégrales. Le passage au cas multidimensionnel n'est pas trivial, notamment pour le choix des fonctions de base et des formules de quadrature. Si on prend l'exemple du cas bidimentionnel, il est plus aisé de trouver des formules de quadrature sur des triangles que sur n'importe quel autre polygone. Ainsi, le choix du volume d'intégration n'est pas arbitraire. Quant à l'intégration en temps, on utilise un schéma de Runge-Kutta d'ordre (k+1), la méthode est ainsi d'ordre (k+1) (pour les démonstrations voir [18], et [33]).
La méthode présente des propriétés, notamment de parallélisation étudiée par plusieurs auteurs dont Biswas, Devine, et Flaherty [9], qui en ont par ailleurs construit des versions h- et p-adaptatives. La méthode a été étendue aux équations de Navier-Stokes compressibles par Bassi et Rebay [3], et aux équations de Convection-Diffusion par B.Cockburn et S.W.Shu [31].

Le choix de l'espace de discrétisation repose sur celui des fonctions de base locale. Cette méthode est bien adaptée pour notre problème où le milieu peut être hétérogène, cependant une restriction du CFL due à la méthode utilisée se traduit par un coût en CPU relativement élevé. On verra par la suite une comparaison de cette méthode avec une méthode de volumes finis du point de vue qualitatif et coût.
Ce chapitre est organisé comme suit : la première partie consiste à présenter le problème à résoudre. Nous présentons ensuite dans la deuxième partie les détails de la méthode numérique utilisée comprenant les fonctions de base choisies, les formules de quadrature, et la discrétisation en temps. Dans la troisième partie, des résultats numériques seront présentés aussi bien dans le cas homogène que dans le cas hétérogène, et dans la quatrième et dernière partie, nous ferons une étude comparative de cette méthode avec une méthode de volumes finis.

5.2 Le problème à étudier

Nous avons choisi d'étudier le cas bidimensionnel avec une polarisation transverse magnétique où les équations s'écrivent comme suit :

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial B_x}{\partial t} & +\dfrac{\partial E_z}{\partial y} & & = & 0, \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial t} & -\dfrac{\partial E_z}{\partial x} & & = & 0, \\ \dfrac{\partial D_z}{\partial t} & +\dfrac{\partial H_x}{\partial y} & -\dfrac{\partial H_y}{\partial x} & = & -j_z. \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Nous nous plaçons dans le cas particulier où le domaine de propagation des ondes est isotrope et linéaire.

Caractéristiques mathématiques des équations de Maxwell

Nous rappelons que le système (5.2) peut se mettre sous la forme conservative :

$$\mathbf{Q_t} + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(\mathbf{Q}) = -\mathbf{J}, \tag{5.3}$$

où $\mathbf{Q} =^t (B_x,B_y,D_z)$, et $\mathbb{F} = (F(\mathbf{Q}),G(\mathbf{Q}))$ (voir paragraphe 3.1.1). Le système (5.2) est conservatif et hyperbolique.

5.3 Approximation numérique

Nous considérons une discrétisation de type éléments finis du domaine de calcul $\Omega = \bigcup_{i=1}^{i=M} T_i$, où T_i est un triangle.
Nous décrivons ci-dessous les approximations spatiales et temporelles, et rappelons les résultats de stabilité.

5.3.1 Discrétisation en espace

Soit V= $L^2(\Omega \times [0,\infty))$ l'espace des solutions du problème (5.2), et soit l'espace approché $V_h^k \subset V$, défini par

$$V_h^k = \left\{ v \in V / v|_{T_i} \in P^k, i = 1,...M \right\},$$

où P^k est l'espace des polynômes de degré k (k= 1,2). Par conséquent les solutions v sont discontinues d'un triangle à un autre. Dans toute la suite on fixera k= 1. Afin de construire une solution $\mathbf{Q_h} \in \mathbf{V_h^1}$, on multiplie le système (5.3) par une fonction test $v(X) \in V_h^k$, et on intègre sur chaque triangle T_i. Le système obtenu s'écrit pour $\mathbf{Q}_h = \mathbf{Q}|_{T_i}$:

$$\frac{d}{dt}\int_{T_i} \mathbf{Q}_h(X,t)v(X)dT_i + \int_{T_i} \mathbb{F}(\mathbf{Q}_h(X,t))v(X)dT_i = -\int_{T_i} \mathbf{J}v(X)dT_i,$$

et après intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_{T_i} \mathbf{Q}_h(X,t)v(X)dT_i + \sum_{j\in N(i)} \int_{\partial Ti \cap \partial T_j} \mathbb{F}(\mathbf{Q}_h(X,t)).n_{ij}v(X)d\sigma \\ &-\int_{T_i} \mathbb{F}(\mathbf{Q}_h(X,t))\nabla v(X)dT_i = -\int_{T_i} \mathbf{J}v(X)dT_i. \end{aligned} \tag{5.4}$$

N(i) est l'indice des voisins du triangle T_i, n_{ij} est la normale extérieure unitaire dirigée de T_i vers T_j.

5.3.1.1 Les fonctions de base

On construit une base P^1 locale sur chaque triangle comme suit :
Soit un triangle T_i de sommets a1, a2 et a3. On note m1, m2, et m3 les points milieux des arêtes (figure 5.1), K le triangle de sommets m1, m2, et m3 de mesure $|K|$, et on note :

$$m1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix}, \; m2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix}, \; et \; m3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix}.$$

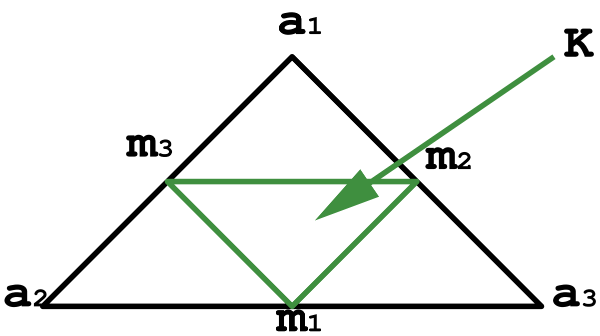


FIG. 5.1 – *les degrés de liberté P^1.*

Soient φ_i (i=1,..3) les fonctions de base (linéaires), telle que $\varphi_i(mj) = \delta_{ij}$, où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Alors les fonctions $(\varphi_i)_i$ sont données par :

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2|K|}\left\{(m_{22} - m_{23})x + (m_{13} - m_{12})y + m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13}\right\}, \\ \varphi_2 = \frac{1}{2|K|}\left\{(m_{23} - m_{21})x + (m_{11} - m_{13})y + m_{13}m_{21} - m_{23}m_{11}\right\}, \\ \varphi_3 = \frac{1}{2|K|}\left\{(m_{21} - m_{22})x + (m_{12} - m_{11})y + m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}\right\}. \end{cases}$$

Une fonction $\mathbf{Q}_h$ de V_h^k peut s'écrire pour $X = (x,y) \in T_i$, en fonction des éléments de la base locale $(\varphi_i)_i$:

$$\mathbf{Q}_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^{i=3} \mathbf{Q}_h(m_i,t)\varphi_i(x,y),$$

où $\mathbf{Q}_h(m_i,t)$ représentent les degrés de liberté de la solution approchée.

Choix des fonctions tests :

On choisit dans l'équation (5.4) comme fonction test $v(X) = \varphi_l(X), l = 1,..3$. On obtient ainsi trois équations à résoudre pour chaque champ $\mathbf{Q}_h$, et nous approchons chaque intégrale par des formules de quadrature de Gauss.

5.3.1.2 Calcul des intégrales

Nous allons approcher les différentes intégrales de la formulation faible (5.4). On note deux types d'intégrales :

Les intégrales sur le triangle

$$\frac{d}{dt}\int_{T_i} \mathbf{Q}_h(X,t)\varphi_l(X)dT_i,$$

$$\int_{T_i} \mathbb{F}(\mathbf{Q}_h(X,t))\varphi_l(X)dT_i,$$

et

L'intégrale sur le bord

$$\int_{\partial Ti\cap\partial T_j} \mathbb{F}(\mathbf{Q}_h(X,t)).n_{ij}\varphi_l(X)d\sigma.$$

Pour approcher

$$\frac{d}{dt}\int_{T_i} \mathbf{Q}_h(X,t)\varphi_l(X)dT_i,$$

on écrit d'abord $\mathbf{Q}_h$ en fonction des éléments de la base, et on applique la formule de quadrature de Gauss à trois points donnée par :

$$\int_{T_i} F(x,y)dT_i \simeq \frac{|T_i|}{3}\sum_{j=1}^{j=3} F(m_j), \tag{5.5}$$

qui est exacte pour les polynômes de degré 2. On obtient ainsi :

$$\frac{d}{dt}\int_{T_i} \mathbf{Q}_h(X,t)\varphi_l(X)dT_i \simeq \frac{d}{dt}A\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_h(m1,t) \\ \mathbf{Q}_h(m2,t) \\ \mathbf{Q}_h(m3,t) \end{pmatrix},$$

où

$$A = \frac{|T_i|}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et pour

$$\int_{T_i} \mathbb{F}(\mathbf{Q}_h(X,t))\varphi_l(X)dT_i,$$

on utilise la formule de quadrature (5.5).

Quant à l'intégrale de bord :

$$\int_{\partial Ti\cap\partial T_j} \mathbb{F}(\mathbf{Q}_h(X,t)).n_{ij}\varphi_l(X)d\sigma,$$

l'approximation se fait en deux étapes; dans un premier temps, on approche $\mathbb{F}(\mathbf{Q}_h(X,t)).n_{ij}$ par un flux échangé entre T_i et T_j. Ce flux peut être calculé de différentes façons. Afin de préserver la continuité de la composante tangentielle du champ électrique donnée par $n \wedge [\mathbf{E}] = 0$, et la condition de transmission donnée par $n \wedge [\mathbf{H}] = \mathbf{J}$, nous avons choisi d'utiliser un schéma de Godunov. Ce schéma est basé sur la résolution locale d'un problème de Riemann. Le flux est donné par :

$$\mathbf{\Phi_{ij}} = \mathcal{A}\mathbf{W_{ij}},$$

où $\mathbf{W_{ij}}$ est un vecteur constant le long de l'interface $\partial T_i \cap \partial T_j$. On a alors :

$$\mathbf{\Phi_{ij}}(\mathbf{Q_i},\mathbf{Q_j},t) \simeq \mathbb{F}(\mathbf{Q}_h,t).n_{ij},$$

où $\mathbf{Q}_i$ et $\mathbf{Q}_j$ sont les solutions approchées de part et d'autre de l'interface. Dans le cas où l'interface coïncide avec le bord du domaine, $\mathbf{Q}_j$ sera donnée par la condition aux limites ($\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_h^b$).

Nous distinguons ici deux types de conditions aux limites comme au chapitre (3) paragraphe (3.2.4); une condition métallique et une condition absorbante.

Ensuite, nous appliquons une formule de quadrature de Gauss pour approcher :

$$\int_{\partial Ti \cap \partial T_j} \mathbf{\Phi}_{ij}(\mathbf{Q}_i,\mathbf{Q}_j,t).n_{ij}\varphi_l d\sigma \quad l = 1,..3.$$

On se ramène d'abord à une intégrale sur [-1,1] par le changement de variable suivant :

$$\begin{array}{rl} \xi & : [r_a,r_b] \longmapsto [-1,1] \\ r & \longrightarrow \xi = \frac{2r-r_a-r_b}{r_b-r_a} \end{array}$$

où $[r_a,r_b]$ est un segment quelconque.

la formule de quadrature sur $[-1,1]$ est donnée par :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

qui est exacte pour les polynômes de degré trois.

Remarque

La base locale étant orthogonale, la matrice de masse est par conséquent diagonale.

Après l'approximation en espace et l'inversion de la matrice de masse, on obtient une E.D.O de la forme :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q}_h = L_h(\mathbf{Q}_h),$$

où L_h est l'opérateur approché de $\vec{\nabla}.\mathbb{F}$.

5.3.2 Approximation en temps

Pour une discrétisation en temps à l'ordre 2, on utilise un schéma de Runge-Kutta à deux pas :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_h^0 = \mathbf{Q}^n \ , \\ \mathbf{Q}_h^l = \sum_{e=0}^{l-1} \alpha_{le}\mathbf{Q}_h^e + \beta_{le}\Delta t L_h(\mathbf{Q}_h^e,\mathbf{Q}_h^b(t+d_e\Delta t)) \quad l=1,2,..p \ , \\ \mathbf{Q}_h^{n+1} = \mathbf{Q}_h^p \ , \end{cases}$$

où $\mathbf{Q}_h^b$ est la condition aux limites donnée par le problème à résoudre (ici $p = 2$).
Les paramètres du schéma sont donnés dans le tableau suivant :

$\alpha_{10} = 1$	$\alpha_{20} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{21} = \frac{1}{2}$
$\beta_{10} = 1$	$\beta_{20} = 0$	$\beta_{21} = \frac{1}{2}$
$d_0 = 0$	$d_1 = 1$	

TAB. 5.1 – *paramètres du schéma en temps*

5.3.3 Stabilité du schéma

Après les discrétisations spatiale et temporelle décrites précédemment, on obtient une solution approchée $\mathbf{Q}_h \in V_h^k$. Elle approche la solution $\mathbf{Q}$ du problème (5.2) à l'ordre deux (pour la preuve, voir [18] et [33]. La stabilité impose un cfl$\leq \frac{1}{3}$ (voir [18], [33]). Cette condition est assez restrictive comparée aux autres méthodes, par exemple la méthode des différences finies (schéma de Yee) qui est d'ordre deux pour un cfl$\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, et des volumes finis centrés-éléments, qui est d'ordre deux pour un cfl≤ 1. (condition obtenue numériquement, voir [25]). Cette condition de stabilité pour la méthode Galerkin Discontinu se traduit par un surcoût en temps de calcul relativement important.

5.4 Expériences numériques

Nous présentons ici quelques expériences numériques afin de tester la qualité de la méthode Galerkin discontinu pour la résolution d'un système hyperbolique linéaire à coefficients non constants (le système de Maxwell).

5.4.1 Propagation d'ondes dans un milieu homogène

Dans un premier temps, nous allons effectuer quelques cas tests dans un milieu homogène, où les indices du mileu ε et μ sont des constantes sur tout le domaine. Nous considérons ici le cas du vide ($\varepsilon = \varepsilon_0$, et $\mu = \mu_0$). Nous présentons trois cas tests, le premier consiste à calculer le premier mode de résonance dans une cavité métallique carrée, le deuxième consiste à calculer le champ électromagnétique généré par un courant linéique, et le troisième cas simule la diffraction d'une onde plane sur un disque.

5.4.1.1 Simulation du mode de résonance(1,1)

On dispose d'une cavité métallique carrée de côté $a = 1m$, nous avons initialisé le champ électromagnétique par la solution analytique à $t = 0$, donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} H_x = 0, \\ H_y = 0, \\ E_z = sin\pi x \times sin\pi y, \end{cases} \tag{5.6}$$

$\omega = 2\pi$f, avec f= 0.2121GHZ.
La solution exacte est donnée par :

$$\begin{cases} H_x = -\frac{\pi}{\omega} \times sin\pi x \times cos\pi y \times sin\omega t, \\ H_y = \frac{\pi}{\omega} \times cos\pi x \times sin\pi y \times sin\omega t, \\ E_z = sin\pi x \times sin\pi y \times cos\omega t. \end{cases} \tag{5.7}$$

Nous comparons les solutions obtenues numériquement aux solutions exactes. Les figures (5.2) et (5.3) représentent respectivement l'évolution en temps et en espace du champ électrique. Comme ces figures le montrent, la solution approchée est de bonne qualité. Nous avons par ailleurs calculé la diffusion numérique, et nous avons constaté une diffusion de l'ordre de 10^{-3} sur la première période, et de l'ordre de 10^{-2} après une dizaine de périodes (on entend ici par diffusion, la diminution de l'amplitude due à la diffusion de la méthode). Le maillage utilisé correspond à 10 points par longueur d'onde.

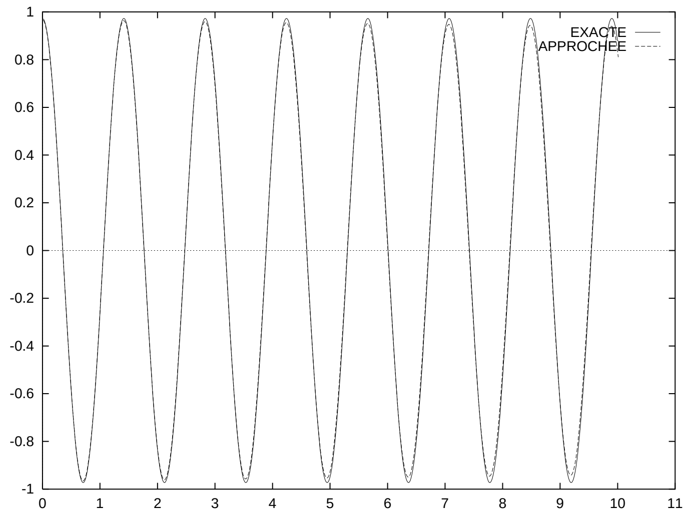


FIG. 5.2 – *évolution en temps du champ électrique*

5.4.1.2 Courant surfacique

On reprend ici le cas test du paragraphe (4.4.3), qui consiste à calculer le champ électromagnétique généré par un courant linéique. La figure (5.4) représente les isovaleurs du champ électrique, et la figure (5.5) celles du champ magnétique. La continuité du champ électrique et la discontinuité du champ magnétique sont bien prises en compte comme le montre la coupe en y= $\frac{d}{2}$ (d étant la hauteur du guide d'onde) de la solution approchée (figures 6.9 et 6.10). L'évolution en temps est donnée par la figure (5.8).
(Pour l'expression explicite de la solution exacte voir [74]).

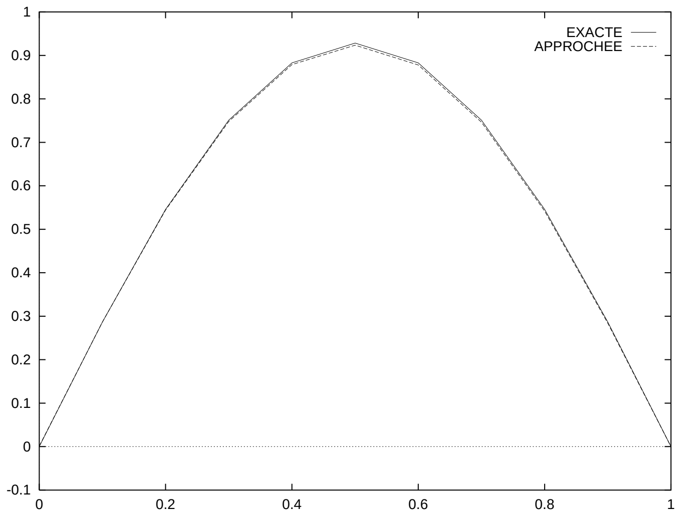


FIG. 5.3 – *coupe en y= 0.5 du champ électrique*

5.4.1.3 Diffraction d'une onde plane sur un disque

On dispose d'un disque de rayon $R = 2.5m$, sur lequel on envoie une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 3m$. Le maillage utilisé correspond à environ 14 points par longueur d'onde. Les figures (5.9), (5.10), et (5.11) représentent les champs diffractés. Ensuite, on envoie sur ce disque une onde de support $[R, R + R * \lambda]$ (pulse), avec $\lambda = 3$m. La figure (5.12) représente le champ électrique total. Ces figures montrent un bon comportement qualitatif de la méthode.

