Table des matières

Introduction

0.1 Présentation générale des travaux

Ce travail a consisté essentiellement en une étude théorique des solutions périodiques des systèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell avec conditions aux limites périodiques en temps ainsi qu'au développement d'une méthode de contrôle pour la résolution numérique de ces systèmes. Cette méthode est basée sur l'introduction de l'absorption limite, chaque équation de Maxwell étant perturbée, afin de stabiliser et d'accélerer la convergence des solutions calculées vers les états périodiques.
L'approximation numérique du système de Maxwell repose sur une formulation mixte Éléments Finis/Volumes Finis basée sur des schémas décentrés en utilisant la méthode M.U.S.C.L.[44]. Cette méthode est issue d'une technique largement utilisée en mécanique des fluides et développée au CERMICS et à l'INRIA Sophia-Antipolis [24], [28]. L'avantage principal des schémas proposés est la construction immédiate de schémas explicites du troisième ordre à la fois en temps et en espace pour des maillages non structurés de type éléments finis. D'autre part, les lois de Gauss électrique et magnétique n'ont pas besoin d'être incluses dans le modèle numérique, compte tenu du fait qu'elles sont conservées par les schémas que nous utilisons.
Pour la résolution de l'équation de Vlasov, nous avons procédé à la mise en oeuvre de la méthode particulaire déterministe [38].
La présente étude est composée de sept chapitres. Le premier chapitre est consacré à la présentation générale des équations de l'électromagnétisme. La formulation conservative et le caractère hyperbolique du système de Maxwell y sont présentés ainsi que les conditions aux limites imposées au bord du domaine de calcul (conditions métalliques et conditions absorbantes). L'approximation numérique des équations de Maxwell est décrite dans le deuxième chapitre. Il s'agit d'un schéma explicite de type volumes finis centré aux noeuds (le β-γ schéma). Les conditions limites sont prises en compte faiblement et le traitement numérique de ces conditions est présenté dans le même chapitre (métal parfait, décentrage

à l'infini d'ordre un, condition de Silver-Müller). Pour la discrétisation temporelle du système de Maxwell on utilise le schéma explicite de Runge-Kutta à trois pas. Dans le troisième chapitre on s'intéresse à la stabilité des β-γ schémas. Une étude théorique est faite dans le cadre de l'équation d'advection linéaire 1D et 2D. Cette étude est basée sur la technique des équations équivalentes qui a été introduite par Warming et Hyett [46]. Ensuite cette étude a été étendue aux équations de Maxwell.

La modélisation numérique du transport de particules chargées repose sur les équations de Maxwell couplées à un modèle de transport de particules. Un modèle géréral est donné par le système de Vlasov-Maxwell :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}(E + v \wedge (\mu_0 H)) \cdot \nabla_v f = 0, \qquad (t,x,v) \in I\!R_t \times I\!R_x^d \times I\!R_v^d, \tag{1}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, & (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \\[2ex] \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\vec{j}, & (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \end{array} \right. \tag{2}$$

où le couplage est donné par la densité de courant :

$$\vec{j}(t,x) = \int_v \vec{v} f(t,x,v) dv, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d. \tag{3}$$

Ces équations sont complétées par des conditions aux limites. Soit Ω un ouvert borné C^1 de $I\!R_x^d$ représentant la géométrie du dispositif et Σ^- l'ensemble des positions dans l'espace des phases des particules entrantes :

$$\Sigma^- = \{(x,v) \in \partial\Omega \times I\!R_v^d \mid v \cdot \nu(x) < 0\}, \tag{4}$$

où $\nu(x)$ est la normale extérieure à Ω en $x \in \partial\Omega$. La condition limite pour l'équation de Vlasov est donnée par :

$$f = g, \qquad (t,x,v) \in I\!R_t \times \Sigma^-, \tag{5}$$

où g est la distribution des particules entrantes. Nous imposons la condition de radiation de Silver-Müller pour le champ électromagnétique :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) = h(t,x) \qquad (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \tag{6}$$

où (E,H) est le champ électromagnétique, ε est la permittivité électrique et μ est la perméabilité magnétique. Si le champ magnétique est négligé ($H = 0$), le champ électrique s'écrit comme un champ gradient $E = \nabla_x \varphi$ où le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta_x \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int_{I\!R_v^d} f(t,x,v)dv, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d. \tag{7}$$

et la condition de Dirichlet :

$$\varphi = \varphi_0, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times \partial\Omega. \tag{8}$$

La modélisation de dispositifs tels que les tubes à décharge ou les diodes à vide soumises à un potentiel harmonique repose sur les équations de Vlasov-Maxwell ou de Vlasov-Poisson en régime périodique. Le but de ce travail a été d'étudier théoriquement et numériquement ces régimes. L'existence et l'unicité de la solution faible périodique pour le système de Vlasov-Poisson ont été étudiées dans le quatrième chapitre. Dans un premier temps on rappelle les notions de solution faible périodique et de solution par caractéristiques périodique pour ce type de problème. Un des points clé de la démonstration de ces résultats est l'estimation du temps de vie des particules dans le domaine de calcul Ω, qui est donnée par le lemme suivant :

Lemme 0.1.1 *Supposons que le champ électrique et la donnée au bord vérifient :*

$$\|E\|_{L^\infty(I\!R_t \times \Omega)} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{|\, v_0 \,|^2}{\delta(\Omega)}, \tag{9}$$

$$E \in (L^\infty(I\!R_t; W^{1,\infty}(\Omega)))^d, \tag{10}$$

$$supp(g) \subset \{(t,x,v) \mid t \in I\!R_t, x \in \partial\Omega, v \cdot \nu(x) < 0, v_0 \leq |v| \leq v_1\}, \tag{11}$$

alors le temps de vie dans Ω des particules issues du support de g est fini :

$$\tau_o(x,v,t) - \tau_i(x,v,t) \leq 2 \cdot \frac{\delta(\Omega)}{v_0}, \ \forall (t,x,v) \in supp(g). \tag{12}$$

Dans le chapitre suivant nous avons présenté l'existence de la solution faible périodique du système de Vlasov-Maxwell en une dimension d'espace. Les cas classique (non-relativiste) et relativiste ont été présentés. Comme dans le chapitre précédent on peut montrer une estimation uniforme du temps de vie des particules et le résultat principal d'existence est obtenu en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Dans ce cas nous imposons une condition supplémentaire qui est donnée par :

$$\int_0^T dt \int_{v_x>0} \int_{v_y} v_x g_0(t, v_x, v_y) dv + \int_0^T dt \int_{v_x<0} \int_{v_y} v_x g_L(t, v_x, v_y) dv = 0, \tag{13}$$

où g_0, g_L sont les distributions des particules entrantes :

$$f(t, 0, v_x, v_y) = g_0(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \ v_x > 0, v_y \in I\!R_v, \tag{14}$$

$$f(t, L, v_x, v_y) = g_L(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \ v_x < 0, v_y \in I\!R_v. \tag{15}$$

Dans le sixième chapitre on présente l'approximation numérique de l'équation de Vlasov par la méthode particulaire [38] ainsi que le couplage avec le schéma de la discrétisation des équations de Maxwell. Des simulations numériques ont été faites en illustrant les oscillations d'un plasma. Des comparaisons ont été faites entre les cas collisionnel et non-collisionnel.

Dans le dernier chapitre nous proposons une méthode inédite pour la résolution numérique du système périodique de Vlasov-Maxwell. Dans un premier temps on propose cette méthode dans le cadre d'un modèle simple d'Équations Différentielles Ordinaires (EDO) et une analyse de la vitesse de convergence sera présentée. L'idée de cette méthode repose sur l'introduction d'un terme d'absorption $\lambda(t)$:

$$\begin{cases} \lambda(t)\vec{H} + \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, \\ \\ \lambda(t)\vec{E} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Cette fonction sera une nouvelle inconnue du système de Vlasov-Maxwell et donc pour décrire son évolution en fonction du temps, une autre équation sera introduite. Afin de converger vers les solutions périodiques du système initial ($\lambda = 0$), l'équation qui contrôle la variation du paramètre $\lambda(t)$ devra assurer une décroissance vers zéro quand t tend vers l'infini. Ce comportement est obtenu en introduisant une équation de la forme :

$$\frac{d\lambda}{dt} + \chi_{[-\eta,\eta]}(\mathcal{C}(H, E)) \cdot \lambda(t) = 0, \ t > 0, \tag{17}$$

où η est un petit paramètre de précision et $\mathcal{C}$ est un critère de périodicité qui peut être calculer de la manière suivante :

$$\mathcal{C}(Q(nT)) = \frac{\int_\Omega |Q(nT, x) - Q((n-1)T, x)|^2 \, dx}{\int_\Omega Q^2((n-1)T, x) dx}, \ n \geq 1.$$

L'efficacité de la méthode est montrée à travers les nombreux cas test présentés.

Chapitre 1

Équations de l'électromagnétisme

1.1 Équations de Maxwell

Le concept d'ondes électromagnétiques repose essentiellement sur les équations de Maxwell. Elles déterminent les champs de vecteurs $\vec{E}(V/m), \vec{H}(A/m), \vec{D}(C/m^2), \vec{B}(T)$ dits champ électrique, champ magnétique, induction électrique et induction magnétique, une fois donnée la densité de courant j. Dans le Système International d'Unités (mètre, kilogramme, seconde, ampère, kelvin, mole, candela) ces grandeurs physiques sont mesurés en volt par mètre, ampère par mètre, coulomb par mètre carré et tesla. On rappelle maintenant les définitions des unités dérivées utilisées. Le coulomb représente la quantité d'électricité qui traverse une section d'un fil parcouru par un courant constant d'intensité un ampère pendant une seconde. L'unité SI de différence de potentiel, appelée volt, est la différence de potentiel entre deux points tels que, pendant le transport d'un coulomb de l'un à l'autre, la force électrique accomplit un travail d'un joule ($1J = 1kg \cdot (m/s)^2$). L'unité d'induction magnétique, appelée tesla, est définie par la relation suivante :

$$1T = \frac{1kg}{1C \cdot 1s}.$$

Ces quatre champs, fonctions à valeurs vectorielles réelles de la position et du temps, vérifient :

(i) la loi de Faraday qui lie la force électromotrice le long d'une courbe fermée C à la variation de flux d'induction magnétique à travers une surface ouverte A reposant sur la courbe C :

$$\oint_C \vec{E} \cdot dl = -\int\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dS; \tag{1.1}$$

(ii) la loi de Maxwell-Ampère, issue dans un premier temps de la loi d'Ampère qui relie la circulation du champ magnétique $\vec{H}$ le long d'une courbe fermée C à l'intensité du courant $\vec{i}$ dans cette boucle défini par :

$$\vec{i} = \int\int_A \vec{j} \cdot dS, \tag{1.2}$$

où $\vec{j}$ est la densité de courant par unité de surface. Cette loi a été corrigée par Maxwell, puisque le mouvement de charges n'est pas la seule source de champ magnétique. L'expression correcte s'écrit :

$$\oint_C \vec{H} \cdot dl = -\int\int_A (\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}) \cdot dS; \tag{1.3}$$

(iii) la loi de Gauss électrique qui relie le flux de l'induction électrique à travers une surface fermée A aux charges se trouvant à l'intérieur de cette surface :

$$\int\int_A \vec{D} \cdot dS = \int\int\int_V \rho dv, \tag{1.4}$$

où V est le volume délimité par la surface A est ρ une densité de charges dans le volume V;

(iv) la loi de Gauss magnétique qui postule l'abscence de charge magnétique :

$$\int\int_A \vec{B} \cdot dS = 0, \tag{1.5}$$

où A est une surface fermée.

En appliquant le théorème de la divergence de Gauss et le théorème de Stokes, on obtient les expressions locales de ces lois, appelées équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\vec{j}, \\ \\ div(\vec{D}) = \rho\,, \\ div(\vec{B}) = 0. \end{cases}$$

Les densités de charge ρ et de courant $\vec{j}$ sont reliées par la loi de conservation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0. \tag{1.6}$$

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas considéré les caractéristiques du milieu de propagation. Pour des matériaux homogènes linéaires, isotropes, diélectriques, les champs $\vec{D}$ et $\vec{E}$ sont proportionnels :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \tag{1.7}$$

Pour des matériaux simples, les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont parallèles et proportionnels :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \tag{1.8}$$

Pour des matériaux hétérogènes isotropes, la permittivité électrique ε et la perméabilité magnétique μ dépendent de la variable d'espace et sont des fonctions scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon(\vec{x})\, \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu(\vec{x})\, \vec{H}, \end{array} \right. \tag{1.9}$$

Pour la modélisation de matériaux anisotropes les fonctions scalaires sont remplacées par des tenseurs. À l'aide des lois de comportement (1.9), on peut écrire les équations de Maxwell en variables $(\vec{E}, \vec{H})$ de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(\vec{x})\, \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, \\[2ex] \varepsilon(\vec{x})\, \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\vec{\jmath}, \\[2ex] div(\varepsilon(\vec{x})\, \vec{E}) = \rho\,, \\ div(\mu(\vec{x})\, \vec{H}) = 0, \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Notons que les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} div(\varepsilon(\vec{x})\, \vec{E}) = div(\vec{D}) = \rho, \\[2ex] div(\mu(\vec{x})\, \vec{H}) = div(\vec{B}) = 0, \end{array} \right.$$

sont redondantes dans le modèle continu. On peut ainsi ne considérer que les deux premières équations de (1.10).

1.2 Adimensionnement

On peut exprimer la permittivité diélectrique $\varepsilon(\vec{x})$ et la perméabilité magnétique $\mu(\vec{x})$ en fonction des caractéristiques du vide ε_0 et μ_0 de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon(\vec{x}) = \varepsilon_0\, \varepsilon_r(\vec{x}) \\ \mu(\vec{x}) = \mu_0\, \mu_r(\vec{x}) \end{cases}$$

où ε_r et μ_r sont des valeurs adimensionnelles et ε_0 et μ_0 ont pour valeurs en unités S.I. :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}.10^{-9} \;\; F/m \\ \\ \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \;\; H/m \end{cases}$$

De la même façon, la vitesse de la lumière dans le milieu considéré, donnée par $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ s'écrit :

$$c = c_0 c_r,$$

où $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3.10^8 m/s$ est la vitesse de la lumière dans le vide et $c_r = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$ est la vitesse relative de la lumière. Le système (1.10) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \dfrac{1}{\mu_0} rot\left(\dfrac{\vec{E}}{\mu_r}\right) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \dfrac{1}{\varepsilon_0} rot\left(\dfrac{\vec{H}}{\varepsilon_r}\right) = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{\vec{\jmath}}{\varepsilon_r} \end{cases} \tag{1.11}$$

On note par $Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,\Omega$ l'impédance caractéristique du vide et on fait le changement de fonction inconnue $\tilde{H} = Z_0\,\vec{H}$ et le changement de variable $\tau = c_0 t$. Le système (1.10) s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} + rot\left(\dfrac{\vec{E}}{\mu_r}\right) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} - rot\left(\dfrac{\tilde{H}}{\varepsilon_r}\right) = -\, Z_0\,\dfrac{\vec{\jmath}}{\varepsilon_r} \end{cases}$$

Dans cette formulation, le nouveau temps τ est en mètre (m), $\vec{E}$ et $\tilde{H}$ sont en V/m, $Z_0\vec{\jmath}$ est en V/m^2 et ε_r, μ_r sont sans dimension. Pour la suite on pose $\vec{H} = \tilde{H}$, $\vec{\jmath} = Z_0\,\vec{\jmath}$, $t = \tau$ et on s'intéressera essentiellement à des propagations d'ondes dans le vide ($\varepsilon_r = \mu_r = 1$). On obtient finalement le système :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0 \\ &\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\vec{\jmath} \end{aligned} \right. \tag{1.12}$$

1.3 Formulation conservative et hyperbolicité

Afin de résoudre numériquement le système de Maxwell par des méthodes de volumes finis, on considère la forme conservative :

$$Q_t + F_1(Q)_x + F_2(Q)_y + F_3(Q)_z = -J \tag{1.13}$$

avec :

$$Q = {}^t(H_x, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z)$$

$$F_1(Q) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -E_z \\ E_y \\ 0 \\ H_z \\ -H_y \end{array} \right\} \quad , \quad F_2(Q) = \left\{ \begin{array}{c} E_z \\ 0 \\ -E_x \\ -H_z \\ 0 \\ H_x \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad F_3(Q) = \left\{ \begin{array}{c} -E_y \\ E_x \\ 0 \\ H_y \\ -H_x \\ 0 \end{array} \right\}.$$

et :

$$J = {}^t(0, 0, 0, j_x, j_y, j_z).$$

Le système (1.13) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$Q_t + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(Q) = -J \tag{1.14}$$

avec $\mathbb{F}(Q) = (F_1(Q), F_2(Q), F_3(Q))$. Soit une combinaison linéaire de flux :

$$\mathcal{F}(Q, \eta) = \vec{\eta}\,.\,\mathbb{F}(Q)$$

où $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ est un vecteur non nul quelconque de $I\!R^3$. La matrice jacobienne $\mathcal{A}$ du système est définie par :

$$\mathcal{A}(Q, \eta) = \vec{\eta} \,.\, \mathbf{F}'(Q) = \sum_{i=1}^{3} \eta_i \frac{\partial}{\partial Q} F_i(Q).$$

Du fait de la linéarité du système, $\mathcal{A}$ ne dépend pas de la variable Q. La jacobienne $\mathcal{A}$ a trois valeurs propres réelles de multiplicité double qui sont données par :

$$\lambda_1 = ||\,\vec{\eta}\,||, \quad \lambda_2 = -||\,\vec{\eta}\,|| \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 0 \tag{1.15}$$

De plus, une base de $I\!R^6$ constituée de vecteurs propres de $\mathcal{A}$ peut être construite ; $\mathcal{A}$ est donc diagonalisable et le système de Maxwell est hyperbolique pour tout vecteur $\vec{\eta}$ non nul de $I\!R^3$. Donc le système de Maxwell est *hyperbolique*.

1.4 Conditions aux limites et problème de diffraction

Conditions aux limites :

Tout au long de cette étude les parois métalliques seront assimilées au modèle du conducteur parfait. Ainsi, la conductivité est supposée infinie et les charges se portent instantanément à la surface du conducteur . Nous considérons que le champ électromagnétique est nul à l'intérieur du métal. Soient $\vec{E}_s$ et $\vec{H}_s$ les champs électrique et magnétique sur la surface extérieure du métal. La condition aux limites sur la surface du conducteur est obtenue à partir des relations de passage à travers cette surface [34] :

$$\begin{cases} \vec{n} \wedge [\vec{E}] = 0, \\ \vec{n} \wedge [\vec{H}] = \jmath_s, \\ \vec{n} \cdot [\vec{D}] = \rho_s, \\ \vec{n} \cdot [\vec{B}] = 0, \end{cases}$$

où ρ_s et $\jmath_s$ sont des densités de charge et de courant superficielles. On en déduit en particulier qu'à la surface d'un conducteur parfait le champ électrique est normal et le champ magnétique est tangent :

$$\vec{n} \wedge \vec{E}_s = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \vec{H}_s = 0.$$

D'autre part, le champ magnétique peut se mesurer directement à partir de la densité de courants superficiels :

$$\vec{n} \wedge \vec{H}_s = \vec{\jmath}_s.$$

Dans des problèmes de diffraction dans un domaine infini, nous devons, numériquement, nous restreindre à un domaine de calcul borné. Plusieurs types de conditions aux limites sur la frontière fictive Γ_∞ ont été proposés. Nous rappelons ici une condition aux limites possible à imposer sur la frontière infinie Γ_∞ du domaine de calcul, la condition absorbante d'ordre un de Silver-Müller qui s'écrit en champ total :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) = \vec{n} \wedge \vec{E}^{inc} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}^{inc}) \ , \qquad (1.16)$$

où $(\vec{E}^{inc}, \vec{H}^{inc})$ représente le champ incident.

Problème de diffraction:

Nous nous sommes intéressés aux problèmes de diffraction d'onde par un obstacle borné de $I\!R^p$ $(p = 2, 3)$ de frontière Σ, parfaitement conducteur. Le champ total peut se decomposer en un champ incident (donnée du problème, connu analytiquement) et en une perturbation de l'onde incidente, due à la présence de l'obstacle, le champ diffracté :

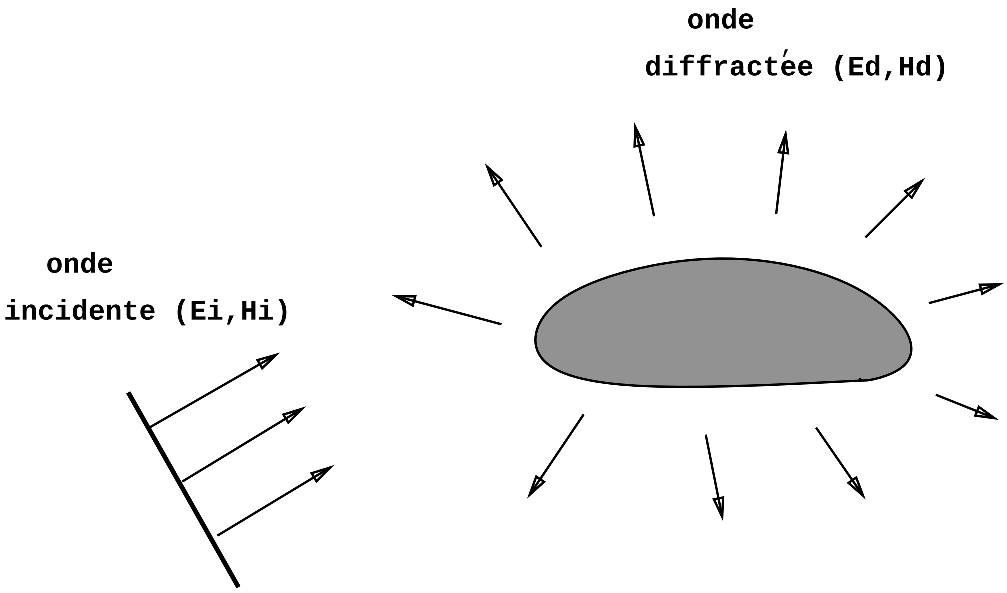


FIG. 1.1: *Diffraction par un obstacle.*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \vec{E} & = & \vec{E}^d + \vec{E}^{inc} \ , \\ \vec{H} & = & \vec{H}^d + \vec{H}^{inc} \ . \end{array} \right.$$

Compte tenu de la linéarité du sytème de Maxwell on réécrit les équations en fonction du champ diffracté ${}^t(\vec{E}^d, \vec{H}^d)$, sachant que les équations de Maxwell (1.13) sont vérifiées par le champ total :

$$Q^d_t + F_1(Q^d)_x + F_2(Q^d)_y + F_3(Q^d)_z = S^{inc} - J, \qquad (1.17)$$

avec $S^{inc} = -Q_t^{inc} - F_1(Q^{inc})_x - F_2(Q^{inc})_y - F_3(Q^{inc})_z$. La condition aux limites sur un métal parfaitement conducteur s'écrit alors :

$$\vec{n} \wedge \vec{E}^d = -\vec{n} \wedge \vec{E}^{inc} .$$

Sur la frontière absorbante la condition aux limites de Silver-Müller en champ diffracté s'écrit :

$$\vec{n} \wedge \vec{E}^d + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}^d) = 0 . \tag{1.18}$$

1.5 Polarisation TE-TM

En dimension deux d'espace, les équations de Maxwell peuvent être découplées en deux systèmes de trois équations. Nous avons choisi la direction $\vec{e}_z$ comme direction privilégiée et le champ électromagnétique ne dépend que des deux variables d'espace x et y. L'onde est supposée se propager uniquement dans un plan perpendiculaire à $\vec{e}_z$, $\vec{k} \cdot \vec{e}_z = 0$, où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde. Pour les ondes planes il reste à définir la polarisation de l'onde qui précise la direction de l'un des champs de vecteurs (les champs électrique et magnétique restent orthogonaux entre eux dans un même plan perpendiculaire au vecteur d'onde $\vec{k}$). Les calculs seront faits uniquement dans deux directions (appelées polarisations Transverse Électrique TE et Transverse Magnétique TM). Ces deux systèmes indépendants peuvent s'écrire sous la formulation bidimensionnelle conservative suivante :

$$Q_t + F(Q)_x + G(Q)_y = J \tag{1.19}$$

avec :

$$Q = \left\{ \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} H_x \\ H_y \\ E_z \end{array} \right\} \quad \text{(T.M.)} \\ \\ \left\{ \begin{array}{c} -E_x \\ -E_y \\ H_z \end{array} \right\} \quad \text{(T.E.)} \end{array} \right.$$

$$F(Q) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -Q_3 \\ -Q_2 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad G(Q) = \left\{ \begin{array}{c} Q_3 \\ 0 \\ Q_1 \end{array} \right\}$$

Enfin :

$$J = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -j_z \end{array} \right\} \quad \text{(T.M.)} \\ \\ \left\{ \begin{array}{c} j_x \\ j_y \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{(T.E.)} \end{array} \right.$$

Le caractère hyperbolique de ces deux sytèmes de Maxwell en deux dimensions d'espace se montre de la même façon que pour le système écrit en trois dimensions. La matrice jacobienne devient :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_2 \\ 0 & 0 & -\eta_1 \\ \eta_2 & -\eta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres du jacobien $\mathcal{A}$, au nombre de trois et maintenant distinctes restent identiques à celles du système complet (cf §1.3).

Chapitre 2

Schémas en volumes finis

2.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une méthode de volumes finis pour des maillages non structurés de type éléments finis. Cette méthode repose sur une formulation faible des équations de Maxwell. Toutes les équations sont vérifiées de façon faible. On considère le problème de Cauchy du système de Maxwell, auquel on ajoute des conditions aux limites qui seront pris en compte faiblement. Nous nous sommes intéressé dans notre étude aux schémas décentrés hautement précis en temps et en espace. On utilisera un schéma d'ordre trois à la fois en temps et en espace. Ces schémas permettent de traiter des géométries arbitraires complexes et sont bien adaptés à la résolution des équations de Maxwell du fait de l'hyperbolicité et du caractère conservatif de ces équations. Des schémas centrés, moins dissipatifs que les schémas décentrés peuvent être utilisés. Le principal désavantage des schémas centrés est leur manque de stabilité numérique. D'autre part, ces schémas sont généralement d'ordre deux à la fois en temps et en espace ce qui est insuffisant pour certains dispositifs actuels.
Nous décrivons dans la section suivante la méthode mixte volumes finis/éléments finis appliquée à la résolution du système de Maxwell en milieu homogène. Nous ne rappelons ici que brièvement les resultats principaux. Pour plus de détails, on pourra se référer à [24], [28].

2.2 Formulation volumes finis

Soit $\mathcal{T}_h$ une discrétisation par éléments finis linéaires de Ω_h, l'approximation polygonale d'un domaine de calcul Ω. La discrétisation est effectuée à l'aide de triangles en dimension deux d'espace tandis qu'en dimension trois on utilise des tétraèdres. Autour de chaque noeud S_i est associée une cellule C_i, obtenue en joignant le milieu des arêtes issues de S_i au centre de gravité des éléments considérés (figures 2.1 et 2.2).

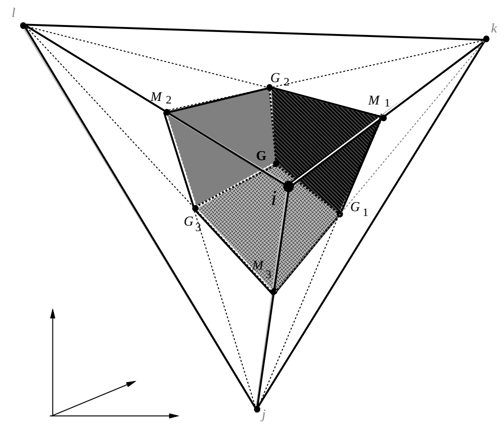
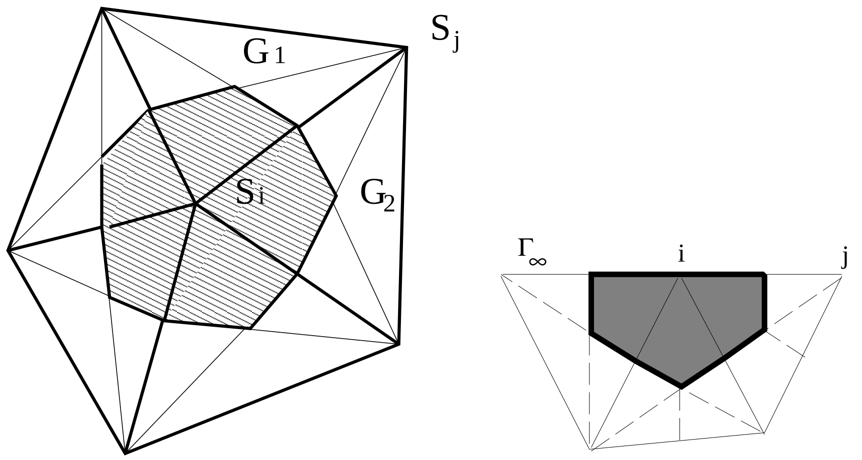


FIG. 2.1: *Cellule d'intégration C_i en 3D*



Noeud intérieur S_i Noeud S_i du bord

FIG. 2.2: *Cellules d'intégration C_i en 2D*

L'union de toutes les cellules C_i forme une nouvelle partition de Ω_h :

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{ns} C_i$$

On considère le problème de Cauchy et aux limites suivant, basé sur la formulation adimensionnée (1.14) du système de Maxwell :

$$\begin{cases} Q_t + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(Q) = -J & (\vec{x},t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \\ Q(\vec{x},0) = Q_0(\vec{x}) & \vec{x} \in \Omega \\ \\ \vec{n} \wedge \vec{E} = -\vec{n} \wedge \vec{E}^{inc} & (\vec{x},t) \in \Gamma_b \times \mathbb{R}^+ \\ \\ \vec{n} \wedge \vec{E} = -\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) & (\vec{x},t) \in \Gamma_\infty \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{2.1}$$

où Γ_b est la frontière métallique parfaitement conductrice et Γ_∞ est la frontière artificielle. Les formules de $\mathbb{F}(Q) = (F_1(Q), F_2(Q), F_3(Q))$ ont été données dans le paragraphe 1.3. On suppose de plus que la condition initiale Q_0 vérifie les lois de Gauss électrique (1.4) et magnétique (1.5). Notons $(Q_t)_i$, J_i les valeurs moyennes de Q_t et J sur la cellule C_i. Par intégration sur le volume de contrôle C_i, on obtient :

$$Volume(C_i)\,(Q_t)_i \;+\; \int_{C_i} \vec{\nabla}.\mathbb{F}(Q)\,dx = \;-Volume(C_i)\,J_i \tag{2.2}$$

En utilisant la formule de Green, nous déduisons :

$$\begin{aligned} Volume(C_i)\,(Q_\tau)_i \;\; = \;\; & -\sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \mathbb{F}(Q).\vec{\nu}_{ij}\,d\sigma \\ & -\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \mathbb{F}(Q).\vec{n}_{ib}\,d\sigma \\ & -\int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \mathbb{F}(Q).\vec{n}_{i\infty}\,d\sigma \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $\vec{\nu}_{ij}$ est la normale extérieure à la cellule C_i à l'interface ∂C_{ij} entre deux cellules C_i et C_j, $K(i)$ l'ensemble des noeuds voisins d'un sommet i. Les normales extérieures unitaires aux bord du domaine sont notées $\vec{n}_{ib}$ pour la frontière Γ_b et $\vec{n}_{i\infty}$ pour Γ_∞.

2.3 Calcul des flux numériques internes

2.3.1 Schéma décentré d'ordre un

Nous allons présenter la façon dont nous avons calculé numériquement les flux internes $\displaystyle\int_{\partial C_{ij}} \mathbb{F}(Q).\vec{\nu}_{ij}\, d\sigma = \Phi_{ij}$. La fonction de flux numérique est donnée par :

$$\boldsymbol{\Phi_{ij}} = \mathbb{F}_{ij}.\vec{\eta}_{ij},$$

où $\vec{\eta}_{ij} = {}^t(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \displaystyle\int_{\partial C_{ij}} \vec{\nu}_{ij}\, d\sigma$ et $\mathbb{F}_{ij}$ est une approximation de $\mathbb{F}(Q)$ sur l'interface ∂C_{ij}.