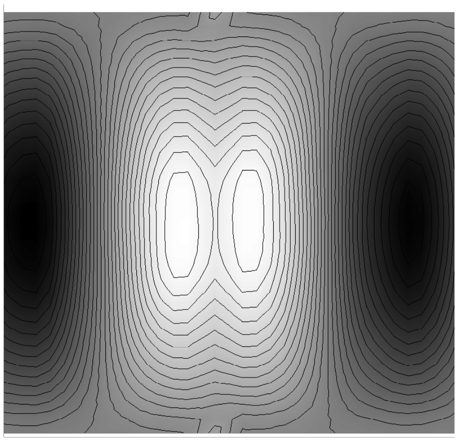


FIG. 5.4 – *Champ électrique* E_z

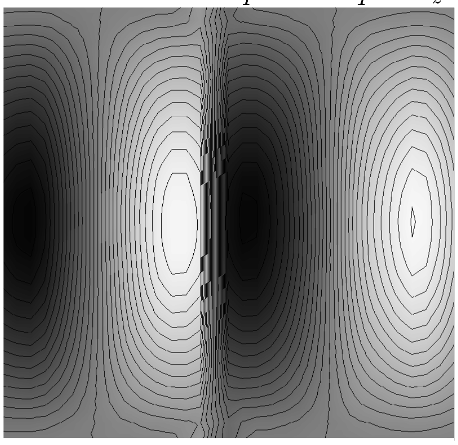


FIG. 5.5 – *Champ magnétique* H_y

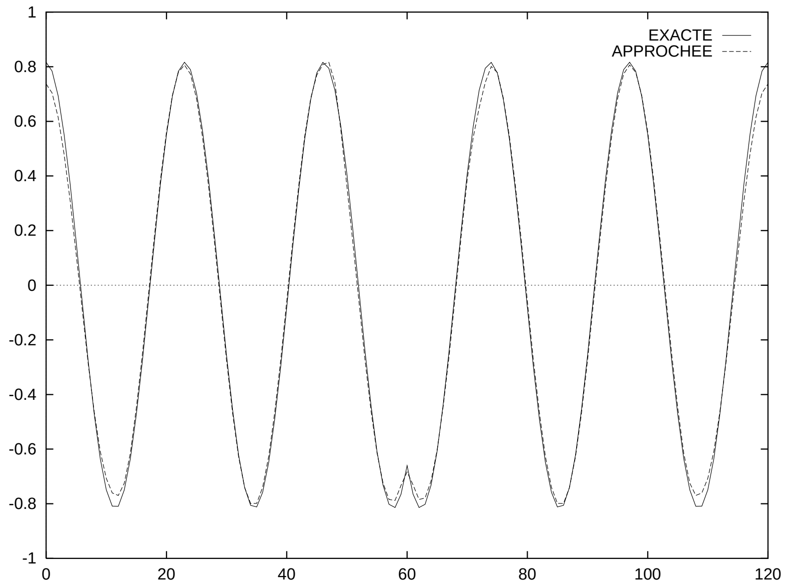


FIG. 5.6 – *Coupe en* $y=\frac{d}{2}$ *du champ électrique* E_z

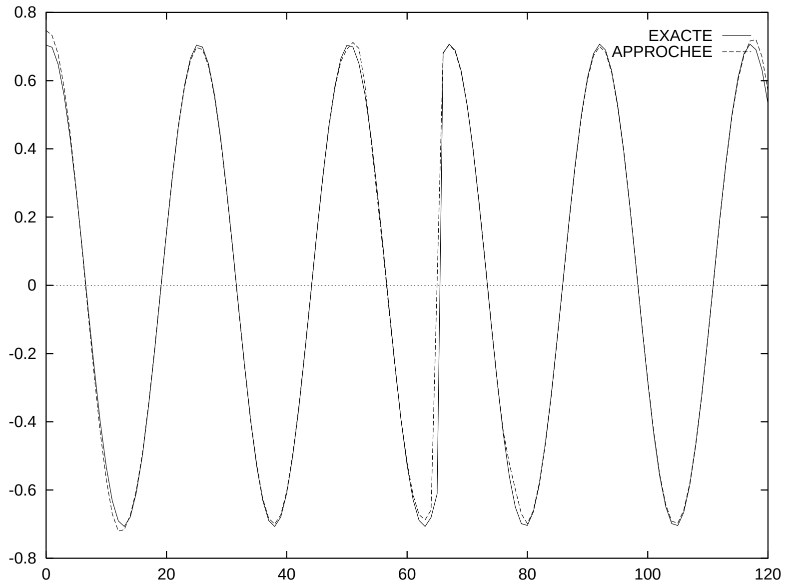


FIG. 5.7 – *Coupe en* $y=\frac{d}{2}$ *du champ magnétique* H_y

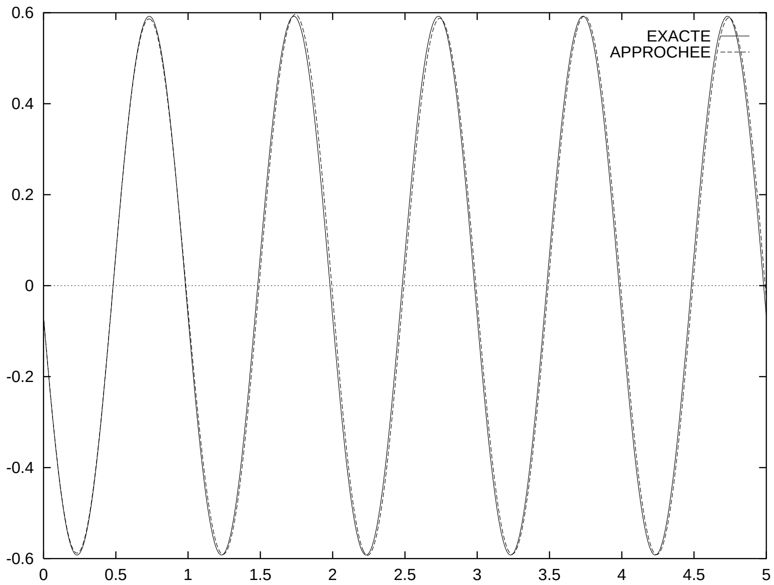


FIG. 5.8 – *Évolution en temps du champ électrique* E_z

Conclusion

Dans le paragraphe (5.4.1), nous avons vu des cas tests dans le cas homogène, (où parfois les solutions exactes sont connues; paragraphe (6.3.1), et (4.4.3)). Les résultats ainsi obtenus montrent la bonne qualité de la méthode numérique. Les solutions sont bien approchées, et nous pouvons remarquer qu'aucune oscillation n'est apparue dans le cas de présence de courant, où le champ magnétique est discontinu.

5.4.2 Propagation d'ondes dans un milieu hétérogène

Nous considérons maintenant des milieux hétérogènes. Nous avons effectué quelques cas tests avec des matériaux diélectriques (μ constant dans tout le domaine, et ε variable).

5.4.2.1 Simulation d'une pulsation

Ce cas test consiste à envoyer une onde à support compact C^0 dans une boite métallique semi ouverte, pour les détails de l'expérience voir paragraphe (4.4.1). Nous avons utilisé un maillage qui correspond à environ 10 points par longueur d'onde dans le matériau. Après un temps de calcul T=7 ns, la solution est comparée à la solution exacte, et on peut remarquer sur la figure (5.13), que la solution numérique (ici le champ électrique) approche bien la solution exacte.

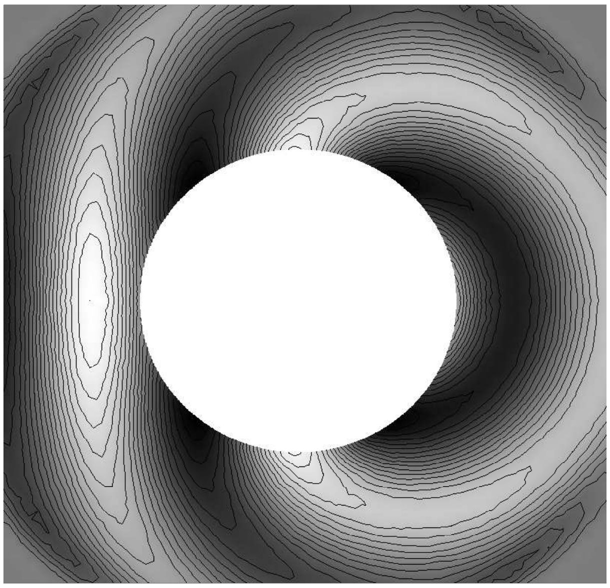


FIG. 5.9 – *champ électrique diffracté* E_z

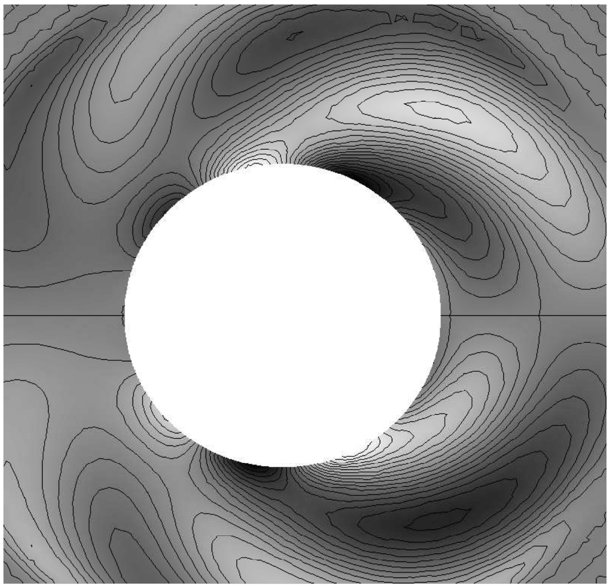


FIG. 5.10 – *champ magnétique diffracté* H_x

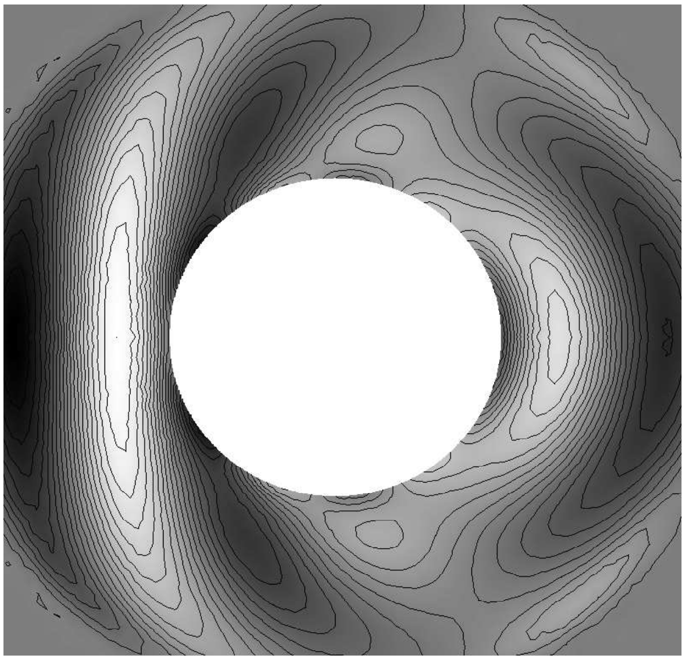


FIG. 5.11 – *champ magnétique diffracté* H_y

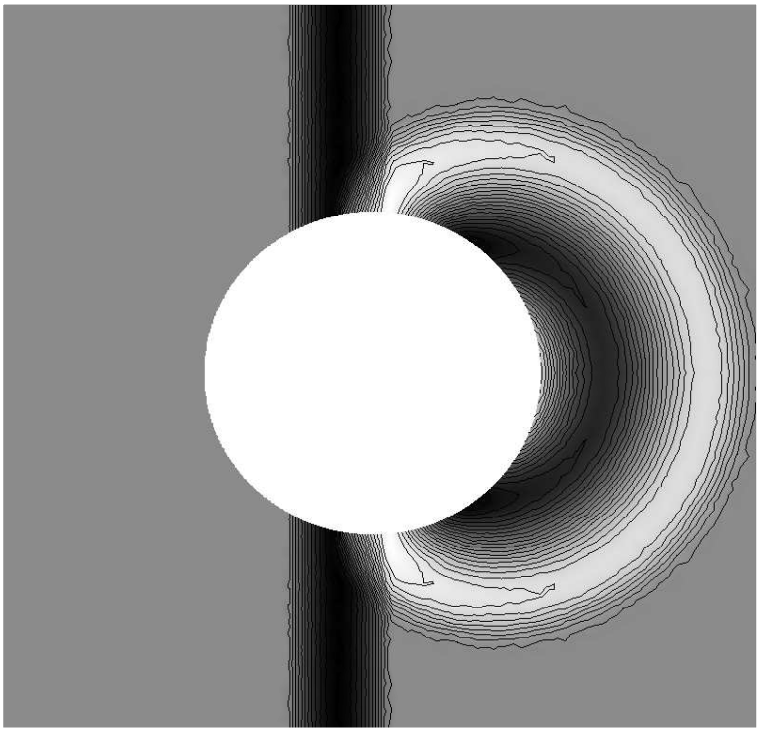


FIG. 5.12 – *champ électrique total* E_z

5.4.2.2 Diffraction d'une onde plane sur un matériau revêtu

Ici, nous traitons un cas plus complexe, qui est de calculer le champ électrique diffracté par un matériau couvert d'une couche de diélectrique (une couche de résine), voir paragraphe (4.4.2). La figure (5.14) représente le champ électrique après une période de calcul. La solution est similaire à celle obtenue par la méthode GMRES (Generalized Minimal Residual method) par Anabelle Zébic ([87]), où le maillage utilisé correspond à 20 points par longueur d'onde.

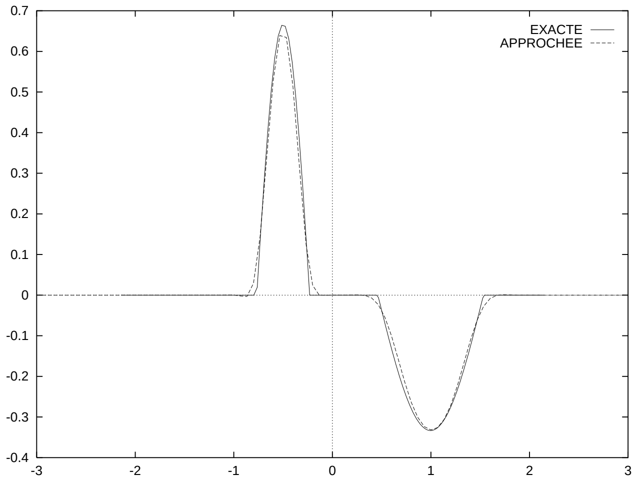


FIG. 5.13 – *Coupe en y du champ électrique*

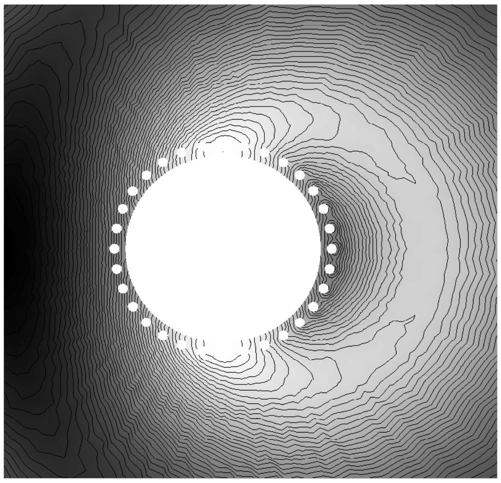


FIG. 5.14 – *champ électrique diffracté* E_z

Conclusion :

Nous pouvons constater que les résultats numériques obtenus avec la méthode Galerkin Discontinu sont de bonne qualité, aussi bien dans le cas des matériaux homogènes, que dans le cas des matériaux hétérogènes. Les conditions de transmission sont prises en compte grâce à un solveur de Riemann exact. On peut déduire à travers ces expériences numériques, la robustesse et la bonne précision de la méthode.

5.5 Comparaison de la méthode Galerkin Discontinu avec une méthode volumes finis

Cette section est consacrée à une comparaison qualitative et quantitative entre la méthode Galerkin Discontinu décrite précédemment et la méthode des volumes finis décrite dans les chapitres précédents.

Remarque

les paramètres de Runge-Kutta que nous avons utilisés dans le méthode Galerkin Discontinu diffèrent des paramètres utilisés pour la méthode volumes finis, et ceci pour des raisons de stabilité des schémas.

5.5.1 Comparaison des deux méthodes

Nous allons effectuer quelques cas tests de comparaison dans les deux cas homogène et hétérogène.

5.5.1.1 Simulation d'un mode de résonance

On reprend ici la même expérience qu'au paragraphe (5.4.1.1), et nous visualisons l'évolution en temps du champ électrique. Nous avons choisi de comparer les coûts CPU à précision fixée. Pour se faire, nous avons choisi un maillage trois fois plus fin pour la méthode volumes finis. Ceci est justifié par le fait que dans la méthode de Galerkin Discontinu, nous avons trois degrés de liberté par triangle et par inconnue, alors qu'en volumes finis, nous avons un degré de liberté par triangle.

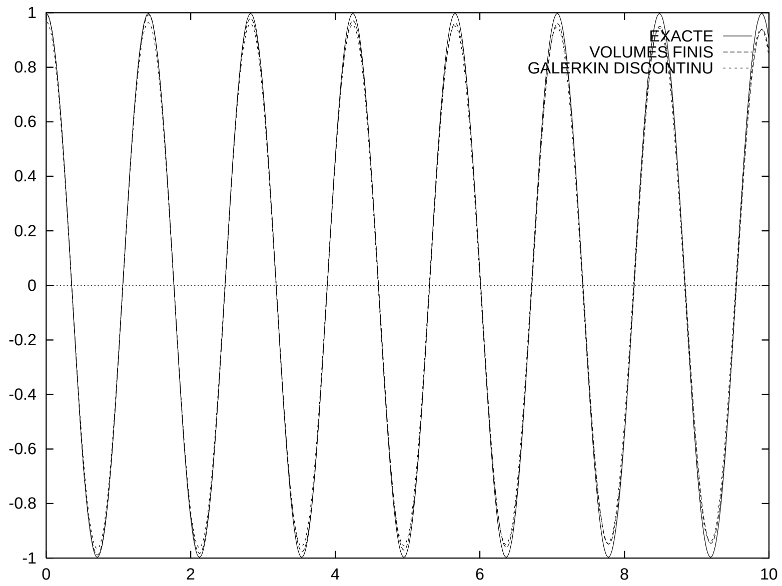


FIG. 5.15 – *Evolution en temps du champ électrique*

La figure (5.15) représente les deux solutions obtenues avec les deux méthodes, comparées à la solution exacte. Nous remarquons que les solutions sont de même qualité. Nous représentons dans le tableau (5.2), les temps CPU pour les deux méthodes (à erreur fixée d'ordre 10^{-7}). La diffusion numérique est de l'ordre de 10^{-2} pour les deux méthodes après une dizaine de périodes.

méthode	volumes finis	Galerkin Discontinu
CFL	0.7	0.2
temps global (s)	70	220
diffusion numérique	4.1610^{-2}	2.910^{-2}

TAB. 5.2 – *Coûts en temps CPU.*

On remarque que la méthode Galerkin Discontinu est trois fois plus chère que la méthode volumes finis pour une précision donnée. Nous calculons ensuite le temps CPU pour obtenir une erreur en norme $|| \; . \; ||_2$ de l'ordre de (10^{-5}) pour les deux méthodes, et nous obtenons les résultats suivants (tableau 5.3) :

méthode	volumes finis	Galerkin Discontinu
erreur	3.910^{-5}	4.10^{-5}
temps global (s)	16	28

TAB. 5.3 – *Coûts en temps CPU.*

Ici, on remarque que pour obtenir une erreur d'approximation de l'ordre de 10^{-5}, il faut environ deux fois plus de temps pour la méthode Galerkin Discontinu par rapport à la méthode volumes finis.

5.5.1.2 Evolution d'un pulse dans un milieu hétérogène

On refait l'expérience du paragraphe (5.4.2.1) pour comparer les deux méthodes dans un cas hétérogène. Les résultats sont comparés à la solution exacte comme le montre la figure (5.16). Les solutions sont qualitativement similaires.

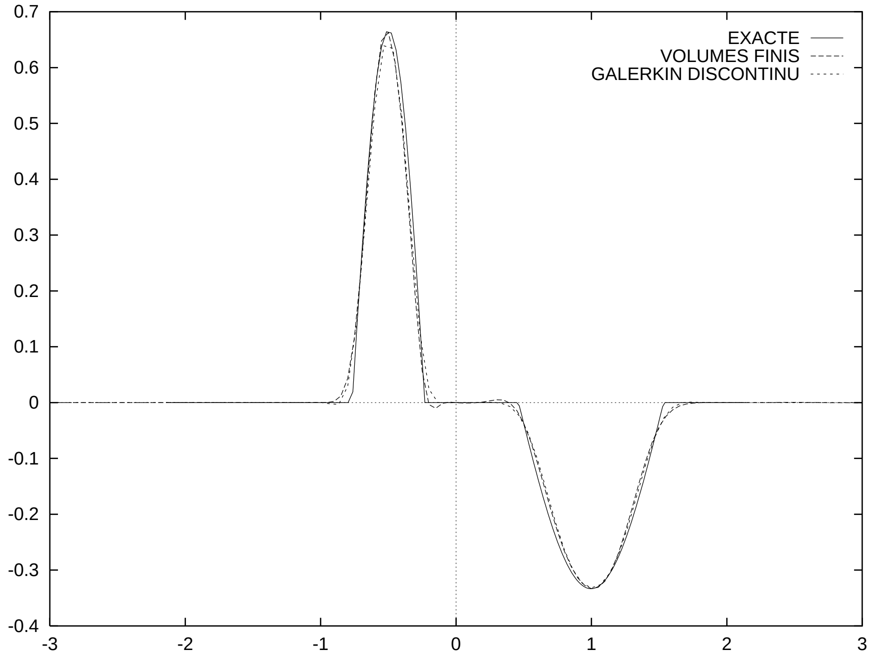


FIG. 5.16 – *Calcul d'une pulsation dans un milieu hétérogène pour les deux méthodes*

5.5.1.3 Diffraction d'une onde plane sur un disque revêtu (milieu hétérogène)

On reprend le cas de la diffraction d'une onde plane monochromatique sur un disque revêtu d'une couche de diélectrique (paragraphe 5.4.2.2), et on calcule la solution numérique avec les deux méthodes d'approximation citées précédemment. Les solutions sont représentées par les figures (5.17), et (5.18) obtenues respectivement par les méthodes Galerkin Discontinu et volumes finis. Elles sont qualitativement comparables.

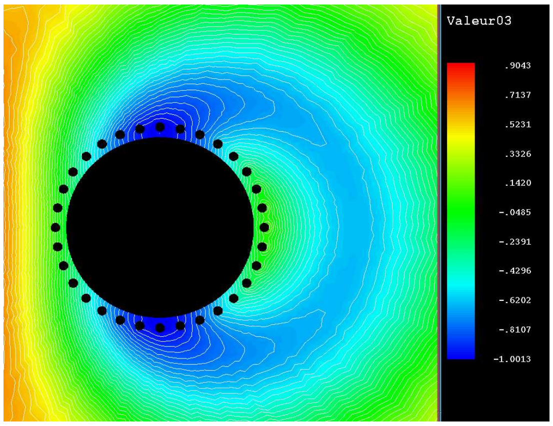


FIG. 5.17 – *Champ électrique diffracté E_z (méthode Galerkin Discontinu)*

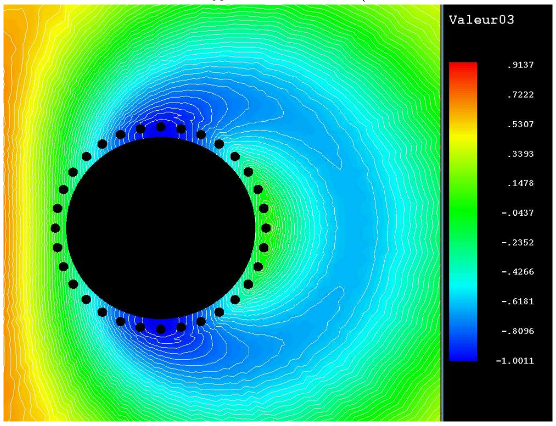


FIG. 5.18 – *Champ électrique diffracté E_z (méthode volumes finis)*

5.5.2 Le bilan d'énergie

On se propose de calculer le bilan d'énergie pour les deux méthodes d'approximation numérique; Galerkin Discontinu et volumes finis appliquées au système de Maxwell. Pour simplifier les calculs, on traite le cas monodimensionnel où le système se ramène aux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial H_x}{\partial t} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial E_z}{\partial y} & = & 0, \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial t} + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial H_x}{\partial y} & = & 0. \end{array}\right. \tag{5.8}$$

5.5.2.1 Bilan d'énergie pour la méthode volumes finis

Le schéma numérique d'ordre un est donné par :

$$\left\{\begin{array}{l} D^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = D^{n}_{j+\frac{1}{2}} - \dfrac{\Delta t}{\Delta y} \times [E^n_{j+1} - E^n_j], \\ \\ B^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = B^{n}_{j+\frac{1}{2}} - \dfrac{\Delta t}{\Delta y} \times [H^n_{j+1} - H^n_j], \end{array}\right. \tag{5.9}$$

avec :

$$E^n_{j+1} = \frac{E^n_{j+\frac{3}{2}} + E^n_{j+\frac{1}{2}}}{2} - c\frac{B^n_{j+\frac{3}{2}} - B^n_{j+\frac{1}{2}}}{2},$$

$$H^n_{j+1} = \frac{H^n_{j+\frac{3}{2}} + H^n_{j+\frac{1}{2}}}{2} - c\frac{D^n_{j+\frac{3}{2}} - D^n_{j+\frac{1}{2}}}{2},$$

où c= $\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon\mu)}}$. On pose $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta y}$.

Le bilan d'énergie dans le vide pour une onde plane en absence de charge et de courant est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\Omega (\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2) = 0.$$

On calcule la variation de l'énergie $\boldsymbol{\Delta}\mathcal{E}^n$ de la solution numérique entre l'instant $n\Delta t$ et $(n+1)\Delta t$. On considère ici des conditions aux limites de type métallique ($n \wedge \mathbf{E} = 0$).

$$\boldsymbol{\Delta}\mathcal{E}^n = \sum_{j=0}^{j=N-1} \frac{1}{2}\varepsilon[(E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 - (E_{j+\frac{1}{2}}^n)^2] + \sum_{j=0}^{j=N-1} \frac{1}{2\mu}[(B_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 - (B_{j+\frac{1}{2}}^n)^2].$$

On obtient :

$$\boldsymbol{\Delta}\mathcal{E}^n = \sum_{j=0}^{j=N-1} \frac{\nu c}{2\varepsilon}(\nu c - 1)(D_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + \frac{\nu c}{2\varepsilon}(\nu c - 1)(B_{j+\frac{1}{2}}^n - B_{j-\frac{1}{2}}^n)^2.$$

Pour $\nu c \leq 1$, on a $\boldsymbol{\Delta}\mathcal{E}^n \leq 0$. Ainsi l'énergie de la solution approchée décroît avec le temps.

5.5.2.2 Bilan d'énergie pour la méthode Galerkin Discontinu

On donne ici le schéma d'ordre deux pour le système de Maxwell monodimensionnel : soient (D^0, D^1), et (B^0, B^1) les composantes du champ électromagnétique (D,B) dans la base locale : $\phi_0 = P_0(2\dfrac{(x-x_j)}{\Delta y})$, et $\phi_1 = P_1(2\dfrac{(y-y_j)}{\Delta y})$ sur un segment $I_j = [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$. Où (P_l) est une base locale L^2-orthogonale donnée par les polynômes de Legendre, vérifiant :

$$\int_{-1}^{1} P_l(s)P_{l'}(s)ds = (\frac{2}{2l+1})\delta_{ll'},$$

$$P_l(1) = 1, \qquad\qquad P_l(-1) = (-1)^l.$$

Alors on obtient :

$$D_j^{0,n+1} = \begin{cases} D_j^{0,n} - \nu[\dfrac{H_{j+1}^n - H_{j-1}^n}{2} - \dfrac{c}{2}(D_{j+1}^n - 2D_j^n + D_{j-1}^n)] \\ +\dfrac{C^2\nu^2}{4}[D_{j+2}^n - 2D_{j+1}^n + 2D_j^n - 2D_{j-1}^n + D_{j-2}^n] \\ -\dfrac{c\nu^2}{4}[H_{j+2}^n - 2H_{j+1}^n + 2H_{j-1}^n - H_{j-2}^n]. \end{cases}$$

$$B_j^{0,n+1} = \begin{cases} B_j^{0,n} - \nu[\dfrac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2} - \dfrac{c}{2}(B_{j+1}^n - 2B_j^n + B_{j-1}^n)] \\ +\dfrac{C^2\nu^2}{4}[B_{j+2}^n - 2B_{j+1}^n + 2B_j^n - 2B_{j-1}^n + B_{j-2}^n] \\ -\dfrac{c\nu^2}{4}[E_{j+2}^n - 2E_{j+1}^n + 2E_{j-1}^n - E_{j-2}^n]. \end{cases}$$

$$D_j^{1,n+1} = \begin{cases} D_j^{1,n} + 6\nu H_j^{0,n} - \dfrac{3\nu}{2}[2H_j^n + H_{j-1}^n - c(D_{j+1}^n - D_{j-1}^n)] \\ +3\nu^2[6c^2 D_j^{0,n} + \dfrac{3}{2}(H_{j+1}^{0,n} - H_{j-1}^{0,n}) - \dfrac{3}{2}c^2(2D_j^{0,n} + D_{j-1}^{0,n} + D_{j+1}^{0,n})] \\ -\dfrac{3}{4}\nu^2 c^2[12D_j^{0,n} + 6D_{j-1}^{0,n} + 6D_{j+1}^{0,n} - 6D_j^n - 6D_{j-1}^n - 3D_{j-2}^n - 6D_{j+1}^n - 3D_{j+2}^n] \\ -\dfrac{3}{4}c\nu^2[-6H_{j+1}^{0,n} + 6H_{j-1}^{0,n} - 6H_{j-1}^n - 3H_{j-2}^n + 3H_{j+2}^n + 6H_{j+1}^n]. \end{cases}$$

$$B_j^{1,n+1} = \begin{cases} B_j^{1,n} + 6\nu E_j^{0,n} - \dfrac{3\nu}{2}[2E_j^n + E_{j-1}^n - c(B_{j+1}^n - B_{j-1}^n)] \\ +3\nu^2[6c^2 B_j^{0,n} + \dfrac{3}{2}(E_{j+1}^{0,n} - E_{j-1}^{0,n}) - \dfrac{3}{2}c^2(2B_j^{0,n} + B_{j-1}^{0,n} + B_{j+1}^{0,n})] \\ -\dfrac{3}{4}\nu^2 c^2[12B_j^{0,n} + 6B_{j-1}^{0,n} + 6B_{j+1}^{0,n} - 6B_j^n - 6B_{j-1}^n - 3B_{j-2}^n - 6B_{j+1}^n - 3B_{j+2}^n] \\ -\dfrac{3}{4}c\nu^2[-6E_{j+1}^{0,n} + 6E_{j-1}^{0,n} - 6E_{j-1}^n - 3E_{j-2}^n + 3E_{j+2}^n + 6E_{j+1}^n]. \end{cases}$$

Nous calculons la variation de l'énergie discrète donnée par :

$$\boldsymbol{\Delta}\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n,$$

avec

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=N} \frac{1}{\Delta y}\int_{I_j} \varepsilon(\mathbf{E}_j^n)^2 + \frac{1}{\mu}(\mathbf{B}_j^n)^2.$$

En décomposant les champs suivant la base locale :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^n = \mathbf{E}^{0,n}\phi_0 + \mathbf{E}^{1,n}\phi_1, \\ \mathbf{B}^n = \mathbf{B}^{0,n}\phi_0 + \mathbf{B}^{1,n}\phi_1, \end{cases}$$

on obtient :

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=N} \varepsilon(\mathbf{E}_j^{0,n})^2 + \frac{1}{\mu}(\mathbf{B}_j^{0,n})^2 + \frac{\varepsilon}{3}(\mathbf{E}_j^{1,n})^2 + \frac{1}{3\mu}(\mathbf{B}_j^{1,n})^2.$$

Par conséquent, on a :

$$\boldsymbol{\Delta}\mathcal{E}^n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{j=N} \frac{1}{2}\varepsilon[(E_j^{0,n+1})^2 - (E_j^{0,n})^2] + \frac{1}{2\mu}[(B_j^{0,n+1})^2 - (B_j^{0,n})^2] \\ \\ \displaystyle +\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{j=N} \frac{1}{2}\varepsilon[(E_j^{1,n+1})^2 - (E_j^{1,n})^2] + \frac{1}{2\mu}[(B_j^{1,n+1})^2 - (B_j^{1,n})^2], \end{cases}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}\mathcal{E}^n &= \sum_{j=1}^{j=N} \frac{\nu^3 c^3}{8\varepsilon}(3\nu c-1)(D_j^{0,n}-D_{j-1}^{0,n})^2+\frac{\nu^3 c^3}{8\varepsilon}(3\nu c-1)(D_j^{0,n}-D_{j-2}^{0,n})^2 \\
&+\frac{\nu^2 c^2}{\varepsilon}(\nu c-1)(D_j^{0,n}-D_{j-1}^{0,n})^2+\frac{\nu^2 c^2}{\varepsilon}(\nu c-1)(D_j^{0,n}-D_{j-2}^{0,n})^2+\frac{\nu c}{2\varepsilon}(\nu c-1)(D_j^{0,n}-D_{j-1}^{0,n})^2 \\
&\frac{\nu^3 c^3}{8\varepsilon}(3\nu c-1)(B_j^{0,n}-B_{j-1}^{0,n})^2+\frac{\nu^3 c^3}{8\varepsilon}(3\nu c-1)(B_j^{0,n}-B_{j-2}^{0,n})^2+\frac{\nu^2 c^2}{\varepsilon}(\nu c-1)(B_j^{0,n}-B_{j-1}^{0,n})^2 \\
&+\frac{\nu^2 c^2}{\varepsilon}(\nu c-1)(B_j^{0,n}-B_{j-2}^{0,n})^2+\frac{\nu c}{2\varepsilon}(\nu c-1)(B_j^{0,n}-B_{j-1}^{0,n})^2 \\
&+\frac{\nu}{2\varepsilon}(3\nu c-1)[(D_j^{1,n}+B_{j-1}^{0,n})^2+(D_j^{1,n}+B_{j+1}^{0,n})^2+(D_j^{1,n}+B_{j-2}^{0,n})^2+(D_j^{1,n}+B_{j+2}^{0,n})^2] \\
&+\frac{\nu}{2\varepsilon}(3\nu c-1)[(D_j^{1,n}+D_{j-1}^{0,n})^2+(D_j^{1,n}+D_{j+1}^{0,n})^2+(D_j^{1,n}+D_{j-2}^{0,n})^2+(D_j^{1,n}+D_{j+2}^{0,n})^2] \\
&+\frac{\nu}{2\varepsilon}(3\nu c-1)[(B_j^{1,n}+D_{j-1}^{0,n})^2+(B_j^{1,n}+D_{j+1}^{0,n})^2+(B_j^{1,n}+D_{j-2}^{0,n})^2+(B_j^{1,n}+D_{j+2}^{0,n})^2] \\
&+\frac{\nu}{2\varepsilon}(3\nu c-1)[(B_j^{1,n}+B_{j-1}^{0,n})^2+(B_j^{1,n}+B_{j+1}^{0,n})^2+(B_j^{1,n}+B_{j-2}^{0,n})^2+(B_j^{1,n}+D_{j+2}^{0,n})^2].
\end{aligned}$$

Pour $\nu c \leq \frac{1}{3}$, $\Delta\mathcal{E}^n \leq 0$, ainsi l'énergie décroît avec le temps.

5.5.2.3 Comparaison des énergies

On revient au cas bidimensionnel, et on compare numériquement les énergies données par les deux méthodes. On reprend l'expérience du calcul d'un mode de résonance dans une cavité métallique carrée (paragraphe 5.5.1.1), et on compare l'énergie totale. La figure (5.19) représente l'énergie électromagnétique en fonction du temps (en terme de nombre de longueurs d'onde). On remarque que l'énergie décroît avec le temps dans les deux cas, néanmoins elle décroît moins vite dans le cas de la méthode Galerkin Discontinu.

5.5.2.4 Comparaison sur des temps longs

On se propose ici de faire une comparaison des deux méthodes sur un temps long qui correspond à 250 périodes pour la même expérience que dans le paragraphe (5.5.2.3). L'énergie décroît jusqu'à atteindre zéro pour les deux méthodes (figure 5.20), seulement, elle décroît moins vite dans le cas de la méthode Galerkin Discontinu.

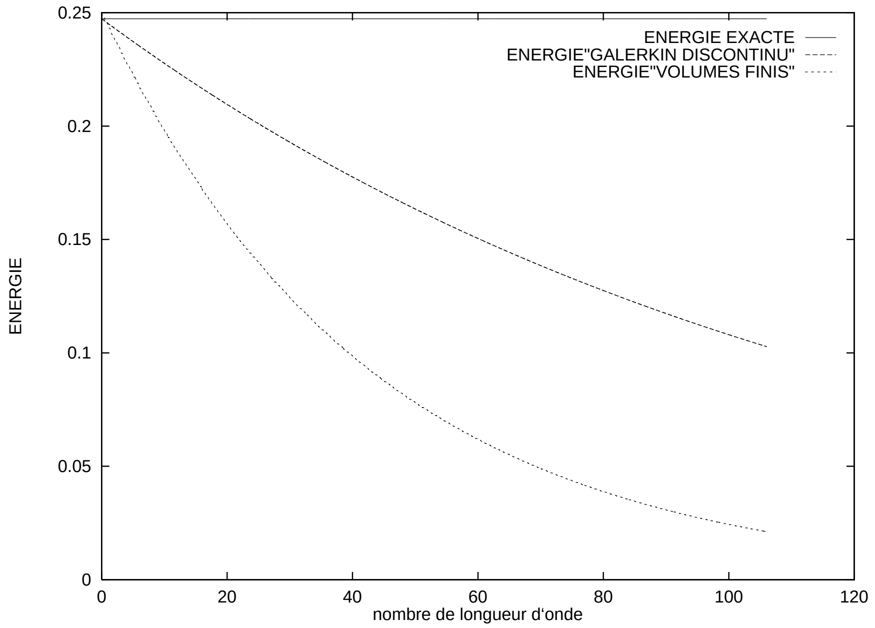


FIG. 5.19 – *Bilan d'énergie pour les deux méthodes*

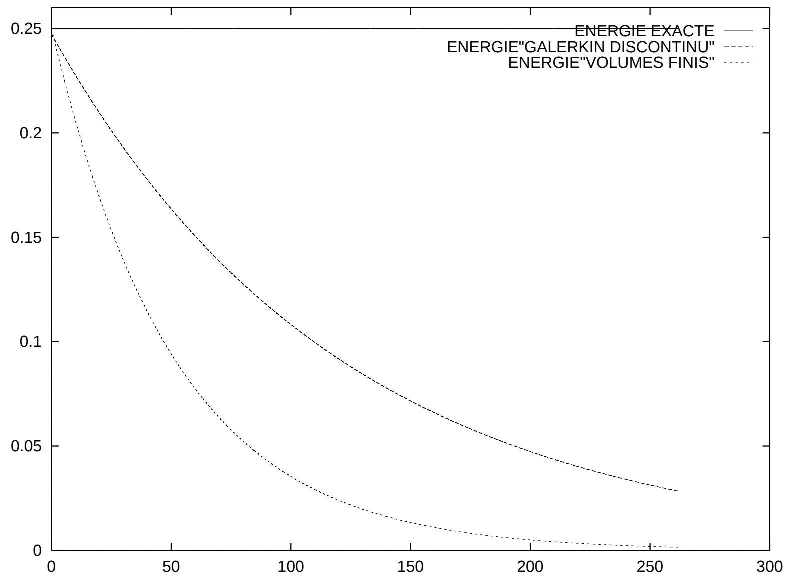


FIG. 5.20 – *Bilan d'énergie sur un temps long*

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode de Galerkin Discontinu appliquée aux équations de Maxwell. Les solutions obtenues sont P^1 par morceaux, et approchent la solution exacte à l'ordre deux. Nous pouvons noter à travers les différents cas tests, la bonne qualité de la discrétisation. L'utilisation d'un solveur de Riemann exact pour le calcul des flux numériques a permis une bonne prise en compte des discontinuités à travers les interfaces des milieux d'indices différents. Nous remarquons aussi que les courants linéiques sont bien traités, et les solutions ne présentent aucune oscillation. Nous avons traité des problèmes de résonance, où les conditions aux bords sont de type métallique, et des problèmes de diffraction en milieu homogène et hétérogène, où les conditions aux bords sont mixtes, nous avons des conditions de type métallique sur l'objet diffractant, et des conditions de type absorbant sur la frontière artificielle du domaine numérique. Les résultats sont très satisfaisants du point de vue précision de la méthode. Rappelons que le but de ce travail était de construire un schéma numérique pour résoudre le système de Maxwell dans des milieux hétérogènes, et nous pouvons remarquer que les différentes expériences numériques ont été réalisées avec succès, ainsi nous pouvons en conclure que la méthode est bien adaptée à la résolution des systèmes modélisants les phénomènes électromagnétiques, dans le cas où le milieu est linéaire et isotrope, mais pas nécéssairement homogène. Le caractère discontinu de la méthode et l'utilisation des triangles comme volume d'intégration, nous a permis de traiter des problèmes avec des géométries quelconques. Il faut cependant remarquer que cette méthode est relativement chère en comparaison avec une méthode volumes finis (chapitre 5.5) et nous avons constaté que pour une qualité de résultat égale, la méthode Galerkin Discontinu est deux à trois fois plus chère que la méthode volumes finis.
Par ailleurs, on peut constater que sur des temps longs, la méthode Galerkin Discontinu donne de meilleurs résultats, car le schéma est moins diffusif.

Chapitre 6

Un nouveau schéma volumes finis pour la résolution du système de Maxwell

Ce chapitre est tiré d'un rapport INRIA (N^o 3725) intitulé "A New Finite Volume Scheme for Solving Maxwell System".

Il a été proposé pour publication dans le journal **COMPEL**[1].

1. The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering.

6.1 Introduction

Nous rappelons ici brièvement les différentes méthodes volumes finis développées afin de résoudre des problèmes de lois de conservation et en particulier pour la résolution du système de Maxwell. Nous citons les méthodes de F.Hermeline [48], N.K.Madsen et R.W.Ziolkwski [60] pour l'électromagnétisme, ces méthodes sont basées sur l'utilisation de grilles duales de type Delaunay-Voronoï. Nous avons également d'autres techniques pour le système de Maxwell basées sur un couplage entre des méthodes volumes finis et différences finies proposées par K.S.Yee ([84], [85]). L'inconvénient principal de toutes ces méthodes est la difficulté de leur extension au cas tridimensionnel, notamment pour la construction de grilles et l'implémentation des méthodes. D'autres méthodes volumes finis ont été également développées et testées ([76], [19], et [70]) : les champs sont localisés aux mêmes points, ces schémas sont de type décentré en espace, la technique MUSCL est utilisée pour obtenir des schémas d'ordre élevé, et où des schémas de type Runge-Kutta sont appliqués pour la discrétisation temporelle. Afin d'éviter toute confusion, nous baptisons ces méthodes les schémas MUSCL. Ces méthodes donnent de bons résultats, cependant elles sont relativement coûteuses comparées aux schémas différences finies par exemple (on peut citer ici le schéma de Yee [83]). Nous proposons une nouvelle formulation de schéma volumes finis plus simple et plus économique, basée sur un calcul de flux centrés en espace, et un schéma de type saute-mouton en temps. Tous les champs sont localisés aux mêmes points et au milieu des éléments du maillage. Ce schéma est d'ordre deux en temps et en espace sur grilles structurées, et présente l'avantage d'être bien adapté pour traiter des problèmes avec des géométries quelconques. Nous présentons dans ce chapitre une analyse théorique de ce schéma concernant le domaine de stabilité et le degré de dispersion et de diffusion numériques. Nous présentons également quelques résultats numériques dans le cas bidimensionnel, et des comparaisons avec une méthode volumes finis de type MUSCL.