La fonction de flux numérique peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi_{ij}} = \boldsymbol{\Phi}(Q_i, Q_j, \vec{\eta}_{ij}) = \frac{\mathcal{F}(Q_i, \vec{\eta}_{ij}) + \mathcal{F}(Q_j, \vec{\eta}_{ij})}{2} - \frac{\gamma}{2} \mid \mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij}) \mid (Q_j - Q_i), \tag{2.4}$$

où $\mathcal{F}(Q, \vec{\eta}_{ij}) = \eta_1 F_1(Q) + \eta_2 F_2(Q) + \eta_3 F_3(Q)$ est une combinaison linéaire de flux, $\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})$ est la matrice jacobienne du système (voir §1.3) et $|\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})|$ est la valeur absolue de la matrice symétrique $\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})$ (cf. [17]), donnée par :

$$|\mathcal{A}(\vec{\eta})| = \frac{1}{|\eta|} \begin{pmatrix} \eta_2^2 & -\eta_1\eta_2 & 0 \\ -\eta_1\eta_2 & \eta_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas des schémas décentrés classiques, le paramètre γ est fixé à un. Ce paramètre nous permettra de contrôler la diffusion numérique. Ce sera l'objet du chapitre 3.

En tenant compte du fait que $\mathcal{F}(Q, \vec{\eta}_{ij}) = \mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})Q$, le flux numérique peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi_{ij}} &= \boldsymbol{\Phi}(Q_i, Q_j, \vec{\eta}_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{A}^+(\vec{\eta}_{ij})[(1+\gamma)Q_i + (1-\gamma)Q_j] + \mathcal{A}^-(\vec{\eta}_{ij})[(1-\gamma)Q_i + (1+\gamma)Q_j] \right\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $\mathcal{A}^+(\vec{\eta}_{ij})$ (resp. $\mathcal{A}^-(\vec{\eta}_{ij})$) represent la partie positive (resp. négative) de la matrice symétrique $\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})$.

Remarque 2.3.1 *: Pour γ=1, on retrouve la décomposition de flux de Steger-Warming [35] :* $\boldsymbol{\Phi_{ij}} = \mathcal{A}^+ Q_i + \mathcal{A}^- Q_j$

2.3.2 Approximation d'ordre supérieur

Des schémas d'une meilleure précision peuvent être obtenus en définissant de nouvelles valeurs Q_{ij} et Q_{ji} aux interfaces des cellules, sans modifier la fonction de flux numérique Φ_{ij} donnée par (2.4), en utilisant l'extention de la méthode MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) de Van Leer aux éléments finis [28], [45]. Cette extension nécessite le calcul du gradient de la solution à chaque noeud. La fonction de flux d'ordre supérieur s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi_{ij}} \;=\; \boldsymbol{\Phi_{ij}}(Q_{ij}, Q_{ji}), \\ Q_{ij} = Q_i + \dfrac{1}{2}\vec{\nabla} Q_i^H . \vec{S_i S_j} \\ Q_{ji} = Q_j - \dfrac{1}{2}\vec{\nabla} Q_j^H . \vec{S_i S_j} \end{cases} \tag{2.6}$$

Le gradient nodaux $\vec{\nabla} Q_{i,j}^H$ sont évalués par une moyenne des gradients de Galerkin autour d'un noeud S_i (gradients hermitiens). Pour tout triangle $T \in \mathcal{T}_h$, on a :

$$Q = \sum_{k=1}^{3} Q_{i^k} \cdot \varphi_{i^k},$$

d'où on déduit :

$$(\vec{\nabla} Q)^T = \sum_{k=1}^{3} Q_{i^k} \vec{\nabla} \varphi_{i^k}(T),$$

où les S_{i^k} $(k = 1, ..., 3)$ sont les trois sommets du triangle T et $\vec{\nabla} \varphi_{i^k}(T)$ le gradient constant sur T de la fonction de base φ_{i^k} P1 associée au noeud S_{i^k}. On pose alors :

$$\vec{\nabla} Q_i^H \;=\; \frac{1}{Volume(C_i)} \sum_{T \in \mathcal{T}_h, S_i \in T} \frac{Volume(T)}{3} (\vec{\nabla} Q)^T. \tag{2.7}$$

Pour des raisons de précision et de stabilité [25], les nouvelles valeurs aux interfaces des cellules seront calculées à l'aide d'une combinaison convexe des gradients hermitiens et centrés. Un paramètre de décentrage est introduit et les schémas sont connus sous le nom de β-schémas. Les valeurs interpolées sont calculées de la manière suivante :

$$\begin{cases} Q_{ij} = Q_i + \dfrac{1}{2}\{\, (1 - 2\,\beta)(Q_j - Q_i) + 2\,\beta \vec{\nabla} Q_i^H . \vec{S_i S_j} \,\}, \\ Q_{ji} = Q_j - \dfrac{1}{2}\{\, (1 - 2\,\beta)(Q_j - Q_i) + 2\,\beta \vec{\nabla} Q_j^H . \vec{S_i S_j} \,\}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Nous prenons $\beta = \frac{1}{3}$ afin d'obtenir un schémas d'ordre trois en espace dans le cas de maillages structurés. On peut remarquer qu'un autre moyen pour obtenir des schémas numériques d'ordre élevé et de remplacer la fonction de flux numérique décentrée par une fonction centrée :

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{ij}} = \frac{\mathcal{F}(Q_i, \vec{\eta}_{ij}) + \mathcal{F}(Q_j, \vec{\eta}_{ij})}{2}.$$

Pour cela il suffit de prendre $\gamma = 0$ dans (2.4). Ce schémas a été étudié notamment dans [23], [12] pour l'équation d'advection linéaire bidimensionnelle en maillage régulier. Ce schéma étant linéaire et d'ordre supérieur à un, il n'est pas **TVD** (à variation totale décroissante) [33], d'où l'apparition d'oscillations parasites qui ont été observées numériquement. Au lieu d'utiliser les limiteurs qui rendent le schéma non linéaire, nous avons introduit un petit taux de diffusion en affectant à γ la valeur 0.1. Le schéma ainsi obtenu sera étudié en détail au chapitre 3.

2.4 Traitement des conditions aux limites

Surface métallique parfaitement conductrice :

Sur la frontière métallique Γ_b, la condition aux limites est de type réflexion totale. Elle s'écrit en champ diffracté :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = -\vec{n} \wedge \vec{E}^{inc}, \tag{2.9}$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à la surface et $\vec{E}$ le champ électrique diffracté. Cette condition (2.9) sera prise en compte faiblement. Pour les ondes transverses magnétiques *TM* ($H_z = 0$), le terme de bord s'écrit sous la forme :

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \mathbb{F}(Q).\vec{n}_{ib}\, d\sigma = \int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \begin{pmatrix} -n_2 Q_3^{inc} \\ n_1 Q_3^{inc} \\ n_2 Q_1 - n_1 Q_2 \end{pmatrix} .\, d\sigma \quad ,$$

tandis que pour les ondes transverses électriques *TE* ($E_z = 0$), le terme de bord s'écrit :

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \mathbb{F}(Q).\vec{n}_{ib}\, d\sigma = \int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \begin{pmatrix} n_2 Q_3 \\ -n_1 Q_3 \\ -n_2 Q_1^{inc} + n_1 Q_2^{inc} \end{pmatrix} .\, d\sigma \quad ,$$

où $(Q_k)_{k=1..3}$ sont les composantes du champ diffracté Q sur Γ_b, Q^{inc} est le champ incident supposé connu et $\vec{n} = {}^t(n_1, n_2)$ est la normale extérieure à Γ_b. Le flux numérique correspondant s'écrit :

$$\mathbf{\Phi}_{ib} = \mathbb{F}(Q_{ib})\vec{\eta}_{ib},$$

avec $\vec{\eta}_{ib} = \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \vec{n}_{ib}\, d\sigma$, $\vec{n}_{ib}$ étant la normale extérieure en $\partial C_i \cap \Gamma_b$ et Q_{ib} donné par :

$$Q_{ib} = \begin{cases} {}^t(Q_{i,1}, Q_{i,2}, -Q_{inc,3}), & (TM), \\ {}^t(-Q_{inc,1}, -Q_{inc,2}, Q_{i,3}), & (TE). \end{cases}$$

Remarque 2.4.1 *: En trois dimensions d'espace, compte tenu du fait que l'on a $\mathcal{F}(Q).\vec{\eta} = {}^t(-\vec{E} \wedge \vec{\eta}, \vec{H} \wedge \vec{\eta})$, la condition de conducteur parfait s'écrit en champ diffracté sur Γ_b :*

$$\mathbf{\Phi}_{ib} = {}^t(\vec{E}^{inc} \wedge \vec{\eta}_b, \vec{H}_i \wedge \vec{\eta}_b)$$

où $\vec{E}^{inc}$ et $\vec{H}_i$ sont respectivement le champ électrique incident et le champ magnétique total au noeud i. Avec les mêmes notations, en champ total, le flux numérique sur Γ_b s'écrit :

$$\mathbf{\Phi}_{ib} = {}^t(0, \vec{H}_i \wedge \vec{\eta}_b)$$

<u>Condition absorbante :</u>

Les conditions aux limites absorbantes (CLA) sont imposées sur la frontière artificielle Γ_∞ pour minimiser les réflexions parasites. On présente ici la condition limite absorbante d'ordre un en champ diffracté correspondant à la condition de radiation de Silver-Müller :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) \ . \tag{2.10}$$

Pour les ondes transverses magnétiques *TM* ($H_z = 0$), la CLA peut être prise en compte faiblement en insérant dans $\mathbb{F}$ la relation $Q_3 = (\eta_2 Q_1 - \eta_1 Q_2)/|\eta|$. On obtient :

$$Q_{i\infty} = \frac{1}{|\eta|}(\eta_2 Q_1 - \eta_1 Q_2) \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant comparer cette CLA à la technique de décentrage. Le calcul du flux numérique sur la frontière artificielle Γ_∞ qui borne le domaine de calcul sera effectué en utilisant un décentrage à l'infini dans la décomposition des flux de Steger-Warming :

$$\mathbf{\Phi}_{i\infty} = \mathbf{\Phi}(Q_i, Q_\infty, \vec{\eta}_{i\infty}) = \mathcal{A}^+(\vec{\eta}_{i\infty})Q_i + \mathcal{A}^-(\vec{\eta}_{i\infty})Q_\infty,$$

où Q_i est la valeur du champ diffracté calculée sur Γ_∞ et Q_∞ le champ diffracté en dehors du domaine de calcul Ω. Comme aucune onde ne doit entrer dans Ω, on obtient :

$$\mathcal{A}^-(\vec{\eta}_{i\infty})Q_\infty = 0,$$

soit :

$$\mathbf{\Phi}_{i\infty} = \mathcal{A}^+(\vec{\eta}_{i\infty})Q_i.$$

En deux dimensions d'espace, le flux numérique ainsi obtenu s'écrit :

$$\mathbf{\Phi}_{i\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_2^{i\infty}}{\mid \eta_{i\infty} \mid} Q_{i,1} - \frac{\eta_1^{i\infty}}{\mid \eta_{i\infty} \mid} Q_{i,2} + Q_{i,3}\right)\begin{pmatrix} \eta_2^{i\infty} \\ -\eta_1^{i\infty} \\ \mid \eta_{i\infty} \mid \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

où $\vec{\eta}_{i\infty} = \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \vec{n}_{i\infty}\, d\sigma$, $\vec{n}_{i\infty}$ est la normale extérieure à $\partial C_i \cap \Gamma_\infty$.

Remarque 2.4.2 *: Il est intéressant de noter que le décentrage à l'infini est la moyenne des deux manières possibles de prendre en compte faiblement la condition (1.16), cf. [15].*

2.5 Discrétisation temporelle

Pour l'intégration temporelle des équations de Maxwell nous utilisons la méthode explicite multi-pas de Runge-Kutta, adaptée à la résolution de phénomènes de propagation d'ondes instationnaires. On obtient un schéma d'ordre trois en temps à l'aide de l'intégration à trois pas de Runge-Kutta. À chaque noeud S_i correspond un système :

$$Q_t + \Psi(Q) = -J,$$

où $\Psi(Q)$ représent la discrétisation spatiale précédemment établie. Le schéma de Runge-Kutta à trois sous-pas s'écrit :

$$\begin{cases} Q^0 = Q^n \\ Q^l = Q^0 - \dfrac{\Delta t}{(4-l)}\Psi(Q^{l-1}) \quad l = 1, 2, 3 \\ Q^{n+1} = Q^3 \end{cases}$$

où Δt représente le pas de temps, $t^n = n\Delta t$.

Chapitre 3

Étude des β-γ schémas

Ce chapitre est une version plus étendue du rapport INRIA (N^o 3288) réalisé avec Frédéric Bonnet et Loula Fézoui* et intitulé *Étude d'une classe de β-γ schémas en formulation volumes finis pour des problèmes hyperboliques.*

* CERMICS-INRIA, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex

Introduction

Dans la perspective de construire des schémas numériques précis en temps et en espace pour la résolution de systèmes hyperboliques en plusieurs dimensions (telles que les équations de Maxwell), on propose ici l'étude d'un schéma numérique opérant sur des maillages plans, triangulaires ou rectangulaires. La discrétisation spatiale repose sur la méthode des volumes finis. L'intégration en temps sera prise en compte via un schéma explicite multi-pas (Runge-Kutta). De tels schémas ont été étudiés notamment dans [12, 22] pour l'équation d'advection linéaire en deux dimensions d'espace. Bien que les schémas qui ressortent de ces études soient d'ordre élevé (ordre 3 ou 4), ils présentent un certain nombre d'inconvénients. En effet, le schéma d'ordre trois, obtenu à l'aide d'une approximation de type MUSCL et d'un β schéma [25] (avec $\beta = \frac{1}{3}$) pour la discrétisation spatiale et d'une méthode de Runge-Kutta à 3 pas pour l'intégration temporelle, présente une diffusion résiduelle qui est jugée encore trop importante pour les applications considérées. En particulier, ce caractère diffusif du schéma entraine une détérioration des solutions sur de longs temps de calcul (quelques dizaines de périodes). Une alternative à ce schéma est l'utilisation d'un schéma d'ordre 4 basé sur le même type d'approximation (MUSCL) mais où l'ordre de diffusion résiduel a été atténué. Cependant, le schéma ainsi construit est un schéma centré. Il est connu que de tels schémas sont susceptibles d'engendrer des oscillations parasites sur la solution. L'utilisation des techniques dites de limiteurs permet de réduire ces oscillations [40]. Cependant, ces méthodes réintroduisent de la diffusion numérique difficile à analyser et à contrôler. De plus, ce schéma nécessite l'utilisation d'un schéma explicite de Runge-Kutta à 4 pas qui se révèle trop coûteux en temps de calcul.
Nous proposons donc dans ce rapport un schéma intermédiaire entre le schéma d'ordre trois jugé trop diffusif pour nos applications et le schéma d'ordre quatre centré et coûteux. Ce nouveau schéma sera appelé *nouveau schéma d'ordre trois.*
Dans un premier temps on propose ce schéma dans le cadre de l'équation d'advection linéaire bidimensionnelle pour des maillages rectangulaires et triangulaires. Pour chacun des schémas obtenus on proposera une étude de l'équation équivalente associée ainsi qu'une étude détaillée de la stabilité du schéma considéré. Après quelques illustrations numériques sur l'équation d'advection 2D, nous dégageons les valeurs optimales des paramètres β et γ. Enfin, on présentera une application de ces schémas à la résolution des équations de Maxwell en trois dimensions. Les résultats obtenus avec le nouveau schéma d'ordre 3 en maillage tétraédrique ou cubique sont comparés en terme de précision avec ceux obtenus avec le schéma d'ordre 3 classique.

3.1 Étude d'un cas modèle

Nous proposons ici d'étudier l'équation d'advection linéaire en deux dimensions d'espace. La discrétisation spatiale reposera sur deux types de maillage : triangles et rectangles. On explicitera alors dans chacun des cas considérés le schéma numérique auquel on aboutit. Pour chacun de ces schémas on présentera l'équation équivalente que l'on obtient ainsi qu'une étude de la stabilité.

3.1.1 Discrétisation

On considère l'équation d'advection linéaire bidimensionnelle :

$$\begin{cases} U_t + c_1\, U_x + c_2\, U_y = 0 \quad \text{pour} \quad (x,y,t) \in I\!R^2 \times [0;\infty[\\ \\ U(x,y,t=0) = U_0(x,y) \quad \text{sur} \quad I\!R^2 \end{cases} \tag{3.1}$$

La solution initiale $U_0(x,y)$ est supposée périodique, de période 1 en x et en y, ce qui permet de restreindre le domaine d'étude à $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On notera θ l'angle d'advection. On a :

$$c_1 = c\cos\theta, \quad c_2 = c\sin\theta \;\text{ avec }\; c > 0.$$

Décrivons brièvement la méthode de volumes finis utilisée indépendamment du type de maillage (triangulaire ou rectangulaire) considéré. Autour de chaque noeud I du maillage, on construit une cellule, notée C_I, en joignant le milieu des arêtes issues de I au centre de gravité des éléments considérés (voir figures 3.1).

Les méthodes de volumes finis sont basées sur l'intégration de (3.1) sur chaque cellule C_I.

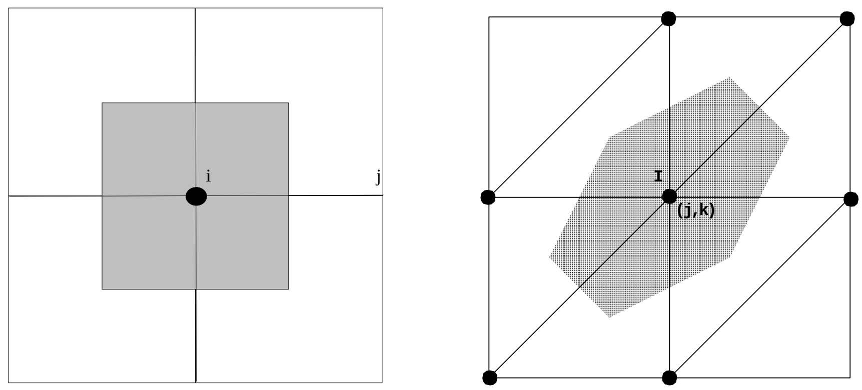


FIG. 3.1: *Cellules C_I*

On note $(U_I)_t$ la valeur moyenne de U_t sur C_I. On obtient ainsi, en utilisant la formule de Green :

$$aire(C_I)(U_I)_t + \int_{\partial C_I} (c_1 U n_x + c_2 U n_y) d\sigma = 0$$

où $\vec{n} = (n_x, n_y)$ est la normale unitaire extérieure sur ∂C_I.
On a :

$$\int_{\partial C_I} (c_1 U n_x + c_2 U n_y) d\sigma = \sum_{J \in K(I)} \int_{\partial C_{IJ}} (c_1 U n_x + c_2 U n_y) d\sigma \tag{3.2}$$

où $K(I)$ est l'ensemble des noeuds voisins de I et $\partial C_{IJ} = \partial C_I \cap \partial C_J$.
Le terme de flux (3.2) est approché par un flux numérique Φ_{IJ} à l'aide de l'approximation suivante :

$$\Phi_{IJ} = (c_1 \nu_{IJ}^x + c_2 \nu_{IJ}^y) \frac{U_I + U_J}{2} - \gamma \mid c_1 \nu_{IJ}^x + c_2 \nu_{IJ}^y \mid \frac{U_J - U_I}{2} \tag{3.3}$$

avec $\vec{\nu}_{IJ} = \displaystyle\int_{\partial C_{IJ}} \vec{n} d\sigma$ et $\gamma \in [0, 1]$. Le paramètre γ est introduit afin de pouvoir contrôler la diffusion numérique.
On obtient alors l'expression du flux spatial total Φ_I pour chaque cellule C_I :

$$\Phi_I = \sum_{J \in K(I)} \Phi_{IJ}.$$

L'extension du schéma aux ordres supérieurs s'effectue en conservant la même fonction de flux numérique Φ_{IJ} mais en modifiant les arguments de cette fonction. En effet, on considère maintenant :

$$\Phi_{IJ} = \Phi(U_{IJ}, U_{JI}, \vec{\nu}_{IJ})$$

où U_{IJ} et U_{JI} sont les états interpolés à l'interface $\partial C_I \cap \partial C_J$. Ces valeurs seront évaluées à l'aide d'une formulation dite β-schéma [25] :

$$U_{IJ} = U_I + \frac{1}{2}[(1 - 2\beta)(U_J - U_I) + 2\beta \vec{\nabla} U_I . \vec{IJ}]$$

où β est un paramètre appartenant à $[0, 1]$ et $\vec{\nabla} U_I$ désigne une approximation centrée du gradient de U dans C_I. On choisit de calculer les gradients de la façon suivante :

$$\vec{\nabla} U_I = \frac{1}{aire(C_I)} \sum_{J \in K(I)} \frac{U_I + U_J}{2} \vec{\nu}_{IJ}.$$

Définition 3.1.1 *: On appelle β-γ schéma, le schéma numérique ainsi construit.*

Remarque 3.1.1 *: Pour la résolution en temps, on utilise un schéma explicite de Runge-Kutta à trois pas (voir Annexe A).*

On va maintenant préciser nos schémas suivant le type de maillage considéré.

Maillage en rectangles

On considère donc un maillage régulier de pas d'espace Δx et Δy (voir figure 3.1). Le β-γ schéma que l'on obtient dans ce cas là est un schéma numérique à 9 points (voir Annexe B).

Maillage en triangles

Nous pouvons également établir un schéma numérique basé sur un maillage en triangles structuré ou non structuré. Cependant pour pouvoir utiliser la méthode des équations équivalentes nous allons étudier ici le cas d'une triangulation structurée et régulière obtenue à partir d'un maillage rectangulaire en divisant chaque maille en deux triangles. On aboutit ainsi à un β-γ schéma à 19 points (voir Annexe C).

Maillage en 1-D

Dans le cas 1-D, l'expression du flux discrétisé Φ_I du β-γ schéma est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi_I = \; & \frac{1}{4}\left\{\beta[c+\gamma|c|]U_{i-2} - [2c(\beta+1)+4\beta\gamma|c|]U_{i-1}\right. \\ & \left. +6\beta\gamma|c|U_i + [2c(\beta+1)-4\beta\gamma|c|]U_{i+1} - \beta[c-\gamma|c|]U_{i+2}\right\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

Remarque 3.1.2 *: Les schémas numériques proposés peuvent s'écrire de la façon suivante :*

$$\frac{dU_I}{dt} = -\Psi_I,$$

avec $\Psi_I = \dfrac{1}{\mathrm{Aire\ C_i}}\Phi_I$.

3.1.2 Équations Équivalentes

Les équations équivalentes, introduites par Warming and Hyett [46], permettent une analyse détaillée et précise des termes d'erreur de troncature, notamment des erreurs de dispersion et de dissipation. Elles donnent également des critères de stabilité des schémas. Pour obtenir ces équations, nous allons appliquer la méthode décrite dans [13, 14]. Cette technique de calcul permet de simplifier considérablement les calculs dans le cas linéaire. En effet, cette méthode reste la même quelque soit le schéma considéré, et en particulier

les schémas à plusieurs niveaux comme ceux de Runge-Kutta sont traités sans difficulté. On se propose de rappeler brièvement cette méthode dans le cadre de notre étude sur l'équation linéaire d'advection 2-D afin de déterminer la précision des schémas précédemment établis. On renvoie le lecteur intéressé par cette méthode à [13, 12].
Dans la recherche des équations équivalentes, nous ne nous intéressons qu'à un ordre infinitésimal tant spatial que temporel. On note Δ cet ordre, et on le définit à partir des pas d'espace comme suit :

$$\Delta = min(\Delta x, \Delta y).$$

Le pas de temps Δt sera lui aussi mis en relation avec Δ par le biais d'une relation de stabilité du schéma.
Considérons l'équation linéaire d'advection en deux dimensions d'espace:

$$U_t = -c_1 \partial_x U - c_2 \partial_y U.$$

On suppose que cette équation est approchée sur un maillage uniforme (triangles ou rectangles) par le β-γ schéma précédemment introduit. On peut alors écrire le schéma au noeud $(j\Delta x, l\Delta y)$ sous la forme condensée suivante:

$$(U_{jl})_t = \sum_{k,m} A_{k,m}(\Delta x, \Delta y) U^n_{j+k,l+m},$$

où $U^n_{j+k,l+m}$ est l'approximation de $U((j+k)\Delta x, (l+m)\Delta y, n\Delta t)$. La somme du membre de droite est par conséquent finie et l'approximation du terme temporel $(U_{jl})_t$ reste à définir. On renvoie le lecteur aux annexes B et C pour les expressions des coefficients $A_{k,m}$ suivant le maillage considéré.
On introduit alors la fonction :

$$g_\Delta(X,Y) = g_{\Delta x, \Delta y}(X,Y) = \sum_{k,m} A_{k,m}(\Delta x, \Delta y) e^{k\Delta x X} e^{m \Delta y Y} \tag{3.5}$$

On montre dans [13] que l'équation équivalente pour ce schéma, avec une intégration temporelle multipas de Runge-Kutta (RKN), s'écrit sous la forme suivante :

$$U_t = \sum_{k,m\geq 0} \alpha_{k,m}(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \frac{\partial^{k+m} U}{\partial x^k \partial y^m},$$

où $\sum_{k,m\geq 0} \alpha_{k,m}(\Delta t, \Delta x, \Delta y) X^k Y^m$ est le développement en série entière de la fonction :

$$\mathcal{F}(X,Y) = \frac{\log\left(1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{[\Delta t \; g_\Delta(X,Y)]^p}{p!}\right)}{\Delta t},$$

avec $g_\Delta(X,Y)$ définie par (3.5).
De plus, pour un schéma spatial donné, en supposant le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ constant, on développe la fonction $g_\Delta(X,Y)$ sous la forme :

$$g_\Delta(X,Y) = g_0(X,Y) + \sum_{q\geq 1} \Delta^q \, g_q(X,Y),$$

où les $g_q(X,Y)$ sont des polynômes à deux variables.
On s'intéresse plus particulièrement ici à l'intégration temporelle de Runge-Kutta à trois pas. On obtient alors pour ce schéma :

$$\mathcal{F}_{(N=3)} = g_0 + \Delta g_1 + \Delta^2 g_2 + \Delta^3 g_3 - \frac{\Delta t^3}{24} g_0^4 + O(\Delta t, \Delta)^4. \tag{3.6}$$

Nous allons maintenant détailler les expressions des fonctions g_i pour $i = 0, 4$, qui dépendent du schéma considéré. On présente également les équations équivalentes obtenues pour les β-γ schémas 2-D (rectangles et triangles), ainsi que pour le cas monodimensionnel.
Hypothèse de calcul :
Pour l'étude des équations équivalentes, on va supposer, afin de simplifier les calculs, que $c_1 = c_2$ et que $\Delta x = \Delta y = h$.
On suppose que U est suffisamment régulière. A partir de l'équation aux différences calquée sur le flux discrétisé, on applique à U des développements de Taylor jusqu'à l'ordre 4, au point (x, y, t).

- β-γ schéma pour maillage rectangulaire :

Le développement de Taylor de la variable U que l'on injecte dans le flux numérique nous donne :

$$\begin{aligned} g_\Delta(X,Y) &= -c_1(X+Y) - \frac{c_1}{6}(1-3\beta)\Delta^2(X^3+Y^3) \\ &- \frac{\beta\gamma}{4}|c_1|\Delta^3(X^4+Y^4) + O(\Delta^4) \end{aligned}$$

On considère alors (3.6) avec l'expression g_Δ ci-dessus ; on revient ensuite à l'équation différentielle et l'on obtient ainsi l'équation équivalente :

$$\begin{aligned} U_t + c_1\,(U_x+U_y) = &-\tfrac{c_1}{6}\,(1-3\beta)\,h^2\,(U_{3x}+U_{3y}) \\ &-(\tfrac{\Delta t^3}{24}c_1^4 + \tfrac{\beta\gamma}{4}|c_1|h^3)(U_{4x}+U_{4y}) \\ &-\tfrac{\Delta t^3}{24}c_1^4(4U_{3xy}+6U_{2x2y}+4U_{x3y}) + O(\Delta t,h)^4 \end{aligned}$$

- β-γ schéma pour maillage triangulaire :

De façon similaire, on obtient :

$$\begin{aligned} g_\Delta(X,Y) &= -c_1(X+Y) - \frac{c_1}{6}(1-3\beta)\Delta^2(X^3+Y^3+2X^2Y+2XY^2) \\ &- \frac{\beta\gamma}{4}|c_1|\Delta^3(X^4+Y^4) \\ &- \frac{11}{18}\beta\gamma|c_1|\Delta^3(X^3Y+Y^3X) \\ &- \frac{8}{9}\beta\gamma|c_1|\Delta^3X^2Y^2 + O(\Delta^4) \end{aligned}$$

Finalement, l'équation équivalente s'écrit :

$$\begin{aligned} U_t + c_1\,(U_x+U_y) = &-\tfrac{c_1}{6}\,(1-3\beta)\,h^2\,(U_{3x}+U_{3y}+2U_{xxy}+2U_{xyy}) \\ &-(\tfrac{\Delta t^3}{24}c_1^4 + \tfrac{\beta\gamma}{4}|c_1|h^3)(U_{4x}+U_{4y}) \\ &-(\tfrac{\Delta t^3}{6}c_1^4 + \tfrac{11\beta}{18}\gamma|c_1|h^3)(U_{3xy}+U_{x3y}) \\ &-(\tfrac{\Delta t^3}{4}c_1^4 + \tfrac{8\beta}{9}\gamma|c_1|h^3)U_{2x2y} + O(\Delta t,h)^4 \end{aligned}$$

Seuls les termes d'erreur “non croisés” (portant sur les directions x ou y) sont identiques pour les deux formulations. Naturellement, l'utilisation du schéma temporel explicite RK3 introduit des termes d'erreur d'ordre 3 en temps. Il est cependant intéressant de remarquer que les erreurs en temps et en espace sont parfaitement découplées. De plus, le schéma sur un maillage triangulaire présente des termes d'erreur “croisés” (U_{xxy} et U_{xyy}) qui n'apparaissent pas avec le schéma écrit sur une grille rectangulaire. Nous étudierons plus loin l'influence des valeurs des paramètres β et γ sur les termes d'erreur en espace.

- β-γ schéma en 1-D:

Le flux de la variable U à laquelle on a appliqué un développement de Taylor à l'ordre 4 s'écrit :

$$\Psi(U) = -c_1\, U_x + \frac{c_1}{6}(3\beta - 1)\Delta x^2\, U_{3x} - \frac{\beta\gamma}{4} \mid c_1 \mid \Delta x^3\, U_{4x} + O(4). \tag{3.7}$$

De (3.7), on établit le développement en série de g_Δ :

$$\begin{aligned} g_\Delta(X) &= -c_1\, X + \frac{c_1}{6}(3\beta - 1)\Delta x^2\, X^3 - \frac{\beta\gamma}{4} \mid c_1 \mid \Delta x^3\, X^4 \\ &= g_0 + \Delta x^2 g_2 + \Delta x^3 g_3 \end{aligned} \tag{3.8}$$

En injectant (3.8) dans (3.6), on obtient, en revenant à l'équation différentielle :

$$U_t + c_1\, U_x = \frac{3\beta - 1}{6}\, c_1\, \Delta x^2\, U_{3x} - \left(\frac{\beta\gamma}{4} \mid c_1 \mid \Delta x^3 + \frac{\Delta t^3}{24} c_1^4\right) U_{4x} + O(4). \tag{3.9}$$

Là encore, les termes d'erreur en temps et en espace sont découplés.

Dans tous les schémas numériques considérés ici on retrouve que la valeur $\frac{1}{3}$ affectée au paramètre β permet d'annuler les termes d'ordre deux et on obtient ainsi un schéma spatial d'ordre trois pour des maillages structurés [25]. On supposera donc $\beta = \frac{1}{3}$ afin de préserver cet ordre. On retrouve également que la valeur 0 pour le paramètre γ permet d'annihiler les termes d'ordre trois et ce indépendamment de la valeur du paramètre β [12]. Les schémas ainsi obtenus sont d'ordre quatre en espace. Cependant, cela revient à considérer des schémas numériques centrés. On va alors s'attacher à déterminer la valeur optimale à affecter au paramètre γ afin d'obtenir un schéma numérique stable pour le plus grand pas de temps possible. De plus, dans le but de restreindre le coût en temps de calcul, on utilisera un schéma explicite d'ordre 3 en temps (RK3).