6.2 Description de la méthode

Nous proposons ici de construire et d'étudier un nouveau schéma volumes finis pour la résolution du système de Maxwell. Nous rappelons que tous les champs sont localisés aux mêmes points, et sont calculés à partir d'une moyenne sur des volumes d'intégration (qui peuvent être quelconques). Nous choisissons comme volumes d'intégration, les éléments du maillage car ce sont les mieux appropriés pour traiter des problèmes dans des milieux hétérogènes (figure 6.1 par exemple).

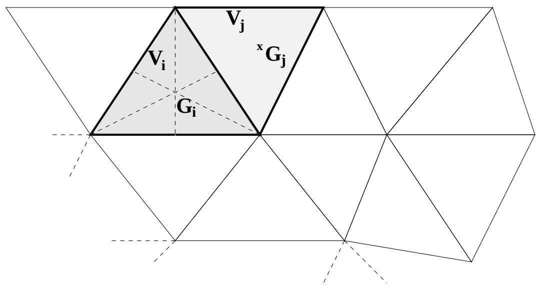


FIG. 6.1 – *Volume d'intégration*

6.2.1 Le schéma volumes finis

Nous considérons le système de Maxwell sous sa forme conservative donnée par la formulation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \vec{\vec{\nabla}} \mathbb{F}(\mathbf{Q}) = -\mathbf{J}, \tag{6.1}$$

(voir l'équation 2.26). Intégrons la forme (6.1) sur chaque volume de contrôle $\mathbf{V}$ (supposons $\mathbf{J} = 0$) :

$$\int_{\mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \, dv + \int_{\partial \mathbf{V}} \mathbb{F}(\mathbf{Q}).\mathbf{n} \, ds = 0, \tag{6.2}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à $\mathbf{V}$. Supposons que la dérivée en temps est constante sur chaque volume $\mathbf{V}$, alors on obtient la formulation faible suivante :

$$Volume(\mathbf{V})(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}) + \sum_{\mathbf{V}' \in \mathbf{P}(\mathbf{V})} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{V},\mathbf{V}'} = 0. \tag{6.3}$$

$\mathbf{P}(\mathbf{V})$ est l'ensemble des voisins de $\mathbf{V}$, et $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{V},\mathbf{V}'}$ est une fonction de flux numérique qui approche l'intégrale : $\displaystyle\int_{\partial \mathbf{V} \cap \partial \mathbf{V}'} \mathbb{F}(\mathbf{Q}).\mathbf{n} \, ds$.

Calcul du flux

Pour évaluer les flux échangés entre le volume d'intégration et ses voisins, nous avons procédé de la manière suivante :

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{V},\mathbf{V}'} = \widehat{\mathbb{F}}(\mathbf{Q}).\eta = \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q}_{\mathbf{V}},\mathbf{Q}_{\mathbf{V}'}),$$

où $\eta = {}^t(\eta_1,\eta_2) = \int_{\partial \mathbf{V} \cap \partial \mathbf{V}'} \mathbf{n} \, ds$, $\widehat{\mathbb{F}}(\mathbf{Q})$ est une approximation de $\mathbb{F}(\mathbf{Q})$ à l'interface $\partial \mathbf{V} \cap \partial \mathbf{V}'$, et $\mathbf{Q}_{\mathbf{V}}$ est la valeur moyenne du champ sur le volume $\mathbf{V}$. Le flux centré est défini par :

$$\mathbf{\Phi}(U,U') = \frac{\mathcal{F}(U,\eta) + \mathcal{F}(U',\eta)}{2}, \tag{6.4}$$

$$\text{avec } \mathcal{F}(U,\eta) = \eta.\mathbb{F}(U).$$

Etant donné la nature du système de Maxwell, le flux numérique se décompose en deux flux disjoints :

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q_V},\mathbf{Q_{V'}}) = {}^t(\mathbf{\Phi_B}(\mathbf{D},\mathbf{D}'),\mathbf{\Phi_D}(\mathbf{B},\mathbf{B}'))$$

Discrétisation temporelle

Après la discrétisation spatiale, le système approché s'écrit comme un système différentiel ordinaire, donné sur chaque triangle T_i par :

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{B}}{dt} + \Psi_1(\mathbf{D}) = 0, \\[2ex] \dfrac{d\mathbf{D}}{dt} + \Psi_2(\mathbf{B}) = 0, \end{cases}$$

où Ψ_1 et Ψ_2 représentent la discrétisation spatiale :

$$\Psi_1(\mathbf{D}) = \frac{1}{volume(\mathbf{V})} \sum_{\mathbf{D}' \in \mathbf{P}(\mathbf{D})} \mathbf{\Phi_B}(\mathbf{D},\mathbf{D}'),$$
$$\Psi_2(\mathbf{B}) = \frac{1}{volume(\mathbf{V})} \sum_{\mathbf{B}' \in \mathbf{P}(\mathbf{B})} \mathbf{\Phi_D}(\mathbf{B},\mathbf{B}').$$

$\mathbf{\Phi}$ est défini par l'équation (6.4). Nous choisissons comme discrétisation temporelle un schéma saute-mouton qui s'écrit sur chaque volume $\mathbf{V}$ comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t \Psi_1(\mathbf{D}^n), \\[2ex] \mathbf{D}^{n+1} = \mathbf{D}^n - \Delta t \Psi_2(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}). \end{cases} \tag{6.5}$$

6.2.2 Analyse du schéma numérique

Nous allons étudier dans ce paragraphe les caractéristiques numériques du schéma volumes finis défini ci-dessus. Nous évaluons l'ordre du schéma, et son domaine de stabilité. Nous donnons également une analyse de la dispersion et de la diffusion numériques du schéma.

6.2.2.1 Ordre du schéma

Proposition 1

Le schéma (6.5) est d'ordre deux en espace et en temps sur un maillage régulier.

Présentation de la méthode des équations équivalentes

La méthode des équations équivalentes introduite par Warming et Hyett [81] est une méthode qui permet l'analyse de l'ordre d'un schéma numérique. Cette méthode permet également l'analyse des termes d'erreur de troncature, et de quantifier les erreurs de dissipation et de dispersion. Considérons ici une équation linéaire aux dérivées partielles dans le cas monodimensionnel :

$$u_t = \sum_{k\geq 0} \gamma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}. \tag{6.6}$$

On approche l'équation (6.6) par le schéma explicite suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \sum_k c_k\, u_{j+k}^n.$$

Soit $g_{\Delta x}$ le coefficient d'amplification défini par :

$$g_{\Delta x} = \sum_k c_k\, e^{k\Delta x X}.$$

Alors l'équation équivalente pour le schéma précédent peut s'écrire de la manière suivante :

$$u_t = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k},$$

où :

$$\sum_{k\geq 0} \alpha_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k},$$

est le développement en série de la fonction :

$$\frac{log(1 + \Delta t.\, g_{\Delta x}(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}))}{\Delta t}.$$

(Pour plus de détails voir [15]).

Preuve de la proposition 1

Pour simplifier les calculs, nous proposons de montrer la proposition précédente dans le cas monodimensionnel, et où les volumes de contôle sont des segments. Pour se faire, nous utilisons la technique des équations équivalentes décrite précédemment. On rappelle ici l'écriture du schéma volumes finis dans le cas normalisé ($\varepsilon = 1$ et $\mu = 1$) :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{1}{2\Delta y} \left(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^{n} - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^{n} \right), \\ & \frac{\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} = -\frac{1}{2\Delta y} \left(\mathbf{H}_{j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \right. \tag{6.7}$$

Nous avons besoin de ramener toutes les variables au même temps, pour cela, nous considérons le développement limité suivant :

$$\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^{n} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^{n} + \frac{\Delta t^2}{8}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H}^{n} + O(\Delta t^3),$$

$$\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^{n} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^{n} + \frac{\Delta t^2}{8}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H}^{n} + O(\Delta t^3),$$

$$\mathbf{E}^{n} = \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{8}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3),$$

$$\mathbf{E}^{n-1} = \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{8}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3).$$

En appliquant la méthode des équations équivalentes et en utilisant les développements limités précédents, on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H} = -\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{E} + O(\Delta t^2) + O(\Delta y^2), \\ & \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{H} + O(\Delta t^2) + O(\Delta y^2). \end{aligned} \right.$$

Ce qui prouve que le schéma (6.7) approche le système de Maxwell à l'ordre deux en temps et en espace.

6.2.2.2 Conservation de l'énergie discrète

Proposition

On reste dans le cas monodimensionnel, et on définit l'énergie discrète par :

$$2\mathcal{E}_{vf}^n = \sum_j (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 + \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}. \tag{6.8}$$

Alors l'énergie donnée par la formule (6.8) est une forme quadratique définie positive des variables $\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n$ et $\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ pour $\nu = \dfrac{\Delta t}{\Delta y} < 2$. Le mileu de propagation est supposé infini.

Démonstration

$$2\mathcal{E}_{vf}^n = \sum_j (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 + \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{4}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n)\right)^2 - \frac{\nu^2}{16}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n)^2.$$

On déduit :

$$2\mathcal{E}_{vf}^n \geq \sum_j \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{4}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n)\right)^2 + (1 - \frac{\nu^2}{4})(\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2.$$

$\Longrightarrow 2\mathcal{E}_{vf}^n \geq 0$ pour $\nu < 2$.
Nous avons également ; $(2\mathcal{E}_{vf}^n = 0 \Longrightarrow \mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}} = 0$ et $\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}} = 0, \forall j)$.
La variation de l'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned}
2\Delta\mathcal{E}_{vf}^n &= 2\mathcal{E}_{vf}^{n+1} - 2\mathcal{E}_{vf}^n,\\
2\Delta\mathcal{E}_{vf}^n &= \sum_j ((\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 - (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2) + (\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}),\\
&= \sum_j \frac{\nu^2}{4}(\mathbf{H}_{j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})^2 - \nu\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n(\mathbf{H}_{j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\nu}{2}\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^{n+1} - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1})\\
&\qquad - \frac{\nu}{2}\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n),\\
&= \sum_j \frac{\nu^2}{4}(\mathbf{H}_{j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})^2 - \nu\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n(\mathbf{H}_{j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - \nu\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^{n+1} - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1})\\
&\qquad + \frac{\nu^2}{4}\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{H}_{j+\frac{5}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_{j-\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \quad = 0.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Ce qui implique la conservation de l'énergie discrète, et la stabilité du schéma pour $\nu < 2$ (puisque $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont bornés en tout point du maillage).

Nous proposons maintenant d'étudier la stabilité du schéma et le degré de la dispersion numérique toujours dans le cas de grilles structurées. On considére ici le cas tridimensionnel.

6.2.2.3 Stabilité du schéma en dimension trois

Nous considérons un maillage composé de parallélépipèdes (figure 6.2) où le domaine de calcul est infini. Le système ici est normalisé ($\varepsilon = 1$ et $\mu = 1$), et nous notons $(i,j,k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$. Le schéma volumes finis s'écrit alors :

$$
\begin{cases}
1)\ \ \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{E}_y^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{E}_y^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{E}_z^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_z^{n}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}, \\
2)\ \ \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{\mathbf{E}_z^{n}(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_z^{n}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{E}_x^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{E}_x^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\}, \\
3)\ \ \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{E}_x^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_x^{n}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{\mathbf{E}_y^{n}(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_y^{n}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}, \\
4)\ \ \mathbf{E}_x^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_x^{n-1}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\}, \\
5)\ \ \mathbf{E}_y^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_y^{n-1}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{\mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}, \\
6)\ \ \mathbf{E}_z^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_z^{n-1}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{\mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}.
\end{cases}
\tag{6.10}
$$

Proposition 2

Le schéma (6.10) est stable sous la condition de type CFL suivante :

$$
C\Delta t\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta z^2}\right)} \leq 2,
\tag{6.11}
$$

où C est la vitesse de l'onde dans le domaine de propagation.

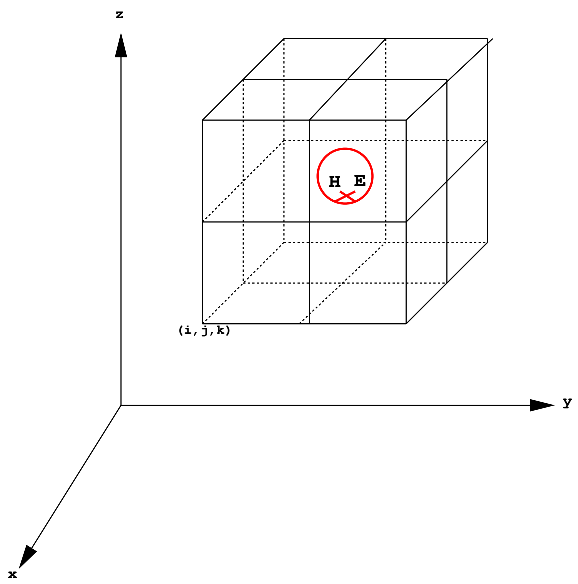


FIG. 6.2 – *Position des champs dans la grille volumes finis .*

Preuve de la proposition 2

On note :

$$\mathbf{Q}^n_{l,j,k} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\ \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\ \mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\ \mathbf{E}_x^{n-1}(l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\ \mathbf{E}_y^{n-1}(l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\ \mathbf{E}_z^{n-1}(l+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}.$$

En utilisant la transformée de Fourier, on obtient le système suivant :

$$\hat{\mathbf{Q}}^{n+1} = \mathbf{G}_{\theta_1,\theta_2,\theta_3}\hat{\mathbf{Q}}^n, \tag{6.12}$$

où $\theta_1,\theta_2,\theta_3 \in [0,2\pi]^3$ sont les angles de Fourier. La matrice d'amplification $\mathbf{G}_{\theta_1,\theta_2,\theta_3}$ est donnée par :

$$\mathbf{G}_{\theta_1,\theta_2,\theta_3} = Id + \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & 0 & Y_5 & Y_6 \\ Y_2 & X_2 & X_3 & -Y_5 & 0 & X_6 \\ Y_3 & X_3 & C_3 & -Y_6 & -X_6 & 0 \\ 0 & -Y_5 & -Y_6 & 0 & 0 & 0 \\ Y_5 & 0 & -X_6 & 0 & 0 & 0 \\ Y_6 & X_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

où

$$Y_1 = -\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} sin^2\theta_2 - \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2} sin^2\theta_3.$$

$$Y_2 = \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta y} sin\theta_1 sin\theta_2.$$

$$Y_3 = \frac{\Delta t^2}{\Delta x \Delta z} sin\theta_1 sin\theta_3.$$

$$Y_5 = i\frac{\Delta t}{\Delta z} sin\theta_3.$$

$$Y_6 = i\frac{\Delta t}{\Delta y} sin\theta_2.$$

$$X_2 = -\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} sin^2\theta_1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta z^2} sin^2\theta_3.$$

$$X_3 = \frac{\Delta t^2}{\Delta y \Delta z} sin\theta_2 sin\theta_3.$$

$$X_6 = i\frac{\Delta t}{\Delta x} sin\theta_1.$$

$$C_3 = -\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} sin^2\theta_1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} sin^2\theta_2.$$

La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du schéma (condition de Von Neumann) s'écrit :

$$\forall(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in [0,2\pi], \quad \max_{s=1,2,3,4,5,6} |\lambda^s_{\theta_1,\theta_2,\theta_3}| \leq 1,$$

où les valeurs $\lambda^s_{\theta_1,\theta_2,\theta_3}$ représentent les valeurs propres de la matrice d'amplification. Il suffit de calculer les valeurs propres de la matrice $\mathbf{H} = \mathbf{G}_{\theta_1,\theta_2,\theta_3} - Id$.

$$det(\mathbf{H} - \lambda Id) = \lambda^2 \left(\lambda^4 + 2\alpha\lambda^3 + (2\alpha + \alpha^2)\lambda^2 + 2\alpha^2\lambda + \alpha^2\right),$$

avec

$$\alpha = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} sin^2\theta_1 + \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} sin^2\theta_2 + \frac{\Delta t^3}{\Delta z^2} sin^2\theta_3.$$

Posons

$$g(\lambda) = \lambda^4 + 2\alpha\lambda^3 + (2\alpha + \alpha^2)\lambda^2 + 2\alpha^2\lambda + \alpha^2.$$

Alors

$$g(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha)^2.$$

Par conséquent

$$g(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha = 0.$$

Condition suffisante

Le schéma est stable quand $\alpha \leq 4$:
Pour $\alpha \leq 4$, les valeurs propres $\lambda_{1,2}$ de la matrice $\mathbf{H}$ sont données par :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{4\alpha - \alpha^2}}{2}$$

$$\Longrightarrow \max_i |1+\lambda_i| = \sqrt{\frac{(2-\alpha)^2 + (4\alpha - \alpha^2)}{4}} = 1.$$

Ce qui implique la stabilité du schéma.

Condition nécessaire

Nous démontrons que pour $\alpha > 4$, le schéma est instable.
Nous avons pour $\alpha > 4$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}.$$

On suppose que :

$$|1+\lambda_i| \leq 1$$

$$\Longrightarrow \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \leq 4.$$

Ce qui est absurde puisque $\alpha > 4$, donc le schéma est instable. Nous déduisons à travers ces calculs la condition de stabilité nécessaire et suffisante suivante :

$$\Delta t \sqrt{(\frac{1}{\Delta x^2} sin^2\theta_1 + \frac{1}{\Delta y^2} sin^2\theta_2 + \frac{1}{\Delta z^2} sin^2\theta_3)} \leq 2 \;\; \forall(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \in [0,2\pi]^3.$$

Cette condition est vérifiée en particulier pour $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, et $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$, ce qui implique la condition (6.11).

6.2.2.4 Etude de la dispersion numérique en dimension trois

Le schéma volumes finis que nous proposons ici n'est pas dissipatif (l'énergie est conservée), mais il est relativement dispersif. Pour vérifier le degré de dispersion du schéma, nous analysons la relation de dispersion qui relie la pulsation ω d'une onde au vecteur d'onde k. Rappelons d'abord la relation de dispersion dans le cas continu, elle est donnée par :

$$\omega^2 = |k|^2 C^2. \tag{6.14}$$

Cette relation est vérifiée par des ondes non dispersives de vitesse de phase $\pm C$. Pour étudier la dispersion numérique, déduisons d'abord l'équation des ondes discrète dans le vide à partir du schéma volumes finis (6.10) :

$$\begin{aligned}&\tfrac{E^{n+1}(i,j,k)-2E^n(i,j,k)+E^{n-1}(i,j,k)}{\Delta t^2} = C^2\left(\tfrac{E^n(i+2,j,k)+E^n(i-2,j,k)-2E^n(i,j,k)}{4\Delta x^2}\right)\\ &+C^2\left(\tfrac{E^n(i,j+2,k)+E^n(i,j-2,k)-2E^n(i,j,k)}{4\Delta y^2}+\tfrac{E^n(i,j,k+2)+E^n(i,j,k-2)-2E^n(i,j,k)}{4\Delta z^2}\right).\end{aligned} \tag{6.15}$$

Considérons l'onde harmonique suivante :

$$E(j\Delta x,l\Delta y,m\Delta z,n\Delta t) = E_0 e^{i[\omega n\Delta t-(k_x j\Delta x+k_y l\Delta y+k_z m\Delta z)]}.$$

Remplaçons la dans l'équation des ondes (6.15), on obtient alors la relation suivante :

$$\frac{sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})}{\Delta t^2} = \frac{C^2}{4}\left(\frac{sin^2 k_x\Delta x}{\Delta x^2}+\frac{sin^2 k_y\Delta y}{\Delta y^2}+\frac{sin^2 k_z\Delta z}{\Delta z^2}\right). \tag{6.16}$$

Cett relation représente la dispersion numérique. Un développement de Taylor de (6.16) donne :

$$\omega^2(1+O(\omega^2\Delta t^2)) = C^2|k|^2(1+O(\frac{k_x^4\Delta x^2+k_y^4\Delta y^2+k_z^4\Delta z^2}{|k|^2})), \tag{6.17}$$

où

$$|k|^2 = k_x^2+k_y^2+k_z^2.$$

La relation (6.17) montre que la vitesse de phase dépend du vecteur d'onde k, il y a donc dispersion numérique, et l'erreur de dispersion est d'ordre deux. Un développement plus poussé donne :

La dispersion du schéma volumes finis

$$\begin{aligned}&\omega^2(1-\frac{\omega^2\Delta t^2}{12}+O(\omega^4\Delta t^4)) =\\ &C^2|k|^2\left(1-\frac{1}{3}(\frac{k_x^4\Delta x^2+k_y^4\Delta y^2+k_z^4\Delta z^2}{|k|^2})+O(\frac{k_x^6\Delta x^4+k_y^6\Delta y^4+k_z^6\Delta z^4}{|k|^2})\right).\end{aligned} \tag{6.18}$$

Nous proposons de comparer cette erreur à celle donnée par le schéma de Yee [83]. Rappelons d'abord l'équation des ondes discrète dans le vide obtenue à partir du schéma de K.S. Yee :

$$\begin{aligned}&\tfrac{E^{n+1}(i,j,k)-2E^n(i,j,k)+E^{n-1}(i,j,k)}{\Delta t^2} = C^2\left(\tfrac{E^n(i+1,j,k)+E^n(i-1,j,k)-2E^n(i,j,k)}{\Delta x^2}\right)\\ &+C^2\left(\tfrac{E^n(i,j+1,k)+E^n(i,j-1,k)-2E^n(i,j,k)}{\Delta y^2}+\tfrac{E^n(i,j,k+1)+E^n(i,j,k-1)-2E^n(i,j,k)}{\Delta z^2}\right).\end{aligned} \tag{6.19}$$

La relation de dispersion numérique donnée par le schéma de Yee est alors :

$$\frac{sin^2(\omega\frac{\Delta t}{2})}{\Delta t^2} = C^2 \left(\frac{sin^2 k_x \Delta x}{\Delta x^2} + \frac{sin^2 k_y \Delta y}{\Delta y^2} + \frac{sin^2 k_z \Delta z}{\Delta z^2} \right). \tag{6.20}$$

Après un développement de Taylor, nous obtenons la relation de dispersion suivante :

La dispersion du schéma de Yee

$$\begin{aligned} &\omega^2(1 - \frac{\omega^2 \Delta t^2}{12} + O(\omega^4 \Delta t^4)) = \\ &C^2|k|^2 \left(1 - \frac{1}{12}(\frac{k_x^4 \Delta x^2 + k_y^4 \Delta y^2 + k_z^4 \Delta z^2}{|k|^2}) + O(\frac{k_x^6 \Delta x^4 + k_y^6 \Delta y^4 + k_z^6 \Delta z^4}{|k|^2}) \right). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Supposons que

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{3}}{\pi} \times T \quad \text{où} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{est la période.}$$

Alors, on peut déduire que les deux méthodes présentent une dispersion du même ordre, néanmoins celle donnée par le schéma de Yee est plus faible. Ainsi, il serait intéressant de combiner les deux schémas afin d'exploiter les différents avantages, à savoir la capacité du schéma volumes finis à traiter des problèmes avec des géométries complexes, et la faible dispersion numérique du schéma de Yee dans une grille structurée. Notons que les deux méthodes sont faciles à implémenter.