Définition 3.1.2 *On appelle schémas d'ordre trois, les schémas numériques définis avec les paramètres* $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma \in [0, 1]$ *et une intégration temporelle RK3.*

3.1.3 Analyse de stabilité

Nous sommes intéressés par l'influence de la valeur du paramètre γ sur la stabilité de chacun de ces schémas d'ordre trois (maillage en triangles ou en rectangles).
Considérons un schéma linéaire, qui s'écrit au point $x = j\Delta x$, $y = l\Delta y$ et au temps $t = n\Delta t$, dans sa version explicite, avec une intégration RK1 :

$$U_{jl}^{n+1} - U_{jl}^{n} = \Delta t \sum_{k,m} A_{k,m}(\Delta x, \Delta y) U_{j+k,l+m}^{n}. \tag{3.10}$$

Nous allons procéder à l'analyse de stabilité de Von Neumann. Classiquement, par l'analyse de Fourier, en posant $U_{j,l}^{n} = G(i\xi_x, i\xi_y) \cdot e^{(i(j\Delta x\xi_x + l\Delta_y \xi_y))}$ et en injectant dans (3.10), on obtient le facteur d'amplification G:

$$G(i\xi_x, i\xi_y) = 1 + \Delta t \sum_{k,m} A_{k,m}(\Delta x, \Delta y) e^{i(k\Delta x\xi_x + m\Delta y\xi_y)}.$$

Le schéma sera stable au sens de Von Neumann, si et seulement si le critère suivant est vérifié :

$$\forall \xi_x, \xi_y \in I\!R \quad |G(i\xi_x, i\xi_y)| \leq 1. \tag{3.11}$$

Du formalisme [13] de la section précédente, on déduit que l'on a pour une intégration multi-pas de type Runge-Kutta d'ordre 3 :

$$G(i\xi_x, i\xi_y) = 1 + \sum_{p=1}^{3} \frac{[\Delta t\ g_\Delta(i\xi_x, i\xi_y)]^p}{p!}.$$

On réécrit alors $g_\Delta(i\xi_x, i\xi_y)$ en introduisant le nombre de Courant $\nu = c\dfrac{\Delta t}{\Delta}$, où c est le module de la vitesse d'advection:

$$\Delta t\ g_\Delta(i\xi_x, i\xi_y) = \nu(g_r(i\xi_x, i\xi_y) + i g_i(i\xi_x . i\xi_y)). \tag{3.12}$$

Finalement, en décomposant le facteur d'amplification G en sa partie réelle G_r et sa partie imaginaire G_i, nous obtenons pour Runge-Kutta 3 :

$$\begin{cases} G_r = 1 + \nu g_r + \dfrac{\nu^2}{2}(g_r^2 - g_i^2) + \dfrac{\nu^3}{6} g_r (g_r^2 - 3g_i^2), \\ G_i = \nu g_i [(1 + \nu g_r) + \dfrac{\nu^2}{6}(3g_r^2 - g_i^2)]. \end{cases} \tag{3.13}$$

La condition de stabilité de Von Neumann (3.11) peut alors s'écrire :

$$\forall \xi_x, \xi_y \in I\!R \quad G_r^2(i\xi_x, i\xi_y) + G_i^2(i\xi_x, i\xi_y) \leq 1 \tag{3.14}$$

Remarque 3.1.3 *: On observe que pour $\nu = 0$ (onde stationnaire pour le système de Maxwell), le schéma reste stable puisque dans ce cas là la condition de stabilité (3.14) est vérifiée.*

On décrit ici les deux fonctions, g_r et g_i, nécessaires à la détermination du facteur d'amplification G, pour chacun des deux maillages considérés, ainsi que pour le cas monodimensionnel :

- β-γ schéma pour un maillage rectangulaire :

$$\begin{aligned} g_r(i\xi_x, i\xi_y) = & - \frac{\beta\gamma}{2} |\cos\theta| (\cos(2\Delta x \xi_x) - 4\cos(\Delta x \xi_x) + 3) \\ & - \frac{\beta\gamma}{2} |\sin\theta| (\cos(2\Delta y \xi_y) - 4\cos(\Delta y \xi_y) + 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_i(i\xi_x, i\xi y) &= \frac{1}{2}\cos\theta(\beta\sin(2\Delta x\xi_x) - 2(1+\beta)\sin(\Delta x\xi_x)) \\ &+ \frac{1}{2}\sin\theta(\beta\sin(2\Delta y\xi_y) - 2(1+\beta)\sin(\Delta_y\xi_y)). \end{aligned}$$

- β-γ schéma pour un maillage triangulaire

$$\begin{aligned} & g_r(i\xi_x, i\xi_y) = -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \{A_{0,0} + (A_{2,1} + A_{-2,-1})\cos(2\Delta x\xi_x + \Delta y\xi_y) \\ & + (A_{1,0} + A_{-1,0})\cos(\Delta x\xi_x) + (A_{0,1} + A_{0,-1})\cos(\Delta y\xi_y) \\ & +(A_{1,1} + A_{-1,-1})\cos(\Delta x\xi_x + \Delta y\xi_y) + (A_{2,2} + A_{-2,-2})\cos(2\Delta x\xi_x + 2\Delta y\xi_y) \\ & + (A_{2,0} + A_{-2,0})\cos(2\Delta x\xi_x) + (A_{0,2} + A_{0,-2})\cos(2\Delta y\xi_y) \\ & + (A_{1,-1} + A_{-1,1})\cos(\Delta x\xi_x - \Delta y\xi_y) + (A_{1,2} + A_{-1,-2})\cos(-\Delta x\xi_x - 2\Delta y\xi_y) \,\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g_i(i\xi_x, i\Delta y\xi_y) = -\frac{1}{\Delta x \Delta y} \{(A_{2,1} - A_{-2,-1})\sin(2\Delta x\xi_x + \Delta y\xi_y) \\ & + (A_{1,0} - A_{-1,0})\sin(\Delta x\xi_x) + (A_{0,1} - A_{0,-1})\sin(\Delta y\xi_y) \\ & +(A_{1,1} - A_{-1,-1})\sin(\Delta x\xi_x + \Delta y\xi_y) + (A_{2,2} - A_{-2,-2})\sin(2\Delta x\xi_x + 2\Delta y\xi_y) \\ & + (A_{2,0} - A_{-2,0})\sin(2\Delta x\xi_x) + (A_{0,2} - A_{0,-2})\sin(2\Delta y\xi_y) \\ & + (A_{1,-1} - A_{-1,1})\sin(\Delta x\xi_x - \Delta y\xi_y) + (A_{1,2} - A_{-1,-2})\sin(-\Delta x\xi_x - 2\Delta y\xi_y) \,\} \end{aligned}$$

où les $A_{k,l}$, avec $-2 \le k, l \le 2$, sont donnés dans l'Annexe C.

- β-γ schéma en 1-D

$$g_r(i\xi) = -\frac{\beta\gamma}{2}\left(\cos(2\Delta x\xi) - 4\cos(\Delta x\xi) + 3\right)$$

$$g_i(i\xi) = -\frac{1}{2}\left(-\beta\sin(2\Delta x\xi) + 2(1+\beta)\sin(\Delta x\xi)\right)$$

On pose alors : $X = \cos(\Delta x\xi)$, $X \in [-1,1]$. La condition de Von Neumann (3.14), utilisant l'expression (3.13), ne fait intervenir que les fonctions g_r et g_i^2. On a alors :

$$g_r(X) = -\beta\gamma(1-X)^2,$$

$$g_i^2(X) = (1+\beta-\beta X)^2(1-X^2).$$

Remarque 3.1.4 : *On supposera pour l'étude suivante que la valeur du module c de la vitesse d'advection est fixée à 1.*

Analyse des schémas dans le cas 1-D:

Pour $\beta = \frac{1}{3}$, nous cherchons à déterminer la valeur maximale du nombre de Courant ν (ou encore CFL) en fonction de γ ($\gamma \in [0,1]$), de telle sorte que la condition de stabilité (3.14) soit vérifiée. Elle s'écrit :

$$\begin{gathered} G_r^2(X) + G_i^2(X) \leq 1 \\ \forall X \in [-1,1] \text{ avec } \nu \in \mathbb{R}^{*+},\ \ \beta = \tfrac{1}{3} \text{ et } \gamma \in [0,1]. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Définition 3.1.3 : *On appelle nombre de Courant critique, et l'on note $\nu^c(\gamma)$, le nombre de Courant tel que pour γ fixé, quelque soit ξ, nous ayons $|G|^2 \leq 1$ pour tout $\nu \leq \nu^c$.*

Définition 3.1.4 : *On appelle γ* **optimal**, *la valeur du paramètre γ pour laquelle le nombre de Courant critique (ou CFL) est le plus grand.*

Le coefficient d'amplification étant de degré 6 en X, nous allons rechercher numériquement le paramètre γ optimal qui permettra ainsi d'établir le plus grand pas de temps laissant le schéma stable. Sur la figure 3.2 nous représentons le nombre de Courant critique en fonction de γ.

On obtient ainsi la valeur numérique du γ optimal : 0,86. Le CFL critique ν^c correspon-

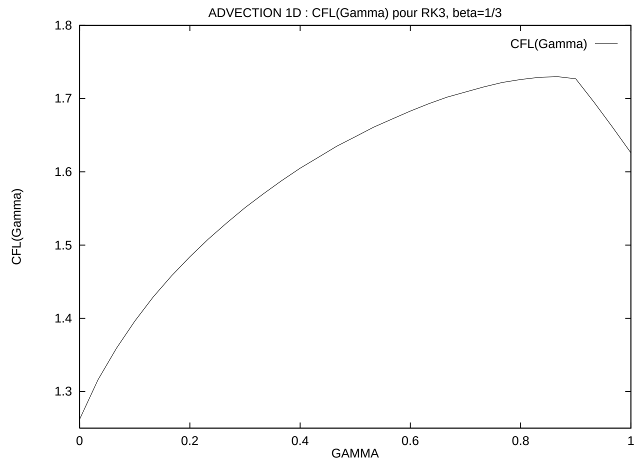


FIG. 3.2: *Advection 1-D : CFL(γ)*

dant au γ optimal est alors de 1,72. Il est également intéressant de remarquer que le CFL le plus petit (CFL=1,25) est obtenue pour $\gamma = 0$.

Analyse des schémas dans le cas 2-D:

Définition 3.1.5 *: On appelle nombre de Courant critique minimal, et l'on note $\nu^c_{min}(\gamma)$, le nombre de Courant défini par :*

$$\nu^c_{min}(\gamma) = \min_{\theta \in [0,2\pi]} \nu^c(\gamma, \theta)$$

où pour γ donné, le nombre de Courant (ou CFL) critique satisfait la condition de stabilité de Von Neumann, pour toutes les directions d'advection.

On considère uniquement des maillages tels que : $\Delta x = \Delta y = h$. Sur la figure 3.3 nous représentons le nombre de courant critique minimal $\nu^c_{min}(\gamma)$ en fonction de γ pour le schéma en maillage rectangulaire.

On constate sur cette figure que le plus grand pas de temps, i.e. le CFL le plus grand,

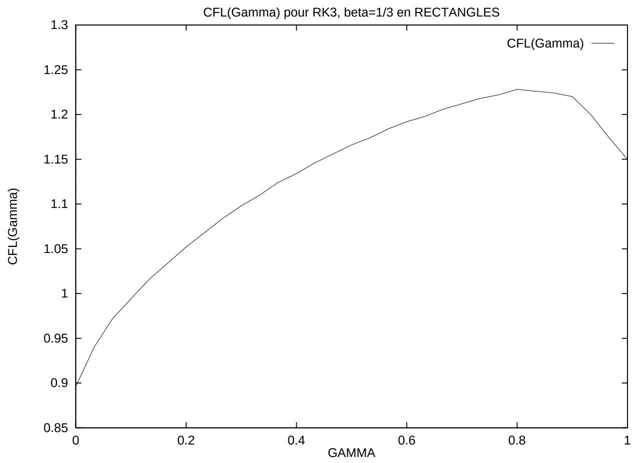


FIG. 3.3: *Advection 2-D (rectangle) : CFL(γ)*

est obtenue pour $\gamma = 0,8$. Pour cette valeur de γ nous obtenons un CFL d'environ 1,22. De plus, le CFL le plus petit (0,89) est obtenu pour $\gamma = 0$. Il est intéressant de remarquer que cette courbe a globalement le même comportement que celle obtenue dans le cas monodimensionnel. De même, sur la figure 3.4 nous rendons compte numériquement de $\nu^c_{min}(\gamma)$ pour le schéma en maillage triangulaire.

Nous pouvons constater que la courbe obtenue pour un maillage triangulaire est identique

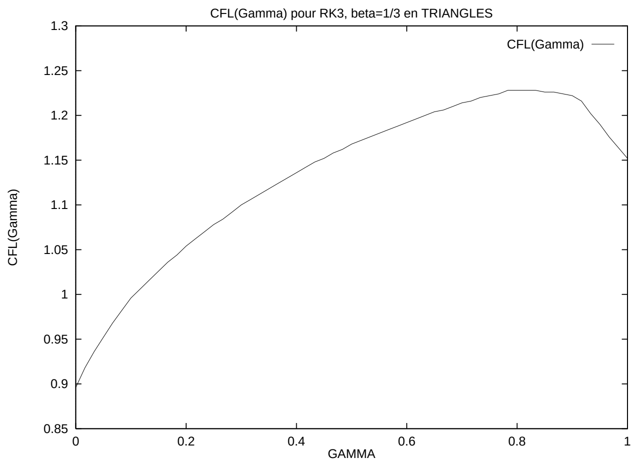


FIG. 3.4: *Advection 2-D (triangle) : CFL(γ)*

à celle obtenue pour un maillage rectangulaire (cf. fig. 3.3). Ceci s'explique par le fait que l'on trace en fonction de γ le minimum suivant les angles d'advection θ du nombre de Courant Critique ν^c. Or, quelque soit γ, il existe un angle θ^*, tel que :

$$\nu^c(\gamma, \theta^*) = \min_{\theta} \nu^c_{triangle}(\gamma, \theta) = \min_{\theta} \nu^c_{rectangle}(\gamma, \theta).$$

On représente ainsi sur la figure (3.5), à titre d'exemple, le domaine de stabilité (i.e. le CFL en fonction de θ) obtenu dans le cas où γ est fixé à 1.

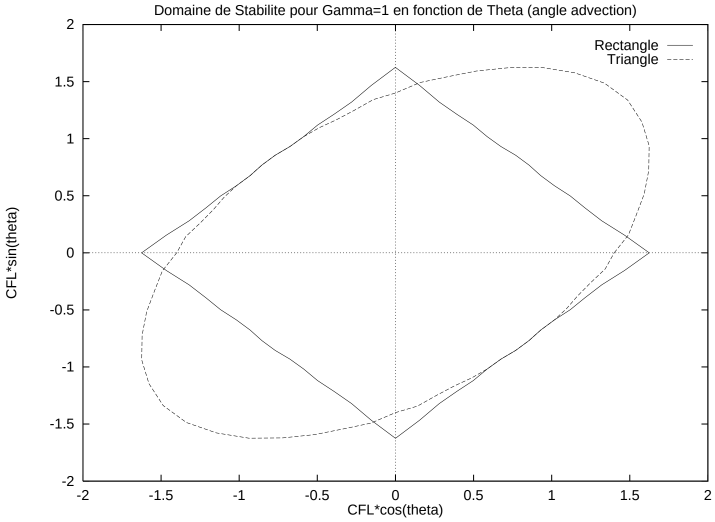


FIG. 3.5: *Advection 2-D : CFL(θ) pour $\gamma = 1$*

Pour les deux types de maillage on trouve ainsi que les limites de stabilité sont égales et minimales (CFL=1,15) pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$. De plus, pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, la limite de stabilité du schéma en maillage triangulaire est nettement supérieure à celle obtenue pour le schéma écrit pour des maillages rectangulaires. Enfin, pour une vitesse d'advection parallèle aux axes, le schéma en rectangle permet d'utiliser un pas de temps plus grand (i.e. des CFL plus grands et égaux à ceux de l'advection 1D). Ces caractéristiques des domaines de stabilité liés au type de maillage utilisé et détaillées ici pour le cas $\gamma = 1$ se retrouvent pour toute valeur de $\gamma \in [0, 1]$.

A partir de la figure (3.4), on choisit quelques valeurs significatives de γ (0, 8/10, 1) et on décide de tracer sur la figure (3.6) le domaine de stabilité (i.e. CFL(θ)) pour ces différentes valeurs de γ.

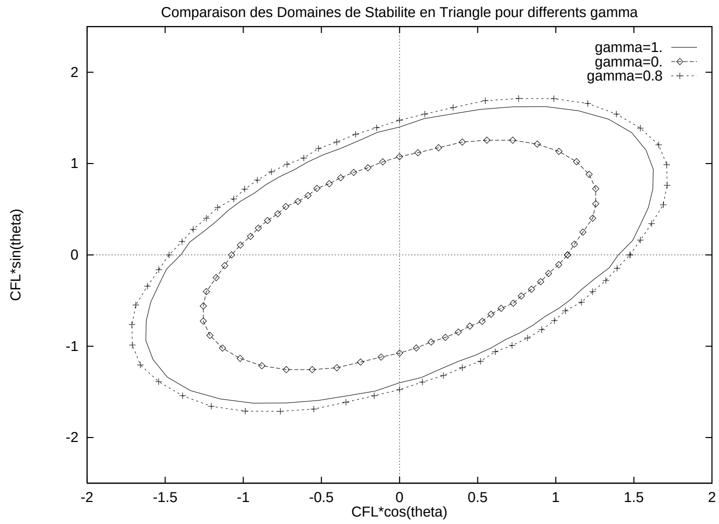


FIG. 3.6: *Triangle : CFL(θ) pour différents* γ

On observe de nouveau que le domaine de stabilité le plus grand est obtenu pour $\gamma = 0,8$ alors que le plus petit est obtenu pour $\gamma = 0$.

3.1.4 Expériences numériques

On propose dans cette partie d'effectuer quelques expériences numériques pour illustrer la précision des schémas suivant la valeur du paramètre γ en maillage triangulaire.
Considérons dans un premier temps le problème d'advection d'une "vague sinusoidale" avec la donnée initiale :

$$u(x, y, 0) = \sin(2\pi(x + y)) \text{ pour } (x, y) \in [0, 1]^2.$$

On utilise des conditions aux limites périodiques et le domaine de calcul est discrétisé en N=50 mailles dans chaque direction ($\Delta x = \Delta y = 2.10^{-2}$). Dans le but de mieux évaluer le rôle du paramètre γ dans la diffusion numérique, nous avons calculé le carré de la norme L^2 à chaque pas de temps :

$$|| \, u(., n\Delta t) \, ||_{L^2}^2 = \sum_I aire(C_I) \mid ua(I) \mid^2$$

où I, $aire(C_I)$ et $ua(I)$ représentent respectivement le noeud du maillage, l'aire du volume de contrôle et la solution calculée. L'angle d'advection θ est égal à $\frac{\pi}{4}$. Afin d'avoir un schéma stable quelque soit le paramètre γ considéré, on choisit un CFL de 0,75.

La figure (3.7) permet de comparer les résultats obtenus pour différentes valeurs de γ au temps T=16, soit environ un peu plus de vingt périodes.

Comme nous l'avait montré l'étude des équations équivalentes du paragraphe 3.1.2, la

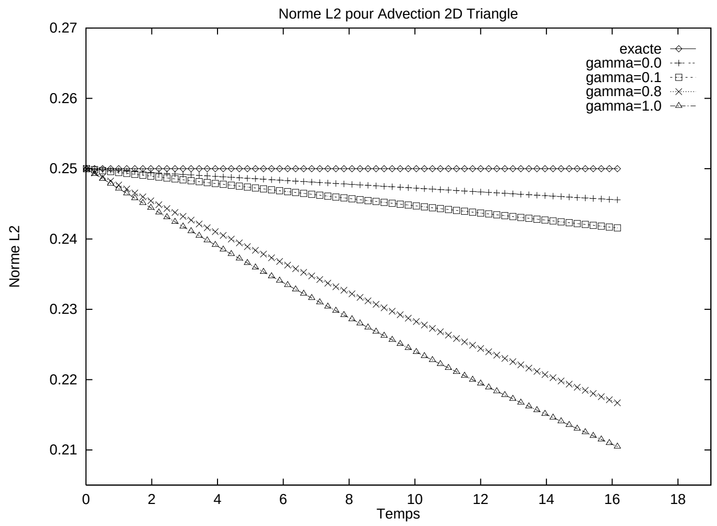


FIG. 3.7: *Triangle : Norme L2 de la solution en fonction de γ*

diffusion numérique est maximale lorsque $\gamma = 1$ (schéma d'ordre 3 "classique") tandis que la diffusion est minimale lorsque γ est nul. On notera une différence sur la diffusion de l'ordre de 14% entre ces deux schémas. De plus, il est intéressant de remarquer que pour des valeurs de γ qui tendent vers 0, la diffusion numérique tend vers la diffusion minimale. En particulier, la différence entre la diffusion minimale (obtenue pour $\gamma = 0$) et la diffusion pour $\gamma = 0,1$ n'est plus que de l'ordre de 1%.

Nous nous proposons d'étudier le comportement des schémas, suivant la valeur du paramètre γ, pour une condition initiale de type C^0 :

$$u_0(x, y) = 1 + x(1 - x)y(1 - y) \quad \text{avec} \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \tag{3.16}$$

Nous présentons sur la figure (3.8) les solutions obtenues pour $x = y$ et à $T^* = 6$ pour trois valeurs du paramètre γ (0, 1/10 et 1). Afin de s'affranchir des problèmes de stabilité, nous fixons le CFL à 0,6.

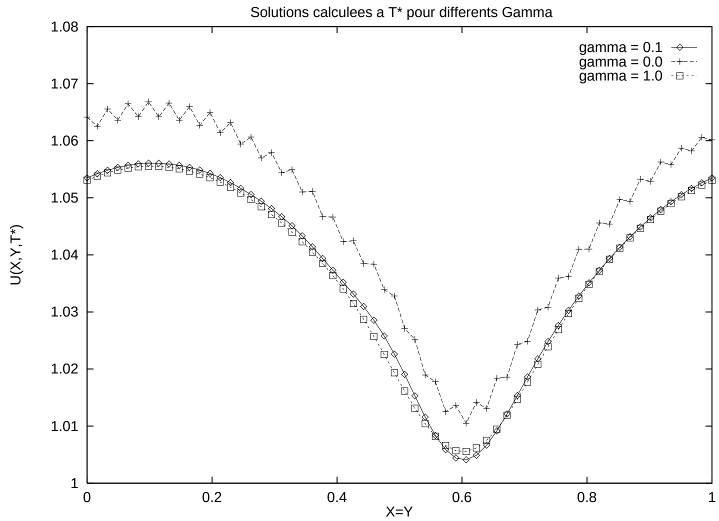


FIG. 3.8: *Solutions suivant γ pour une condition initiale C^0*

La figure (3.8) montre que pour $\gamma = 0$ la solution obtenue à partir de la condition initiale (3.16) présente un certain nombre d'oscillations parasites. En effet, pour $\gamma = 0$, le flux numérique correspond à un schéma centré (le terme de diffusion numérique est supprimé) qui est connu pour être mal adapté à ce type de problème.
Pour conclure cette partie il nous a semblé intéressant de reporter sur le tableau (3.1) les valeurs caractéristiques du paramètre γ avec pour chacune d'elle les répercussions sur la qualité du schéma numérique pour des maillages en triangles. Les pourcentages présentés dans la colonne diffusion correspondent à la différence de diffusion obtenue entre le schéma avec $\gamma = 0$ (pris comme référence) et les autres schémas.
Au vu des différents résultats présentés ci-dessus, le schéma avec $\gamma = 0$ ne semble pas

TAB. 3.1: *: Qualité du schéma suivant γ*

	Stabilité (CFL) $\min_\theta \nu^c(\theta)$	Diffusion
$\gamma = 1$	1.15	+14% (maximale)
$\gamma = 0.8$	1.22 (maximum)	+11%
$\gamma = 0.1$	1.	+1%
$\gamma = 0.$	0.89 (minimum)	référence (minimale)

bien adapté à nos calculs. En effet, même s'il présente une diffusion minimale, le CFL assurant la stabilité est jugé trop petit. De plus, le schéma crée des oscillations parasites

pour des conditions initiales peu régulières (de type C^0 par exemple).
Même si les CFL les plus grands sont obtenus pour γ=8/10 (CFL maximal) et γ=1, la diffusion numérique de ces schémas en temps long est jugée trop importante et par conséquent on ne retiendra pas ces valeurs pour γ. Finalement, le schéma qui semble le plus adapté à nos problèmes est le schéma établi avec $\gamma = 0,1$. En effet, il se presente comme le bon schéma intermédiaire : la diffusion numérique est faible, son CFL reste acceptable et il semble robuste pour convecter des ondes peu régulières. Notons que d'autres "petites" valeurs du paramètre γ pourraient tout aussi bien convenir. Il faudrait alors étudier la capacité de ces β-γ_ε schémas à convecter des ondes irrégulières ou présentant de fortes variations.

Définition 3.1.6 *: On appelle* **nouveau** *schéma d'ordre trois, le schéma numérique défini avec les paramètres $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 0,1$ et une intégration temporelle RK3.*

3.2 Application aux équations de Maxwell

3.2.1 Présentation des équations et du schéma

On s'intéresse maintenant à l'application de ces schémas d'ordre trois pour la résolution de phénomènes électromagnétiques. Ils sont régis par les équations de Maxwell qui s'écrivent dans le vide en l'absence de charges et de courant sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} &\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, \\ &\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = 0, \end{aligned} \right. \tag{3.17}$$

où $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{x})$ et $\vec{H} = \vec{H}(t, \vec{x})$ sont respectivement les champs électrique et magnétique, μ_0 et ε_0 la perméabilité magnétique et la permittivité électrique du vide. Du fait de la redondance des équations de Gauss dans le modèle continu pour des conditions initiales vérifiant ces contraintes, elles n'apparaissent pas explicitement dans le système écrit ci-dessus. Le système de Maxwell est un sytème conservatif et hyperbolique. L'approximation numérique utilisée reste donc la même que celle décrite précédemment pour l'équation d'avection linéaire 2-D. On se contente donc ici de rappeler brièvement les grandes lignes de l'approximation utilisée (voir section 2.2).

En dimension trois d'espace, une présentation des équations de Maxwell sous la forme adimensionnée conservative donne :

$$Q_t + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(Q) = 0, \tag{3.18}$$

avec :

$$Q = {}^t(H_x, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z)$$

On note :

$$\mathbb{F}(Q) = {}^t(F_1(Q), F_2(Q), F_3(Q))$$

avec :

$$\begin{cases} F_1(Q) = {}^t(0, -E_z, E_y, 0, H_z, -H_y), \\ F_2(Q) = {}^t(E_z, 0, -E_x, -H_z, 0, H_x), \\ F_3(Q) = {}^t(-E_y, E_x, 0, H_y, -H_x). \end{cases}$$

On complète (3.18) par des conditions aux limites sur la frontière Γ de Ω ainsi que des conditions initiales.
De la même façon que pour l'équation d'advection linéaire en deux dimensions, on établit la formulation faible de (3.18), après discrétisation du domaine de calcul. On obtient :

$$Volume\,(C_i)\,(Q_t)_i + \sum_{j \in K(i)} \mathbf{\Phi_{ij}} + \text{ termes de bord} = 0 \tag{3.19}$$

où $K(i)$ est l'ensemble des voisins du noeud i. Les termes de bord (condition aux limites de type métallique et condition absorbante) sont développés dans (2.4).
La construction du β-γ schéma est alors identique à celle de la section précédente mais maintenant appliquée à un système. On donne ci-dessous à titre d'indication l'expression du flux numérique qu'on a obtenu dans la section (2.3):

$$\mathbf{\Phi_{ij}} = \mathbf{\Phi}(Q_i, Q_j, \vec{\eta}_{ij}) = \frac{\mathcal{F}(Q_i, \vec{\eta}_{ij}) + \mathcal{F}(Q_j, \vec{\eta}_{ij})}{2} - \frac{\gamma}{2} \mid \mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij}) \mid (Q_j - Q_i),$$

où $\mathcal{F}(Q, \vec{\eta}_{ij}) = \eta_1 F_1(Q) + \eta_2 F_2(Q) + \eta_3 F_3(Q)$ est une combinaison linéaire de flux et $\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})$ la matrice jacobienne associée à $\mathcal{F}(Q, \vec{\eta}_{ij})$.

3.2.2 Illustration numérique

Nous souhaitons maintenant comparer le nouveau schéma d'ordre trois précédemment étudié ($\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 0,1$ et RK3) à la fois avec le schéma décentré classique d'ordre trois

($\gamma = 1$) et avec le schéma d'ordre un.
On s'intéresse dans un premier temps à la propagation d'un mode de résonance électromagnétique dans une cavité cubique unitaire. Nous allons comparer les solutions lorsque l'on discrétise le domaine de calcul $\Omega =]0,1[^3$ à l'aide de cubes ou de tétraèdres structurés, comportant une quinzaine de points par longueur d'onde. Nous prenons pour tous ces schémas le même nombre de Courant : $CFL = 1$ qui assure la stabilité des différents schémas. La solution exacte du mode (1,1,1) s'écrit [32] :

$$\left\{\begin{aligned} H_x &= -\frac{\pi}{\omega}\sin(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)\sin(\omega t), \\ H_y &= \frac{2\pi}{\omega}\cos(\pi x)\sin(\pi y)\cos(\pi z)\sin(\omega t), \\ H_z &= -\frac{\pi}{\omega}\cos(\pi x)\cos(\pi y)\sin(\pi z)\sin(\omega t), \\ E_x &= -\cos(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)\cos(\omega t), \\ E_y &= 0, \\ E_z &= \sin(\pi x)\sin(\pi y)\cos(\pi z)\cos(\omega t). \end{aligned}\right. \tag{3.20}$$

Calcul de l'énergie électromagnétique :

On présente tout d'abord l'énergie électromagnétique obtenue avec les différents schémas que l'on comparera à l'énergie exacte.
La figure 3.9 permet de comparer, pour la cavité cubique maillée en **tétraèdres**, l'énergie électromagnétique en fonction du temps obtenue avec les schémas d'ordre 1, d'ordre 3 et le nouveau schéma d'ordre 3. Outre le caractère extrêmement diffusif du schéma d'ordre un, il apparait clairement sur la figure 3.9 le gain certain apporté par le nouveau schéma d'ordre 3 en terme de diffusion numérique.

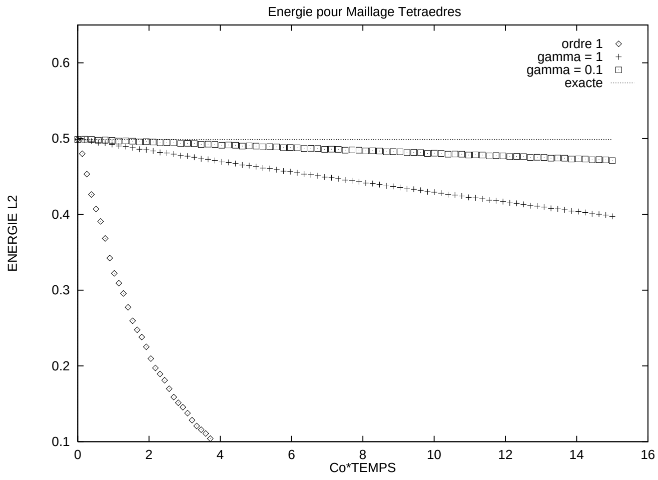


FIG. 3.9: *Energie pour un maillage tétraédrique*

L'étude portée sur la figure 3.10 est semblable à la précédente mais maintenant la cavité est maillée à l'aide de **cubes**. Le comportement des schémas dans ce cas là est similaire au cas des tétraèdres avec néanmoins un caractère moins diffusif.

Au vu des deux études présentées ci-dessus il nous a semblé intéressant de reporter sur

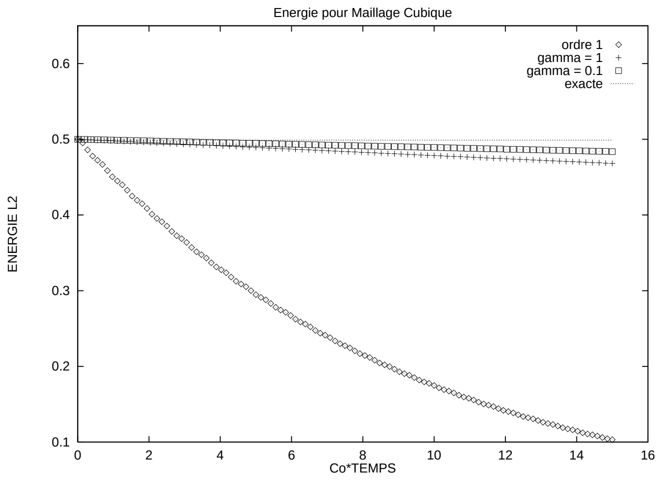


FIG. 3.10: *Energie pour un maillage cubique*

une même figure (fig. 3.11) les énergies obtenues suivant le maillage utilisé pour les deux schémas d'ordre 3. On constate ainsi que dans ce cas là le nouveau schéma d'ordre 3 en tétraèdres est à peu près équivalent au schéma d'ordre 3 (non modifié) en cubes.

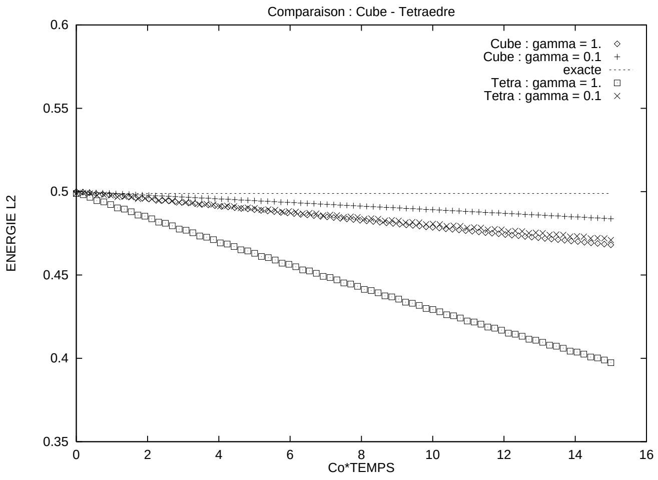


FIG. 3.11: *Schémas d'ordre 3 en fonction du maillage*

Suivi du mode (1,1,1) dans la cavité :

On décide maintenant de suivre l'évolution en temps du mode propre (1,1,1) de la cavité cubique résonante en un point du domaine. On initialise alors le champ électromagnétique avec la solution analytique (3.20) à l'instant initial en tous les noeuds du maillage. Le nombre de Courant (CFL) est toujours pris égal à 1.

On présente sur les deux figures ci-dessous la composante E_x du champ électromagnétique en fonction du temps. On compare sur la figure 3.12 la solution obtenue avec le schéma d'ordre 3 avec la solution analytique pour environ 45 périodes en temps. On constate le caractère diffusif du schéma pour de longs temps de calcul.

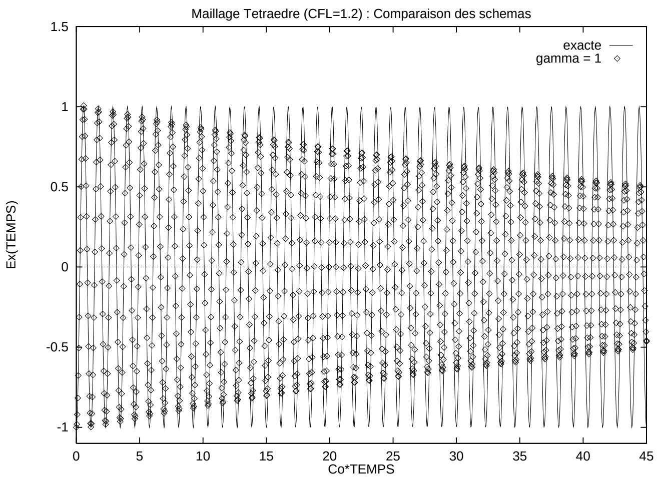


FIG. 3.12: $E_x(t)$ *avec le schéma d'ordre 3 (tétraèdres)*

De même, la figure 3.13 montre l'évolution temporelle de la composante E_x en un point du maillage tétraédrique mais maintenant pour le nouveau schéma d'ordre 3. Ici, le caractère diffusif du précédent schéma a été nettement corrigé.

Des résultats similaires sont obtenus pour les schémas basés sur des maillages cubiques.

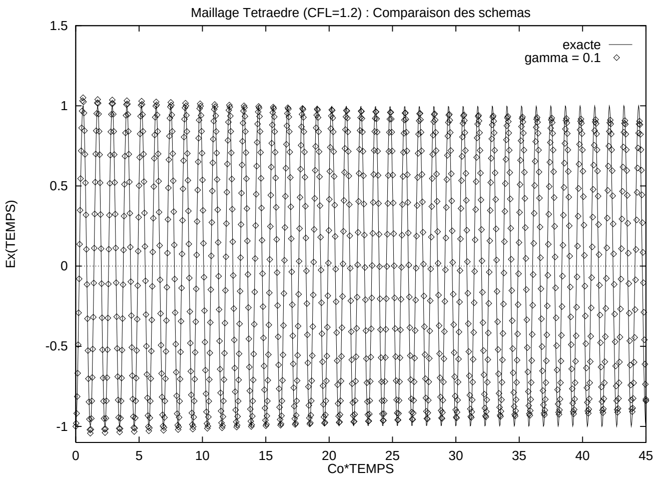


FIG. 3.13: *$E_x(t)$ avec le nouveau schéma d'ordre 3*

Conclusion

Nous avons présenté un schéma numérique basé sur une formulation volumes finis et appliqué à des maillages triangulaires ou rectangulaires pour la résolution de problèmes hyperboliques. Le but de notre étude était d'obtenir un schéma numérique d'ordre élevé en minimisant si possible la diffusion numérique tout en conservant un pas de temps optimal et un coût en temps CPU raisonnable. Pour cela nous avons choisi une approximation spatiale qui utilise un flux décentré caractérisé par deux paramètres β et γ. La valeur du paramètre β a été fixée à $\frac{1}{3}$ afin d'assurer l'ordre 3 pour des maillages structurés. Le paramètre γ a été introduit afin de contrôler la diffusion numérique par pondération du terme de décentrage. L'analyse de stabilité nous a fourni la valeur optimale de γ dans le but d'obtenir le plus grand pas de temps possible. Finalement, nous avons proposé un schéma de Runge Kutta à trois pas pour l'intégration temporelle. Bien sûr notre étude théorique s'est limitée au cadre de l'équation d'advection linéaire en deux dimensions d'espace. Néanmoins, les résultats numériques obtenus à l'aide de ce schéma pour des simulations en électromagnétisme en 3-D prouvent l'efficacité du schéma proposé au niveau de la précision des solutions calculées.

Couplage des équations de Vlasov et de Maxwell

L'essentiel de cette partie est tiré des articles réalisés avec Frédéric Poupaud † et intitulés "Periodic solutions of the Vlasov-Poisson system with boundary conditions" et "Periodic solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions".

† Laboratoire J.A.Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose,06108 Nice Cedex 2, poupaud@math.unice.fr

Introduction

La modélisation numérique du transport de particules chargées a un large champ d'application concernant aussi bien les dispositifs hyper-fréquence, les accélérateurs de particules, les canons à électrons que la physique des plasmas et les semi-conducteurs. La modélisation de tels phénomènes repose sur les équations de Maxwell couplées avec un modèle de transport de particules chargées. Un modèle général est donné par les équations couplées de Vlasov et de Maxwell, qui néglige les effets de collision entre particules :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}(E + v \wedge (\mu_0 H)) \cdot \nabla_v f = 0, \qquad (t,x,v) \in I\!R_t \times I\!R_x^d \times I\!R_v^d, \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, & (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \\ \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\vec{j}, & (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \end{cases} \qquad (3.22)$$

où le couplage est donné par la densité de courant :

$$\vec{j}(t,x) = \int_v \vec{v} f(t,x,v)dv, \qquad (t,x) \in I\!R_t. \times I\!R_x^d. \qquad (3.23)$$

Ici (t,x,v) représente le temps, la position et la vitesse, f est la fonction de distribution de particules chargées, (E,H) est le champ électromagnétique.
Le résultat principal dans ce domaine a été obtenu en 1989 par R.J.DiPerna et P.L.Lions [26]. Ils ont montré l'existence de solution faible globale pour le problème de Cauchy avec des données arbitraires. L'existence globale de solution classique reste encore un problème ouvert. La situation est meilleure pour le système de Vlasov-Poisson. Ce système est obtenu du précédent en négligeant le champ magnétique. Cela peut être justifié (au moins pour des petits temps) par une limite non-relativiste [19]. Dans ce cas, le champ électrique peut se mettre sous la forme $\vec{E} = \nabla_x \varphi$ où φ est le potentiel électrostatique et en utilisant la loi de Gauss électrique, le système s'écrit :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_x \varphi \cdot \nabla_v f = 0, \qquad (t,x,v) \in I\!R_t \times I\!R_x^d \times I\!R_v^d, \qquad (3.24)$$

$$\Delta_x \varphi = \int_{I\!R_v^d} f(t,x,v)dv, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d. \qquad (3.25)$$

Pour le problème de Cauchy des solutions faibles globales ont été obtenues par Arsenev [2]. L'existence de solution classique en deux dimensions d'espace est un résultat de Degond [20] et Ukai Ohabe [3]. Le même résultat en trois dimensions d'espace a été montré par Pfaffelmoser [39]. Une méthode simple et efficace a été proposée par P.L.Lions B.Perthame [36]. Cependant, la simulation de dispositifs reposent sur des problèmes aux limites. L'existence de solution faible globale pour le système de Vlasov-Maxwell a été démontrée par Y. Guo [31] et indépendamment par M. Bezart [5]. Le même problème pour le système de Vlasov-Poisson a été étudié par Y. Guo [30] et N.Ben Abdallah [1]. Ce qui est particulièrement intéressant au niveau des applications est la modélisation des régimes permanents. Ces régimes permanents sont caractérisés par des solutions stationnaires ou périodiques. Des résultats concernant les problèmes stationnaires ont été obtenus par C.Greengard et P.A.Raviart pour le système de Vlasov-Poisson en une dimension d'espace [29]. Pour le système de Vlasov-Maxwell en dimension quelconque on peut se référer à [41]. Des résultats dans le cas périodique semblent inexistants. D'autre part, ces régimes sont très difficilement atteints lors des simulations numériques. Il parait donc nécessaire d'en avoir une meilleure compréhension. Ce travail est un premier pas dans cette direction. Nous montrons l'existence de solution faible périodique pour le système de Vlasov-Poisson avec conditions aux limites périodiques en dimension quelconque. En une dimension d'espace nous montrons aussi un résultat d'unicité. Dans le cas du système de Vlasov-Maxwell l'existence de solution faible périodique est montrée en une dimension d'espace.

Nous allons préciser maintenant les conditions aux limites imposées. Soit Ω un ouvert borné C^1 de $I\!R^d_x$ représentant la géométrie du dispositif et Σ^- l'ensemble des positions dans l'espace des phases des particules entrantes :

$$\Sigma^- \quad = \quad \{(x,v) \in \partial\Omega \times I\!R^d_v \mid v \cdot \nu(x) < 0\}, \tag{3.26}$$

où $\nu(x)$ est la normale extérieure à Ω en $x \in \partial\Omega$. La distribution g des particules entrantes est donnée par :

$$f = g, \qquad (t,x,v) \quad \in \quad I\!R_t \times \Sigma^-. \tag{3.27}$$

Nous imposons la condition de radiation de Silver-Müller pour le champ électromagnétique :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) = h(t,x) \qquad (t,x) \in I\!R_t \times I\!R^d_x, \tag{3.28}$$

et la condition de Dirichlet pour le potentiel électrostatique :

$$\varphi = \varphi_0, \qquad (t,x) \quad \in \quad I\!R_t \times \partial\Omega. \tag{3.29}$$

Les données g, φ_0 et h sont supposées périodiques en temps de période T et nous cherchons des solutions T-périodiques du problème (VM) : (3.21), (3.22), (3.27) et (3.28) ou du problème (VP) : (3.24), (3.25), (3.27) and (3.29). Le point clé de l'existence de solutions périodiques est d'estimer le temps de vie des particules dans le domaine de calcul. Pour cela, nous imposons :

$$supp(g) \subset \{(t,x,v) \mid t \in I\!R_t, x \in \partial\Omega, v \cdot \nu(x) < 0, v_0 \leq |v| \leq v_1\}, \tag{3.30}$$

où $0 < v_0 < v_1$ sont des vitesses données. Les mêmes résultats peuvent être montrés en utilisant des hypothèses plus générales. Soit Φ_0 l'extension harmonique de la donnée φ_0. Un telle hypothèse serait: pour toutes les conditions initiales dans le support de g les caractéristiques $\frac{dX}{dt} = V$, $\frac{dV}{dt} = \nabla_x \Phi_0 + F$ où F est suffisament petit, ont un temps de vie borné. L'existence est montrée en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.

Chapitre 4

Solutions périodiques du système de Vlasov-Poisson

4.1 Équation de Vlasov. Définitions

Dans cette section nous supposons que le champ électrique E est une fonction connue T-périodique en temps et nous nous intéressons à l'existence de solution périodique f de l'équation de Vlasov :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0 & (t,x,v) \in I\!R_t \times \Omega \times I\!R_v^d, \\ f(t,x,v) = g(t,x,v) & (t,x,v) \in I\!R_t \times \Sigma^-. \end{cases} \tag{4.1}$$

La fonction de distribution de particules entrantes g est supposée T-périodique en temps. Maintenant nous allons rappeler brièvement les notions de solution faible et de solution par caractéristiques pour ce type de problème :

4.1.1 Solution faible de l'équation de Vlasov

D'abord nous introduisons les espaces L^-, L^-_{loc} de données entrantes aux flux bornés ou localement bornés :

$$L^- = \{g \mid v \cdot \nu(x) g \in L^1(I\!R_t \times \Sigma^-)\},$$

$$L^-_{loc} = \{g \mid v \cdot \nu(x) g \in L^1_{loc}(I\!R_t \times \overline{\Sigma^-})\},$$

où Σ^- est défini par (3.26).

Définition 4.1.1 *Soit $E \in (L^\infty(I\!R_t \times \Omega))^d$ et $g \in L^1_{loc}(I\!R_t \times \Sigma^-)$ des fonctions T-périodiques en temps. La fonction $f \in L^1_{loc}(I\!R_t \times \Omega \times I\!R^d_v)$ est une solution faible T-périodique du problème (4.1) si et seulement si :*

$$\int_0^T \int_\Omega \int_{I\!R^d_v} f(t,x,v)(\partial_t\theta + v\cdot\nabla_x\theta + E\cdot\nabla_v\theta)dvdxdt = \\ = \int_0^T \int_{\Sigma^-} v\cdot\nu(x)\cdot g(t,x,v)\cdot\theta(t,x,v)dvd\sigma dt \tag{4.2}$$

pour toute fonction T-périodique $\theta \in \mathcal{V}$, où:

$$\mathcal{V} = \{\eta \in W^{1,\infty}(I\!R_t \times \Omega \times I\!R^d_v) \mid \eta \text{ est } T\text{-périodique en temps },$$
$$\eta|_{I\!R_t\times\Sigma^+} = 0,\ \exists B \text{ sous-ensemble borné de } I\!R^d_v, supp(\eta) \subset I\!R_t \times \overline{\Omega} \times B\}.$$

On déduit qu'une solution faible du problème (4.1) vérifie :

$$< f, \varphi > \ = \int_0^T \int_{\Sigma^-} v\cdot\nu(x)\cdot g(t,x,v)\cdot\theta(t,x,v)dvd\sigma dt \tag{4.3}$$

pour toute fonction T-périodique φ, où θ représente la solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t\theta + v\cdot\nabla_x\theta + E\cdot\nabla_v\theta = \varphi, & (t,x,v) \in I\!R_t \times \Omega \times I\!R^d_v, \\ \\ \theta = 0, & (t,x,v) \in I\!R_t \times \Sigma^+ \end{cases} \tag{4.4}$$

Remarque 4.1.1 *Dans la définition précédente nous pouvons supposer que le champ électrique est seulement dans $(L^p(I\!R_t \times \Omega))^d$ en demandant plus de régularité sur f (et g), en particulier f dans $L^q_{loc}(I\!R_t \times \Omega)$ où q est l'exposant conjugué.*

Si le champ électrique vérifie $E \in (L^\infty(I\!R_t; W^{1,\infty}(\Omega)))^d$, nous pouvons exprimer la solution en terme de caractéristiques. Soit (t,x,v) dans $I\!R_t \times \Omega \times I\!R^d_v$, nous notons $X(s;x,v,t)$, $V(s;x,v,t)$ la solution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds} &= V(s;x,v,t), & s \in [\tau_i, \tau_o] \\ X(t;x,v,t) &= x, \\ \dfrac{dV}{ds} &= E(s, X(s;x,v,t)), & s \in [\tau_i, \tau_o] \\ V(t;x,v,t) &= v. \end{cases} \tag{4.5}$$

où $\tau_i = \tau_i(x, v, t)$ ($\tau_o = \tau_o(x, v, t)$) est le temps d'entrée (resp. de sortie) d'une particule dans le domaine Ω :

$$(X(\tau_i), V(\tau_i)) \in \Sigma^- \tag{4.6}$$

et :

$$(X(\tau_o), V(\tau_o)) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^0. \tag{4.7}$$

Les sous-ensembles de $\partial\Omega \times I\!R^d_v$, Σ^+ et Σ^0 sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \{(x, v) \in \partial\Omega \times I\!R^d_v \mid v \cdot \nu(x) > 0\}, \\ \Sigma^0 &= \{(x, v) \in \partial\Omega \times I\!R^d_v \mid v \cdot \nu(x) = 0\}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on déduit que les caractéristiques sont bien définies. Par intégration le long des caractéristiques, la solution du problème (4.4) s'écrit :

$$\theta(t, x, v) = -\int_t^{\tau_o} \varphi(s, X(s; x, v, t), V(s; x, v, t))ds. \tag{4.8}$$

Formellement, (4.3) conduit à :

$$\begin{aligned} < f, \varphi > \quad &= \quad -\int_0^T dt \int_{\Sigma^-} d\sigma(x)\, dv\, v \cdot \nu(x) g(t, x, v) \\ &\qquad \int_t^{\tau_o(x,v,t)} \varphi(s, X(s; x, v, t), V(s; x, v, t))ds, \end{aligned} \tag{4.9}$$

ce qui est équivalent à:

$$f(t, x, v) = \begin{cases} g(\tau_i, X(\tau_i; x, v, t), V(\tau_i; x, v, t)), & \text{si} \quad \tau_i > -\infty, \\ \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.10}$$

Définition 4.1.2 *Soit $E \in (L^\infty(I\!R_t; W^{1,\infty}(\Omega)))^d$ et $g \in L^1_{loc}(I\!R_t \times \Sigma^-)$ des fonctions T-périodiques. La solution par caractéristiques périodique $f \in L^1_{loc}(I\!R_t \times \Omega \times I\!R^d_v)$ du problème (4.1) est donnée par (4.9).*

Remarque 4.1.2 *En général il n'y a pas d'unicité pour la solution faible puisque f peut prendre des valeurs arbitraires sur les caractéristiques ne rencontrant pas le bord ($\tau_i = -\infty$). Mais il est possible de démontrer que la solution par caractéristiques est l'unique solution minimale de l'équation de transport. Ce type de solution a été tout d'abord introduit pour l'étude des solutions stationnaires (voir [41] et [7]).*

Remarque 4.1.3 *Puisque le champ électrique E est supposé T-périodique en temps, on vérifie que $(X(s+T;x,v,t+T), V(s+T;x,v,t+T)) = (X(s;x,v,t), V(s;x,v,t))$. En utilisant cette relation, on peut montrer facilement la périodicité de la solution par caractéristiques.*

Remarque 4.1.4 *Si $g \in C^1(I\!R_t \times \Sigma^-)$ alors la solution par caractéristiques est une solution classique de (4.1).*

4.1.2 Estimation du temps de vie des particules

Afin d'assurer des estimations L^∞ pour la densité de charge et de courant, nous imposons les conditions suivantes :

$$\|E\|_{L^\infty(I\!R_t \times \Omega)} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{\mid v_0 \mid^2}{\delta(\Omega)}, \tag{4.11}$$

$$E \in (L^\infty(I\!R_t; W^{1,\infty}(\Omega)))^d, \tag{4.12}$$

$$supp(g) \subset \{(t,x,v) \mid t \in I\!R_t, x \in \partial\Omega, v \cdot \nu(x) < 0, v_0 \leq |v| \leq v_1\}. \tag{4.13}$$

Ici, $\delta(\Omega)$ représent le diamètre de Ω et les vitesses v_0,v_1 sont des constantes positives. Avec ces hypothèses, nous avons:

Lemme 4.1.1 *Supposons que le champ électrique et la donnée au bord vérifient (4.11), (4.12) et (4.13). Alors le temps de vie dans Ω des particules issues du support de g est fini :*

$$\tau_o(x,v,t) - \tau_i(x,v,t) \leq 2 \cdot \frac{\delta(\Omega)}{v_0}, \ \forall (t,x,v) \in supp(g). \tag{4.14}$$

Démonstration

Supposons qu'il y ait une particule issue du support de g à $t = \tau_i$ et qui reste toujours dans le domaine Ω à $t_1 > \tau_i + 2 \cdot \dfrac{\delta(\Omega)}{v_0}$. Conformément à (4.13), nous avons:

$$0 < v_0 \leq \mu \cdot V(\tau_i) \leq v_1,$$

où $\mu = V(\tau_i)/|V(\tau_i)|$. Par l'intégration de (4.5) sur $[\tau_i, t] \subset [\tau_i, t_1]$, nous obtenons:

$$X(t) = X(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} V(s)ds, \tag{4.15}$$

$$V(t) = V(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} E(s, X(s))ds. \tag{4.16}$$

En utilisant (4.16), on trouve pour tout $t \in [\tau_i, \tau_i + 2 \cdot \delta(\Omega)/v_0]$:

$$\begin{aligned} \mu \cdot V(t) &\geq \mu \cdot V(\tau_i) - \|E\|_{C^0(I\!R_t \times \Omega)} \cdot (t - \tau_i) \\ &\geq v_0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{|v_0|^2}{\delta(\Omega)} \cdot 2 \cdot \frac{\delta(\Omega)}{v_0} \\ &= \frac{v_0}{2}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Donc, la particule se déplace dans la direction μ au moins avec la vitesse $v_0/2$ pendant $t \in [\tau_i, \tau_i + 2 \cdot \delta(\Omega)/v_0]$. De plus, on peut choisir $\varepsilon > 0$ et $t_\varepsilon = \tau_i + 2 \cdot \delta(\Omega)/v_0 + \varepsilon < t_1$ tels que:

$$\mu \cdot V(t) > 0, \forall t \in [\tau_i, t_\varepsilon]. \tag{4.18}$$

En utilisant à nouveau (4.5), nous avons:

$$\begin{aligned} |X(t_\varepsilon) - X(\tau_i)| &\geq |\mu \cdot (X(t_\varepsilon) - X(\tau_i))| \\ &= \int_{\tau_i}^{t_\varepsilon} \mu \cdot V(s)ds \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_i + 2\cdot\delta(\Omega)/v_0 + \varepsilon} \mu \cdot V(s)ds \\ &\geq \left(2 \cdot \frac{\delta(\Omega)}{v_0} + \varepsilon\right) \cdot \frac{v_0}{2} = \delta(\Omega) + \varepsilon \cdot \frac{v_0}{2}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

qui est en contradiction avec $X(t_\varepsilon) \in \Omega$.

Corollaire 4.1.1 *Supposons les memes hypothèses que dans le Lemme 4.1.1 (4.11), (4.12), (4.13) et soit f la solution par caractéristiques de la Définition 4.1.2. Alors nous avons:*

$$supp(f) \subset \{(t, x, v) | t \in I\!R_t, x \in \Omega, \frac{v_0}{2} \leq |v| \leq v_1 + \frac{v_0}{2}\}. \tag{4.20}$$

Démonstration

Nous déduisons l'estimation (4.20) en utilisant le lemme précédent. Conformément à (4.16), on obtient:

$$V(t) = V(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} E(s, X(s))ds, \tag{4.21}$$

et donc :

$$\begin{aligned} |V(t)| &\geq |V(\tau_i)| - \|E\|_{C^0(\mathbb{R}_t \times \Omega)} \cdot (t - \tau_i) \\ &\geq v_0 - 2 \cdot \frac{\delta(\Omega)}{v_0} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{|v_0|^2}{\delta(\Omega)} \\ &= \frac{v_0}{2}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

et :

$$\begin{aligned} |V(t)| &\leq |V(\tau_i)| + \|E\|_{C^0(\mathbb{R}_t \times \Omega)} \cdot (t - \tau_i) \\ &\leq v_1 + 2 \cdot \frac{\delta(\Omega)}{v_0} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{|v_0|^2}{\delta(\Omega)} \\ &= v_1 + \frac{v_0}{2}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

4.1.3 Équation de Vlasov avec terme d'absorption

Lemme 4.1.2 *Soient $E \in (L^\infty(\mathbb{R}_t; W^{1,\infty}(\Omega)))^d$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma^-)$ des fonctions T-périodiques qui vérifient (4.11), (4.13). Alors la solution faible périodique dans $L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Omega \times \mathbb{R}^d_v)$ de l'équation de Vlasov modifiée :*

$$\begin{cases} \alpha \cdot f + \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_t \times \Omega \times \mathbb{R}^d_v, \\ f = g, & (t, x, v) \in \mathbb{R}_t \times \Sigma^-. \end{cases} \tag{4.24}$$

est unique et donc elle est la solution par caractéristiques.

Démonstration Supposons que f est une solution faible périodique dans $L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Omega \times \mathbb{R}^d_v)$ avec $g = 0$. Nous avons :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = -\alpha \cdot f \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Omega \times \mathbb{R}^d_v), \tag{4.25}$$

et donc (cf. [4], [27]) nous obtenons:

$$\begin{aligned} -\alpha \cdot f^2 &= f(\partial_t f + v\cdot\nabla_x f + E\cdot\nabla_v f) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_t f^2 + v\cdot\nabla_x f^2 + E\cdot\nabla_v f^2). \end{aligned}$$

Par l'intégration de cette relation sur $]0,T[\times\Omega\times I\!R^d_v$ on déduit :

$$\begin{aligned} \alpha\int_0^T\int_\Omega\int_{I\!R^d_v} f^2 dv dx dt &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\int_{I\!R^d_v} v\cdot\nu(x) f^2 dv d\sigma dt \\ &\le -\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Sigma^-} v\cdot\nu(x) f^2 dv d\sigma dt = 0. \end{aligned}$$

4.2 Solutions périodiques du système de Vlasov-Poisson 1D

Dans cette section nous considérons le cas mono-dimensionnel et Ω est l'intervalle $]0,1[$.

4.2.1 Continuité des caractéristiques

On travaille sous les hypothèses (4.11), (4.12),(4.13), qui assurent un temps de vie fini $T_{out} = 2/v_0$ et une vitesse minimale $v_{min} = v_0/2$ pour toutes les particules. On montre la continuité C^0 des caractéristiques de l'équation de Vlasov.

Lemme 4.2.1 *Considérons une suite de champs électriques $(E_n)_{n\ge1}$ qui vérifie :*

$$\|E_n\|_{C^0(I\!R_t\times[0,1])} \le \frac{|\,v_0\,|^2}{4}, \tag{4.26}$$

$$|\,E_n(t,x) - E_n(t,y)\,| \le L\,|\,x-y\,|, \forall t\in I\!R_t, x,y\in[0,1], \tag{4.27}$$

$$\lim_{n\to\infty} E_n = E \qquad dans \qquad C^0(I\!R_t\times[0,1]), \tag{4.28}$$

et soit $g\in L^\infty(I\!R_t\times\Sigma^-)$ une fonction telle que :

$$\begin{aligned} supp(g) &\subset \{(t,0,v)\mid t\in I\!R_t,\ 0<v_0\le v\le v_1\} \\ &\cup \{(t,1,v)\mid t\in I\!R_t,\ -v_1\le v\le -v_0\}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Alors nous avons $\forall s \in (\tau_i^n, \tau_o^n) \cap (\tau_i, \tau_o)$ *:*

$$
\begin{aligned}
|X_n(s) - X(s)| &\leq \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2} \|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right), \\
|V_n(s) - V(s)| &\leq \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2} \|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right),
\end{aligned}
$$

et aussi :

$$
|\tau_{o,i}^n - \tau_{o,i}| \leq \left(\frac{2}{v_0}\right)^{3/2} \cdot \|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right) \tag{4.30}
$$

Démonstration

D'abord on remarque que (4.26), (4.27) sont aussi vérifiés par E. Donc les caractéristiques associées à E sont bien définies. Soit $(t, x, v) \in I\!R_t \times (0,1) \times I\!R_v$. On multiplie (4.5) par $X_n(s; x, v, t) - X(s; x, v, t)$ et $V_n(s; x, v, t) - V(s; x, v, t)$ pour obtenir $\forall s \in (\tau_i^n, \tau_o^n) \cap (\tau_i, \tau_o)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|X_n(s) - X(s)|^2 &+ \frac{1}{2}\frac{d}{ds}|V_n(s) - V(s)|^2 = \\
&= (X_n(s) - X(s)) \cdot (V_n(s) - V(s)) \\
&+ (E_n(s, X_n(s)) - E(s, X(s))) \cdot (V_n(s) - V(s)) \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot |X_n(s) - X(s)|^2 + \frac{1}{2} \cdot |V_n(s) - V(s)|^2 \\
&+ (L \cdot |X_n(s) - X(s)| + \|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])}) \\
&\times |V_n(s) - V(s)| \\
&\leq \frac{L+2}{2}(|X_n(s) - X(s)|^2 + |V_n(s) - V(s)|^2) \\
&+ \frac{1}{2}\|E_n - E\|^2_{C^0(I\!R_t \times [0,1])},
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

qui nous conduit à :

$$
\begin{aligned}
|X_n(s) - X(s)|^2 &+ |V_n(s) - V(s)|^2 \leq \\
&\leq (L+2) \int_t^s |X_n(\tau) - X(\tau)|^2 + |V_n(\tau) - V(\tau)|^2 d\tau \\
&+ |t - s| \|E_n - E\|^2_{C^0(I\!R_t \times [0,1])}.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

En utilisant le Lemme de Gronwall (et le *Lemme 4.1.1*), nous déduisons que $\forall s \in (\tau_i^n, \tau_o^n) \cap (\tau_i, \tau_o)$:

$$\begin{aligned} |X_n(s) - X(s)|^2 + |V_n(s) - V(s)|^2 &\leq \frac{2}{v_0} \cdot \|E_n - E\|^2_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \\ &\quad \exp\left(2\frac{L+2}{v_0}\right), \end{aligned} \tag{4.33}$$

et aussi :

$$|X_n(s) - X(s)| \leq \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2} \|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \cdot \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right), \tag{4.34}$$

$$|V_n(s) - V(s)| \leq \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2} \|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \cdot \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right), \tag{4.35}$$

puisque $|t - s| \leq \dfrac{2}{v_0}$. Afin d'estimer la différence entre les temps d'entrée, supposons que $\tau_i \leq \tau_i^n$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{2} \cdot |\tau_i^n - \tau_i| &\leq \left| \int_{\tau_i^n}^{\tau_i} \frac{dX}{ds} ds \right| \\ &= |X(\tau_i^n) - X(\tau_i)| \\ &= |X(\tau_i^n) - X_n(\tau_i^n)| \\ &\leq \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2} \|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \cdot \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right), \end{aligned} \tag{4.36}$$

puisque $X(\tau_i) = X_n(\tau_i^n)$ et donc :

$$|\tau_i^n - \tau_i| \leq \left(\frac{2}{v_0}\right)^{3/2} \cdot \|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \cdot \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right).$$

Si l'autre inégalité est vérifiée $\tau_i > \tau_i^n$, on peut trouver la même relation en remplaçant X, V, τ_i par X_n, V_n, τ_i^n respectivement. Le même calcul nous conduit à une estimation similaire pour les temps de sortie :

$$|\tau_o^n - \tau_o| \leq \left(\frac{2}{v_0}\right)^{3/2} \cdot \|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \cdot \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right). \tag{4.37}$$

Lemme 4.2.2 *Supposons les mêmes hypothèses que dans le Lemme 4.2.1. Si en plus* $g \in W^{1,\infty}(I\!R_t \times \Sigma^-)$ *et si on note par* f_n,f *les solutions données par (4.10) qui correspondent aux champs électriques* E_n,E*, nous avons l'estimation :*

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^\infty(I\!R_t\times(0,1)\times I\!R_v)} &\le \|g\|_{W^{1,\infty}(I\!R_t\times\Sigma^-)}\cdot\|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t\times[0,1])} \\ &\cdot \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2}\left(1+\frac{v_0}{2}+\frac{2}{v_0}\right)\cdot\exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right) \end{aligned} \tag{4.38}$$

Démonstration
Supposons que $\tau_i \le \tau_i^n$ alors, en utilisant le *Lemme 4.2.1* et (4.26), la différence entre les vitesses d'entrée est donnée par :

$$\begin{aligned} |V_n(\tau_i^n) - V(\tau_i)| &\le |V_n(\tau_i^n) - V(\tau_i^n)| + |V(\tau_i^n) - V(\tau_i)| \\ &\le \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2}\|E_n - E\|_{C^0}\cdot\exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right) + \left|\int_{\tau_i^n}^{\tau_i}\frac{dV}{ds}ds\right| \\ &\le \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2}\|E_n - E\|_{C^0}\cdot\exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right) + |\tau_i^n - \tau_i|\cdot\|E\|_{C^0} \\ &\le \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2}\left(1+\frac{v_0}{2}\right)\cdot\|E_n - E\|_{C^0}\cdot\exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Supposons maintenant que $g \in W^{1,\infty}(I\!R_t\times\Sigma^-)$. On peut vérifier facilement la conclusion du lemme en utilisant (4.30) et (4.39):

$$\begin{aligned} |f_n(t,x,v) - f(t,x,v)| &= |g(\tau_i^n, 0, V_n(\tau_i^n)) - g(\tau_i, 0, V(\tau_i))| \\ &\le \|g\|_{W^{1,\infty}(I\!R_t\times\Sigma^-)} \\ &\times \left(|\tau_i^n - \tau_i| + |V_n(\tau_i^n) - V(\tau_i)|\right) \\ &\le \|g\|_{W^{1,\infty}(I\!R_t\times\Sigma^-)}\|E_n - E\|_{C^0(I\!R_t\times[0,1])} \\ &\times \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2}\left(1+\frac{v_0}{2}+\frac{2}{v_0}\right)\exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right). \end{aligned} \tag{4.40}$$

4.2.2 Existence

Dans cette section nous montrons un résultat d'existence de solution périodique par caractéristiques pour le problème de Vlasov-Poisson dans une dimension d'espace.