6.3 Expériences numériques

Nous proposons ici quelques résultats numériques afin de valider la méthode volumes finis décrite précédemment. On considère ici deux types de conditions aux limites, la condition métallique donnée par $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = 0$, et une condition artificielle qui simule le domaine infini de la propagation d'une onde afin d'éviter les réflexions des ondes parasites dues à la troncature du domaine de propagation. Les maillages considérés ici sont non structurés. Le premier cas test représente la propagation d'un mode de résonance dans une cavité carrée, nous calculons également le champ électromagnétique généré par un courant électrique dans un guide d'onde. Un autre cas test consiste en la propagation d'une pulsation dans un matériau hétérogène. Finalement, nous simulons le champ diffracté par un matériau diélectrique.

6.3.1 Evolution d'un mode de résonance

Nous proposons de tester ici la méthode volumes finis développée dans ce chapitre sur un cas test qui consiste à calculer l'évolution d'un mode de résonance dans une cavité métallique carrée. Le nombre de points par longueur d'onde considéré ici correspond à environ 12 points, et le maillage utilisé est de type triangulaire structuré. Nous comparons la solution numérique à la solution exacte (les résultats de la figure 6.3 est un zoom de la solution sur les trentes dernières longueurs d'ondes). On constate que sur environ 70 longueurs d'onde la solution approchée est de bonne qualité comparée à la solution exacte, et elle n'est pas diffusée. Si nous faisons un zoom sur les dix dernières périodes, nous pouvons remarquer la dispersion (faible) de la solution numérique (figure 6.4). Nous pouvons noter également la conservation de l'énergie à chaque pas de temps (figure 6.5). La courbe d'énergie est constante en fonction du temps. Ceci est conforme aux résultats théoriques que nous avons montrés au début de cette étude.

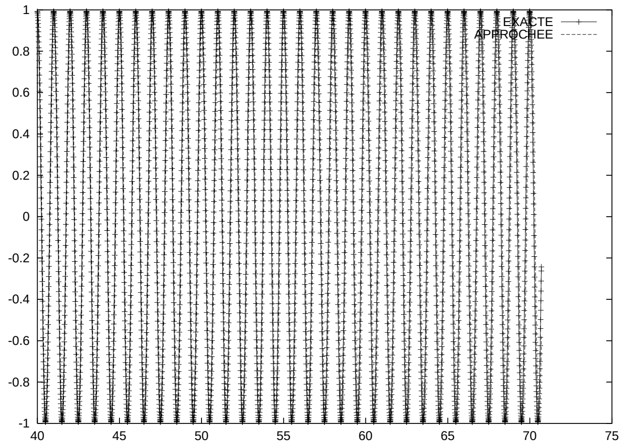


FIG. 6.3 – *Évolution en temps du premier mode de résonance*

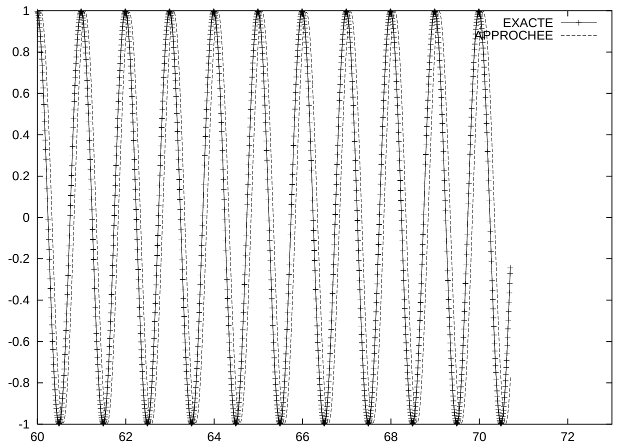


FIG. 6.4 – *Solution sur les dix dernières périodes*

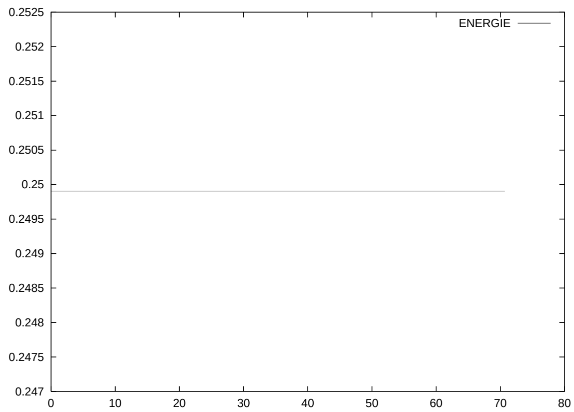


FIG. 6.5 – *L'énergie discrète*

On considère maintenant la même expérience avec un maillage triangulaire non structuré donné par la figure 6.6 composé de triangles de différentes tailles. On peut noter la bonne qualité de la solution numérique (figure 6.7), ainsi que la conservation de l'énergie discrète (figure 6.8). On peut ainsi déduire la robustesse de la méthode par rapport au maillage.

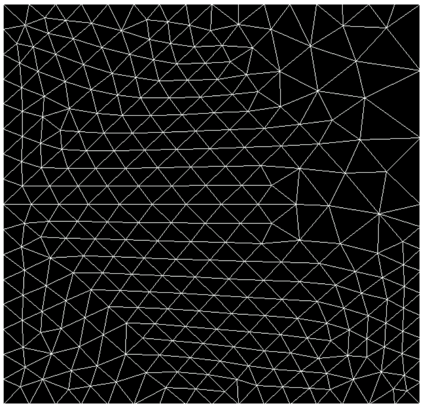


FIG. 6.6 – *Le maillage de la cavité*

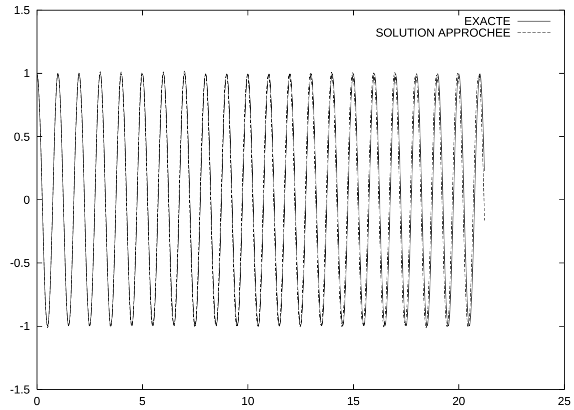


FIG. 6.7 – *La solution approchée (évolution en temps)*

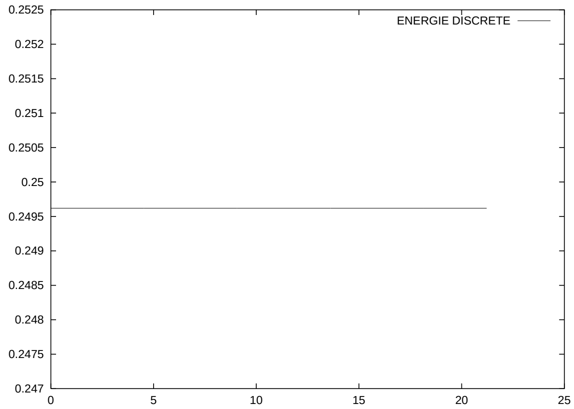


FIG. 6.8 – *L'énergie discrète avec un maillage quelconque*

6.3.2 Un guide d'onde

Nous reprenons ici l'expérience concernant la simulation numérique du champ électromagnétique généré par un courant électrique (voir paragraphe (4.4.3)). Les figures (6.9) et (6.10) representent respectivement le champ électrique et le champ magnétique. On peut remarquer la bonne qualité des solutions numériques.

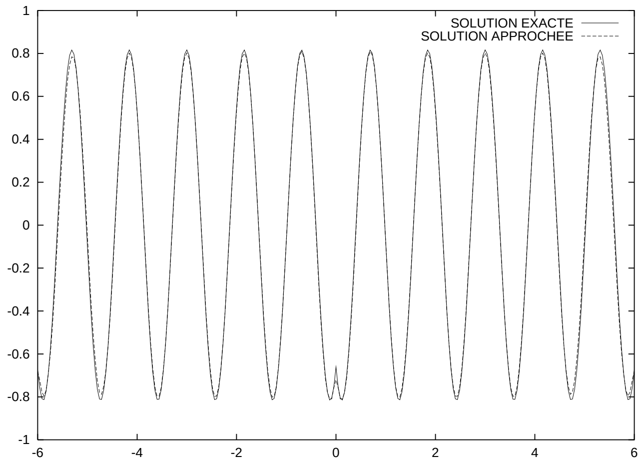


FIG. 6.9 – *Coupe en* $y=\frac{d}{2}$ *du champ* E_z

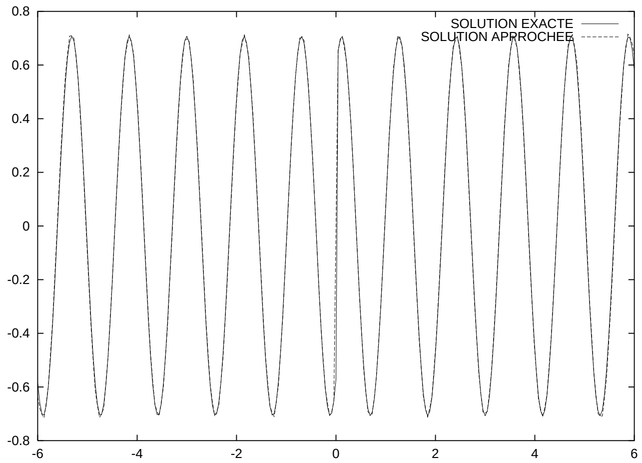


FIG. 6.10 – *Coupe en* $y=\frac{d}{2}$ *du champ* H_y

6.3.3 Propagation d'un pulse

Nous simulons ici la propagation d'une pulsation dans un milieu composé du vide et du verre (expérience paragraphe 4.4.1). Le maillage utilisé dans cette expérience correspond à environ 10 points par longueur d'onde. La solution approchée est comparée à la solution exacte, et nous pouvons constater la bonne qualité du résultat numérique (figure 6.11).

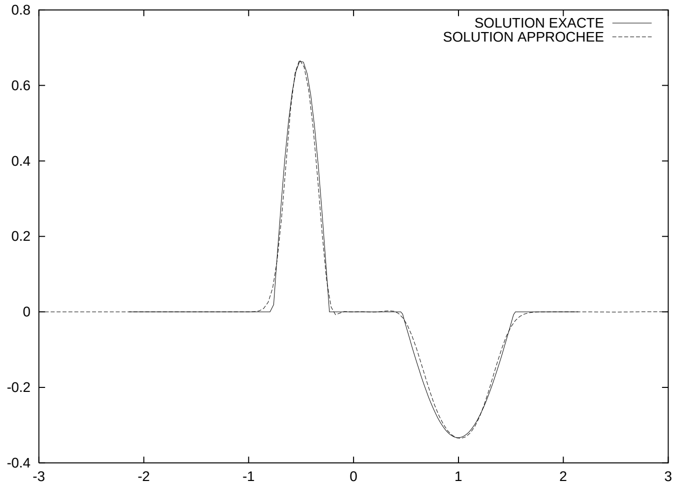


FIG. 6.11 – *Propagation d'un pulse dans un matériau diélectrique*

6.3.4 Un problème de diffraction

Nous proposons ici de simuler le champ diffracté par un profil d'aile de type NACA0012 revêtu d'une couche de diélectrique. Le maillage utilisé correspond à 15 points par longueur d'onde (figure 6.12). L'objet est illuminé par une onde plane sur la partie droite. La couche de diélectrique a une épasseur $\delta = 0.1\lambda$ (dont les indices $\varepsilon = 4$ et μ=1). La figure (6.13) represente les isovaleurs du champ diffracté, et nous pouvons constater qu'aucune oscillation parasite n'apparait à l'interface des deux milieux.

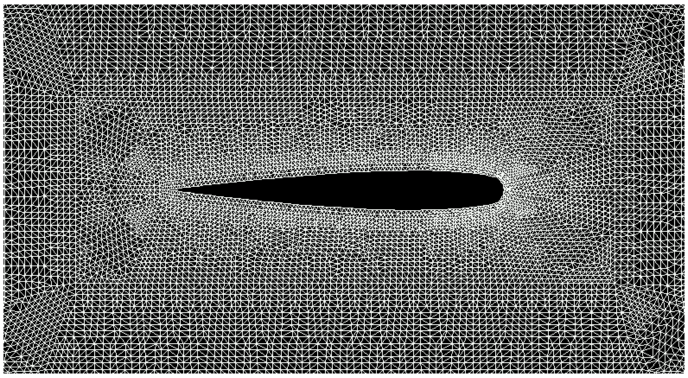


FIG. 6.12 – *Le maillage du* $NACA0012$

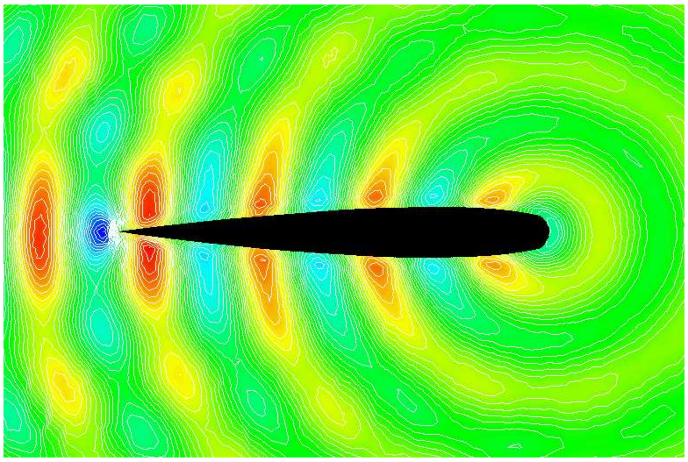


FIG. 6.13 – *Le champ électrique diffracté*

6.3.5 Comparaison avec une autre méthode volumes finis

Nous proposons de comparer cette méthode avec une autre méthode volumes finis de type MUSCL développée dans le chapitre (4). Nous considérons le cas simple d'une évolution d'un mode de résonance (paragraphe 6.3.1). Nous utilisons le même maillage pour les deux méthodes (même nombre de degrés de liberté qui correspond à une dizaine de points par longueur d'onde). On peut remarquer que la nouvelle méthode volumes finis est non diffusive et donne de bons résultats sur des temps longs, alors que la méthode de type MUSCL donne un résultat de mauvaise qualité après environ 20 longueurs d'onde (dans cette expérience où le nombre de points par longueurs d'onde est faible) à cause du caractère diffusif de la méthode (figure 6.14). Le temps de calcul demandé par la nouvelle méthode est de 23 secondes, alors qu'il est de 57 secondes dans la méthode de type MUSCL, et nous pouvons ainsi constater le faible coût de la nouvelle méthode volumes finis.

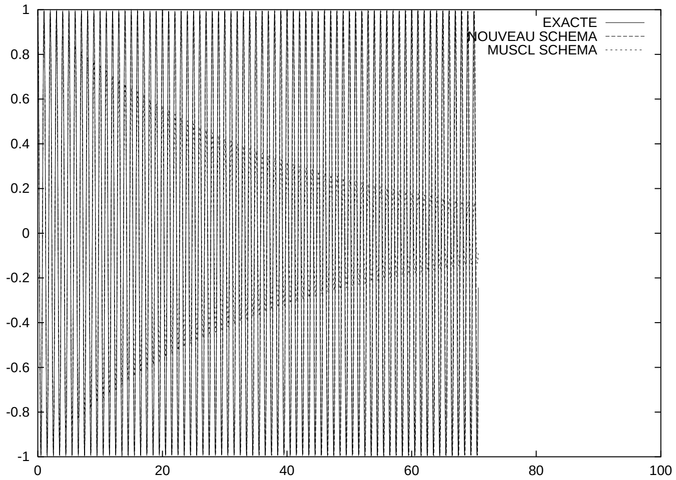


FIG. 6.14 – *Comparaison entre deux méthodes volumes finis*

6.3.6 Comparaison avec une méthode de différences finies

Nous comparons ici la méthode volumes finis décrite dans ce chapitre avec la méthode des différences finies développée par K.S.Yee [83]. Nous reprenons le même cas test de résonance décrit dans les chapitres précédents. Le nombre de points par longueur d'onde considéré ici est de dix points. Nous pouvons constater que les solutions sont comparables (figure 6.15), néanmoins on constate que la dispersion de la solution approchée donnée par la méthode volumes finis est légérement plus grande que celle constatée sur la solution donnée par le schéma de Yee (figure 6.16). Quant au temps de calcul, nous avons un rapport d'environ deux entre les deux méthodes (voir tableau 6.1) et ceci est dû au fait que la condition de stabilité donnée par le schéma de Yee [77] est deux fois plus restrictive que celle donnée par le schéma volumes finis (voir paragraphe 6.2.2).

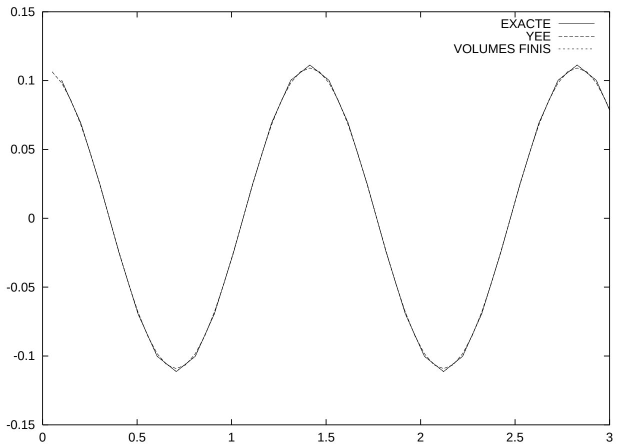


FIG. 6.15 – *Comparaison avec le schéma de Yee*

Méthode	Temps de calcul (secondes)
Volumes finis	0.7
Yee	1.4

TAB. 6.1 – *CPU*

6.3.7 Analyse de la divergence

On s'intéresse ici à la divergence du champ magnétique **B**. On va montrer que cette divergence est conservée par les schémas volumes finis centrés-éléments, pour ce faire on va utiliser la méthode de F. Bouchut dans [13]. On traite ici le cas bidimensionnel où le

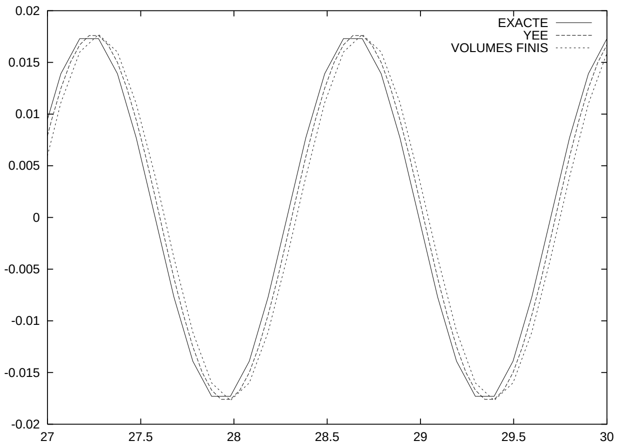


FIG. 6.16 – *Comparaison avec le schéma de Yee*

maillage considéré est composé de triangles. Soit $\mathbf{S}_i$ un point quelconque du maillage, et soit $\mathbf{C}$ la réunion de tous les triangles $\mathbf{T}_i$ qui ont $\mathbf{S}_i$ comme sommet (figure 6.17). Soit maintenant une fonction continue φ dont le support est dans $\mathbf{C}$, telle que :

$$\varphi(\mathbf{S}_i) = 1, \text{ et } \varphi \text{ linéaire sur chaque triangle } \mathbf{T}_i.$$

Considérons la quantité

$$\int_{\mathbf{C}} \varphi div(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}).$$

Après intégration par parties, on obtient :

$$\int_{\mathbf{C}} \varphi div(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}) = -\int_{\mathbf{C}} \nabla\varphi.(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}})$$

$$= \sum_{\mathbf{T}_i \subset \mathbf{C}} |\mathbf{T_i}|(\nabla\varphi)_i.(\frac{\Delta t}{|\mathbf{T}_i|} \sum_{\mathbf{D}_j \text{voisin} \mathbf{D}_i} \mathbf{\Phi_B}(\mathbf{D_i^n}, \mathbf{D_j^n})) = 0,$$

car la fonctions φ est nulle au bord de $\mathbf{C}$ et les flux sont tangeants aux arêtes. A l'intérieur, les termes s'annulent deux à deux.