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \partial_x f + E \cdot \partial_v f = 0, & (t,x,v) \in I\!R_t \times [0,1] \times I\!R_v, \\ f = g, & (t,x,v) \in I\!R_t \times \Sigma^-, \\ E(t,x) = \partial_x \varphi_x(t,x), & (t,x) \in I\!R_t \times [0,1], \\ \partial^2_{xx}\varphi = \displaystyle\int_{I\!R_v} f(t,x,v)dv, & (t,x) \in I\!R_t \times [0,1], \\ \varphi(t,0) = 0, & t \in I\!R_t, \\ \varphi(t,1) = \varphi_1(t), & t \in I\!R_t,\ \varphi_1\ T-\text{périodique}.I\!R_v, \end{cases} \tag{4.41}$$

On veut utiliser le théorème du point fixe de Schauder. On définit une application qui transforme un champ électrique périodique E dans un autre champ électrique E_1 où E_1 est définit comme il suit. Soit f la solution périodique par caractéristiques de la *Définition 4.1.2* qui correspond au champ électrique E. Le champ électrique $E^1 = \partial_x\varphi$ est déterminé en utilisant l'équation de Poisson avec la densité $\rho(t,x) = \int_{I\!R_v} f(t,x,v)\,dv$. Pour assurer l'invariance du domaine on impose des hypothèses supplémentaires. Nous avons :

Théorème 4.2.1 *Soient $g \in L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)$ une fonction périodique, φ_1 une fonction T-périodique continue, $0 < v_0 < v_1$ tels que:*

$$\begin{aligned} supp(g) \ &\subset\ \{(t,0,v) \mid t \in I\!R_t,\ 0 < v_0 \le v \le v_1\} \\ &\cup\ \{(t,1,v) \mid t \in I\!R_t,\ -v_1 \le v \le -v_0\}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\|\varphi_1\|_{L^\infty(I\!R_t)} + 3 \cdot v_1 \cdot \|g\|_{L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)} \le \frac{|v_0|^2}{4}. \tag{4.43}$$

Alors, le système (4.41) a au moins une solution périodique par caractéristiques.

Démonstration

On denote par $\mathcal{F} : X \to X$ l'application :

$$E \to f_E \to \rho_E \to E^1 = \partial_x\varphi, \tag{4.44}$$

où :

$$\begin{aligned} E \in X = \ &\{e \in C^0(I\!R_t \times [0,1]);\ \|e\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1]} \le \frac{|v_0|^2}{4}, \\ &|e(t,x) - e(t,y)| \le L \cdot |x-y|,\ \forall\ x,y \in [0,1], \\ &e(t,x) = e(t+T,x),\ \forall\ (t,x) \in I\!R_t \times [0,1]\}, \end{aligned} \tag{4.45}$$

avec :

$$L = 2 \cdot v_1 \cdot \|g\|_{L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)}. \tag{4.46}$$

Ici f_E est la solution par caractéristiques donnée par (4.9) et $E^1 = \partial_x \varphi$ est la solution du problème de Poisson :

$$\begin{cases} \partial^2_{xx}\varphi = \rho_E = \displaystyle\int_{I\!R_v} f(t,x,v)dv, & (t,x) \in I\!R_t \times [0,1], \\ \varphi(t,0) = 0, & t \in I\!R_t, \\ \varphi(t,1) = \varphi_1(t), & t \in I\!R_t. \end{cases} \tag{4.47}$$

Pas 1 *L'application $\mathcal{F}$ est bien définie ($\mathcal{F}(X) \subset X$).*

Soit $E \in X$. En utilisant le *Corollaire 4.1.1* (4.20), nous obtenons :

$$\|\rho\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \leq 2 \cdot v_1 \cdot \|g\|_{L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)}. \tag{4.48}$$

Le champ électrique E^1 s'écrit :

$$E^1(t,x) = \varphi_1(t) - \int_0^1 (1-y) \cdot \rho_E(t,y)dy + \int_0^x \rho_E(t,y)dy, \tag{4.49}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \|E^1\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} &\leq \|\varphi_1\|_{L^\infty} + \frac{3}{2} \cdot \|\rho_E\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \\ &\leq \|\varphi_1\|_{L^\infty} + 3 \cdot v_1 \cdot \|g\|_{L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)} \\ &\leq \frac{|v_0|^2}{4}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Le champ électrique E^1 vérifie aussi :

$$\begin{aligned} |E^1(t,x) - E^1(t,y)| &\leq \|\partial_x E^1\|_{L^\infty(I\!R_t \times [0,1])} \cdot |x-y| \\ &= \|\rho_E\|_{L^\infty(I\!R_t \times [0,1])} \cdot |x-y| \\ &\leq 2 \cdot v_1 \cdot \|g\|_{L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)} \cdot |x-y| \\ &= L \cdot |x-y|. \end{aligned} \tag{4.51}$$

De plus, puisque E est périodique en temps, f_E, ρ_E, φ et E^1 sont aussi périodiques, et alors $E^1 = \mathcal{F}(E) \in X$.

Pas 2 *L'application $\mathcal{F}$ est compacte pour la topologie de $C^0(I\!R_t \times [0,1])$.*

Nous montrons que $\mathcal{F}(X)$ est compact. Pour cela nous allons déduire une estimation de la dérivée temporelle de $E^1 = \mathcal{F}(E), E \in X$. De (4.49) nous obtenons :

$$\partial_t(E^1 - \varphi_1) = -\int_0^1 (1-y)\partial_t \rho_E dy + \int_0^x \partial_t \rho_E dy.$$

Maintenant on utilise la loi de conservation de la charge $\partial_t \rho_E + \partial_x j_E = 0$, où $j_E = \int_v v f_E dv$. Une intégration par parties conduit à :

$$\partial_t(E^1 - \varphi_1) = \int_0^1 j_E(t,y)dy - j_E(t,x).$$

Ainsi, de (4.45) nous obtenons que $E^1 - \varphi_1$ vérifie la condition de Lipschitz en espace et en temps. En utilisant le théorème d'Ascoli, on déduit que $E^1 - \varphi_1$ et E^1 restent dans un compact de $C^0([0,T] \times [0,1])$.

Pas 3 *L'application* $\mathcal{F} : (X, C^0(I\!R_t \times [0,1])) \to (X, C^0(I\!R_t \times [0,1]))$ *est continue.*

Soit $(E_n)_{n\geq 1} \subset X$, $\lim_{n\to\infty} E_n = E$ dans $C^0(I\!R_t \times [0,1])$. On denote par f_n la solution par caractéristiques donnée par (4.9) qui correspond à E_n. En utilisant (4.37), (4.34) et (4.35), on passe à la limite pour $n \to \infty$ in (4.9) qui s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} < f_n, \varphi > \; &= \qquad\qquad (4.52)\\ &- \int_0^T \int_{v<0} \int_t^{\tau_o^n} v \cdot g(t,1,v) \cdot \varphi(s, X_n(s;1,v,t), V_n(s;1,v,t)) ds dv dt \\ &+ \int_0^T \int_{v>0} \int_t^{\tau_o^n} v \cdot g(t,0,v) \cdot \varphi(s, X_n(s;0,v,t), V_n(s;0,v,t)) ds dv dt. \end{aligned}$$

En utilisant le *Lemme 4.2.1* on peut passer à la limite dans cette expression. Donc f_n est une suite convergente au sense de distributions dont la limite f est la solution par caractéristiques qui correspond au champ E. De plus, de l'estimation uniforme dans $L^\infty(I\!R_t \times (0,1))$ on déduit :

$$f_n \rightharpoonup f, \qquad \text{faible} \star \text{ dans } L^\infty(I\!R_t \times (0,1) \times I\!R_v). \tag{4.53}$$

De la même façon, les densités ρ_n convergent faiblement, puisque les supports de f_n sont bornés en vitesse :

$$\rho_n = \int_{I\!R_v} f_n(t,x,v)dv \rightharpoonup \rho = \int_{I\!R_v} f(t,x,v)dv, \qquad \text{faible} \star \text{ dans } L^\infty(I\!R_t \times (0,1)). \tag{4.54}$$

D'autre part, la convergence faible de ρ_n implique la convergence faible de $\mathcal{F}(E_n)$ vers $\mathcal{F}(E)$ (pour l'instant dans $L^\infty(I\!R_t \times [0,1])$). Puisque $\mathcal{F}$ est compact, on déduit que $\mathcal{F}(E_n) \to \mathcal{F}(E)$ dans $C^0(I\!R_t \times [0,1])$. Cela montre la continuité de l'application $\mathcal{F}$. Maintenant, en utilisant le théorème du point fixe de Schauder, on prouve l'existence de la solution faible périodique du problème de Vlasov-Poisson mono-dimensionnel, ce qui conclut la preuve du *Théorème 4.2.1.*

4.2.3 Unicité

Dans cette section nous nous sommes intéressés aux résultats d'unicité.

Théorème 4.2.2 *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 4.2.1, en supposant de plus que* $g \in W^{1,\infty}(I\!R_t \times \Sigma^-)$ *et :*

$$\|g\|_{W^{1,\infty}(I\!R_t\times\Sigma^-)} < \frac{\left(\frac{v_0}{2}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(-\frac{L+2}{v_0}\right)}{3 \cdot v_1 \cdot \left(1 + \frac{v_0}{2} + \frac{2}{v_0}\right)}, \tag{4.55}$$

alors le système (4.41) a une solution faible périodique unique.

Démonstration

L'existence a été déjà montrée dans la section précédente. Afin de montrer l'unicité, nous allons démontrer que l'application $\mathcal{F}$ est une contraction. Soient $E, F \in X$ deux champs électriques et notons par f_E, f_F les solutions correspondantes. Le *Lemme 4.2.2* (4.38) et le fait que f_E, f_F aient les supports bornés en vitesse, nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \|\rho_E - \rho_F\|_{C^0(I\!R_t\times[0,1])} &\leq 2 \cdot v_1 \cdot \|g\|_{W^{1,\infty}(I\!R_t\times\Sigma^-)} \cdot \|E - F\|_{C^0(I\!R_t\times[0,1])} \\ &\cdot \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{v_0}{2} + \frac{2}{v_0}\right) \cdot \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right) \end{aligned} \tag{4.56}$$

De la formule (4.49), on déduit :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(E) - \mathcal{F}(F)\|_{C^0(I\!R_t\times[0,1])} &\leq \frac{3}{2} \cdot \|\rho_E - \rho_F\|_{C^0(I\!R_t\times[0,1])} \\ &\leq 3 \cdot v_1 \cdot \|g\|_{W^{1,\infty}(I\!R_t\times\Sigma^-)} \cdot \|E - F\|_{C^0(I\!R_t\times[0,1])} \\ &\cdot \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{v_0}{2} + \frac{2}{v_0}\right) \cdot \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right). \end{aligned} \tag{4.57}$$

Finalement on obtient :

$$\|\mathcal{F}(E) - \mathcal{F}(F)\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])} \leq q \cdot \|E - F\|_{C^0(I\!R_t \times [0,1])}, \tag{4.58}$$

où q est donné par :

$$q = 3 \cdot \left(\frac{2}{v_0}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{L+2}{v_0}\right) \cdot v_1 \cdot \left(1 + \frac{v_0}{2} + \frac{2}{v_0}\right) \cdot \|g\|_{W^{1,\infty}(I\!R_t \times \Sigma^-)} < 1. \tag{4.59}$$

4.3 Solutions périodiques du système de Vlasov-Poisson multi-dimensionnel

Dans ce paragraphe on étudie l'existence de solution faible périodique pour le problème de Vlasov-Poisson multi-dimensionnel :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + E \cdot \nabla_v f = 0, & (t,x,v) \in I\!R_t \times \Omega \times I\!R_v^d, \\ f = g, & (t,x,v) \in I\!R_t \times \Sigma^-, \\ E(t,x) = \nabla_x \varphi, & (t,x) \in I\!R_t \times \Omega, \\ \Delta_x \varphi = \displaystyle\int_{I\!R_v^d} f(t,x,v)dv, & (t,x) \in I\!R_t \times \Omega, \\ \varphi = \varphi_0, & (t,x) \in I\!R_t \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.60}$$

Ici, les données au bord g et φ_0 sont des fonctions T-périodiques. On cherche des solutions faibles périodiques $(f(t,x,v), \varphi(t,x,v))$. Comme précédemment, nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schauder. On définie une application qui associe à un potentiel électrique φ un autre φ_1 où φ_1 est définit comme il suit. Soit f la solution périodique par caractéristiques de la *Définition 4.1.2* qui correspond au champ électrique $E = \nabla_x \varphi$. Le potentiel φ_1 est déterminé par la résolution du problème de Poisson avec la densité $\rho(t,x) = \int_{I\!R_v^d} f(t,x,v)dv$. Malheureusement cette technique ne peut pas être utilisée directement puisque la *Définiton 4.1.2* demande que le champ électrique vérifie la condition de Lipschitz par rapport à x.En général on ne peut pas assurer une telle régularité et en conséquence on doit régulariser le potentiel. On doit introduir aussi un terme d'absorption dans l'équation de Vlasov afin d'avoir l'unicité de la solution faible. Donc la stratégie de la démonstration est la suivante. D'abord on montre l'existence de solution faible périodique pour le problème régularisé en utilisant le théorème de Schauder. Ensuite on passe à la limite pour le paramètre de la régularisation vers zéro.

4.3.1 Existence pour le problème régularisé

Soient $p > d+1$ un exposant positif et $\mathcal{X}$ l'ensemble de fuctions φ qui vérifient :

$$\begin{aligned}
\varphi \in L^\infty(I\!R_t; W^{2,p}(\Omega)) \quad &, \quad \|\varphi\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{2,p}(\Omega))} \leq C_1, && (4.61)\\
\partial_t\varphi \in L^\infty(I\!R_t; W^{1,p}(\Omega)) \quad &, \quad \|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{1,p}(\Omega))} \leq C_2, && (4.62)\\
\|\nabla_x\varphi\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Omega\times I\!R_v^d)} &\leq \frac{1}{4}\cdot\frac{|v_0|^2}{\delta(\Omega)}, && (4.63)\\
\varphi(t+T,\cdot) &= \varphi(t,\cdot), && (4.64)
\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes qui seront fixées par la suite. En tenant compte des conditions (4.61),(4.62), nous avons pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x\varphi\|^p_{W^{1,p}((0,T)\times\Omega)} &= \|\partial_t\nabla_x\varphi\|^p_{L^p((0,T)\times\Omega)}\\
&+ \sum_{i=1}^d \|\partial_{x_i}\nabla_x\varphi\|^p_{L^p((0,T)\times\Omega)}\\
&\leq K(C_1,C_2) \qquad (4.65)
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de compacité :

$$W^{1,p}((0,T)\times\Omega) \hookrightarrow C^0([0,T]\times\overline{\Omega}) \qquad (p > d+1,\ \delta(\Omega) < \infty),$$

on déduit que $\{\nabla_x\varphi | \varphi \in \mathcal{X}\}$ est un compact de $C^0([0,T]\times\overline{\Omega})$. On déduit que $\mathcal{X}$ est un compact de $C^0([0,T]; C^1(\overline{\Omega}))$. On introduit maintenant l'application de régularisation suivante :

$$\begin{aligned}
&R_\alpha : C^0([0,T]; C^1(\overline{\Omega})) \to C^0([0,T]; C^2(\overline{\Omega}))\\
&\varphi \mapsto R_\alpha\varphi(t,x) = \int_{I\!R_x^d} \zeta_\alpha(x-y)\cdot\overline{\varphi}(t,y)dy, \qquad (4.66)
\end{aligned}$$

où $\zeta_\alpha \geq 0$ est un noyau de régularization :

$$\begin{aligned}
\zeta_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^d}\zeta\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad &, \quad \zeta \in C_0^\infty(I\!R^d)\\
supp(\zeta) \subset B_1 \quad &, \quad \int_{I\!R^d}\zeta(u)du = 1.
\end{aligned}$$

Ici, $\overline{\cdot}$ est un opérateur d' extension linéaire de $C^1(\overline{\Omega})$ vers $C^1(I\!R^d)$ (à condition que la frontière du domaine $\partial\Omega$ soit C^1). Donc, $\overline{\varphi}$ est une extension T-périodique sur $I\!R_t \times I\!R_x^d$ de φ telle que :

$$\|\nabla_x\overline{\varphi}\|_{L^\infty(I\!R_t\times I\!R_x^d)} \leq \|\nabla_x\varphi\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Omega)}. \qquad (4.67)$$

Évidemment, R_α est bien défini est continu. De plus, (4.63) est préservé par cette application. Par définition $R_\alpha \varphi$ est T-périodique. Ensuite, on considère l'application :

$$\mathcal{F} : \varphi \in \mathcal{X} \mapsto \varphi_\alpha^1, \tag{4.68}$$

où:

$$\begin{cases} \Delta_x \varphi_\alpha^1(t) &= \displaystyle\int_{I\!R_v^d} f_\alpha(t,x,v)dv = \rho_\alpha(t), \qquad x \in \Omega \\ \\ \varphi_\alpha^1(t,x) &= \varphi_0(t,x), \qquad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.69}$$

Ci-dessus, f_α est la solution par caractéristiques de l'équation de Vlasov modifiée suivante qui correspond au champ $\nabla_x R_\alpha \varphi$:

$$\begin{cases} \alpha \cdot f_\alpha + \partial_t f_\alpha + v \cdot \nabla_x f_\alpha + \nabla_x R_\alpha \varphi \cdot \nabla_v f_\alpha = 0, & (t,x,v) \in I\!R_t \times \Omega \times I\!R_v^d, \\ \\ f_\alpha = g, & (t,x,v) \in I\!R_t \times \Sigma^-. \end{cases} \tag{4.70}$$

Le terme $\alpha \cdot f_\alpha$ change la formule (4.9) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} < f_\alpha, \theta > \quad &= \quad -\int_0^T dt \int_{\Sigma^-} dv d\sigma \int_t^{\tau_o^\alpha} v \cdot \nu(x) g(t,x,v) \\ & \qquad \theta(s, X_\alpha(s;x,v,t), V_\alpha(s;x,v,t)) e^{-\alpha(s-t)} ds. \end{aligned} \tag{4.71}$$

On montre maintenant que l'application $\mathcal{F}$ transforme $\mathcal{X}$ dans lui-même et qu'elle est continue sur $C^0([0,T]; C^1(\overline{\Omega}))$ pour un choix convenable des constantes C_1 et C_2 et pour de petites données au bord.

Pas 1 *Invariance du domaine.*

Soient $\varphi \in \mathcal{X}$ le potentiel électrique et $\varphi_\alpha = R_\alpha \varphi$ sa régularisation. On vérifie (4.11), (4.12), (4.13) et du *Lemme 4.1.1* on déduit l'existence d'un temps de vie fini $2 \cdot \delta(\Omega)/v_0$. En utilisant le *Corollaire 4.1.1* nous obtenons aussi :

$$\begin{aligned} \|\rho_\alpha\|^p_{L^\infty(I\!R_t; L^p(\Omega))} &= \sup_{t \in I\!R_t} \int_\Omega |\rho_\alpha(t,x)|^p dx \\ &= \sup_{t \in I\!R_t} \int_\Omega \left| \int_{v_0/2 \le |v| \le v_1 + v_0/2} f_\alpha(t,x,v) dv \right|^p dx \\ &\le \|g\|^p_{L^\infty(\Sigma^-)} \, vol(\Omega) \, \omega_d^p \\ & \quad \left[\left(v_1 + \frac{v_0}{2}\right)^d - \left(\frac{v_0}{2}\right)^d \right]^p, \end{aligned}$$

où ω_d est le volume de la boule unité de $I\!R^d$. Maintenant si on fait appel aux résultats de régularité pour le problème de Poisson, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\alpha^1\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{2,p}(\Omega))} &\le C_p(\Omega)\ (\|\varphi_0\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{2-1/p,p}(\partial\Omega))} + \|\rho_\alpha\|_{L^\infty(I\!R_t;L^p(\Omega))})\\
&\le C_p(\Omega)\ (\|\varphi_0\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{2-1/p,p}(\partial\Omega))} + vol(\Omega)^{1/p}\\
&\cdot\ \|g\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Sigma^-)}\ \omega_d\ \left[\left(v_1+\frac{v_0}{2}\right)^d - \left(\frac{v_0}{2}\right)^d\right])\\
&= C_1
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Nous allons choisir :

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_p(\Omega)\ (\|\varphi_0\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{2-1/p,p}(\partial\Omega))} + vol(\Omega)^{1/p}\cdot\|g\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Sigma^-)}\\
&\quad \omega_d\ \left[\left(v_1+\frac{v_0}{2}\right)^d - \left(\frac{v_0}{2}\right)^d\right]),
\end{aligned} \tag{4.73}$$

tel que φ_α^1 vérifie (4.61). Finalement, en prenant la dérivée de (4.69) par rapport à t et en utilisant l'équation de continuité, on obtient :

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta_x\partial_t\varphi_\alpha^1 &= \partial_t\rho_\alpha(t) = -\nabla_x\cdot j_\alpha, \qquad x\in\Omega\\
\partial_t\varphi_\alpha^1(t,x) &= \partial_t\varphi_0(t,x), \qquad x\in\partial\Omega,
\end{aligned}\right. \tag{4.74}$$

avec $j_\alpha = \int v f_\alpha(t,x,v)dv$. On observe que :

$$\begin{aligned}
&\|\nabla_x\cdot j_\alpha\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{-1,p}(\Omega))}\\
&\qquad\le \|j_\alpha\|_{L^\infty(I\!R_t;L^p(\Omega))}\\
&\qquad\le \|g\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Sigma^-)}\ vol(\Omega)^{1/p}\ (v_1+v_0/2)\\
&\qquad\quad \omega_d\ \left[\left(v_1+\frac{v_0}{2}\right)^d - \left(\frac{v_0}{2}\right)^d\right]
\end{aligned}$$

qui conduit à :

$$\begin{aligned}
\|\partial_t\varphi_\alpha^1\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{1,p}(\Omega))} &\le C_p(\Omega)\ (\|\partial_t\varphi_0\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{1-1/p,p}(\partial\Omega))} + vol(\Omega)^{1/p}\ \omega_d\\
&\quad \|g\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Sigma^-)}\ \left[\left(v_1+\frac{v_0}{2}\right)^d - \left(\frac{v_0}{2}\right)^d\right]\ \left(v_1+\frac{v_0}{2}\right)).
\end{aligned}$$

Ensuite on choisit :

$$\begin{aligned} C_2 &= C_p(\Omega)\,(\|\partial_t\varphi_0\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{1-1/p,p}(\partial\Omega))} + vol(\Omega)^{1/p}\,\|g\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Sigma^-)} \\ &\quad \omega_d\left[\left(v_1+\frac{v_0}{2}\right)^d-\left(\frac{v_0}{2}\right)^d\right]\,\left(v_1+\frac{v_0}{2}\right)). \end{aligned} \tag{4.75}$$

Maintenant on peut montrer (4.63). Soit $C_s(\Omega)$ la constante de Sobolev telle que :

$$\begin{aligned} \|\nabla_x\varphi^1_\alpha\|_{C^0(\Omega)} &\le C_s(\Omega)\cdot\|\nabla_x\varphi^1_\alpha\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\le C_s(\Omega)\cdot\|\varphi^1_\alpha\|_{W^{2,p}(\Omega)} \\ &\le C_s(\Omega)C_p(\Omega)\cdot(\|\varphi_0\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{2-1/p,p}(\partial\Omega))}+vol(\Omega)^{1/p} \\ &\quad \|g\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Sigma^-)}\left[\left(v_1+\frac{v_0}{2}\right)^d-\left(\frac{v_0}{2}\right)^d\right]\quad\omega_d) \end{aligned} \tag{4.76}$$

Cette estimation nous conduit à la condition sur les données sous laquelle on peut montrer notre résultat d'existence.

Hypothèse

Dès maintenant nous supposons que les données vérifient la condition suivante :

$$\begin{aligned} &\|\varphi_0\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{2-1/p,p}(\partial\Omega))}+vol(\Omega)^{1/p}\cdot\|g\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Sigma^-)} \\ \omega_d\cdot&\left[\left(v_1+\frac{v_0}{2}\right)^d-\left(\frac{v_0}{2}\right)^d\right]\le\frac{|v_0|^2}{4\cdot C_s(\Omega)\cdot C_p(\Omega)\cdot\delta(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.77}$$

On résume les résultats obtenus ci-dessus dans :

Lemme 4.3.1 *Sous l'hypothèse (4.77) avec C_1 et C_2 donnés par (4.73), (4.75), $\mathcal{F}$ transforme $\mathcal{X}$ dans lui-même.*

Pas 2 *Continuité.*

On travaille dans la topologie de $C^0(I\!R_t;C^1(\overline{\Omega}))$ muni avec la norme :

$$|\varphi| = \|\varphi\|_{L^\infty}+\|\nabla_x\varphi\|_{L^\infty}. \tag{4.78}$$

Soit $(\varphi_n)_{n\ge1}\subset\mathcal{X}$, $\varphi_n\to\varphi$ une suite convergente dans $C^0(I\!R_t;C^1(\overline{\Omega}))$. En utilisant la continuité de R_α, nous avons aussi $R_\alpha\varphi_n\to R_\alpha\varphi$ dans $C^0(I\!R_t;C^1(\overline{\Omega}))$. Soit $f_{n,\alpha}$ la solution par caractéristiques de l'équation modifiée de Vlasov qui correspond au champ $\nabla_x R_\alpha \varphi_n$. Évidemment, nous avons l'estimation :

$$\|f_{n,\alpha}\|_{L^\infty(I\!R_t \times \Omega \times I\!R_v^d)} \leq \|g\|_{L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)}.$$

Par un argument standard de compacité, on peut extraire une sous-suite de $(f_{n,\alpha})_{n\geq 1}$ telle que :

$$f_{n,\alpha} \rightharpoonup f_\alpha \text{ dans } L^\infty(I\!R_t \times \Omega \times I\!R_v^d), \quad faible \star. \tag{4.79}$$

En utilisant la formulation faible, pour toute fonction $\theta \in \mathcal{V}$ nous avons :

$$\int_0^T \int_\Omega \int_{I\!R_v^d} f_{n,\alpha}(t,x,v)(-\alpha \cdot \theta + \partial_t \theta + v \cdot \nabla_x \theta + \nabla_x R_\alpha \varphi_n \cdot \nabla_v \theta) dv dx dt =$$
$$= \int_0^T \int_{\Sigma^-} v \cdot \nu(x) \cdot g(t,x,v) \cdot \theta(t,x,v) dv d\sigma dt$$

et on déduit que f_α est une solution faible de l'équation de Vlasov modifiée qui correspond au champ $\nabla_x R_\alpha \varphi \in C^0(I\!R_t; C^1(\Omega))$:

$$\int_0^T \int_\Omega \int_{I\!R_v^d} f_\alpha(t,x,v)(-\alpha \cdot \theta + \partial_t \theta + v \cdot \nabla_x \theta + \nabla_x R_\alpha \varphi \cdot \nabla_v \theta) dv dx dt =$$
$$= \int_0^T \int_{\Sigma^-} v \cdot \nu(x) \cdot g(t,x,v) \cdot \theta(t,x,v) dv d\sigma dt$$

Maintenant, en utilisant le *Lemme 4.1.2* , on déduit que f_α est la solution par caractéristiques de l'équation de Vlasov modifiée associée au champ $\nabla_x R_\alpha \varphi \in C^0(I\!R_t; C^1(\Omega))$:

$$\begin{aligned} < f_\alpha, \theta > &= -\int_0^T \int_{\Sigma^-} \int_t^{\tau_o^\alpha} v \cdot \nu(x) \cdot g(t,x,v) \\ &\cdot \quad \theta(s, X_\alpha(s;x,v,t), V_\alpha(s;x,v,t)) \cdot e^{-\alpha(s-t)} ds dv d\sigma dt. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Comme la limite est unique, la suite entière converge faiblement :

$$f_{n,\alpha} \rightharpoonup f_\alpha \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty(I\!R_t \times \Omega \times I\!R_v^d).$$

De plus, comme $f_{n,\alpha}$ a le support en vitesse compact, nous avons :

$$\rho_{n,\alpha} \rightharpoonup \rho_\alpha \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty(I\!R_t \times \Omega),$$

qui donne :

$$\rho_{n,\alpha} \rightharpoonup \rho_\alpha \text{ faible } \star \text{ dans } L^r(I\!R_t \times \Omega).$$

On obtient :

$$\mathcal{F}(\varphi_n)(t) \rightharpoonup \mathcal{F}(\varphi)(t) \text{ faible } \star \text{ dans } W^{2,r}(\Omega), \qquad a.e.t \in I\!R_t.$$

Comme $(\mathcal{F}(\varphi_n))_{n\geq 1}$ restent dans un compact de $C^0(I\!R_t; C^1(\overline{\Omega}))$ (puisque $\mathcal{X}$ est compact), la convergence est aussi valable dans $C^0(I\!R_t; C^1(\overline{\Omega}))$.

Pas 3: Passage à la limite pour $\alpha \to 0$.

Nous allons appliquer le théorème du point fixe de Schauder. On déduit l'existence d'un potentiel électrique $\varphi_\alpha \in \mathcal{X}$ et d'une distribution f_α telle que :

$$\int_0^T \int_\Omega \int_{I\!R_v^d} f_\alpha(t,x,v)(-\alpha \cdot \theta + \partial_t \theta + v \cdot \nabla_x \theta + \nabla_x R_\alpha \varphi_\alpha \cdot \nabla_v \theta) dv dx dt =$$
$$= \int_0^T \int_{\Sigma^-} v \cdot \nu(x) \cdot g(t,x,v) \cdot \theta(t,x,v) dv d\sigma dt, \tag{4.81}$$

pour toute fonction test $\theta \in \mathcal{V}$ et :

$$\Delta_x \varphi_\alpha = \int_{I\!R_v^d} f_\alpha(t,x,v) dv, \quad (t,x) \in I\!R_t \times \Omega, \tag{4.82}$$
$$\varphi_\alpha = \varphi_0, \quad (t,x) \in I\!R_t \times \partial\Omega.$$

Pour compléter la démonstration, on doit passer à la limite pour $\alpha \to 0$. Comme $(\varphi_\alpha)_{\alpha>0} \subset \mathcal{X}$ qui est un compact de $C^0(I\!R_t; C^1(\overline{\Omega}))$, on peut supposer que $(\varphi_{\alpha_k})_{k\geq 1}$ est une suite convergente :

$$\varphi_{\alpha_k} \to \varphi \text{ dans } C^0(I\!R_t \times \overline{\Omega}), \tag{4.83}$$

$$\nabla_x \varphi_{\alpha_k} \to \nabla_x \varphi \text{ dans } C^0(I\!R_t \times \overline{\Omega}).$$

Nous avons les mêmes convergences pour les potentiels régularisés :

$$R_{\alpha_k} \varphi_{\alpha_k} \to \varphi \text{ dans } C^0(I\!R_t \times \Omega),$$

$$\nabla_x R_{\alpha_k} \varphi_{\alpha_k} \to \nabla_x \varphi \text{ dans } C^0(I\!R_t \times \Omega). \tag{4.84}$$

En effet, puisque l'opérateur d'extension $\bar{\cdot}$ est continu, pour tout $(t,x) \in I\!R_t \times \Omega$ nous avons :

$$\begin{aligned}
|R_{\alpha_k}\varphi_{\alpha_k}(t,x) - \varphi(t,x)| &= |R_{\alpha_k}\varphi_{\alpha_k}(t,x) - \overline{\varphi}(t,x)| \\
&= |\int \zeta_{\alpha_k}(x-y)[\,\overline{\varphi}_{\alpha_k}(t,y) - \overline{\varphi}(t,x)\,]dy\,| \\
&\leq |\int \zeta_{\alpha_k}(x-y)[\,\overline{\varphi}_{\alpha_k}(t,y) - \overline{\varphi}(t,y)\,]\,dy\,| \\
&+ |\int \zeta_{\alpha_k}(x-y)[\,\overline{\varphi}(t,y) - \overline{\varphi}(t,x)\,]\,dy\,| \\
&\leq \|\,\overline{\varphi}_{\alpha_k}(t) - \overline{\varphi}(t)\,\|_{C^0(I\!R^d)} \\
&+ \sup_{|x-y|\leq\alpha_k} |\,\overline{\varphi}(t,y) - \overline{\varphi}(t,x)\,| \longrightarrow 0. \qquad (4.85)
\end{aligned}$$

La deuxième convergence (4.84) suit de la même façon.
Évidemment nous avons :

$$\alpha_k \int_0^T \int_\Omega \int_{I\!R_v^d} f_{\alpha_k}(t,x,v)\cdot\theta(t,x,v)dvdxdt \to 0, \qquad (4.86)$$

et par conséquent on déduit que $f_{\alpha_k} \rightharpoonup f$ faible $\star$ dans $L^\infty(I\!R_t \times \Omega \times I\!R_v^d)$, où f est une solution faible de l'équation de Vlasov qui correspond au champ $\nabla_x\varphi$ (on passe à la limite pour $\alpha_k \to 0$ dans (4.81)):

$$\int_0^T \int_\Omega \int_{I\!R_v^d} f(t,x,v)(\partial_t\theta + v\cdot\nabla_x\theta + \nabla_x\varphi\cdot\nabla_v\theta)dvdxdt =$$
$$= \int_0^T \int_{\Sigma^-} v\cdot\nu(x)\cdot g(t,x,v)\cdot\theta(t,x,v)dvd\sigma dt, \qquad (4.87)$$

pour toute fonction test $\theta \in \mathcal{V}$. On doit montrer que (f,φ) vérifie l'équation de Poisson. Puisque $(suppf_{\alpha_k})$ sont bornés (uniformément par rapport à k) nous avons :

$$\rho_{\alpha_k} \rightharpoonup \rho = \int_{I\!R_v^d} f(t,x,v)dv, \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty(I\!R_t \times \Omega).$$

Par conséquent, en passant à la limite au sens des distributions dans (4.82) on obtient $\Delta_x\varphi = \rho$. La convergence (4.83) implique aussi $\varphi = \varphi_0$ sur $\partial\Omega$. On résume notre résultat dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.1 *Soient g et φ_0 des fonctions T-périodiques, Ω un ensemble borné de $I\!R^d$ avec $\partial\Omega \in C^1$, $p > d+1$ et $0 < v_0 < v_1$ tels que :*

$$supp(g) \subset \{(t,x,v) \mid t \in I\!R_t, x \in \partial\Omega, 0 < v_0 \leq -v\cdot\nu(x) \leq |v| \leq v_1\},$$

$$g \in L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-),$$

$$\varphi_0 \in L^\infty(I\!R_t; W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)),$$

$$\partial_t \varphi_0 \in L^\infty(I\!R_t; W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)),$$

$$\|\varphi_0\|_{L^\infty(I\!R_t;W^{2-1/p,p}(\partial\Omega))} + K\|g\|_{L^\infty(I\!R_t\times\Sigma^-)} \leq M,$$

avec :

$$K = vol(\Omega)^{1/p}\ \omega_d\ \left[\left(v_1 + \frac{v_0}{2}\right)^d - \left(\frac{v_0}{2}\right)^d\right],\ M = \frac{|v_0|^2}{4\ C_s(\Omega)\ C_p(\Omega)\ \delta(\Omega)},$$

où ω_d *est le volume de la boule unité de* $I\!R^d$, $C_p(\Omega)$ *est donné par (4.72) (résultat de régularité pour le problème de Poisson) et* $C_s(\Omega)$ *est donné par (4.76) (injection compacte de Sobolev). Alors, le système (4.60) a au moins une solution faible périodique.*

Chapitre 5

Solutions périodiques du système de Vlasov-Maxwell

5.1 Équation de Vlasov. Définitions

Dans ce paragraphe on suppose que le champ électromagnétique (E_x, E_y, B_z) est T-périodique en temps et on s'intéresse à l'existence de solution périodique f du problème de Vlasov :

$$\begin{aligned}\partial_t f + v_x \cdot \partial_x f + \frac{q}{m}(E_x + v_y \cdot B_z) \cdot \partial_{v_x} f \quad &+ \quad \frac{q}{m}(E_y - v_x \cdot B_z) \cdot \partial_{v_y} f = 0, \\ (t, x, v_x, v_y) \quad &\in \quad I\!R_t \times]0, L[\times I\!R_v^2, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$f(t, 0, v_x, v_y) = g_0(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \ v_x > 0, v_y \in I\!R_v, \tag{5.2}$$

$$f(t, L, v_x, v_y) = g_L(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \ v_x < 0, v_y \in I\!R_v. \tag{5.3}$$

Ici $q(> 0)$ et m sont la charge et la masse des particules. En même temps on suppose que les fonctions de distribution de particules entrantes g_0, g_L sont aussi T-périodiques en temps. On rappelle maintenant les notions de solution faible et de solution par caractéristiques :

5.1.1 Solution faible de l'équation de Vlasov

Définition 5.1.1 *Soient $E_x, E_y, B_z \in L^\infty(I\!R_t \times]0, L[)$ et $g_0, g_L \in L^1_{loc}(I\!R_t \times \Sigma^-)$ des fonc-*

tions T-périodiques en temps, où :

$$\begin{aligned}\Sigma^- &= \{(t,x,v_x,v_y) \mid t \in I\!R, x=0, v_x>0, v_y \in I\!R\} \\ &\cup \{(t,x,v_x,v_y) \mid t \in I\!R, x=L, v_x<0, v_y \in I\!R\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

La fonction $f \in L^1_{loc}(I\!R_t \times]0,L[\times I\!R^2_v)$ est une solution faible T-périodique du problème (5.1), (5.2), (5.3) ssi :

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L\int_{I\!R^2_v}(\partial_t\theta + v_x\cdot\partial_x\theta &+ \frac{q}{m}(E_x+v_y\cdot B_z)\cdot\partial_{v_x}\theta \\ &+ \frac{q}{m}(E_y - v_x\cdot B_z)\cdot\partial_{v_y}\theta) f(t,x,v_x,v_y)dvdxdt \\ &= \int_0^T\int_{v_x<0}\int_{v_y} v_x g_L(t,v_x,v_y)\theta(t,L,v_x,v_y)dvdt \\ &- \int_0^T\int_{v_x>0}\int_{v_y} v_x g_0(t,v_x,v_y)\theta(t,0,v_x,v_y)dvdt \end{aligned} \tag{5.5}$$

pour toute fonction T-périodique $\theta \in \mathcal{V}$, où :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}=\{\eta &\in W^{1,\infty}(I\!R_t\times]0,L[\times I\!R^2_v)\ ;\ \eta(t,0,v_x<0,v_y)=\eta(t,L,v_x>0,v_y)=0, \\ &\exists B \textit{ sous-ensemble borné de } I\!R^2_v,\ supp(\eta)\subset I\!R_t\times[0,L]\times B\}\end{aligned}$$

Autrement dit, une solution faible du problème (5.1), (5.2), (5.3) vérifie :

$$\begin{aligned}< f,\varphi > &= \int_0^T\int_{v_x<0}\int_{v_y} v_x\cdot g_L(t,v_x,v_y)\cdot\theta(t,L,v_x,v_y)dvdt \\ &- \int_0^T\int_{v_x>0}\int_{v_y} v_x\cdot g_0(t,v_x,v_y)\cdot\theta(t,0,v_x,v_y)dvdt\end{aligned} \tag{5.6}$$

pout toute fonction T-périodique φ, où θ est la solution du problème :

$$\begin{aligned}\partial_t\theta + v_x\cdot\partial_x\theta + \frac{q}{m}(E_x+v_y\cdot B_z)\cdot\partial_{v_x}\theta &+ \frac{q}{m}(E_y-v_x\cdot B_z)\cdot\partial_{v_y}\theta = \varphi, \\ (t,x,v_x,v_y) &\in I\!R_t\times]0,L[\times I\!R^2_v\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\theta(t,0,v_x,v_y)=0, \qquad t\in I\!R_t\ v_x<0, v_y\in I\!R_v, \tag{5.8}$$

$$\theta(t,L,v_x,v_y)=0, \qquad t\in I\!R_t\ v_x>0, v_y\in I\!R_v. \tag{5.9}$$

Remarque 5.1.1 *Dans la définition précédente nous pouvons supposer que le champ électromagnétique est seulement dans* $(L^p(I\!R_t\times]0,L[))^3$ *en demandant plus de régularité sur* f *(et* g_0, g_L*), en particulier* f *dans* $L^q_{loc}(I\!R_t\times]0,L[\times I\!R^2_v)$ *convient, où* q *est l'exposant conjugué.*

Si le champ électromagnétique vérifie $(E_x,E_y,B_z)\in(L^\infty(I\!R_t;W^{1,\infty}(]0,L[)))^3$, nous pouvons exprimer la solution en terme de caractéristiques. Soit (t,x,v_x,v_y) dans $I\!R_t\times]0,L[\times I\!R^2_v$, nous notons $X(s;x,v_x,v_y,t)$, $V_x(s;x,v_x,v_y,t)$ et $V_y(s;x,v_x,v_y,t)$ la solution du système :

$$\left\{\begin{array}{lcll}
\dfrac{dX}{ds} & = & V_x(s;x,v_x,v_y,t), & s\in[\tau_i,\tau_o]\\
X(t;x,v_x,v_y,t) & = & x, & \\
\dfrac{dV_x}{ds} & = & \dfrac{q}{m}(E_x(s,X(s))+V_y(s)\cdot B_z(s,X(s))), & s\in[\tau_i,\tau_o]\\
V_x(t;x,v_x,v_y,t) & = & v_x, & \\
\dfrac{dV_y}{ds} & = & \dfrac{q}{m}(E_y(s,X(s))-V_x(s)\cdot B_z(s,X(s))), & s\in[\tau_i,\tau_o]\\
V_y(t;x,v_x,v_y,t) & = & v_y, &
\end{array}\right. \tag{5.10}$$

où $[\tau_i(x,v_x,v_y,t),\tau_o(x,v_x,v_y,t)]$ est la durée de vie des particules dans le domaine $]0,L[$:

$$(X(\tau_i),V_x(\tau_i),V_y(\tau_i))\in\Sigma^- \tag{5.11}$$

et :

$$(X(\tau_o),V_x(\tau_o),V_y(\tau_o))\in\Sigma^+\cup\Sigma^0. \tag{5.12}$$

Les sous-ensembles de $\{0,L\}\times I\!R^2_v$ Σ^+ et Σ^0 sont définis respectivement par :

$$\begin{array}{rcl}
\Sigma^+ & = & \{(t,x,v_x,v_y)\mid t\in I\!R, x=0, v_x<0, v_y\in I\!R\}\\
 & \cup & \{(t,x,v_x,v_y)\mid t\in I\!R, x=L, v_x>0, v_y\in I\!R\},\\
\Sigma^0 & = & \{(t,x,v_x,v_y)\mid t\in I\!R, x=0, v_x=0, v_y\in I\!R\}\\
 & \cup & \{(t,x,v_x,v_y)\mid t\in I\!R, x=L, v_x=0, v_y\in I\!R\}.
\end{array}$$

En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on déduit que les caractéristiques sont bien définies. Par intégration le long des caractéristiques, la solution du problème (5.7), (5.8),(5.9) s'écrit :

$$\theta(t,x,v_x,v_y) = -\int_t^{\tau_o} \varphi(s, X(s;x,v_x,v_y,t), V_x(s;x,v_x,v_y,t), V_y(s;x,v_x,v_y,t)ds.$$

La formule (5.6) conduit à :

$$\begin{aligned} < f,\varphi > \quad &= \int_0^T dt \int_{v_x>0}\int_{v_y} dv \int_t^{\tau_o} v_x \cdot g_0(t,v_x,v_y) \\ &\cdot \quad \varphi(s, X(s;0,v_x,v_y,t), V_x(s;0,v_x,v_y,t), V_y(s;0,v_x,v_y,t)ds \\ &- \int_0^T dt \int_{v_x<0}\int_{v_y} dv \int_t^{\tau_o} v_x \cdot g_L(t,v_x,v_y) \\ &\cdot \quad \varphi(s, X(s;L,v_x,v_y,t), V_x(s;L,v_x,v_y,t), V_y(s;L,v_x,v_y,t)ds, \end{aligned} \tag{5.13}$$

ce qui est équivalent à :

$$f(t,x,v_x,v_y) = \begin{cases} g_0(\tau_i, V_x(\tau_i;x, \ v_x,v_y,t), V_y(\tau_i;x,v_x,v_y,t)) \\ \qquad\qquad \text{si } \tau_i > -\infty \text{ et } X(\tau_i;x,v_x,v_y,t) = 0, \\ g_L(\tau_i, V_x(\tau_i;x, \ v_x,v_y,t), V_y(\tau_i;x,v_x,v_y,t)) \\ \qquad\qquad \text{si } \tau_i > -\infty \text{ et } X(\tau_i;x,v_x,v_y,t) = L, \\ 0. \qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.14}$$

Définition 5.1.2 *Soient $E_x, E_y, B_z \in L^\infty(I\!R_t; W^{1,\infty}(]0,L[))$ et $g_0, g_L \in L^1_{loc}(I\!R_t \times \Sigma^-)$ des fonctions T-périodiques. La fonction $f \in L^1_{loc}(I\!R_t \times]0,L[\times I\!R^2_v)$ donnée par (5.13) est par définition la solution par caractéristiques du problème (5.1),(5.2), (5.3).*

Remarque 5.1.2 *En général il n'y a pas d'unicité pour la solution faible puisque f peut prendre des valeurs arbitraires sur les caractéristiques ne rencontrant pas le bord ($\tau_i = -\infty$).*

Remarque 5.1.3 *Puisque le champ électromagnétique est supposé périodique, on vérifie que* $X(s+T;x,v_x,v_y,t+T) = X(s;x,v_x,v_y,t)$, $V_x(s+T;x,v_x,v_y,t+T) = V_x(s;x,v_x,v_y,t)$, $V_y(s+T;x,v_x,v_y,t+T) = V_y(s;x,v_x,v_y,t)$ *et* $\tau_i(x,v_x,v_y,t+T) = \tau_i(x,v_x,v_y,t)+T$. *En utilisant ces relations, on peut montrer la périodicité de la solution par caractéristiques.*

Remarque 5.1.4 *Si* $g_0, g_L \in C^1(I\!R_t \times \Sigma^-)$ *alors la solution par caractéristiques est une solution classique de (5.1), (5.2), (5.3).*

5.1.2 Estimation du temps de vie des particules

Afin d'obtenir des estimations L^∞ pour la densité de charge et de courant, nous imposons les conditions suivantes :

$$\|E\|_{L^\infty} + \|B_z\|_{L^\infty} \cdot \left(v_1 + \frac{q}{m}\|E\|_{L^\infty}\frac{2L}{v_0}\right) \le \frac{mv_0^2}{4qL} \tag{5.15}$$

$$(E_x, E_y, B_z) \in (L^\infty(I\!R_t; W^{1,\infty}(]0,L[)))^3, \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} supp(g_0) &\subset \{(t,x,v_x,v_y)\ ;\ t \in I\!R_t, x=0, 0 < v_0 \le v_x, \sqrt{v_x^2+v_y^2} \le v_1\}, \\ supp(g_L) &\subset \{(t,x,v_x,v_y);\ t \in I\!R_t, x=L, 0 > -v_0 \ge v_x, \sqrt{v_x^2+v_y^2} \le v_1\}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Ici, $|E|_{L^\infty}$ est la norme L^∞ de $\sqrt{E_x^2+E_y^2}$ et v_0,v_1 sont des constantes positives. Avec ces hypothèses nous avons :

Lemme 5.1.1 *Supposons que le champ électromagnétique et les données au bord vérifient (5.15),(5.16) et (5.17). Alors le temps de vie dans* $]0,L[$ *des particules issues des supports de* g_0 *et de* g_L *est fini :*

$$\tau_o(x,v_x,v_y,t) - \tau_i(x,v_x,v_y,t) \le 2\cdot\frac{L}{v_0},\ \forall (t,x,v_x,v_y) \in supp(g_0) \cup supp(g_L). \tag{5.18}$$

Démonstration Supposons qu'il y ait une particule issue du support de g_0 à $t=\tau_i$ et qui reste toujours dans $]0,L[$ à $\tau_i + \dfrac{2L}{v_0} < \tau_o$:

$$X\left(\tau_i + \frac{2L}{v_0}\right) \in]0,L[. \tag{5.19}$$

Conformément à (5.17), nous avons :

$$0 < v_0 \leq V_x(\tau_i) \tag{5.20}$$

$$\sqrt{V_x^2(\tau_i) + V_y^2(\tau_i)} \leq v_1. \tag{5.21}$$

On multiplie les équations sur les vitesses de (5.10) par $V_x(s)$ et $V_y(s)$ afin d'obtenir pour $s \in [\tau_i, \tau_o]$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{ds}|V_x(s)|^2 = \frac{q}{m}(E_x(s, X(s)) \cdot V_x(s) + V_x(s) \cdot V_y(s) \cdot B_z(s, X(s))\ ),$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{ds}|V_y(s)|^2 = \frac{q}{m}(E_y(s, X(s)) \cdot V_y(s) - V_y(s) \cdot V_x(s) \cdot B_z(s, X(s))\ ),$$

et par conséquent :

$$\frac{d}{ds}\sqrt{V_x^2(s) + V_y^2(s)} \leq \frac{q}{m}\sqrt{E_x^2(s, X(s)) + E_y^2(s, X(s))},$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{V_x^2(s) + V_y^2(s)} - \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right| &\leq \frac{q}{m} \cdot \left\|\sqrt{E_x^2 + E_y^2}\right\|_{L^\infty} \cdot (s - \tau_i) \\ &\leq \frac{q}{m} \cdot \left\|\sqrt{E_x^2 + E_y^2}\right\|_{L^\infty} \cdot \frac{2L}{v_0}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Par l'intégration de (5.10) sur $[\tau_i, t] \subset [\tau_i, \tau_i + 2L/v_0]$, nous obtenons :

$$X(t) = X(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} V_x(s)ds \tag{5.23}$$

$$V_x(t) = V_x(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} \frac{q}{m}(E_x(s) + V_y(s) \cdot B_z(s))ds, \tag{5.24}$$

$$V_y(t) = V_y(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} \frac{q}{m}(E_y(s) - V_x(s) \cdot B_z(s))ds. \tag{5.25}$$

De (5.22) et (5.21) on déduit pour tout $s \in [\tau_i, \tau_i + 2L/v_0]$:

$$|V_y(s)| \leq v_1 + (s - \tau_i)\frac{q}{m}\|E\|_{L^\infty}. \tag{5.26}$$

En utilisant (5.20), (5.24), (5.26) et (5.15) on trouve pour $t \in [\tau_i, \tau_i + 2L/v_0]$:

$$
\begin{aligned}
V_x(t) &\geq v_x - \int_{\tau_i}^{t} \frac{q}{m} \cdot (\ |E_x(s)| + |B_z(s)| \cdot |V_y(s)|\ )\ ds \\
&\geq v_0 - \int_{\tau_i}^{t} \frac{q}{m} \cdot \Big(\|E_x\|_{L^\infty} + \|B_z\|_{L^\infty} \cdot \Big(v_1 + (s-\tau_i)\frac{q}{m}\|E\|_{L^\infty} \Big) \Big)\ ds \\
&\geq v_0 - \frac{2L}{v_0} \cdot \frac{q}{m} \cdot \left(\|E\|_{L^\infty} + \|B_z\|_{L^\infty} \cdot \left(v_1 + \frac{q}{m}\|E\|_{L^\infty}\frac{2L}{v_0} \right) \right) \\
&\geq v_0 - \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2}.
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

Maintenant, de (5.23) on déduit :

$$
\begin{aligned}
X(\tau_i + 2L/v_0) &= 0 + \int_{\tau_i}^{\tau_i + 2L/v_0} V_x(s) ds \\
&\geq \frac{2L}{v_0} \cdot \frac{v_0}{2} = L,
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

qui est en contradiction avec (5.19). Si la particule est issue du support de g_L, en utilisant les mêmes idées que précédemment, nous montrons à nouveau que $\tau_o \leq \tau_i + \frac{2L}{v_0}$.

Corollaire 5.1.1 *Supposons les mêmes hypothèses que dans le Lemme 5.1.1 et soit f la solution par caractéristiques donnée par la Définition 5.1.2. Alors nous avons :*

$$
supp(f) \subset \{(t, x, v_x, v_y) | t \in I\!R_t, x \in [0, L], \frac{v_0}{2} \leq |v_x|, \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \leq v_1 + \frac{v_0}{2}\}, \tag{5.29}
$$

$$
\|\rho\|_{L^\infty} \leq \frac{\pi}{2}(v_1 + v_0/2)^2 \cdot q \cdot (\|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}), \tag{5.30}
$$

et :

$$
\max\{\|j_x\|_{L^\infty}, \|j_y\|_{L^\infty}\} \leq \frac{\pi}{2}(v_1 + v_0/2)^3 \cdot q \cdot (\|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}), \tag{5.31}
$$

où $\rho(t,x) = q \int_{I\!R_v^2} f(t, x, v_x, v_y)\ dv$ et $j_{x,y}(t,x) = q \int_{I\!R_v^2} v_{x,y} \cdot f(t, x, v_x, v_y)\ dv$.

Démonstration L'estimation (5.29) suit du lemme précédent. Conformément à (5.22), (5.17) et (5.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sqrt{V_x^2(t)+V_y^2(t)} &\le \sqrt{V_x^2(\tau_i)+V_y^2(\tau_i)}+\int_{\tau_i}^{t}\frac{q}{m}|E(s,X(s))|ds \\
&\le v_1+(t-\tau_i)\cdot\frac{q}{m}\mid E\mid_{L^\infty} \\
&\le v_1+\frac{2Lq}{mv_0}\mid E\mid_{L^\infty} \\
&\le v_1+\frac{v_0}{2}. \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

En utilisant (5.24) et (5.17) on déduit pour tout $t\in[\tau_i,\tau_o]$:

$$\begin{aligned}
V_x(t) &\ge V_x(\tau_i)-\int_{\tau_i}^{t}\frac{q}{m}(|E_x(s,X(s))|+|V_y(s)||B_z(s,X(s))|)ds \\
&\ge v_0-(\tau_o-\tau_i)\cdot\frac{q}{m}\cdot\left(\|E\|_{L^\infty}+\|B_z\|_{L^\infty}\cdot\left(v_1+\frac{q}{m}\|E\|_{L^\infty}\frac{2L}{v_0}\right)\right) \\
&\ge v_0-\frac{2L}{v_0}\cdot\frac{q}{m}\cdot\left(\|E\|_{L^\infty}+\|B_z\|_{L^\infty}\cdot\left(v_1+\frac{q}{m}\|E\|_{L^\infty}\frac{2L}{v_0}\right)\right) \\
&\ge v_0-\frac{v_0}{2}=\frac{v_0}{2}. \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

Si la particule est issue du support de g_L, l'estimation (5.32) reste identique et (5.33) devient :

$$\begin{aligned}
-V_x(t) &\ge -V_x(\tau_i)-\int_{\tau_i}^{t}\frac{q}{m}(|E_x(s,X(s))|+|V_y(s)||B_z(s,X(s))|)ds \\
&\ge v_0-\frac{v_0}{2}=\frac{v_0}{2}. \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

Maintenant, (5.30) et (5.31) se montrent facilement. Pour $(t,x)\in I\!R_t\times]0,L[$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\rho(t,x) &= q\int_{I\!R_{v^2}}f(t,x,v_x,v_y)\,dv \\
&= q\int_{v_x>0}\int_{I\!R_v}f(t,x,v_x,v_y)\,dv+q\int_{v_x<0}\int_{I\!R_v}f(t,x,v_x,v_y)\,dv \\
&\le \frac{\pi}{2}(v_1+v_0/2)^2\cdot q\cdot(\|g_0\|_{L^\infty}+\|g_L\|_{L^\infty}), \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

et par conséquent $\|\rho\|_{L^\infty}\le\frac{\pi}{2}(v_1+v_0/2)^2\cdot q\cdot(\|g_0\|_{L^\infty}+\|g_L\|_{L^\infty})$. Évidemment, (5.31) s'obtient de la même façon.

Remarque 5.1.5 *Avec les mêmes hypothèses que dans le Lemme 5.1.1, la solution par caractéristiques f de la Définition 5.1.2 peut s'écrire sous la forme $f=f_0+f_L$ où :*

$$
\begin{aligned}
< f_0, \varphi > \quad &= \quad \int_0^T dt \int_{v_x>0} \int_{v_y} dv \int_t^{\tau_o} v_x \cdot g_0(t, v_x, v_y) \\
&\cdot \quad \varphi(s, X(s; 0, v_x, v_y, t), V_x(s; 0, v_x, v_y, t), V_y(s; 0, v_x, v_y, t) ds
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
< f_L, \varphi > \quad &= \quad -\int_0^T dt \int_{v_x<0} \int_{v_y} dv \int_t^{\tau_o} v_x \cdot g_L(t, v_x, v_y) \\
&\cdot \quad \varphi(s, X(s; L, v_x, v_y, t), V_x(s; L, v_x, v_y, t), V_y(s; L, v_x, v_y, t) ds.
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

Les fonctions f_0, f_L sont toutes deux solutions faibles des problèmes :

$$
\begin{aligned}
\partial_t f_0 + v_x \cdot \partial_x f_0 + \frac{q}{m}(E_x + v_y \cdot B_z) \cdot \partial_{v_x} f_0 \quad &+ \quad \frac{q}{m}(E_y - v_x \cdot B_z) \cdot \partial_{v_y} f_0 = 0, \\
(t, x, v_x, v_y) \quad &\in \quad I\!R_t \times]0, L[\times I\!R_v^2,
\end{aligned}
$$

$$
f_0(t, 0, v_x, v_y) = g_0(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \; v_x > 0, v_y \in I\!R_v,
$$

$$
f_0(t, L, v_x, v_y) = 0, \qquad t \in I\!R_t \; v_x < 0, v_y \in I\!R_v,
$$

et :

$$
\begin{aligned}
\partial_t f_L + v_x \cdot \partial_x f_L + \frac{q}{m}(E_x + v_y \cdot B_z) \cdot \partial_{v_x} f_L \quad &+ \quad \frac{q}{m}(E_y - v_x \cdot B_z) \cdot \partial_{v_y} f_L = 0, \\
(t, x, v_x, v_y) \quad &\in \quad I\!R_t \times]0, L[\times I\!R_v^2,
\end{aligned}
$$

$$
f_L(t, 0, v_x, v_y) = 0, \qquad t \in I\!R_t \; v_x > 0, v_y \in I\!R_v,
$$

$$
f_L(t, L, v_x, v_y) = g_L(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \; v_x < 0, v_y \in I\!R_v.
$$

5.2 Solutions périodiques pour le système 1D modifié de Vlasov-Maxwell

Le but de ce paragraphe est d'établir l'existence de solution périodique faible du système 1D de Vlasov-Maxwell :

$$\begin{aligned}\partial_t f + v_x \cdot \partial_x f + \frac{q}{m}(E_x + v_y \cdot B_z) \cdot \partial_{v_x} f \quad &+ \quad \frac{q}{m}(E_y - v_x \cdot B_z) \cdot \partial_{v_y} f = 0, \\ (t, x, v_x, v_y) \quad &\in \quad I\!R_t \times]0, L[\times I\!R_v^2, \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\partial_t E_x = -\frac{1}{\varepsilon} j_x := -\frac{1}{\varepsilon} \int_v v_x f(t, x, v_x, v_y)\, dv, \qquad (t, x) \in I\!R_t \times]0, L[, \tag{5.39}$$

$$\partial_t E_y + c^2 \partial_x B_z = -\frac{1}{\varepsilon} j_y := -\frac{1}{\varepsilon} \int_v v_y f(t, x, v_x, v_y)\, dv, \qquad (t, x) \in I\!R_t \times]0, L[, \tag{5.40}$$

$$\partial_t B_z + \partial_x E_y = 0, \qquad (t, x) \in I\!R_t \times]0, L[, \tag{5.41}$$

avec les conditions aux limites :

$$f(t, 0, v_x, v_y) = g_0(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \ v_x > 0, v_y \in I\!R_v, \tag{5.42}$$

$$f(t, L, v_x, v_y) = g_L(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \ v_x < 0, v_y \in I\!R_v, \tag{5.43}$$

$$E_y(t, 0) + cB_z(t, 0) = h_0(t), \qquad t \in I\!R_t, \tag{5.44}$$

$$E_y(t, L) - cB_z(t, L) = h_L(t), \qquad t \in I\!R_t. \tag{5.45}$$

Ici, les données au bord g_0, g_L, h_0, h_L sont T-périodiques et c est la vitesse de la lumière dans le vide. On cherche des solutions périodiques $(f(t, x, v_x, v_y), E_x(t, x), E_y(t, x), B_z(t, x))$.

Nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schauder. On définit une application qui transforme un champ électromagnétique périodique (E_x, E_y, B_z) dans un autre champ (E_x^1, E_y^1, B_z^1) où (E_x^1, E_y^1, B_z^1) est défini comme il suit. Soit f la solution par caractéristiques de la *Définition 5.1.2* qui correspond au champ (E_x, E_y, B_z). Le nouveau champ électromagnétique (E_x^1, E_y^1, B_z^1) est déterminé par la résolution du système de Maxwell avec les densités de courant $j_{x,y}(t,x) = \int_{I\!R_v^2} v_{x,y} f(t,x,v_x,v_y)dv$. Comme dans le chapitre précédent, cette méthode ne peut pas être appliquée directement, puisque la *Définition 5.1.2* demande une certaine régularité pour le champ électromagnétique (lipschitzien par rapport à x). Par conséquent on doit régulariser le champ. Afin de pouvoir montrer un résultat d'unicité, un terme d'absorption a été introduit dans l'équation de Vlasov. D'abord on montre l'existence de solution faible périodique pour le problème régularisé. Ensuite on passe à la limite vers zéro pour le paramètre de régularisation.