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{C}} \varphi \, div(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}}) = 0. \quad \forall n. \tag{6.22}$$

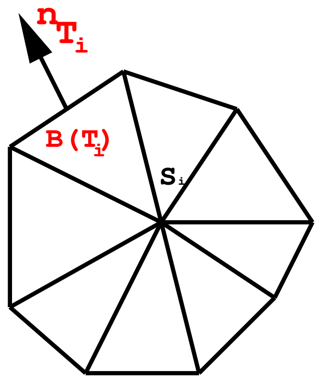


FIG. 6.17 – *Volume* **C** *d'intégration pour la divergence*

On peut déduire la conservation de div(**B**) en fonction du temps pour les méthodes volumes finis où les volumes de contrôle sont les éléments du maillage, et ceci quelque soit la nature du flux numérique utilisé. Cette propriété est vérifiée par exemple par les deux méthodes volumes finis qu'on a vu dans cette thèse, à savoir la méthode MUSCL et la nouvelle méthode décrite dans ce chapitre. Ceci représente un avantage supplémentaire pour les méthodes centrées-éléments.
Nous proposons de calculer numériquement la divergence du champ **B** avec les deux méthodes volumes finis, et nous pouvons constater à travers les figures (6.18) et (6.19), que les résultats numériques sont compatibles avec le résultat théorique donné par l'équation (6.22).

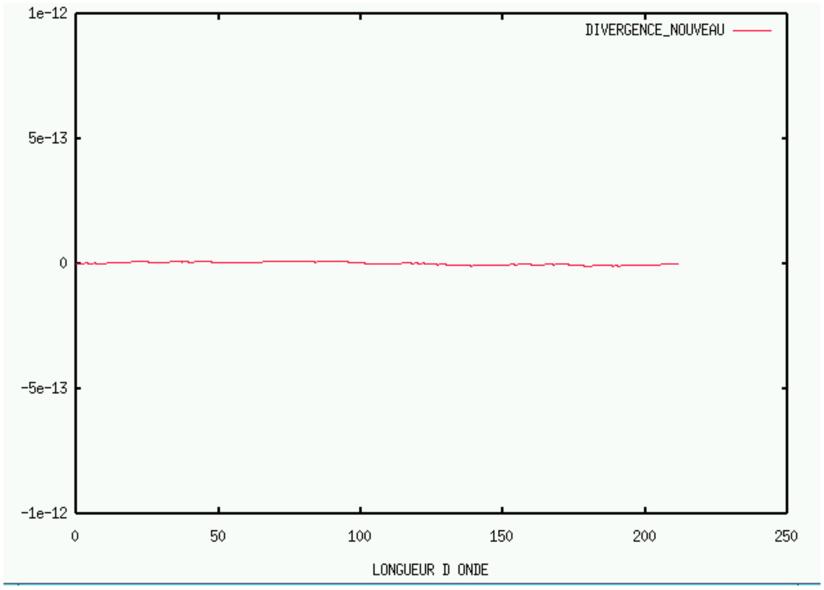


FIG. 6.18 – *Divergence numérique par le nouveau schéma*

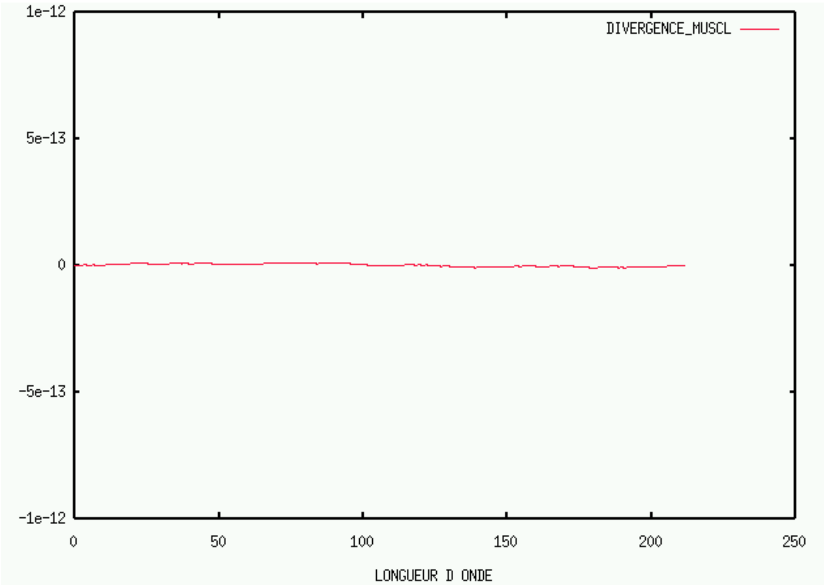


FIG. 6.19 – *Divergence numérique par le schéma MUSCL*

6.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une nouvelle méthode volumes finis. Une analyse théorique a montré que la méthode est d'ordre deux et qu'elle est non diffusive. Nous avons présenté également quelques résultats numériques aussi bien dans le cas homogène que dans le cas hétérogène. Cette étude a montré que cette méthode est bien adaptée pour résoudre les problèmes d'électromagnétisme dans le cas linéaire mais pas nécessairement homogène. Cette méthode présente plusieurs avantages, dont sa capacité à résoudre des problèmes complexes, son implémentation relativement simple et son faible coût en CPU. On peut également insister sur la conservation d'une énergie discrète et de la divergence. Grâce à toutes ces propriétés, elle paraît la mieux appropriée pour être combinée avec la méthode des différences finies de Yee [83] dans le but d'obtenir un modèle capable de résoudre des problèmes dans des domaine quelconques et économique.

Chapitre 7

Un schéma hybride volumes finis/ différences finies

7.1 Introduction

Nous présentons ici une méthode hybride, qui couple deux méthodes numériques dans le but d'obtenir un schéma performant et économique. Pour cela, nous proposons d'utiliser un schéma volumes finis et le schéma de Yee [83] pour l'électromagnétisme, qui est un schéma aux différences finies. On peut citer ici les schémas hybrides construits par Yee (voir [84] et [85] par exemple) où les méthodes volumes finis utilisées font appel à une grille duale. Afin d'éviter cette difficulté, nous proposons d'utiliser une méthode de type volumes finis où tous les champs sont localisés aux mêmes points. L'avantage principal de cette méthode est sa grande flexibilité vis-à-vis de la régularité du maillage, qui a priori pourrait être quelconque. L'intérêt de ce couplage est d'exploiter les différents avantages des deux méthodes, à savoir la dispersion relativement faible de la méthode différences finies, et la capacité de la méthode volumes finis à résoudre des problèmes avec des géométries complexes. De plus, ces deux méthodes sont faciles à implémenter. Nous sommes amenés à faire des couplages de maillages et de méthodes, et nous proposons pour la construction du schéma hybride de séparer les deux couplages. On divise le domaine de calcul en quatre sous-domaines, le principe est d'utiliser la méthode des volumes finis dans la partie proche du matériau qu'on note Ω_1, où la géométrie est complexe et où le maillage est non structuré, et la méthode des différences finies dans la partie notée Ω_2 où l'on calcule le champ lointain. La partie hybride située entre Ω_1 et Ω_2 est régulière et composée de deux parties; une partie intermédiaire Ω_3 autour du maillage non structuré où l'on applique encore le schéma volumes finis (pour faciliter le passage entre les deux méthodes de calcul), et une zone d'échange entre les deux méthodes Ω_4 (figure 7.1). Le couplage entre les deux méthodes s'effectue dans une partie régulière du domaine. Les inconnues des deux schémas n'étant pas calculées au même endroit, les variables seront interpolées avant l'échange. Nous présentons dans ce chapitre un modèle hybride, ainsi qu'une étude de stabilité dans les cas 1-D et 3-D.

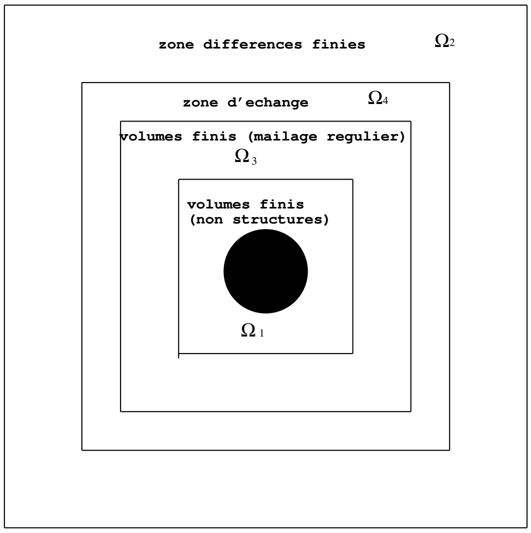


FIG. 7.1 – *Les différentes zones du maillage.*

7.2 Description des schémas utilisés dans le couplage

Nous nous proposons d'étudier la stabilité d'un schéma hybride pour la résolution du système de Maxwell, couplant le schéma volumes finis du chapitre précédent et un schéma aux différences finies, en l'occurence le schéma de Yee ([83], et [77]). Le schéma aux différences finies est basé sur une discrétisation spatiale décalée pour la localisation des six champs électriques et magnétiques, ce qui impose des contraintes assez rigides sur les maillages utilisés. Le schéma en temps utilisé est de type saute-mouton. Le schéma volumes finis que nous proposons ici est basé sur la même discrétisation en temps que le schéma aux différences, quant à la discrétisation en espace, nous utilisons des flux centrés. Tous les champs sont localisés aux mêmes points, et sont calculés à partir d'une moyenne sur des volumes d'intégration (qui peuvent être quelconques). Nous choisissons comme volumes d'intégration, les éléments du maillage. Ces deux schémas sont d'ordre deux en temps et en espace. Le schéma volumes finis que nous utilisons ici est décrit au chapitre (6).

7.2.1 Le schéma aux différences finies

Nous rappelons succintement ici le schéma aux différences finies pour l'électromagnétisme proposé par K.S Yee. Ce schéma s'écrit sous sa forme condensée :

$$\int_{\mathbf{S}} \frac{\mathbf{B}^{n+1/2} - \mathbf{B}^{n-1/2}}{\Delta t}\, ds + \int_{\partial \mathbf{S}} \mathbf{E}^n \, dl = 0,$$
$$\int_{\mathbf{S}} \frac{\mathbf{D}^{n+1} - \mathbf{D}^{n}}{\Delta t} ds - \int_{\partial \mathbf{S}} \mathbf{H}^{n+1/2} \, dl = 0,$$

où **S** est une surface (voir grille 7.2).

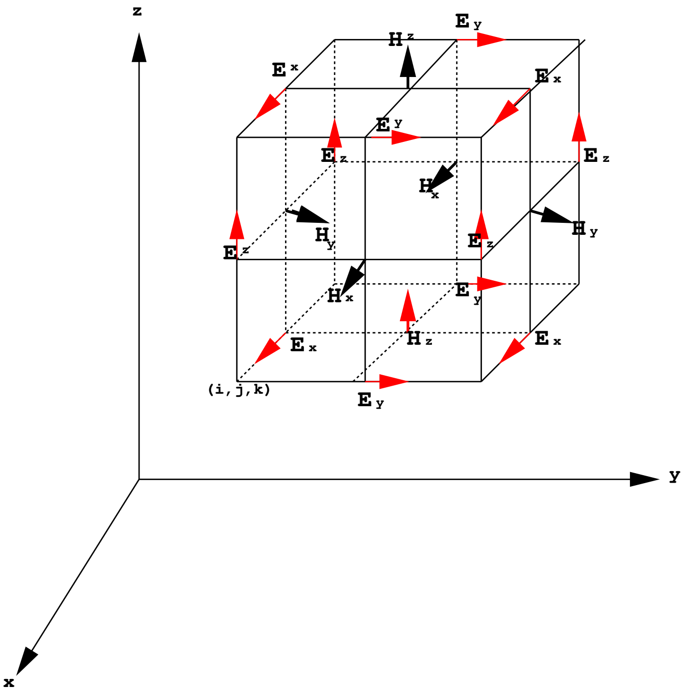


FIG. 7.2 – *Position des champs dans la grille différences finies .*

La condition de stabilité est donnée par :

$$C_{max}\Delta t\sqrt{(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2})} \leq 1. \quad (7.1)$$

Voir [77] pour une preuve de ce résultat. On peut également appliquer le même procédé que pour les schémas volumes finis (voir rapport [72]).

7.3 Construction d'un schéma hybride dans le cas monodimensionnel

Pour mieux illustrer le schéma hybride, nous traitons d'abord le cas monodimensionnel, ensuite nous présentons le cas tridimensionnel. Soit une partition du segment $[a : b]$ en une suite $(x_i, i = 0,..M)$ (figure 7.3). On applique le schéma de Yee sur la partie composée des points $(x = 0,..x = N + \frac{1}{2})$, et le schéma volumes finis sur la partie composée des points $(x = N + \frac{3}{2},..M - \frac{1}{2})$. Il reste à définir la valeur du champ électrique au point $x = N + \frac{1}{2}$. On impose des conditions de métal parfait sur les deux bouts du segment.

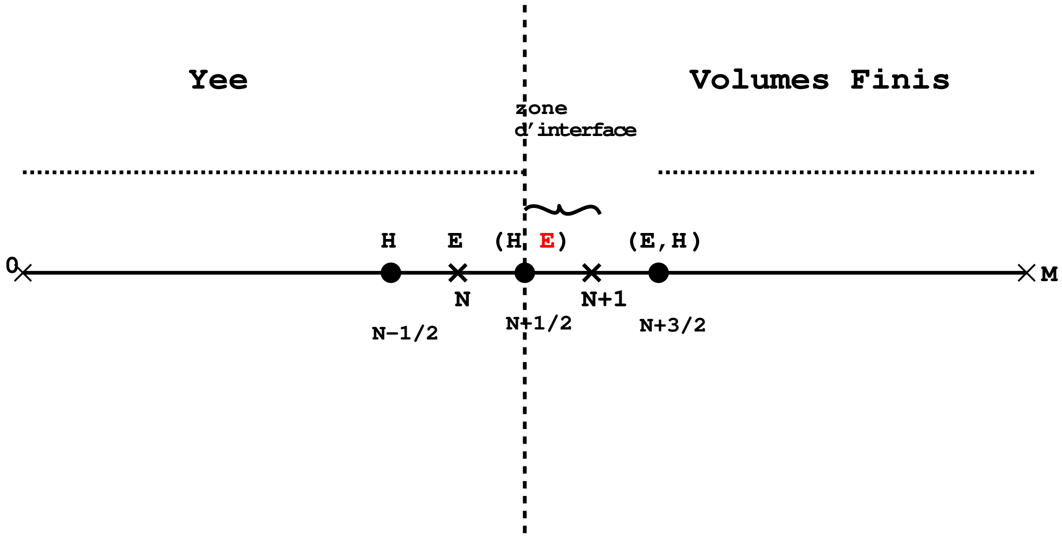


FIG. 7.3 – *Domaines de calcul des deux méthodes*

7.3.1 Définition des deux schémas

Les équations de Maxwell dans le cas monodimensionnel en mode transverse magnétique, et en présence du vide (le système est normalisé, $\varepsilon = 1$ et $\mu = 1$) sont données par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

7.3.2 Le schéma de Yee (Différences Finies)

Le schéma de Yee est donné dans ce cas par :

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \nu[\mathbf{E}_{j+1}^{n} - \mathbf{E}_{j}^{n}] \qquad j = 0,...N-1, \\ \\ \mathbf{E}_{j}^{n+1} = \mathbf{E}_{j}^{n} - \nu[\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] \qquad j = 0,...N-1, \\ \\ \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \nu[\mathbf{E}_{N+1}^{n} - \mathbf{E}_{N}^{n}], \\ \mathbf{E}_{N}^{n+1} = \mathbf{E}_{N}^{n} - \nu[\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}]. \end{cases} \tag{7.3}$$

Avec $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

7.3.3 Valeur du champ à l'interface

Le champ électromagnétique à l'interface est donné par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n+1} = \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n} - \nu[\mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}]. \end{cases} \tag{7.4}$$

7.3.4 Le schéma volumes finis

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}[\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^{n} - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^{n}] \qquad j = N+2,..M-1, \\ \\ \mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^{n} - \frac{\nu}{2}[\mathbf{H}_{j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] \qquad j = N+2,..M-1, \\ \\ \mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}[\mathbf{E}_{N+\frac{5}{2}}^{n} - \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n}], \\ \\ \mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^{n+1} = \mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^{n} - \frac{\nu}{2}[\mathbf{H}_{N+\frac{5}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}]. \end{cases} \tag{7.5}$$

La seule valeur qui reste à déterminer est $\mathbf{E}_{N+1}^{n}$. Nous proposons l'interpolation suivante :

$$\mathbf{E}_{N+1}^{n} = \frac{\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^{n} + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n}}{2}.$$

7.3.5 Conditions aux limites

Nous considérons des conditions aux limites de type métal parfait données par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 = 0, \\ \mathbf{H}_{M+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{M-\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{E}_{M+\frac{1}{2}} = -\mathbf{E}_{M-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

7.4 Le schéma hybride

Nous donnons ici l'algorithme complet du schéma hybride que nous avons construit ci-dessus :

$$\begin{cases} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} - \nu[\mathbf{E}^n_{j+1} - \mathbf{E}^n_j] & j = 0,...N-1, \\ \\ \mathbf{E}^{n+1}_j = \mathbf{E}^n_j - \nu[\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}}] & j = 0,...N-1, \\ \\ \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_{N+\frac{1}{2}} - \nu[\mathbf{E}^n_{N+1} - \mathbf{E}^n_N], \\ \mathbf{E}^{n+1}_N = \mathbf{E}^n_N - \nu[\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N-\frac{1}{2}}], \\ \\ \mathbf{E}^{n+1}_{N+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}^n_{N+\frac{1}{2}} - \nu[\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N+\frac{1}{2}}], \\ \\ \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} - \dfrac{\nu}{2}[\mathbf{E}^n_{j+\frac{3}{2}} - \mathbf{E}^n_{j-\frac{1}{2}}] & j = N+2,..M-1, \\ \mathbf{E}^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{E}^n_{j+\frac{1}{2}} - \dfrac{\nu}{2}[\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}}] & j = N+2,..M-1, \\ \\ \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N+\frac{3}{2}} = \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_{N+\frac{3}{2}} - \dfrac{\nu}{2}[\mathbf{E}^n_{N+\frac{5}{2}} - \mathbf{E}^n_{N+\frac{1}{2}}], \\ \mathbf{E}^{n+1}_{N+\frac{3}{2}} = \mathbf{E}^n_{N+\frac{3}{2}} - \dfrac{\nu}{2}[\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N+\frac{5}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N+\frac{1}{2}}]. \end{cases} \tag{7.6}$$

Avec :

$$\mathbf{E}^n_{N+1} = \frac{\mathbf{E}^n_{N+\frac{3}{2}} + \mathbf{E}^n_{N+\frac{1}{2}}}{2}.$$

7.5 Stabilité du modèle hybride dans le cas monodimensionnel

7.5.1 Proposition

Le schéma hybride (7.6) est un schéma stable. Nous allons montrer la stabilité par un calcul de la variation d'énergie totale sur tout le domaine.

7.5.2 Définition d'une énergie sur tout le domaine

On définit l'énergie discrète du schéma hybride par la formulation suivante :

$$\begin{aligned}2\mathcal{E}_h^n = & \sum_{j=0}^{j=N-1} (\mathbf{E}_j^n)^2 + \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\ & +(\mathbf{E}_N^n)^2 + \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\ & + \sum_{j=N+1}^{j=M-1} (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 + \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\ & +\frac{1}{2}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2.\end{aligned} \tag{7.7}$$

Qu'on peut écrire sous la forme :

$$\boxed{2\mathcal{E}_h^n = 2\mathcal{E}_{yee}^n + 2\mathcal{E}_{vf}^n + 2\mathcal{E}_{int}^n}$$

Avec :

$$\begin{aligned}2\mathcal{E}_{yee}^n = & \sum_{j=0}^{j=N-1} (\mathbf{E}_j^n)^2 + \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\ & +(\mathbf{E}_N^n)^2 + \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

$$2\mathcal{E}_{vf}^n = \sum_{j=N+1}^{j=M-1} (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 + \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}.$$

$$2\mathcal{E}_{int}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2.$$

7.5.2.1 Proposition

L'énergie $\mathcal{E}_h^n$ est une forme quadratique définie positive des variables $\mathbf{E}^n$ et $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$ pour $\nu < 1$.