5.2.1 Point fixe pour le problème régularisé

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des champs (E_x, E_y, B_z) qui vérifient :

$$\mathcal{X} = \{(E_x, E_y, B_z) \in (L^\infty(I\!R_t \times]0, L[))^3 \ ; \ \|E\|_{L^\infty} \le K, c \cdot \|B_z\|_{L^\infty} \le K,$$

$$(E_x, E_y, B_z)(t) = (E_x, E_y, B_z)(t+T) \ \forall t \in I\!R_t\} \tag{5.46}$$

où K est une constante positive. À cause de la périodicité, $\mathcal{X}$ est un ensemble compact de $(L^2_T(I\!R_t \times]0, L[))^3$ par rapport à la topologie faible, où :

$$L^2_T(I\!R_t \times]0, L[) = \{u \ ; \int_0^T \int_0^L |u(t,x)|^2 dxdt < \infty, u(t,\cdot) = u(t+T,\cdot) \ \forall t \in I\!R_t\}. \tag{5.47}$$

Maintenant on introduit la transformation régularisante :

$$R_\alpha : L^\infty(I\!R_t \times]0, L[) \to L^\infty(I\!R_t; C^1([0, L]),$$

$$(R_\alpha E_x, R_\alpha E_y, R_\alpha B_z)(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^L \zeta_\alpha(t-s, x-y) \cdot (E_x, E_y, B_z)(s,y) dsdy, \tag{5.48}$$

où $\zeta_\alpha \geq 0$ est donné par :

$$\zeta_\alpha(t,x) = \frac{1}{\alpha^2}\zeta\left(\frac{t}{\alpha},\frac{x}{\alpha}\right) \quad , \quad \zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$
$$supp(\zeta) \subset [-1,1]\times[-1,1] \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(u,v)dudv = 1$$

Il est facile de voir que $(R_\alpha E_x, R_\alpha E_y, R_\alpha B_z)$ sont aussi T-périodiques en temps :

$$(R_\alpha E_x, R_\alpha E_y, R_\alpha B_z)(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^L \zeta_\alpha(s,x-y)\cdot(E_x,E_y,B_z)(t-s,y)dsdy, \tag{5.49}$$

et par conséquent on déduit que $R_\alpha(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$. Ensuite, on considère l'application :

$$F : (E_x,E_y,B_z) \in \mathcal{X} \mapsto (E_x^1, E_y^1, B_z^1), \tag{5.50}$$

où :

$$\begin{aligned}
E_x^1(t,x) = &\ -\ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\left(j_{x,\alpha}(s,x) + \alpha\int_0^x \rho_{0,\alpha}(s,y)dy - \alpha\int_x^L \rho_{L,\alpha}(s,y)dy\right)\,ds \\
&+\ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \rho(0,y)\,dy, \qquad (t,x)\in \mathbb{R}_t\times]0,L[, \\
E_y^1(t,x) \ = &\ \ \frac{1}{2}(h_0(t-x/c) + h_L(t-(L-x)/c)) \\
&-\ \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-x/c}^t j_{y,\alpha}(s,x-c(t-s))\,ds \\
&-\ \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-(L-x)/c}^t j_{y,\alpha}(s,x+c(t-s))\,ds, \qquad (t,x)\in \mathbb{R}_t\times]0,L[, \\
B_z^1(t,x) \ = &\ \ \frac{1}{2c}(h_0(t-x/c) - h_L(t-(L-x)/c)) \\
&-\ \frac{1}{2c\varepsilon}\int_{t-x/c}^t j_{y,\alpha}(s,x-c(t-s))\,ds \\
&+\ \frac{1}{2c\varepsilon}\int_{t-(L-x)/c}^t j_{y,\alpha}(s,x+c(t-s))\,ds, \qquad (t,x)\in \mathbb{R}_t\times]0,L[.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Ci dessus on a $j_{x,\alpha} = \int_v v_x f_\alpha\,dv$, $j_{y,\alpha} = \int_v v_y f_\alpha\,dv$ où f_α est la solution par caractéristiques du problème modifié de Vlasov suivant :

$$\begin{aligned}\alpha f_\alpha + \partial_t f_\alpha + v_x \cdot \partial_x f_\alpha &+ \frac{q}{m}(R_\alpha E_x + v_y \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_x} f_\alpha \\ &+ \frac{q}{m}(R_\alpha E_y - v_x \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_y} f_\alpha = 0, \\ &\quad (t, x, v_x, v_y) \in I\!R_t \times]0, L[\times I\!R_v^2,\end{aligned} \tag{5.52}$$

$$f_\alpha(t, 0, v_x, v_y) = g_0(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \; v_x > 0, v_y \in I\!R_v, \tag{5.53}$$

$$f_\alpha(t, L, v_x, v_y) = g_L(t, v_x, v_y), \qquad t \in I\!R_t \; v_x < 0, v_y \in I\!R_v. \tag{5.54}$$

Le terme $\alpha \cdot f_\alpha$ modifie les formules (5.13) et (5.14) qui deviennent maintenant :

$$\begin{aligned}< f_\alpha, \varphi > \quad = \quad & \int_0^T dt \int_{v_x>0} \int_{v_y} dv \int_t^{\tau_{o,\alpha}} v_x \cdot g_0(t, v_x, v_y) e^{-\alpha(t-s)} \\ & \cdot \varphi(s, X_\alpha(s; 0, v_x, v_y, t), V_{x,\alpha}(s; 0, v_x, v_y, t), V_{y,\alpha}(s; 0, v_x, v_y, t) ds \\ - \quad & \int_0^T dt \int_{v_x<0} \int_{v_y} dv \int_t^{\tau_{o,\alpha}} v_x \cdot g_L(t, v_x, v_y) e^{-\alpha(t-s)} \\ & \cdot \varphi(s, X_\alpha(s; L, v_x, v_y, t), V_{x,\alpha}(s; L, v_x, v_y, t), V_{y,\alpha}(s; L, v_x, v_y, t) ds,\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$f_\alpha(t, x, v_x, v_y) = \begin{cases} g_0(\tau_i^\alpha, V_{x,\alpha}(\tau_i^\alpha; x, \; v_x, v_y, t), V_{y,\alpha}(\tau_i^\alpha; x, v_x, v_y, t)) e^{-\alpha(t-\tau_i^\alpha)} \\ \qquad\qquad \text{si } \tau_i^\alpha > -\infty \text{ et } X_\alpha(\tau_i^\alpha; x, v_x, v_y, t) = 0, \\ g_L(\tau_i^\alpha, V_{x,\alpha}(\tau_i^\alpha; x, \; v_x, v_y, t), V_{y,\alpha}(\tau_i^\alpha; x, v_x, v_y, t)) e^{-\alpha(t-\tau_i^\alpha)} \\ \qquad\qquad \text{si } \tau_i^\alpha > -\infty \text{ et } X_\alpha(\tau_i^\alpha; x, v_x, v_y, t) = L, \\ 0, \qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.56}$$

De plus, la loi de conservation de la charge, obtenue par l'intégration sur $(v_x, v_y) \in \mathbb{R}_v^2$ s'écrit :

$$\alpha\rho_\alpha + \partial_t \rho_\alpha + \partial_x j_{x,\alpha} = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}_t \times]0, L[,$$

où :

$$\partial_t \rho_\alpha + \partial_x (j_{x,\alpha} + \alpha \int \rho_\alpha dx) = 0,\ (t,x) \in \mathbb{R}_t \times]0, L[. \tag{5.57}$$

Maintenant, si on veut préserver l'équation de la divergence, il est clair qu'il faut introduire un terme supplémentaire $\alpha \int \rho_\alpha dx$ dans la définition de E_x^1 donné par (5.51). Pour assurer la périodicité en temps du champ électromagnétique (E_x^1, E_y^1, B_z^1), nous allons donc imposer :

Proposition 5.2.1 *Supposons que la condition suivante est vérifiée pour tout $t \in \mathbb{R}_t$:*

$$\int_0^T dt \int_{v_x > 0} \int_{v_y} v_x g_0(t, v_x, v_y) dv + \int_0^T dt \int_{v_x < 0} \int_{v_y} v_x g_L(t, v_x, v_y) dv = 0 \tag{5.58}$$

Alors, (E_x^1, E_y^1, B_z^1) donnés par (5.51) sont T-périodiques et vérifient les équations de Maxwell (5.40), (5.41) et les conditions aux limites (5.44) et (5.45).

Démonstration En utilisant la *Remarque 5.1.3*, on déduit que la solution par caractéristiques du problème modifié de Vlasov est périodique. Maintenant il est facile de vérifier que E_y^1 et B_z^1 donnés par (5.51) sont T-périodiques et vérifient les équations de Maxwell (5.40), (5.41) et les conditions aux limites (5.44), (5.45). Pour montrer la périodicité de E_x, on utilise l'équation de continuité (5.57) pour le problème (5.52) dont la solution est décomposée en f_0 et f_L comme dans la *Remarque 5.1.5*. Par l'intégration sur $[0, T]$ on déduit :

$$\partial_x \left(\int_0^T \left(\alpha \int_0^x \rho_0(t, y) dy + j_{x,0}(t, x) \right) dt \right) = 0, \tag{5.59}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^T dt \int_0^x \rho_0(t, y) dy + \int_0^T j_{x,0}(t, x) dt &= \int_0^T j_{x,0}(t, 0) dt \\ &= \int_0^T dt \int_{v_x > 0} \int_{v_y} v_x g_0(t, v_x, v_y) dv. \end{aligned} \tag{5.60}$$

De la même façon on obtient :

$$\partial_x \left(\int_0^T \left(-\alpha \int_x^L \rho_L(t,y)dy + j_{x,L}(t,x) \right) dt \right) = 0, \tag{5.61}$$

et :

$$\begin{aligned} -\alpha \int_0^T dt \int_x^L \rho_L(t,y)dy + \int_0^T j_{x,L}(t,x)dt &= \int_0^T j_{x,L}(t,L)dt \\ &= \int_0^T dt \int_{v_x<0} \int_{v_y} v_x g_L(t,v_x,v_y)dv. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Maintenant, en utilisant (5.60), (5.62) et (5.58) on déduit :

$$\int_0^T \left(j_{x,\alpha}(t,y) + \alpha \int_0^x \rho_0(t,y)dy - \alpha \int_x^L \rho_L(t,y)dy \right) dt = 0, \tag{5.63}$$

et alors E_x^1 donné par (5.51) est aussi T-périodique.

Remarque 5.2.1 *Le champ électrique vérifie l'équation de la divergence :*

$$\partial_x E_x^1 = \frac{1}{\varepsilon}\rho(t,x), \qquad (t,x) \in I\!R_t \times]0,L[\tag{5.64}$$

et l'équation de Maxwell modifiée :

$$\partial_t E_x = -\frac{1}{\varepsilon} j_{x,\alpha} - \frac{\alpha}{\varepsilon} \int_0^x \rho_{0,\alpha}(t,y)dy \quad + \quad \frac{\alpha}{\varepsilon} \int_x^L \rho_{L,\alpha}(t,y)dy, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times]0,L[. \tag{5.65}$$

Démonstration De (5.39) nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_x E_x^1 &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\partial_x j_{x,\alpha}(s,x) + \alpha\rho_0(s,x) + \alpha\rho_L(s,x) \right) ds + \frac{1}{\varepsilon}\rho(0,x) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\partial_x j_{x,\alpha}(s,x) + \alpha\rho_\alpha(s,x) \right) ds + \frac{1}{\varepsilon}\rho(0,x) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \partial_t \rho_\alpha(s,x) ds + \frac{1}{\varepsilon}\rho(0,x) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\rho(t,x). \end{aligned}$$

La deuxième formule suit immédiatement en utilisant (5.39).

On montre maintenant que l'application F transforme $\mathcal{X}$ dans lui-même et qu'elle est continue sur $L^2(I\!R_t \times]0, L[)$ par rapport à la topologie faible :

Lemme 5.2.1 *On suppose que (5.17), (5.58) sont satisfaits, et que la constante K qui définie l'ensemble $\mathcal{X}$ vérifie :*

$$K + \frac{K}{c} \cdot \left(v_1 + \frac{q}{m} \cdot K \cdot \frac{2L}{v_0} \right) \leq \frac{m v_0^2}{4qL} \tag{5.66}$$

Alors si g_0, g_L, h_0, h_L vérifient :

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(\ \|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}) \cdot (v_1 + v_0/2)^2 (\ T(v_1 + v_0/2) + \alpha LT + L) \leq \frac{K}{\sqrt{2}}, \tag{5.67}$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{L}{c} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(\|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}) \cdot (v_1 + v_0/2)^3 + \frac{1}{2}(\|h_0\|_{L^\infty} + \|h_L\|_{L^\infty}) \leq \frac{K}{\sqrt{2}}, \tag{5.68}$$

l'ensemble $\mathcal{X}$ est invariant par l'application F ($F(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$).

Démonstration Du *Corollaire 5.1.1* appliqué au champ régularisé (5.48) on obtient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|E_x^1\|_{L^\infty} \ & \leq \ \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(\ \|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}) \cdot (v_1 + v_0/2)^2 \\ & \cdot \ \ (\ T(v_1 + v_0/2) + \alpha LT + L) \leq \frac{K}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|E_y^1\|_{L^\infty} \ & \leq \ \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{L}{c} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(\ \|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}) \cdot (v_1 + v_0/2)^3 \\ & + \ \frac{1}{2}(\ \|h_0\|_{L^\infty} + \|h_L\|_{L^\infty}) \leq \frac{K}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent nous avons :

$$\|E^1\|_{L^\infty} = \left\| \sqrt{|E_x^1|^2 + |E_y^1|^2} \right\|_{L^\infty} \leq K,$$

$$\begin{aligned} c \cdot \|B_z^1\|_{L^\infty} \ & \leq \ \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{L}{c} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(\ \|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}) \cdot (v_1 + v_0/2)^3 \\ & + \ \frac{1}{2}(\ \|h_0\|_{L^\infty} + \|h_L\|_{L^\infty}) \leq K. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant la *Proposition 5.2.1* on déduit que $F(E_x, E_y, B_z)$ est aussi T-périodique, et donc $F(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$.
Pour la preuve de la continuité nous avons besoin du lemme suivant concernant l'unicité de la solution faible du problème modifié de Vlasov :

Lemme 5.2.2 *Soient* $(E_x, E_y, B_z) \in (L^\infty(I\!R_t; W^{1,\infty}(]0, L[)))^3$ *et* $g_0, g_L \in L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)$ *des fonctions périodiques qui vérifient (5.15), (5.17). Alors la solution faible de l'équation modifiée de Vlasov (5.52) dans* $L^\infty(I\!R_t\times]0, L[\times I\!R_v^2)$ *est unique et par conséquent, elle est la solution par caractéristiques donnée par (5.55).*

Démonstration Supposons que f_α est une solution dans $L^\infty(I\!R_t\times]0, L[\times I\!R_v^2)$ avec $g_0 = 0$ et $g_L = 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_t f_\alpha \quad &+ \quad v_x \cdot \partial_x f_\alpha + \frac{q}{m}(R_\alpha E_x + v_y \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_x} f_\alpha \\ &+ \quad \frac{q}{m}(R_\alpha E_y - v_x \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_y} f_\alpha = -\alpha f_\alpha \in L^\infty(I\!R_t\times]0, L[\times I\!R_v^2),\end{aligned}$$

et donc (cf. [4], [27]) nous obtenons :

$$\begin{aligned}-\alpha \cdot f_\alpha^2 = f_\alpha(\partial_t f_\alpha \quad &+ \quad v_x \cdot \partial_x f_\alpha + \frac{q}{m}(R_\alpha E_x + v_y \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_x} f_\alpha \\ &+ \quad \frac{q}{m}(R_\alpha E_y - v_x \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_y} f_\alpha) \\ &= \quad \frac{1}{2}(\partial_t f_\alpha^2 + v_x \cdot \partial_x f_\alpha^2 + \frac{q}{m}(R_\alpha E_x + v_y \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_x} f_\alpha^2 \\ &+ \quad \frac{q}{m}(R_\alpha E_y - v_x \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_y} f_\alpha^2).\end{aligned}$$

Par intégration sur $]0, T[\times]0, L[\times I\!R_v^2$ on déduit :

$$\begin{aligned}\alpha \int_0^T \int_0^L \int_{I\!R_v^2} f_\alpha^2 dv dx dt = \quad &- \quad \frac{1}{2}\int_0^T \int_{v_x>0} \int_{v_y} v_x f_\alpha^2(t, L, v_x, v_y) dv dt \\ &+ \quad \frac{1}{2}\int_0^T \int_{v_x<0} \int_{v_y} v_x f_\alpha^2(t, 0, v_x, v_y) dv dt \leq 0.\end{aligned}$$

Maintenant on peut montrer la continuité de l'application F. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 5.2.2 *Soient* $g_0, g_L, h_0, h_L \in L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)$ *des fonctions* T*-périodiques et* v_0, v_1, K *des constantes qui vérifient (5.17), (5.66) et (5.58). Alors l'application* F *est continue par rapport à la topologie faible de* $L_T^2(I\!R_t\times]0, L[)^3$.

Démonstration. Soit $(E_x^n, E_y^n, B_z^n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{X}$ tel que :

$$(E_x^n, E_y^n, B_z^n) \rightharpoonup (E_x, E_y, B_z), \quad \text{faiblement dans } (L_T^2)^3. \tag{5.69}$$

Pour le champ régularisé nous avons la convergence ponctuelle :

$$(R_\alpha E_x^n, R_\alpha E_y^n, R_\alpha B_z^n)(t,x) \to (R_\alpha E_x, R_\alpha E_y, R_\alpha B_z)(t,x), \ \ \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,L],$$

et par conséquent, par le théorème de la convergence dominée on obtient :

$$(R_\alpha E_x^n, R_\alpha E_y^n, R_\alpha B_z^n) \to (R_\alpha E_x, R_\alpha E_y, R_\alpha B_z), \ \ \text{fortement dans}(L_T^2)^3. \tag{5.70}$$

Notons par f^n, f les solutions par caractéristiques données par (5.55) qui correspondent aux champs $(R_\alpha E_x^n,\ R_\alpha E_y^n,\ R_\alpha B_z^n)$ et $(R_\alpha E_x, R_\alpha E_y, R_\alpha B_z)$. Nous rappelons que g_0, g_L sont bornés dans L^∞, et par conséquent , $(f^n)_{n\geq 1}$ est borné dans $L^\infty(I\!R_t \times]0,L[\times I\!R_{v^2})$ uniformément. Après l'extraction d'une sous-suite si nécessaire, nous avons :

$$f^n \rightharpoonup \tilde{f}, \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty. \tag{5.71}$$

Comme f^n ont des supports uniformément bornés en v, on déduit :

$$\rho^n := q\int_{I\!R_v 2} f^n \, dv \rightharpoonup \tilde{\rho} := q\int_{I\!R_v 2} \tilde{f}\, dv \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty, \tag{5.72}$$

et :

$$j_{x,y}^n := q\int_{I\!R_v 2} v_{x,y} f^n \, dv \rightharpoonup \tilde{j}_{x,y} := q\int_{I\!R_v 2} v_{x,y}\tilde{f}\, dv \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty. \tag{5.73}$$

On peut montrer maintenant que $\tilde{f}$ est la solution par caractéristiques du problème modifié de Vlasov qui correspond au champ $(R_\alpha E_x, R_\alpha E_y, R_\alpha B_z)$. Puisque f^n est la solution par caractéristiques, elle est aussi solution faible :

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L\int_{I\!R_v^2} (-\alpha\cdot\theta + \partial_t\theta + v_x\cdot\partial_x\theta \ &+\ \frac{q}{m}(R_\alpha E_x^n + v_y\cdot R_\alpha B_z^n)\cdot\partial_{v_x}\theta \\ &+\ \frac{q}{m}(R_\alpha E_y^n - v_x\cdot R_\alpha B_z^n)\cdot\partial_{v_y}\theta) f^n dvdxdt \\ &=\ \int_0^T\int_{v_x<0}\int_{v_y} v_x\cdot g_L\theta(t,L,v_x,v_y)dvdt \\ &-\ \int_0^T\int_{v_x>0}\int_{v_y} v_x\cdot g_0\theta(t,0,v_x,v_y)dvdt\end{aligned} \tag{5.74}$$

pour toute fonction T-périodique $\theta \in \mathcal{V}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} & \int_0^T \int_0^L \int_{\mathbb{R}_v^2} f^n \cdot (-\alpha \cdot \theta + \partial_t \theta + v_x \cdot \partial_x \theta)\, dvdxdt \\ = & \int_0^T \int_0^L \int_{\mathbb{R}_v^2} \tilde{f} \cdot \ (-\alpha \cdot \theta + \partial_t \theta + v_x \cdot \partial_x \theta)\, dvdxdt \end{aligned} \tag{5.75}$$

Pour l'autre terme, nous observons que $\int_{\mathbb{R}_v^2} \partial_{v_x}\theta \cdot f^n dv$ et $\int_{\mathbb{R}_v^2} \partial_{v_y}\theta \cdot f^n dv$ convergent dans L_T^2 faiblement. Par conséquent, en utilisant (5.70) nous obtenons :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^L \int_{\mathbb{R}_v^2} & \frac{q}{m}(R_\alpha E_x^n + v_y \cdot R_\alpha B_z^n)\partial_{v_x}\theta \cdot f^n \, dvdxdt \\ = & \lim_{n\to\infty} < \frac{q}{m} R_\alpha E_x^n, \int_{\mathbb{R}_v^2} \partial_{v_x}\theta \cdot f^n \, dv >_{L_T^2} \\ + & \lim_{n\to\infty} < \frac{q}{m} R_\alpha B_z^n, \int_{\mathbb{R}_v^2} v_y \cdot \partial_{v_x}\theta \cdot f^n \, dv >_{L_T^2} \\ = & < \frac{q}{m} R_\alpha E_x, \int_{\mathbb{R}_v^2} \partial_{v_x}\theta \cdot \tilde{f} \, dv >_{L_T^2} \\ + & < \frac{q}{m} R_\alpha B_z, \int_{\mathbb{R}_v^2} v_y \cdot \partial_{v_x}\theta \cdot \tilde{f} \, dv >_{L_T^2} \\ = & \int_0^T \int_0^L \int_{\mathbb{R}_v^2} \frac{q}{m}(R_\alpha E_x + v_y \cdot R_\alpha B_z)\partial_{v_x}\theta \cdot \tilde{f} \, dvdxdt \end{aligned} \tag{5.76}$$

Donc $\tilde{f}$ est une solution faible du problème modifié de Vlasov qui correspond au champ $(R_\alpha E_x, R_\alpha E_y, R_\alpha B_z)$:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L \int_{\mathbb{R}_v^2} (-\alpha \cdot \theta + \partial_t \theta + v_x \cdot \partial_x \theta & + \frac{q}{m}(R_\alpha E_x + v_y \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_x}\theta \\ & + \frac{q}{m}(R_\alpha E_y - v_x \cdot R_\alpha B_z) \cdot \partial_{v_y}\theta)\tilde{f} dvdxdt \\ & = \int_0^T \int_{v_x<0} \int_{v_y} v_x \cdot g_L \theta(t, L, v_x, v_y) dvdt \\ & - \int_0^T \int_{v_x>0} \int_{v_y} v_x \cdot g_0 \theta(t, 0, v_x, v_y) dvdt \end{aligned} \tag{5.77}$$

pour toute fonction T-périodique $\theta \in \mathcal{V}$. Maintenant, du *Lemme 5.2.2* on déduit que $\tilde{f}$ est la solution par caractéristiques associée au champ $(R_\alpha E_x, R_\alpha E_y, R_\alpha B_z)$ (unicité de la solution faible pour le problème modifié de Vlasov), donc $\tilde{f} = f$ et nous avons :

$$j_{x,y}^n := q \int_{\mathbb{R}_{v^2}} v_{x,y} f^n \, dv \to j_{x,y} := q \int_{\mathbb{R}_{v^2}} v_{x,y} f \, dv \quad \text{faible} \star \text{ dans } L^\infty. \tag{5.78}$$

Maintenant on peut facilement passer à la limite dans (5.51) pour obtenir :

$$\lim_{n\to\infty} F(E_x^n, E_y^n, B_z^n) = F(E_x, E_y, B_z), \quad \text{faiblement dans } L_T^2.$$

Proposition 5.2.3 *Soient $g_0, g_L, h_0, h_L \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Sigma^-)$ des fonctions T-périodiques et v_0, v_1, K des constantes qui vérifient (5.17), (5.66), (5.67), (5.68) et (5.58). Alors le système 1D modifié de Vlasov-Maxwell a au moins une solution faible périodique.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème du point fixe de Schauder.

5.2.2 Solutions périodiques pour le système 1D classique de Vlasov-Maxwell

Dans ce paragraphe nous montrons l'existence d'une solution faible périodique pour le système classique (non-relativiste) de Vlasov-Maxwell 1D. Évidemment, ce résultat est une conséquence directe de la *Proposition 5.2.3*.

Théorème 5.2.1 *Soient $g_0, g_L, h_0, h_L \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \Sigma^-)$ des fonctions T-périodiques et v_0, v_1, K des constantes qui vérifient :*

$$supp(g_0) \subset \{(t, x, v_x, v_y)\ ;\ t \in \mathbb{R}_t, x = 0, 0 < v_0 \le v_x, \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \le v_1\},$$

$$supp(g_L) \subset \{(t, x, v_x, v_y);\ t \in \mathbb{R}_t, x = L, 0 > -v_0 \ge v_x, \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \le v_1\},$$

$$K + \frac{K}{c} \cdot \left(v_1 + \frac{q}{m} \cdot K \cdot \frac{2L}{v_0}\right) \le \frac{mv_0^2}{4qL},$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(\ \|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}) \cdot (v_1 + v_0/2)^2(\ T(v_1 + v_0/2) + L) < \frac{K}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{L}{c} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(\|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}) \cdot (v_1 + v_0/2)^3 + \frac{1}{2}(\|h_0\|_{L^\infty} + \|h_L\|_{L^\infty}) \le \frac{K}{\sqrt{2}},$$

et :

$$\int_0^T dt \int_{v_x>0} \int_{v_y} v_x g_0(t, v_x, v_y) dv + \int_0^T dt \int_{v_x<0} \int_{v_y} v_x g_L(t, v_x, v_y) dv = 0.$$

Alors le système classique (non-relativiste) 1D de Vlasov-Maxwell a au moins une solution faible périodique.

Démonstration. Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs convergente vers zéro. Pour chaque α_n suffisament petit nous avons :

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot q(\ \|g_0\|_{L^\infty}+\|g_L\|_{L^\infty})\cdot(v_1+v_0/2)^2(\ T(v_1+v_0/2)+\alpha_n LT+L)\leq\frac{K}{\sqrt{2}}$$

Par conséquent, en utilisant la *Proposition 5.2.3* on déduit l'existence d'une solution périodique $(f^n, E_x^n, E_y^n, B_z^n)$ pour le système α_n-régularisé de Vlasov-Maxwell :

$$\begin{aligned}\alpha_n\cdot f^n+\partial_t f^n+v_x\cdot\partial_x f^n &+ \frac{q}{m}(R_{\alpha_n}E_x^n+v_y\cdot R_{\alpha_n}B_z^n)\cdot\partial_{v_x}f^n\\ &+ \frac{q}{m}(R_{\alpha_n}E_y^n-v_x\cdot R_{\alpha_n}B_z^n)\cdot\partial_{v_y}f^n=0,\\ &\quad (t,x,v_x,v_y)\in I\!R_t\times]0,L[\times I\!R_v^2,\end{aligned}$$

$$\partial_t E_x^n=-\frac{1}{\varepsilon}j_x^n-\frac{\alpha_n}{\varepsilon}\int_0^x\rho_0^n(t,y)dy+\frac{\alpha_n}{\varepsilon}\int_x^L\rho_L^n(t,y)dy,\qquad (t,x)\ \in\ I\!R_t\times]0,L[,$$

$$\partial_t E_y^n+c^2\partial_x B_z^n=-\frac{1}{\varepsilon}j_y^n:=-\frac{1}{\varepsilon}\int_v v_y f^n(t,x,v_x,v_y)\,dv,\qquad (t,x)\ \in\ I\!R_t\times]0,L[,$$

$$\partial_t B_z^n+\partial_x E_y^n=0,\qquad (t,x)\ \in\ I\!R_t\times]0,L[,$$

avec les conditions aux limites :

$$f^n(t,0,v_x,v_y)=g_0(t,v_x,v_y),\qquad t\in I\!R_t\ v_x>0, v_y\in I\!R_v,$$

$$f^n(t,L,v_x,v_y)=g_L(t,v_x,v_y),\qquad t\in I\!R_t\ v_x<0, v_y\in I\!R_v,$$

$$E_y^n(t,0)+cB_z^n(t,0)=h_0(t),\qquad t\in I\!R_t,$$

$$E_y^n(t,L)-cB_z^n(t,L)=h_L(t),\qquad t\in I\!R_t,$$

Après l'extraction d'une sous-suite, nous avons les convergences :

$$(E_x^n, E_y^n, B_z^n) \rightharpoonup (E_x, E_y, B_z), \text{ faiblement dans } (L_T^2)^3,$$

et :

$$f^n \rightharpoonup f, \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty.$$

La régularisation paramétrée par $\alpha_n \to 0$, préserve la convergence du champ électromagnétique. En effet :

$$\begin{aligned}
| < R_{\alpha_n} E_x^n, \eta >_{L_T^2} - < E_x, \eta >_{L_T^2} | &= | < E_x^n, R_{\alpha_n}\eta > - < E_x, \eta > | \\
&= | < E_x^n, R_{\alpha_n}\eta - \eta > + < E_x^n - E_x, \eta > | \\
&\leq | < E_x^n - E_x, \eta > | \\
&+ \|E_x^n\| \cdot \|R_{\alpha_n}\eta - \eta\| \to 0,
\end{aligned}$$

et donc :

$$(R_{\alpha_n} E_x^n, R_{\alpha_n} E_y^n, R_{\alpha_n} B_z^n) \rightharpoonup (E_x, E_y, B_z), \text{ faiblement dans } (L_T^2)^3.$$

Puisque f^n ont leur supports uniformément bornés en v, on déduit que :

$$\rho^n := q \int_{I\!R_{v^2}} f^n \, dv \rightharpoonup \rho := q \int_{I\!R_{v^2}} f \, dv \text{ faible } \star \text{ in } L^\infty,$$

et :

$$j_{x,y}^n := q \int_{I\!R_{v^2}} v_{x,y} f^n \, dv \rightharpoonup j_{x,y} := q \int_{I\!R_{v^2}} v_{x,y} f \, dv \text{ faible } \star \text{ in } L^\infty.$$

En utilisant le lemme de moyenne de DiPerna et Lions [26] nous obtenons (en utilisant toujours que les supports sont uniformément bornés en v) :

$$\rho^n := q \int_{I\!R_{v^2}} f^n \, dv \to \rho := q \int_{I\!R_{v^2}} f \, dv \text{ dans } L_T^2, \tag{5.79}$$

et :

$$j_{x,y}^n := q \int_{I\!R_{v^2}} v_{x,y} f^n \, dv \to j_{x,y} := q \int_{I\!R_{v^2}} v_{x,y} f \, dv \text{ dans } L_T^2. \tag{5.80}$$

De plus, nous avons :

$$\int_{I\!R_{v^2}} \psi(v_x, v_y) f^n \, dv \to \int_{I\!R_{v^2}} \psi(v_x, v_y) f \, dv \text{ dans } L_T^2, \tag{5.81}$$

pour toute fonction continue $\psi \in C(I\!R_{v^2})$. Maintenant on montre que f est une solution faible de l'équation de Vlasov qui correspond au champ (E_x, E_y, B_z). Par un argument simple de densité, il suffit de considérer seulement des fonctions test de la forme suivante(cf. [26]) :

$$\theta(t, x, v_x, v_y) = \varphi(t, x) \cdot \psi(v_x, v_y).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_0^L \int_{I\!R_v^2} & \frac{q}{m}(R_\alpha E_x^n + v_y \cdot R_\alpha B_z^n)\partial_{v_x}\theta \cdot f^n \, dvdxdt \\
&= \lim_{n\to\infty} < \frac{q}{m} R_\alpha E_x^n, \varphi(t,x) \int_{I\!R_v^2} \partial_{v_x}\psi \cdot f^n \, dv >_{L_T^2} \\
&+ \lim_{n\to\infty} < \frac{q}{m} R_\alpha B_z^n, \varphi(t,x) \int_{I\!R_v^2} v_y \cdot \partial_{v_x}\psi \cdot f^n \, dv >_{L_T^2} \\
&= < \frac{q}{m} R_\alpha E_x, \varphi(t,x) \int_{I\!R_v^2} \partial_{v_x}\psi \cdot f \, dv >_{L_T^2} \\
&+ < \frac{q}{m} R_\alpha B_z, \varphi(t,x) \int_{I\!R_v^2} v_y \cdot \partial_{v_x}\psi \cdot f \, dv >_{L_T^2} \\
&= \int_0^T \int_0^L \int_{I\!R_v^2} \frac{q}{m}(R_\alpha E_x + v_y \cdot R_\alpha B_z)\partial_{v_x}\theta \cdot f \, dvdxdt \qquad (5.82)
\end{aligned}$$

En plus nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \int_0^T \int_0^L \int_{I\!R_v^2} f^n \cdot \theta \, dvdxdt = 0$$

pour toute fonction T-périodique $\theta \in \mathcal{V}$. Ensuite, en passant à la limite pour $n \to \infty$ dans (5.51) et en utilisant (5.79) et (5.80), on déduit les égalités suivantes dans L^2_T :

$$
\begin{aligned}
E_x(t,x) = & - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t j_x(s,x)\,ds \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \rho(0,y)\,dy, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times]0,L[, \\
E_y(t,x) & = \frac{1}{2}(h_0(t-x/c) + h_L(t-(L-x)/c)) \\
& - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-x/c}^t j_y(s, x - c(t-s))\,ds \\
& - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{t-(L-x)/c}^t j_y(s, x + c(t-s))\,ds, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times]0,L[, \\
B_z(t,x) & = \frac{1}{2c}(h_0(t-x/c) - h_L(t-(L-x)/c)) \\
& - \frac{1}{2c\varepsilon}\int_{t-x/c}^t j_y(s, x - c(t-s))\,ds \\
& + \frac{1}{2c\varepsilon}\int_{t-(L-x)/c}^t j_y(s, x + c(t-s))\,ds, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times]0,L[,
\end{aligned}
$$

et donc le champ (E_x, E_y, B_z) vérifie les équations de Maxwell.