Preuve

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{E}_h^n = & \sum_{j=0}^{j=N-1} (\mathbf{E}_j^n)^2 + \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}(\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n)\right)^2 - \frac{\nu^2}{4}(\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n)^2 \\
& + \sum_{j=N+1}^{j=M-1} (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 + \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{4}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n)\right)^2 - \frac{\nu^2}{16}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 \\
& + (\mathbf{E}_N^n)^2 + \left(\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n}{2} - \mathbf{E}_N^n\right)\right)^2 - \frac{\nu^2}{4}\left(\frac{\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n}{2} - \mathbf{E}_N^n\right)^2 \\
& + \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité pour deux réels a et b quelconques

$$(a-b)^2 \leq 2(a^2+b^2),$$

on déduit l'inégalité suivante pour l'énergie définie par l'équation (7.7) :

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{E}_h^n \geq & \sum_{j=0}^{j=N-1} \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}(\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n)\right)^2 + (1-\nu^2)(\mathbf{E}_j^n)^2 \\
& + \sum_{j=N+1}^{j=M-1} \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{4}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n)\right)^2 + \sum_{j=N+2}^{j=M-1} (1 - \frac{\nu^2}{4})(\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 \\
& + \left(\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}\left(\frac{\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n}{2} - \mathbf{E}_N^n\right)\right)^2 \\
& + (1-\nu^2)(\mathbf{E}_N^n)^2 + (1 - \frac{3}{8}\nu^2)(\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n)^2 + \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{4}\nu^2)(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

De plus, pour $\nu < 1$, nous avons :

$$\mathcal{E}_h^n = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_j^n = 0 & j = 0,..N-1 \\ \mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n = 0 & j = N+2,..M-1 \\ \mathbf{E}_N^n = 0 & \\ \mathbf{E}_N^{n+\frac{1}{2}} = 0 & \\ \mathbf{E}_N^{n+\frac{3}{2}} = 0 & \\ \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = 0 & j = 0,..N-1 \\ \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = 0 & j = N+1,..M-1 \\ \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = 0 & \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (\mathbf{E} = 0, \text{et } \mathbf{H} = 0).$$

7.5.3 Variation de l'énergie totale

La variation de l'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned} 2\Delta\mathcal{E}_h^n &= 2\mathcal{E}_h^{n+1} - 2\mathcal{E}_h^n. \\ 2\Delta\mathcal{E}_h^n &= 2\Delta\mathcal{E}_{yee}^n + 2\Delta\mathcal{E}_{vf}^n + 2\Delta\mathcal{E}_{int}^n. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Nous allons calculer les trois quantités $2\Delta\mathcal{E}_{yee}^n$, $2\Delta\mathcal{E}_{vf}^n$ et $2\Delta\mathcal{E}_{int}^n$.

$$\boxed{2\Delta\mathcal{E}_{yee}^n = 2\mathcal{E}_{yee}^{n+1} - 2\mathcal{E}_{yee}^n}$$

$$2\Delta\mathcal{E}_{Yee}^n = -\tfrac{\nu}{2}\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^{n+1} + \mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n) - \tfrac{\nu}{2}\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n+1} + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n).$$

$$\boxed{2\Delta\mathcal{E}_{vf}^n = 2\mathcal{E}_{vf}^{n+1} - 2\mathcal{E}_{vf}^n}$$

$$\begin{aligned} 2\Delta\mathcal{E}_{vf}^n = \frac{\nu}{2}\mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}&(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n+1} + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n) \\ &+\frac{\nu}{2}\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^{n+1} + \mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n). \end{aligned}$$

$$\boxed{2\Delta\mathcal{E}_{int}^n = \frac{1}{2}\left((\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 - (\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2\right)}$$

$$2\Delta\mathcal{E}^n_{int} = -\frac{\nu}{2}(\mathbf{E}^{n+1}_{N+\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^n_{N+\frac{1}{2}})(\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N+\frac{3}{2}} - \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_{N+\frac{1}{2}}).$$

Ainsi, la variation de l'énergie discrète est donnée par :

$$2\Delta\mathcal{E}^n_h = 0.$$

Comme l'énergie est une forme quadratique définie positive, et que sa variation est nulle, nous déduisons que cette énergie est bornée (car constante), et par conséquent tous les champs électromagnétiques le sont. Ceci implique la stabilité du schéma. Nous constatons également d'après cette étude que le schéma hybride ainsi construit n'est pas diffusif.

Remarque

Ce schéma s'étend au cas bidimensionnel et tridimensionnel. Nous décrivons ici le modèle hybride dans le cas tridimensionnel, et nous donnons également une démonstration de la stabilité du schéma.

7.6 Le modèle hybride dans le cas tridimensionnel

Soit un maillage régulier composé de parallélépipèdes (figure 7.4).

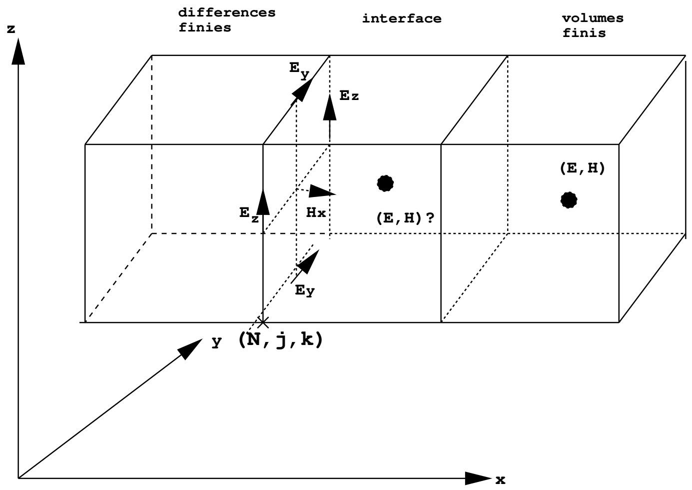


FIG. 7.4 – *Les différentes zones du maillage dans le cas 3-D.*

Nous appliquons les schémas volumes finis et différences finies dans les zones indiquées par la figure (7.4), et afin de définir tous les champs, nous avons besoin des valeurs des champs aux interfaces avec les interpolations appropriées. Nous considérons ici une interface composée des points $[(N+\frac{1}{2})\Delta x,(j+\frac{1}{2})\Delta y,(k+\frac{1}{2})\Delta z]$, où N est une valeur fixée, j et k sont variables. Nous rappelons tout d'abord les deux schémas différences finies et volumes finis dans le cas tridimensionnel (maillage structuré).

7.6.1 Schéma de Yee dans le cas 3-D

Pour $i \leq N-1,j,k$:

$$\left\{\begin{array}{l}
1)\ \ \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\mathbf{E}_y^n(i,j+\frac{1}{2},k+1) - \mathbf{E}_y^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\mathbf{E}_z^n(i,j+1,k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_z^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\mathbf{E}_y^n(N,j+\frac{1}{2},k+1) - \mathbf{E}_y^n(N,j+\frac{1}{2},k)\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\mathbf{E}_z^n(N,j+1,k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_z^n(N,j,k+\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
2)\ \ \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{E}_z^n(i+1,j,k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_z^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\mathbf{E}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k+1) - \mathbf{E}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right\}, \\
\\
3)\ \ \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) = \mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\mathbf{E}_x^n(i+\frac{1}{2},j+1,k) - \mathbf{E}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{E}_y^n(i+1,j+\frac{1}{2},k) - \mathbf{E}_y^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right\},
\end{array}\right. \tag{7.9}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
4)\quad \mathbf{E}_x^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) = \mathbf{E}_x^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) - \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
5)\quad \mathbf{E}_y^{n+1}(i,j+\frac{1}{2},k) = \mathbf{E}_y^{n}(i,j+\frac{1}{2},k) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) - \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right\}, \\
\\
\mathbf{E}_y^{n+1}(N,j+\frac{1}{2},k) = \mathbf{E}_y^{n}(N,j+\frac{1}{2},k) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) - \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right\}, \\
\\
6)\quad \mathbf{E}_z^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_z^{n}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
\mathbf{E}_z^{n+1}(N,j,k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_z^{n}(N,j,k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}.
\end{array}\right.$$

Il reste à définir les valeurs $\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})$, et $\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)$.

7.6.2 Schéma volumes finis dans le cas 3-D

Pour $i \geq N+1,j,k$:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
1)\ \ \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{E}_y^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{E}_y^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{E}_z^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_z^n(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
2)\ \ \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{\mathbf{E}_z^n(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_z^n(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{E}_x^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{E}_x^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
3)\ \ \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{E}_x^n(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_x^n(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{\mathbf{E}_y^n(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_y^n(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
4)\ \ \mathbf{E}_x^{n+1}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_x^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
5)\ \ \mathbf{E}_y^{n+1}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_y^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
6)\ \ \mathbf{E}_z^{n+1}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_z^{n}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}.
\end{array}
\right. \tag{7.10}
$$

Nous donnons ici les valeurs du champ à l'interface.

7.6.3 Valeur du champ à l'interface dans le cas 3-D

Les valeurs des champs aux points $(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})$ sont données par :

$$\left\{\begin{array}{l}
1)\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1) - \mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
2)\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{E}_z^n(N+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_z^n(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1) - \mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right\}, \\
\\
3)\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{E}_y^n(N+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{E}_y^n(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
4)\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_x^{n-1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
5)\mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_y^{n-1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{2\Delta z}\left\{\mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) - \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_z^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}, \\
\\
6)\mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_z^{n-1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
-\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left\{\mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}.
\end{array}\right. \tag{7.11}$$

Avec les interpolations suivantes :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(1)\mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right).\\
(2)\mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) + \mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right).\\
(3)\mathbf{E}_y^n(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_y^n(N,j+\frac{1}{2},k+1) + \mathbf{E}_y^n(N,j+\frac{1}{2},k)\right).\\
(4)\mathbf{E}_y^n(N+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_y^n(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{E}_y^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right).\\
(5)\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right).\\
(6)\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}) + \mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right).\\
(7)\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right).\\
(8)\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{E}_x^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right).\\
(9)\mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right).\\
(10)\mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right).\\
(11)\mathbf{E}_z^n(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_z^n(N,j,k+\frac{1}{2}) + \mathbf{E}_z^n(N,j+1,k+\frac{1}{2})\right).\\
(12)\mathbf{E}_z^n(N+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_z^n(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{E}_z^n(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right).
\end{array}
\right.
$$

Sur le bord du domaine où est appliqué le schéma aux différences finies, nous avons les champs suivants :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\mathbf{E}_y^{n+1}(N,j+\frac{1}{2},k) = \mathbf{E}_y^n(N,j+\frac{1}{2},k)\\
+\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right\}\\
-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) - \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right\},\\
\\
\mathbf{E}_z^{n+1}(N,j,k+\frac{1}{2}) = \mathbf{E}_z^n(N,j,k+\frac{1}{2})\\
+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right\}\\
-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\}.
\end{array}
\right.
$$

Afin que ces champs soient définis, nous considérons les interpolations suivantes :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(1)\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\dfrac{1}{2},j,k+\dfrac{1}{2}) = \\
\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right). \\
(2)\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\dfrac{1}{2},j+\dfrac{1}{2},k) = \\
\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) + \mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right).
\end{array}
\right.
$$

Ainsi, tous les champs sont définis dans le schéma hybride.

Proposition

Le schéma hybride défini précédement par les équations (7.9, 7.10, et 7.11) est stable.

Démonstration

1) Calcul de l'énergie totale

Pour démontrer la stabilité du schéma dans ce cas , nous allons procéder comme dans le cas monodimensionnel (paragraphe 7.5), en calculant la variation de l'énergie discrète. Nous donnons d'abord la définition de l'énergie totale $\mathcal{E}_h^n$ à l'instant $n\Delta t$ sur tout le domaine de calcul :

$$2\mathcal{E}_h^n = 2\mathcal{E}_{yee}^n + 2\mathcal{E}_{vf}^n + 2\mathcal{E}_{int}^n,$$

avec :

$$
\begin{aligned}
2\mathcal{E}^n_{yee} = &\sum_{i\le N-1,j,k} (\mathbf{E}^n_x(i+\frac{1}{2},j,k))^2 + (\mathbf{E}^n_y(i,j+\frac{1}{2},k))^2 + (\mathbf{E}^n_z(i,j,k+\frac{1}{2}))^2 \\
&+ \sum_{i\le N,j,k} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_x(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_x(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&+ \sum_{i\le N-1,j,k} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_y(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_y(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ \sum_{i\le N-1,j,k} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) \\
&+ \sum_{j,k} (\mathbf{E}^n_y(N,j+\frac{1}{2},k))^2 + (\mathbf{E}^n_z(N,j,k+\frac{1}{2}))^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}^n_{vf} = \\
&\sum_{i\ge N+1,j,k} (\mathbf{E}^n_x(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}))^2 + (\mathbf{E}^n_y(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}))^2 + (\mathbf{E}^n_z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}))^2 \\
&+ \sum_{i\ge N+1,j,k} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_x(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_x(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&+ \sum_{i\ge N+1,j,k} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_y(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_y(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&+ \sum_{i\ge N+1,j,k} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}^n_{int} = \\
&\sum_{j,k} (\mathbf{E}^n_x(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}))^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{E}^n_y(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}))^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{E}^n_z(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}))^2 \\
&+ \sum_{j,k} \frac{1}{2}\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_x(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_x(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&+ \sum_{j,k} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_y(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_y(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&+ \sum_{j,k} \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}_z(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_z(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

2) Variation de l'énergie totale

La variation de l'énergie est donnée par :

$$2\Delta\mathcal{E}_h^n = 2\mathcal{E}_h^{n+1} - 2\mathcal{E}_h^n = 2\Delta\mathcal{E}_{yee}^n + 2\Delta\mathcal{E}_{vf}^n + 2\Delta\mathcal{E}_{int}^n.$$

Nous donnons ici les différentes variations d'énergies :

$$\begin{aligned}
&2\Delta\mathcal{E}_{int}^n = \sum_{j,k} \\
&\frac{\Delta t}{2\Delta y}[\mathbf{E}_x^{n+1}(N+\frac{1}{2},.,.)+\mathbf{E}_x^{n}(N+\frac{1}{2},.,.)][\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2})-\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})] \\
&-\frac{\Delta t}{2\Delta z}[\mathbf{E}_x^{n+1}(N+\frac{1}{2},.,.)+\mathbf{E}_x^{n}(N+\frac{1}{2},.,.)][\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2})-\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})] \\
&+\frac{\Delta t}{4\Delta z}[\mathbf{E}_y^{n+1}(N+\frac{1}{2},.,.)+\mathbf{E}_y^{n}(N+\frac{1}{2},.,.)][\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2})-\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})] \\
&-\frac{\Delta t}{2\Delta x}[\mathbf{E}_y^{n+1}(N+\frac{1}{2},.,.)+\mathbf{E}_y^{n}(N+\frac{1}{2},.,.)][\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})] \\
&+\frac{\Delta t}{2\Delta x}[\mathbf{E}_z^{n+1}(N+\frac{1}{2},.,.)+\mathbf{E}_z^{n}(N+\frac{1}{2},.,.)][\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})] \\
&-\frac{\Delta t}{4\Delta y}[\mathbf{E}_z^{n+1}(N+\frac{1}{2},.,.)+\mathbf{E}_z^{n}(N+\frac{1}{2},.,.)][\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2})-\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})] \\
&+\frac{\Delta t}{4\Delta z}\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_y^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}+\mathbf{E}_y^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2})] \\
&-\frac{\Delta t}{4\Delta z}\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_y^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})+\mathbf{E}_y^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})] \\
&-\frac{\Delta t}{4\Delta y}\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_z^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2})] \\
&+\frac{\Delta t}{4\Delta y}\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_z^{n+1}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})] \\
&+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_z^{n+1}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})] \\
&+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_z^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})] \\
&-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_z^{n+1}(N,j,k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N,j,k+\frac{1}{2})] \\
&-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_z^{n+1}(N,j+1,k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N,j+1,k+\frac{1}{2})] \\
&-\frac{\Delta t}{2\Delta z}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_x^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2})+\mathbf{E}_x^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2})]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\Delta t}{2\Delta z}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_x^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})+\mathbf{E}_x^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})]\\
&+\frac{\Delta t}{2\Delta y}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_x^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_x^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2})]\\
&-\frac{\Delta t}{2\Delta y}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_x^{n+1}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_x^{n}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})]\\
&-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_y^{n+1}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_y^{n}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})]\\
&-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_y^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_y^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})]\\
&+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_y^{n+1}(N,j+\frac{1}{2},k)+\mathbf{E}_y^{n}(N,j+\frac{1}{2},k)]\\
&+\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},.,.)\times[\mathbf{E}_y^{n+1}(N,j+\frac{1}{2},k+1)+\mathbf{E}_y^{n}(N,j+\frac{1}{2},k+1)].
\end{aligned}
$$

Où $(N+\frac{1}{2},.,.)=(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})$.

$$
\begin{aligned}
&2\Delta\mathcal{E}_{yee}^n=\\
&\sum_{j,k}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})[\mathbf{E}_y^{n+1}(N,j+\frac{1}{2},k)+\mathbf{E}_y^{n}(N,j+\frac{1}{2},k)]\\
&-\sum_{j,k}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})[\mathbf{E}_y^{n+1}(N,j+\frac{1}{2},k)+\mathbf{E}_y^{n}(N,j+\frac{1}{2},k)]\\
&+\sum_{j,k}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})[\mathbf{E}_z^{n+1}(N,j,k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N,j,k+\frac{1}{2})]\\
&-\sum_{j,k}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})[\mathbf{E}_z^{n+1}(N,j,k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N,j,k+\frac{1}{2})].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\Delta\mathcal{E}_{vf}^n=\\
&\sum_{j,k}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})[\mathbf{E}_y^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_y^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})]\\
&+\sum_{j,k}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_z^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})[\mathbf{E}_y^{n+1}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_y^{n}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})]\\
&-\sum_{j,k}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})[\mathbf{E}_z^{n+1}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})]\\
&-\sum_{j,k}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})[\mathbf{E}_z^{n+1}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+\mathbf{E}_z^{n}(N+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})].
\end{aligned}
$$

Nous déduisons des calculs précédents que :

$$2\Delta\mathcal{E}_h^n=0.$$

Ce qui assure la stabilité du schéma hybride ainsi construit.

7.7 Expériences numériques

Nous proposons ici quelques résultats numériques donnés par le schéma hybride dans le cas bidimensionnel, et dans le cas simple de maillages structurés. Les différents schémas sont appliqués comme indiqué sur la figure (7.5). Nous reprenons le cas test académique de l'évolution d'un mode de résonance dans une cavité métallique, et nous effectuons quelques cas tests en les comparant aux solutions exactes. Nous simulons ici deux champs E_x et H_z. Nous pouvons constater à travers les coupes en y (figure 7.6, et figure 7.7) et à travers les courbes simulant l'évolution en temps des deux champs (figure 7.8, et figure 7.9) que les résultats sont très satisfaisants.

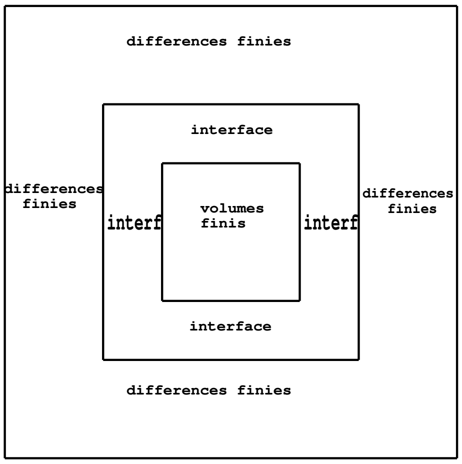


FIG. 7.5 – *Les différentes parties du maillage*

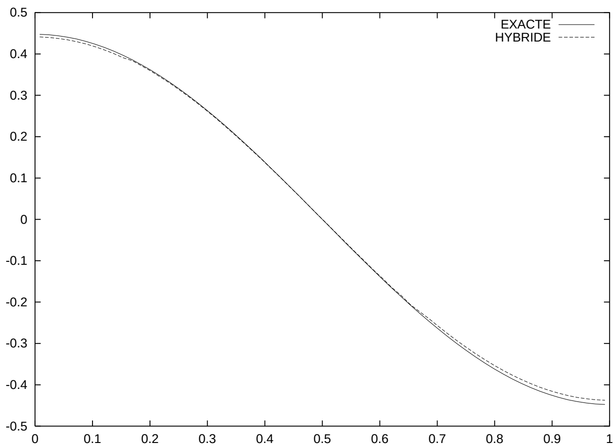


Fig. 7.6 – *Coupe en y du champ Ex*

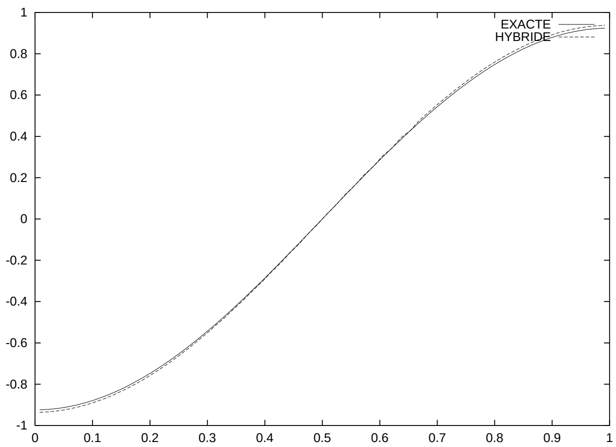


Fig. 7.7 – *Coupe en y du champ Hz*

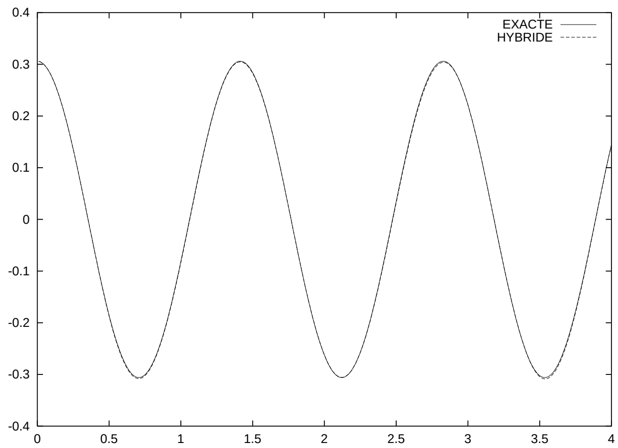


Fig. 7.8 – *Evolution en temps du champ Ex*

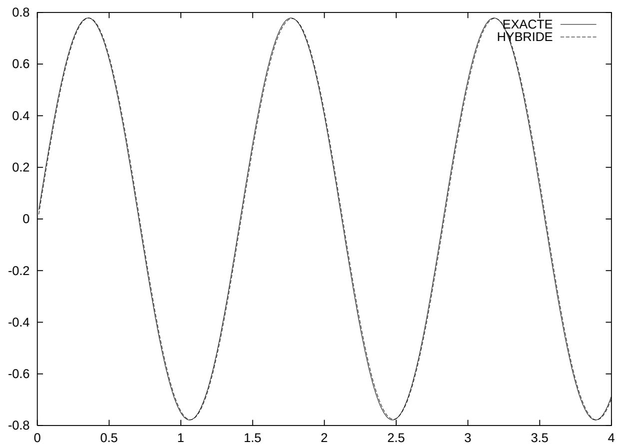


Fig. 7.9 – *Evolution en temps du champ Hz*

7.8 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode hybride combinant deux schémas temporels pour la résolution du système de Maxwell. Nous avons un schéma aux différences finies et un schéma volumes finis. La recherche d'un schéma volumes finis tel que le schéma résultant du couplage soit stable, nous a mené à construire un nouveau schéma centré en espace et qui utilise la même discrétisation en temps que le schéma aux différences (schéma saute-mouton), et les inconnues sont localisées aux centres des éléments du maillage. Ce schéma est bien adapté à la résolution du système de Maxwell dans le cas hétérogène et présente des propriétés numériques intéressantes telle que l'absence de diffusion numérique (voir [72]). Nous avons utilisé des interpolations spatiales pour obtenir les valeurs des champs à l'interface des domaines où sont appliqués les deux schémas numériques. Nous avons démontré dans ce chapitre que le schéma hybride ainsi construit est un schéma stable, et de plus il est non diffusif. Nous avons également effectué quelques cas tests de validation et les résultats numériques obtenus sont très encourageants.

Chapitre 8

Conclusion générale

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'étude de différentes méthodes numériques pour la résolution du système de Maxwell instationnaire dans des milieux hétérogènes. La plupart des schémas que nous avons considérés sont basés sur une intégration spatiale locale, et afin de respecter le caractère hétérogène du milieu de propagation des ondes et la géométrie qui pourrait être quelconque, nous avons choisi les éléments du maillage comme volumes d'intégration. Nous avons tout d'abord développé et testé une méthode de volumes finis, elle est basée sur une discrétisation de type MUSCL en espace et une intégration temporelle de type Runge-Kutta. Cette méthode permet d'obtenir des schémas d'ordre élevé et nous avons constaté qu'elle est bien adaptée pour la résolution de notre problème. Nous l'avons comparée à une autre méthode volumes finis du même type où les volumes de contrôle sont par contre des polygones centrés aux noeuds. Les différentes comparaisons ont montré que les deux méthodes se valent dans le cas de matériaux homogènes. Nous avons également adapté une méthode d'éléments finis dite Galerkin Discontinu développée initialement pour la mécanique des fluides. Cette méthode permet également d'obtenir des schémas d'ordre élevé basés sur le choix d'une base locale et des formules de quadrature. Les différents cas tests ont montré que cette méthode répondait aux attentes. En effet, nous avons retrouvé les résultats obtenus par la méthode volumes finis ou encore des résultats analytiques. Nous l'avons par ailleurs comparée à la méthode volumes finis que nous avons développée et nous avons constaté que du point de vue qualitatif les deux méthodes sont comparables. Néanmoins la différence réside dans le temps de calcul (CPU) où nous avons constaté que la méthode volumes finis est moins coûteuse que la méthode Galerkin Discontinu, mais cette dernière a l'avantage d'obtenir des résultats sur des temps longs de meilleure qualité car elle est moins diffusive. En résumé, on peut dire que sur des temps courts la méthode volumes finis est plus intéressante dans la mesure où elle donne les mêmes résultats avec un CPU plus faible, mais sur des temps longs, la méthode Galerkin Discontinu parait plus compétitive. Nous nous sommes ensuite intéressés à un autre type de méthode volumes finis, où le calcul du flux est basé sur un schéma centré et l'intégration en temps est de type saute-mouton. Nous avons établi un critère de stabilité dans le cas de maillages structurés et nous avons également effectué une analyse de la dispersion et de la diffusion numériques. Les résultats obtenus montrent que cette méthode est d'ordre deux en temps et en espace, et qu'elle n'est pas diffusive. Par contre elle présente une dispersion numérique d'ordre deux. Nous avons effectué quelques cas tests et les résultats numériques obtenus sont conformes aux résultats théoriques. Nous avons également constaté que cette méthode donne de bons résultats dans le cas de matériaux hétérogènes. Nous avons comparé cette méthode dans un premier temps à la méthode volumes finis développée au début de ces travaux dans le cas de maillages non structurés. Nous avons remarqué que les résultats restent comparables sur des temps courts, cependant vu le caractère non diffusif de la dernière méthode, elle donne des résultats plus significatifs sur des temps longs. Elle présente également l'avantage d'être moins coûteuse. Dans un deuxième temps, nous l'avons comparée à la méthode développée par K.S.Yee qui est une méthode aux différences finies. Nous avons constaté que les deux méthodes donnent des résultats de même qualité. Nous avons cependant des différences du point de vue CPU ; la méthode volumes finis est deux fois moins coûteuse, mais le schéma de Yee est moins dispersif. Nous avons comparé ces deux méthodes dans le cas de maillages structurés car la méthode des différences finies n'est pas adaptée aux cas non structurés. Nous avons vu que le moyen d'exploiter les avantages des deux méthodes volumes finis et différences finies consiste à hybrider les deux schémas. Nous avons montré par une analyse théorique que le schéma hybride obtenu du couplage est un schéma stable et non diffusif. En fait, ce schéma garde les mêmes caractéristiques numériques que les schémas utilisés pour ce couplage, et permet de bénéficier des avantages des deux méthodes. Nous avons implémenté la méthode dans le cas simple de maillages structurés et nous avons effectué quelques cas tests afin de vérifier les résultats théoriques. A travers l'analyse des différentes méthodes vues dans cette thèse, nous pouvons déduire que chacune présente des avantages et des inconvénients concernant la qualité des résultats numériques et le temps de calcul. Cependant la nouvelle méthode volumes finis présente le meilleur compromis entre la qualité des solutions et le coût de calcul. L'une des perspectives de ce travail est d'étendre cette méthode au cas tridimensionnel avec un maillage hybride structuré/non structuré, ce qui permettra l'utilisation de couches PML dans la partie structurée. Des simulations numériques tridimensionnelles permetterons de valider les résultats obtenus en 2D.

Bibliographie

[1] T. Abboud, *Etude mathématique et numérique de quelques problèmes de diffraction d'onde électromagnétique*, Thèse de doctorat 1991.

[2] H. Baruq, B. Hanouzet, *Asymptotic behavior of solutions to Maxwell's system in bounded domains with absorbing Silver-Müller's condition on the exterior boundary*, Asymptotic Analysis. 15, pp 25-40, 1997.

[3] F. Bassi, S. Rebay, *A higt-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible $Navier - Stockes$ equations.*, J.Comput.Phys., 131, 267, (1997).

[4] J.D. Benamou, B. Desprès, *A domain decomposition method for the Helmholtz equations and related optimal control problems*, J.Comp. Physics, (136:68-82), (1997).

[5] A. Bendali, *Numerical Analysis of the Exterior Boundary Value Problem for the Time-Harmonic Maxwell Equations by a Boundary Finite Element Method.* Part 1 The Continuous Problem Math. of Comp. Vol. 43, 167 (1984)

[6] A. Bendali, K. Lemrabet, *The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equations*, SIAM.J.Appl.Math.(56), (1664-1693), (1996).

[7] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland Publishing Compagny, 1978.

[8] J.P. Bérenger, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Physics, vol 114, pp. 185-200, (1994).

[9] R. Biswas, K.D. Devine, J. Flaherty, *Parallel, adaptative finite element method for conservation laws.*, Applied Numerical Mathematics, 14, 255, (1994)

[10] P. Bonnet, X. Ferrieres, F. Paladian, J. Grando, J.C. Alliot, J. Fontaine, *Antenna radiation patterns using a finite volume code*, actes de la conférence JINA 96, Nice, (nov. 1996).

[11] P. Bonnet, *Résolution des équations de Maxwell instationnaires et harmoniques par une technique de volumes fibis. Applications à des probèmes de compatibilité électromagnétique*, thèse de doctorat à l'université Blaise Pascal, (1998).

[12] F. Bouchut, F. James, *One dimensional transport equations with discontinuous coefficients*, Nonlinear Anal. 32, pp 891-933, 1998.

[13] F. Bouchut, *On the discrete conservation of the Gauss-Poisson equation of plasma Physics*, Commun. Numer. Meth. Engng. 14, no 1 (1998), 23-34.

[14] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[15] R. Carpentier, A. de la Bourdonnaye, B. Larrouturou, *On the derivation of the modified equation for the analysis of linear numerical methods*, Rapport de recherche CERMICS, no 26, (1994).

[16] R. Carpentier, *Approximation et analyse numérique d'écoulement instationnaires. Application à des instabilités tourbillonnaires*, Thèse de doctorat de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, (1995).

[17] S. Champier, *Convergence de schémas numériques type volumes finis pour la résolution d'équations hyperboliques*, Thèse de l'Université de Saint-Etienne, (1992).

[18] G. Chavent, B. Cockburn, *The local projection P^0P^1-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws*, IMA Preprint Series 341, University of minnesota, September 1987.

[19] J.P. Cioni, L. Fézoui, D. Issautier, *High-order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equations*, La Recherche Aérospatiale, Vol 5, pp. 319-328, (1994).

[20] J.P. Cioni, *Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de volumes finis*, Thèse de doctorat de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, (1995).

[21] J.P. Cioni, *Parallelisation of MAXWELL/VF and 3D simulations in electromagnetism using clusters of workstations*, rapport CERMICS No 97-85, (1997).

[22] J.P. Cioni, L. Fezoui, H. Steve, *A parallel time-domain Maxwell solver using upwind schemes and triangular meshes*, IMPACT in computing in science and engeenering, Vol 5, pp. 215-247, (1993).

[23] ———, *RCS calculations using a parallel time-domain Maxwell solver on non-structured meshes*, actes de la conférence "Approximations and numerical methods for the solution of the Maxwell equations" et du workshop "Joint US-Europe workshop on numerical methods for solving high frequency electromagnetic problems", Washington, (octobre 1993).

[24] J.P. Cioni, L. Fezoui, L. Anne, F. Poupaud, *A parallel FVTD Maxwell solver using 3D unstructured meshes*, actes de la conférence ACES 97 , Monterey (US), (à paraître, mars 1997).

[25] J.P. Cioni, M. Remaki, *Comparaison de deux méthodes de volumes finis en électromagnétisme*, rapport de recherche INRIA no 3166, mai 1997.

[26] B. Cockburn, C.W. Shu, *The Runge-Kutta local projection discontinuous P^1-discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws*, M^2AN, 25, 337, (1991).

[27] B. Cockburn, C.W. Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite elemnt method for scalar conservation laws II: General framework*, Math.Comp, 52, 411, (1989).

[28] B. Cockburn, S.Y. Lin, C.W. Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One dimensional systems.*, J.Comp.Phys, 84, 90, (1989).

[29] B. Cockburn, S. Hou, C.W. Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV:The multidimensional case*, Math.Comp, 54, 545, (1990).

[30] B. Cockburn, C.W. Shu, *The P^1-RKDG Method for Two-dimensional Euler Equations of Gas Dynamics*, ICASE Report 91-32, (1991).

[31] B. Cockburn, C.W. Shu, *The local discontinous Galerkin method for time-dependent convection diffusion systems*, SIAM.J.Numer.Anal.(to appear).

[32] B. Cockburn, C.W. Shu, *The Runge-Kutta Discontinous Galerkin Method for Conservation laws V*, Multidimensional systems. J.Comp.Phys, 141, $199-224$, (1998).

[33] B. Cockburn, C.W. Shu, *The Runge-Kutta local projection P^1-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws*, IMA Preprint Series 388, University of Minnesota, 1988.

[34] G. Cohen, P. Monk, *Gauss point mass lumping schemes for Maxwell's equations*, NMPDE Journal, (14), pp (63-88), (1998).

[35] A. De La Bourdonnaye, *High frequency approximation of integral equations modeling scattering phenomena*, Mod.Math. et Anal.Num, (28), pp (223-241), (1994).

[36] S. Depeyre, D. Issautier, *Application aux schémas volumes finis d'une méthode de pénalisation des contraintes pour le système de Maxwell*, Rapport CERMICS no 39 (1995).

[37] S. Depeyre, *Stability analysis for finite volume schemes on rectangular and triangular meshes applied to the two-dimensional Maxwell system*, rapport CERMICS No 95-40, (1995).

[38] J.A. Desideri, A. Goudjo, V. Selmin, *Third order numerical schemes for hyperbolic problems*, rapport INRIA No 607, (1987).

[39] B. Desjardins, *A few remarks on ordinary differential equations*, Comm.Partial Diff.Eq, pp 1667-1703, 1996.

[40] R.J. Diperna, P.L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent.Math. 98, pp 511-547, 1989.

[41] L.J. Durlofsky, S. Osher, B. Engquist, *Triangle based TVD scheme for hyperbolic conservation laws*, rapport ICASE No 90-10, janvier 1990.

[42] B. Engquist, A. Majda, *Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves calculation*, Comm.Pure.Appl.Math., Vol 32, pp313 − 357., (1979).

[43] R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin, *Finite Volume Methods*, Preprint no 97 − 19 LATP, Aix-Marseille, to appear in Handbook for Numerical Analysis, P.G. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland.

[44] L. Fezoui, B. Stoufflet, *A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes*, J. Comp. Phy., vol 84, pp. 174-206, (1989).

[45] A.F. Filippov, *Differential equation with discontinuous right-hand side*, A.M.S.Transl, 42, pp 199-231, 1962.

[46] G. Gimonet, J.P. Cioni, L. Fezoui, F. Poupaud, *Approximation numérique des équations de Maxwell en milieu hétérogène monodimensionnel par un solveur de Riemann exact*, rapport CERMICS No 95 − 37, (Avril 1995).

[47] E. Hecht, A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley World Student Series, (1974).

[48] F. Hermeline, *Two coupled particle-finite volume methods using Delaunay-Voronoï meshes for the approximation of Vlasov-poisson and Vlasov-Maxwell equations*, J.Comp.Phy, Vol 106, pp 1 − 18, (1993).

[49] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, seconde édition, John Wiley & Sons, New-York, (1975).

[50] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, (1976).

[51] D. Kröner, M. Rokyta, M. Wierse, *A lax mendroff type theorem for upwind finite volume schemes in 2-D*, Mathematische fakultät. University Freiburg, (1996).

[52] D. Kröner, M. Rokyta, *A-priori error estimates for upwind volume schemes in several space dimensions*,Mathematische fakultät. University Freiburg, (1996).

[53] D. Kröner, M. Rokyta, *convergence of upwind finite volume schemes for scalar conservation laws in two dimensions*, SIAM J, Nuemr, anal. vol 31, No 2, pp 324-343, (april 19994).

[54] D. Kröner, S. Noelle, M. Rokyta, *Convergence of higher order upwind finite volume schemes on unstructured grids for scalar conservation laws in several space dimensions*, Freiburg University, (1993).

[55] *Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell*, École des Ondes Inria, Inria-Rocquencourt 23-27 mars 1998.

[56] C. Johnson, J. Pitkärantå, *An analysis of the discontonuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation*, Math.Comp, 48, 1, (1986).

[57] P.D. Lax, A. Harten, B. Van Leer, *On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Revue, Vol 25, No 1, (1983).

[58] P. LeSaint, P.A. Raviart, *On a finite element method for solving the neutron transport equation, Mathematical aspects of finite element in partial diffenrtial equations*, (C.de Boor, Ed.), Academic Press, 89, (1974).

[59] R. Lohner, J. Ambrosiano, *A finite element solver for the Maxwell equation, GAMNI-SMAI conference on numerical methods for the solution of Maxwell equation*, Paris, (1989).

[60] Niel.k. Madsen, Richard.W. Ziolkowsky, *A Three-Dimensional Modified Finite Volume Technique For Maxwell's Equations*, Electromagnetics, vol 10, no $1-2$, pp $147-161$, 1990.

[61] J.C. Nedelec, *Ondes acoustiques et électromagnétiques, Equations intégrales*, Cours de DEA, édition 1996

[62] A. Oumensour., *Conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Maxwell en dimension trois*, Institut de Mathématiques U.S.T.H.B., Alger, (1989).

[63] L. Paquet, *Problèmes mixtes pour le système de Maxwell*, Ann.Fac.Sc.Toulouse, Vol IV, pp 103-141, 1982.

[64] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Lecture Note Univ. of Maryland, (1974).

[65] B. Perthame, Y. Qiu, B. Stoufflet, *Sur la convergence des schémas "Fluctuations-splitting" pour l'advection et leur utilisation en dynamique des gaz*, C. R. Acad. Aci., Paris, Série $I319$, No 3, pp $283-288$, (1994).

[66] T. Peterson, *A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation*, SIAM J, Numer.Anal, 28, 133, (1991).

[67] F. Poupaud, M. Rascle, *Measure solutions to the linear multi-dimensional transport equation with non-smooth coefficients*, Comm.Partial Diff.Eq. 22, pp 337-358, 1997.

[68] W.H. Reed, T.R. Hill, *Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation*, Los Almost Scientific Laboratory Report LA-UR-$73-479$, (1973).

[69] M. Remaki, L. Fézoui, *Schéma de Godunov pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*, 29^{eme} Congrès National D'analyse Numérique, CANum'97.

[70] M. Remaki, L. Fézoui, F. Poupaud, *Un nouveau schéma de type volumes finis appliqué aux équations de Maxwell en milieu hétérogène*, rapport de recherche INRIA no 3351, janvier 1998.

[71] M. Remaki, L. Fezoui, *Une méthode de Galerkin Discontinu pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogènes*, rapport de recherche INRIA no 3501, septembre 1998.

[72] M. Remaki, *A New Finite Volume Scheme for Solving Maxwell System*, INRIA report 3725, (1999).

[73] G.R. Richer, *An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method*, Math.Comp, 50, 75, (1988).

[74] Roger F. Harrington, *Time-Harmonic electromagnetic filds*, (1961).

[75] D. Serre, *Systèmes de lois de consevation.*, (1996).

[76] V. Shankar, W.F. Hall, A.H. Mohammadian, *A time-domain differential solver for electromagnetic scattering problem, Proceeding on the IEEE*, Vol 77, pp. 709-721, No 5, (1989).

[77] A. Taflove, M.E. Brodwin, *Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering problems Using the Time-Dependent maxwell's equations*, IEEETrans.Antenna Propagat, vol.MTT-23, no. 8, pp. 623-630, August (1975).

[78] H. Tanabe, *Equations of evolution*, Pitman, (1979).

[79] B. Van Leer, *Towards the ultimate conservative difference schemes V: a second order sequel to Godunov's method*, J. Comp. Phy., Vol 32, (1979).

[80] J.P. Vila, P. Villedieu, *Convergence de la méthode des volumes finis pour les systèmes de Friedrichs*, C.R.Acad.Sci.Paris, t. 325, série I, p. 671-676, (1997).

[81] R.F. Warming, F. Hyett, *The midified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods*, J.Comp.Phys., 14, (2), p.159, (1974).

[82] M. Wierse, *Higher order upwind schemes on unstructured grids for the compressible euler equations in timedependent geometries in 3D*, PhD thesis, university Freiburg,1994.

[83] K.S. Yee, *Numerical solution of initial boundary value problem in isotropic media*, IEEE Trans.Antenna Propagat, vol.AP-14, no. 3, pp. 302-307, May (1966).

[84] K.S. Yee, J.S. Chen, *Conformal Finite Difference Time Domain and Finite Time Domain*, IEEE (1994).

[85] K.S. Yee, J.S. Chen, *Impedance Boundary Condition Simulation in the FDTD/FVTD Hybrid*, IEEE (1997).

[86] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, 1965.

[87] A. Zebic, *Calcul d'ondes diffractées par des obstacles revêtus de couches minces de matériaux absorbants*, Rapport de recherche INRIA n^o2091, (1993).