5.3 Solutions périodiques pour le système 1D relativiste de Vlasov-Maxwell

Les mêmes idées s'appliquent aussi au cas relativiste du système 1D de Vlasov-Maxwell :

$$
\begin{aligned}
\partial_t f + V_x(p)\cdot\partial_x f + q(E_x + V_y(p)\cdot B_z)\cdot\partial_{p_x} f \quad & + \quad q(E_y - V_x(p)\cdot B_z)\cdot\partial_{p_y} f = 0, \\
(t,x,p_x,p_y) \quad & \in \quad I\!R_t \times]0,L[\times I\!R^2_p, \qquad (5.83)
\end{aligned}
$$

$$\partial_t E_x = -\frac{1}{\varepsilon} j_x := -\frac{1}{\varepsilon}\int_p V_x(p) f(t,x,p_x,p_y)\, dp, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times]0,L[, \tag{5.84}$$

$$\partial_t E_y + c^2 \partial_x B_z = -\frac{1}{\varepsilon} j_y := -\frac{1}{\varepsilon}\int_p V_y(p) f(t,x,p_x,p_y)\, dp, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times]0,L[, \tag{5.85}$$

$$\partial_t B_z + \partial_x E_y = 0, \qquad (t,x) \in I\!R_t \times]0,L[, \tag{5.86}$$

avec les conditions aux limites :

$$f(t,0,p_x,p_y) = g_0(t,p_x,p_y), \qquad t \in I\!R_t\ p_x > 0, p_y \in I\!R_p, \tag{5.87}$$

$$f(t,L,p_x,p_y) = g_L(t,p_x,p_y), \qquad t \in I\!R_t\ p_x < 0, p_y \in I\!R_p, \tag{5.88}$$

$$E_y(t,0) + cB_z(t,0) = h_0(t), \qquad t \in I\!R_t, \tag{5.89}$$

$$E_y(t,L) - cB_z(t,L) = h_L(t), \qquad t \in I\!R_t, \tag{5.90}$$

où g_0, g_L, h_0, h_L sont des fonctions T-périodiques et la vitesse $V(p)$ est donnée par :

$$V(p) = (V_x(p), V_y(p)) = c \cdot \frac{(p_x, p_y)}{\sqrt{m^2c^2 + \|p\|^2}}, \qquad (p_x,p_y) \in I\!R_{p^2}. \tag{5.91}$$

Nous allons suivre les mêmes étapes que dans le paragraphe précédent. D'abord on observe que le terme quadratique $(E(t,x) + V(p) \wedge B(t,x)) \cdot \nabla_p f$ peut s'écrire comme une divergence :

$$(E(t,x) + V(p) \wedge B(t,x)) \cdot \nabla_p f = \nabla_p \cdot \{(E(t,x) + V(p) \wedge B(t,x)) \cdot f\}.$$

Définition 5.3.1 *Soient $E_x, E_y, B_z \in L^\infty(I\!R_t \times]0,L[)$ et $g_0, g_L \in L^1_{loc}(I\!R_t \times \Sigma^-)$ des fonctions T-périodiques en temps, où :*

$$\begin{aligned} \Sigma^- &= \{(t,x,p_x,p_y) \mid t \in I\!R, x = 0, p_x > 0, p_y \in I\!R\} \\ &\cup \{(t,x,p_x,p_y) \mid t \in I\!R, x = L, p_x < 0, p_y \in I\!R\}. \end{aligned} \tag{5.92}$$

On dit que $f \in L^1_{loc}(I\!R_t \times]0, L[\times I\!R^2_p)$ *est une solution faible* T*-périodique du problème (5.83), (5.87), (5.88) ssi :*

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L\int_{I\!R^2_p}(\partial_t\theta + V_x(p)\cdot\partial_x\theta &+ q(E_x + V_y(p)\cdot B_z)\cdot\partial_{p_x}\theta \\
&+ q(E_y - V_x(p)\cdot B_z)\cdot\partial_{p_y}\theta)f(t,x,p_x,p_y)dpdxdt \\
&= \int_0^T\int_{p_x<0}\int_{p_y} V_x(p)g_L(t,p_x,p_y)\theta(t,L,p_x,p_y)dpdt \\
&- \int_0^T\int_{p_x>0}\int_{p_y} V_x(p)g_0(t,p_x,p_y)\theta(t,0,p_x,p_y)dpdt
\end{aligned} \tag{5.93}$$

pour toute fonction T*-périodique* $\theta \in \mathcal{V}$*, où :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}{=}\{\eta &\in W^{1,\infty}(I\!R_t\times]0,L[\times I\!R^2_p)\,\eta(t,0,p_x<0,p_y) = \eta(t,L,p_x>0,p_y) = 0, \\
&\exists \; B \textit{ sous-ensemble borné de } I\!R^2_p,\ supp(\eta) \subset I\!R_t \times [0,L] \times B\}
\end{aligned}$$

Définition 5.3.2 *Soient* $E_x, E_y, B_z \in L^\infty(I\!R_t; W^{1,\infty}(]0,L[))$ *et* $g_0, g_L \in L^1_{loc}(I\!R_t \times \Sigma^-)$ *des fonctions* T*-périodiques. La fonction* $f \in L^1_{loc}(I\!R_t\times]0,L[\times I\!R^2_p)$ *donnée par (5.94) est la solution par caractéristiques du problème (5.83), (5.87), (5.88) :*

$$\begin{aligned}
< f, \varphi > \quad &= \quad \int_0^T dt \int_{p_x>0}\int_{p_y} dp \int_t^{\tau_o} V_x(p)\cdot g_0(t,p_x,p_y) \\
&\cdot \quad \varphi(s, X(s;0,p_x,p_y,t), P_x(s;0,p_x,p_y,t), P_y(s;0,p_x,p_y,t)ds \\
&- \quad \int_0^T dt \int_{p_x<0}\int_{p_y} dp \int_t^{\tau_o} V_x(p)\cdot g_L(t,p_x,p_y) \\
&\cdot \quad \varphi(s, X(s;L,p_x,p_y,t), P_x(s;L,p_x,p_y,t), P_y(s;L,p_x,p_y,t)ds,
\end{aligned} \tag{5.94}$$

où $(X(s), P_x(s), P_y(s))$ est la solution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds} & = & V_x(P(s; x, p_x, p_y, t)), & s \in [\tau_i, \tau_o] \\ X(t; x, p_x, p_y, t) & = & x, & \\ \dfrac{dP_x}{ds} & = & q \cdot (E_x(s, X(s)) + V_y(P(s)) \cdot B_z(s, X(s))), & s \in [\tau_i, \tau_o] \\ P_x(t; x, p_x, p_y, t) & = & p_x, & \\ \dfrac{dP_y}{ds} & = & q \cdot (E_y(s, X(s)) - V_x(P(s)) \cdot B_z(s, X(s))), & s \in [\tau_i, \tau_o] \\ P_y(t; x, p_x, p_y, t) & = & p_y. & \end{cases} \tag{5.95}$$

Dans le cas relativiste, l'analogue du *Lemme 5.1.1* est donné par :

Lemme 5.3.1 *Supposons que le champ électromagnétique et les données au bord vérifient :*

$$\|E\|_{L^\infty} + c \cdot \|B_z\|_{L^\infty} \leq \frac{m \cdot (p_0/m)^2}{4qL} \cdot \left[1 + \left(\frac{p_1 + p_0/2}{mc}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{5.96}$$

$$(E_x, E_y, B_z) \in (L^\infty(I\!R_t; W^{1,\infty}(]0, L[)))^3, \tag{5.97}$$

$$\begin{aligned} supp(g_0) &\subset \{(t, x, p_x, p_y)\ ;\ t \in I\!R_t, x = 0, 0 < p_0 \leq p_x, \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \leq p_1\}, \\ supp(g_L) &\subset \{(t, x, p_x, p_y);\ t \in I\!R_t, x = L, 0 > -p_0 \geq p_x, \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \leq p_1\}. \end{aligned} \tag{5.98}$$

Alors, le temps de vie dans $]0, L[$ *pour toutes les particules issues des supports de* g_0 *et de* g_L *est fini :*

$$\begin{aligned} \tau_o(x, p_x, p_y, t) - \tau_i(x, p_x, p_y, t) \quad &\leq \quad 2 \cdot \frac{L \cdot m}{p_0} \sqrt{1 + \left(\frac{p_1 + p_0/2}{mc}\right)^2}, \\ &\forall \quad (t, x, p_x, p_y) \in supp(g_0) \cup supp(g_L). \end{aligned}$$

Corollaire 5.3.1 *Avec les mêmes hypothèses que dans le Lemme 5.3.1 et en notant par* f *la solution par caractéristiques de la Définition 5.3.2 nous avons :*

$$supp(f) \subset \{(t, x, p_x, p_y) | t \in I\!R_t, x \in [0, L], \frac{p_0}{2} \leq |p_x|, \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \leq p_1 + \frac{p_0}{2}\}, \tag{5.99}$$

$$\|\rho\|_{L^\infty} \le \frac{\pi}{2}(p_1 + p_0/2)^2 \cdot q \cdot (\|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}), \tag{5.100}$$

et :

$$\max\{\|j_x\|_{L^\infty}, \|j_y\|_{L^\infty}\} \le c \cdot \frac{\pi}{2}(p_1 + p_0/2)^2 \cdot q \cdot (\|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}), \tag{5.101}$$

où $\rho(t,x) = q\int_{I\!R^2_p} f(t,x,p_x,p_y)\, dp$ *et* $j_{x,y}(t,x) = q\int_{I\!R^2_p} V_{x,y}(p) f(t,x,p_x,p_y)\, dp$.

Comme dans le cas non-relativiste, nous montrons d'abord l'existence pour un problème régularisé en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Ensuite on passe à la limite pour le paramètre de régularisation vers zéro. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.3.1 *Soient* $g_0, g_L, h_0, h_L \in L^\infty(I\!R_t \times \Sigma^-)$ *des fonctions* T*-périodiques et* p_0, p_1, K *des constantes qui vérifient :*

$$supp(g_0) \subset \{(t,x,p_x,p_y)\ ;\ t \in I\!R_t, x = 0, 0 < p_0 \le p_x, \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \le p_1\},$$
$$supp(g_L) \subset \{(t,x,p_x,p_y);\ t \in I\!R_t, x = L, 0 > -p_0 \ge p_x, \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \le p_1\},$$

$$2 \cdot K \le \frac{m \cdot (p_0/m)^2}{4qL} \cdot \left[1 + \left(\frac{p_1 + p_0/2}{mc}\right)^2\right]^{-1/2},$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(\ \|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}) \cdot (p_1 + p_0/2)^2(\ cT + L) < \frac{K}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{L}{2\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot q(\|g_0\|_{L^\infty} + \|g_L\|_{L^\infty}) \cdot (p_1 + p_0/2)^2 + \frac{1}{2}(\|h_0\|_{L^\infty} + \|h_L\|_{L^\infty}) \le \frac{K}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^T dt \int_{p_x>0}\int_{p_y} V_x(p) g_0(t,p_x,p_y) dp + \int_0^T dt \int_{p_x<0}\int_{p_y} V_x(p) g_L(t,p_x,p_y) dp = 0.$$

Alors le système relativiste 1D de Vlasov-Maxwell a au moins une solution faible périodique.

Chapitre 6

Méthode particulaire. Couplage avec les équations de Maxwell

Introduction

La modélisation et la simulation numérique des phénomènes de transport des particules chargées font l'objet actuellement de nombreuses recherches. Pour ce type de problèmes, le modèle mathématique le plus général est fourni par les équations couplées de Vlasov et des Maxwell. Celui-ci est assez complet mais son coût de résolution est très élevé à la fois en temps de calcul et en place mémoire. Ceci a conduit à l'élaboration d'autres modèles moins coûteux comme les modèles paraxiaux [21]. Cependant, certains dispositifs comme les canons à électrons ne peuvent être modélisés qu'en utilisant les équations de Vlasov-Maxwell. De nombreuses méthodes ont été proposées pour résoudre les équations de Vlasov-Maxwell [42]. Dans ce chapitre nous allons présenter la méthode particulaire [38]. Pour la résolution numérique des équations de Maxwell nous allons utiliser la formulation mixte Élements finis-Volumes finis introduite dans (2.2).

6.1 Équation de Vlasov

Nous considèrerons, dans cette étude, une seule espèce de particules chargées. Néanmoins tout ce que nous allons présenter peut s'étendre à plusieurs epèces de particules chargées. Une population de particules chargées de masse m et de charge q est caractérisée par sa fonction de distribution $f = f(t, x, v)$ dans l'espace des phases (x, v) où x et v désignent respectivement la position et la vitesse. La fonction de distribution vérifie l'équation de

Boltzmann des semiconducteurs. Elle s'écrit :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}(E + v \wedge (\mu_0 H)) \cdot \nabla_v f = Q(f),\ (t,x,v) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \times I\!R_v^d, \tag{6.1}$$

où $\vec{E}(t,x)$ est le champ électrique, $\vec{H}(t,x)$ est le champ magnétique et $Q(f)$ est un terme de collision. Ce terme fait intervenir un taux de transition $S(v,v_1)$, qui dépend du modèle physique choisi [43] :

$$Q(f)(t,x,v) = \frac{1}{\tau}\int [S(v_1,v)f(t,x,v_1) - S(v,v_1)f(t,x,v)]dv_1,\ (t,x,v) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \times I\!R_v^d, \tag{6.2}$$

où τ est un temps de relaxation (le temps moyen entre collisions). En l'absence de collisions, la fonction de distribution est solution de l'équation de Vlasov :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}(E + v \wedge (\mu_0 H)) \cdot \nabla_v f = 0,\ (t,x,v) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \times I\!R_v^d. \tag{6.3}$$

Le champ électromagnétique vérifie les équations de Maxwell :

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0,\ (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \\ \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\vec{j},\ (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \end{array}\right. \tag{6.4}$$

où ε_0, μ_0 sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide. Si le champ magnétique est négligé ($\vec{H} = 0$), alors le champ électrique s'écrit $\vec{E}(t,x) = \nabla_x \varphi(t,x)$, où φ est le potentiel électrostatique. Dans ce cas, l'équation de Vlasov est couplée à la lois de Gauss électrique $\Delta_x \varphi = \nabla_x \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ ce qui donne le système de Vlasov-Poisson:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}\nabla_x \varphi \cdot \nabla_v f = 0,\ (t,x,v) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \times I\!R_v^d, \\ \\ \Delta_x \varphi = \dfrac{\rho(t,x)}{\varepsilon_0},\ (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d. \end{array}\right. \tag{6.5}$$

Le couplage de ces équations est donné par l'expression de la densité de charge et de courant à partir de la fonction de distribution:

$$\rho(t,x) = q\int_v f(t,x,v)dv\ ,(t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \tag{6.6}$$

et:

$$\vec{j}(t,x) = q\int_v \vec{v} f(t,x,v)dv\ ,(t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d. \tag{6.7}$$

Par une intégration par rapport à v dans (6.3) on obtient l'équation de conservation de la charge :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \vec{j} = 0,\ (t,x) \in I\!R_t \times I\!R_x^d. \tag{6.8}$$

On résout les équations (6.3), (6.4) dans un domaine $I\!R_t \times \Omega \times I\!R_v^d$ où Ω est un ouvert borné de $I\!R_x^d$, $d = 2,3$. On adjoint à ces équations des conditions limites appropriées. Pour l'équation de Vlasov (6.3) on impose :

$$f(t,x,v) = g(t,x,v),\ (t,x,v) \in I\!R_t \times \partial\Omega \times I\!R_v^d,\ \vec{n}(x) \cdot v < 0, \tag{6.9}$$

où $\vec{n}(x)$ représente la normale extérieure à $\partial\Omega$. Pour le système de Maxwell (6.4) on considère soit une condition de conducteur parfait :

$$\vec{n} \wedge \vec{E}(t,x) = 0,\ (t,x) \in I\!R_t \times \partial\Omega, \tag{6.10}$$

soit une condition artificielle de type Silver-Müller :

$$\vec{n} \wedge \vec{E}(t,x) + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}(t,x)) = h(t,x),\ (t,x) \in I\!R_t \times \partial\Omega. \tag{6.11}$$

Pour l'équation de Poisson on impose le potentiel électrostatique sur $\partial\Omega$:

$$\varphi(t,x) = \varphi_0(t,x),\ (t,x) \in I\!R_t \times \partial\Omega. \tag{6.12}$$

6.2 Adimensionnement

D'un point de vue pratique, la résolution d'un tel système se fait sur des équations adimensionnées. Pour adimensionner ces équations, on introduit des grandeurs caractéristiques (indicées par $_c$). Cela revient à poser $\tilde{t} = \frac{t}{t_c}$,... (les quantités $\tilde{t}$,...étant sans dimension) et à les reporter dans les équations précédentes. On choisit une longueur caractéristique x_c (en mètre m) et un temps caractéristique t_c (en seconde s). Comme vitesse de référence on peut choisir $v_c = x_c/t_c$ (en mètre/seconde m/s). Pour la concentration de particules on choisit un facteur d'échelle n_c (en $1/m^3$) tel que :

$$\sqrt{\frac{n_c \cdot q^2}{m \cdot \varepsilon_0}} \cdot t_c = 1. \tag{6.13}$$

L'expression $\sqrt{\frac{n_c \cdot q^2}{m \cdot \varepsilon_0}}$ représente la pulsation caractéristique des oscillations du plasma ω_c. Le facteur d'échelle pour la fonction de distribution f sera donné par $f_c = n_c/v_c^3$ (en

s^3/m^6). Pour le champ électromagnétique on choisit $E_c = m \cdot x_c/(q \cdot t_c^2)$ (en Volt par mètre V/m) et $H_c = m/(\mu_0 \cdot q \cdot t_c)$ (en Ampère par mètre A/m). De l'expression des densités de charge et de courant on déduit $\rho_c = q \cdot n_c$ (en coulomb par mètre cube C/m^3) et $j_c = q \cdot v_c \cdot n_c$ (en Ampère par mètre carré A/m^2). Le facteur de transition du terme de collision sera donné par $S_c = 1/v_c^3$ (en seconde cube/mètre cube s^3/m^3). Avec ces notations, l'équation adimensionnée de Boltzmann s'écrit :

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{f} + \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}}\tilde{f} + (\tilde{E} + \tilde{v} \wedge \tilde{H}) \cdot \nabla_{\tilde{v}}\tilde{f} = \frac{\tilde{t}}{\tau}\tilde{Q}(\tilde{f}),\ (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) \in I\!R \times I\!R^d, \times I\!R^d, \tag{6.14}$$

où le terme adimensionné de collision est donné par :

$$\tilde{Q}(\tilde{f})(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \int [\tilde{S}(\tilde{v}_1, \tilde{v})\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}_1) - \tilde{S}(\tilde{v}, \tilde{v}_1)\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v})]d\tilde{v}_1,\ (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) \in I\!R \times I\!R^d, \times I\!R^d. \tag{6.15}$$

En utilisant (6.13), le système adimensionné de Maxwell s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{\tilde{H}}}{\partial \tilde{t}} + rot_{\tilde{x}}(\vec{\tilde{E}}) \ = \ 0,\ (\tilde{t}, \tilde{x}) \in I\!R \times I\!R^d, \\ \\ \dfrac{\partial \vec{\tilde{E}}}{\partial \tilde{t}} - \dfrac{c^2}{v_c^2} rot_{\tilde{x}}(\vec{\tilde{H}}) \ = -\vec{\tilde{j}},\ (\tilde{t}, \tilde{x}) \in I\!R \times I\!R^d, \end{cases} \tag{6.16}$$

où $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$ est la vitesse de la lumière dans le vide et la densité adimensionnée de courant est donnée par :

$$\vec{\tilde{j}}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \int_{\tilde{v}} \vec{\tilde{v}}\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v})d\tilde{v}\ , (\tilde{t}, \tilde{x}) \in I\!R \times I\!R^d. \tag{6.17}$$

De l'expression du champ électrique en fonction du potentiel électrostatique, on déduit le potentiel caractéristique $\varphi_c = x_c \cdot E_c = m \cdot v_c^2/q$ (en Volt V). L'équation de Poisson adimensionnée s'écrit sous la forme :

$$\Delta_{\tilde{x}}\tilde{\varphi} = \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}),\ (\tilde{t}, \tilde{x}) \in I\!R \times I\!R^d, \tag{6.18}$$

où la densité adimensionnée de courant est donnée par :

$$\tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \int_{\tilde{v}} \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v})d\tilde{v}\ , (\tilde{t}, \tilde{x}) \in I\!R \times I\!R^d. \tag{6.19}$$

De plus, l'équation de continuité de la charge se met sous la forme :

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{\rho} + \nabla_{\tilde{x}} \cdot \vec{\tilde{j}} = 0,\ (\tilde{t}, \tilde{x}) \in I\!R \times I\!R^d, \tag{6.20}$$

et les conditions limites conducteur parfait (6.10) et artificielle (6.11) revient à :

$$\vec{n} \wedge \tilde{\vec{E}}(\tilde{t}, \tilde{x}) = 0, \ (\tilde{t}, \tilde{x}) \in I\!R \times \partial\Omega, \tag{6.21}$$

et respectivement :

$$\vec{n} \wedge \tilde{\vec{E}}(\tilde{t}, \tilde{x}) + \frac{c}{v_c} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \tilde{\vec{H}}(\tilde{t}, \tilde{x})) = \tilde{h}(\tilde{t}, \tilde{x}), \ (\tilde{t}, \tilde{x}) \in I\!R \times \partial\Omega, \tag{6.22}$$

avec $h = h_c \cdot \tilde{h}$ et $h_c = m \cdot v_c/(q \cdot t_c)$. Pour la suite on travaillera sur les équations adimensionnées, en supprimant la notation $\tilde{}$.

6.3 Approximation numérique

Nous allons résoudre numériquement l'équation de Boltzmann en utilisant la méthode particulaire [38]. Nous allons travailler sur les équations adimensionnées obtenues dans la section précédente :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + v \wedge H) \cdot \nabla_v f = \frac{t_c}{\tau} Q(f), \tag{6.23}$$

et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \dfrac{c^2}{v_c^2} rot(\vec{H}) = -\vec{j}, \end{cases} \tag{6.24}$$

où le couplage est donné par la densité de courant :

$$\vec{j}(t,x) = \int_v \vec{v} f(t,x,v) dv, \tag{6.25}$$

et le terme de collision s'écrit sous la forme :

$$Q(f)(t,x,v) = \int [S(v_1,v) f(t,x,v_1) - S(v,v_1) f(t,x,v)] dv_1, \ (t,x,v) \in I\!R_t \times I\!R_x^d, \times I\!R_v^d. \tag{6.26}$$

Pour l'approximation numérique des équations de Maxwell, on utilise la méthode volumes finis introduite dans le paragraphe 2.2. L'équation de Vlasov (6.23) est approchée numériquement en utilisant une méthode déterministe qui repose sur une approximation de la fonction de distribution f par une combinaison de fonctions de Dirac :

$$f(t,x,v) = \sum_k w_k f_k(t) \delta(x - x_k(t)) \otimes \delta(v - v_k(t)), \tag{6.27}$$

où $(x_k(t), v_k(t))$ est la position de la particule k dans l'espace des phases, w_k est le volume de la cellule de l'espace des phases associée à la particule k et $f_k(t)$ est un poids variable. Les fonctions $(x_k(t), v_k(t))$ vérifient le système différentiel:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = v_k(t), \\ \\ \dfrac{dv_k}{dt} = (E(t, x_k(t)) + v_k(t) \wedge H(t, x_k(t))). \end{cases}$$

Ici $(E(t, x_k(t)), H(t, x_k(t)))$ sont des approximations du champ électromagnétique s'exerçant sur la particule k, calculées par la méthode PIC [6], utilisant une interpolation par des fonctions P^1. Le terme de collision est pris en compte par la variation des poids :

$$\frac{df_k}{dt} = \frac{t_c}{\tau} Q_k, \tag{6.28}$$

où l'expression de Q_k est donnée par :

$$Q_k = \sum_p w_p [f_p S(v_p, v_k) - f_k S(v_k, v_p)] \delta(x_k - x_p). \tag{6.29}$$

La densité de courant s'écrit :

$$j(t, x) = \sum_k w_k f_k v_k(t) \delta(x - x_k(t)).$$

Au noeud S_i du maillage la densité est calculée par :

$$\begin{aligned} j(t, S_i) &= \frac{1}{V_i} \int j(t, x) \phi_i(x) dx \\ &= \frac{1}{V_i} \sum_k w_k f_k v_k(t) \phi_i(x_k(t)), \end{aligned}$$

où $V_i = \int \phi_i(x) dx$ et ϕ_i est la fonction P^1 associée au noeud S_i.

6.4 Discrétisation temporelle

Dans ce paragraphe nous allons présenter le schéma d'intégration temporelle pour le sytème (6.23) et (6.24). On se donne un pas de temps Δt et on pose $t^n = n\Delta t$, $t^{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$. Le schéma d'intégration en temps que nous avons choisi pour la résolution des équations de Maxwell était de type Runge-Kutta explicite. Le système différentiel (6.3) est résolu par un schéma *saute-mouton*. Supposons que soient connues les positions des particules x_k^n à l'instant t^n, les vitesses $v_k^{n-1/2}$ à l'instant $t^{n-1/2}$ et le champ électromagnétique aux noeux du maillage (E_i^n, H_i^n) à l'instant t^n. Il faut calculer d'abord le champ électromagnétique aux points de localisation des particules en fonction des valeurs du champ aux noeux du maillage. Ces valeurs sont obtenues à l'aide d'une interpolation P^1. Sur un maillage un triangles on utilisera les formules :

$$E_k^n = \varphi_{i_1} E_{i_1}^n + \varphi_{i_2} E_{i_2}^n + \varphi_{i_3} E_{i_3}^n,$$
$$H_k^n = \varphi_{i_1} H_{i_1}^n + \varphi_{i_2} H_{i_2}^n + \varphi_{i_3} H_{i_3}^n,$$

où $\{i_1, i_2, i_3\}$ sont les sommets du triangle qui contient la particule k et $(\varphi_{i_j})_{1\leq j\leq 3}$ sont les fonctions P^1 associées aux noeux $(i_j)_{1\leq j\leq 3}$. Ensuite on calcule les vitesses des particules à l'instant $t^{n+1/2}$:

$$\frac{v_k^{n+1/2} - v_k^{n-1/2}}{\Delta t} = E_k^n + \frac{v_k^{n+1/2} + v_k^{n+1/2}}{2} \wedge H_k^n. \tag{6.30}$$

Si on note $v_1 = v_k^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2} E_k^n$ et $v_2 = v_k^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} E_k^n$, l'équation précédente devient :

$$v_2 - v_1 = (v_1 + v_2) \wedge \frac{\Delta t H_k^n}{2},$$

ce qui représente une rotation autour de H_k^n. Par exemple, plaçons nous dans une géométrie $2D$ et supposons que $v_1 = (v_{1x}, v_{1y}, 0)$, $v_2 = (v_{2x}, v_{2y}, 0)$ et $H_k^n = (0, 0, H_{kz}^n)$. En résolvant ce système on trouve :

$$v_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} v_1, \tag{6.31}$$

où l'angle α est donné par $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\Delta t H_{kz}^n}{2}$. Finalement, on obtient :

$$v_k^{n+1/2} = \frac{\Delta t}{2} E_k^n + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} (v_k^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{2} E_k^n). \tag{6.32}$$

La position de la particule k à l'instant t^{n+1} est calculée en utilisant:

$$\frac{x_k^{n+1} - x_k^n}{\Delta t} = v_k^{n+1/2},$$

et les poids sont donnés par:

$$\frac{f_k^{n+1} - f_k^n}{\Delta t} \quad = \quad Q_k^{n+1/2},$$

avec:

$$Q_k^{n+1/2} \quad = \quad \sum_p w_p [f_p^n S(v_p^{n+1/2}, v_k^{n+1/2}) - f_k^n S(v_k^{n+1/2}, v_p^{n+1/2})] \delta(x_k^n - x_p^n).$$

La densité de courant $j_i^{n+1/2}$ à chaque noeud du maillage se calcule de la façon suivante:

$$j_i^{n+1/2} = \frac{1}{V_i} \sum_k w_k f_k^{n+1/2} v_k^{n+1/2} \phi_i(x_k^{n+1/2}),$$

où:

$$\begin{aligned} f_k^{n+1/2} &= f_k^n + \frac{\Delta t}{2} Q_k^{n+1/2}, \\ x_k^{n+1/2} &= x_k^n + \frac{\Delta t; s}{2} v_k^{n+1/2}, \end{aligned}$$

et ϕ_i est la fonction P^1 associée au noeud S_i, $V_i = \int \phi_i(x)dx$. Maintenant, en utilisant le schéma de Runge-Kutta, on peut avancer le champ $(\vec{E}, \vec{H})$ de t^n à t^{n+1}.

Remarque 6.4.1 *Si à l'instant t^0 on connait les positions x_k^0 et les vitesses v_k^0, il faut calculer d'abord les vitesses $v_k^{-1/2}$ à l'instant $t^{-1/2} = -\frac{\Delta t}{2}$:*

$$v_k^{-1/2} = v_k^0 - \frac{\Delta t}{2}(E_k^0 + v_k^0 \wedge H_k^0).$$

Le schéma saute-mouton utilisé pour la résolution numérique des équations du mouvement des particules est précis à l'ordre deux pour $\vec{E}$ et $\vec{H}$ donnés. La méthode présentée pour résoudre numériquement le système de Maxwell est d'ordre trois en espace lorsque l'on utilise le β-schéma présenté précédemment, pour des densités de charge et de courant données. En ce qui concerne la précision du schéma d'intégration en temps, elle dépend du schéma de Runge-Kutta utilisé. Si l'on utilise un schéma de Runge-Kutta à trois pas, on obtient alors un schéma précis à l'ordre trois à la fois en temps et en espace pour la résolution des équations de Maxwell. Cependant l'ordre de la méthode ainsi obtenue pour résoudre les équations de Vlasov-Maxwell est difficile à déterminer. C'est un problème ouvert.

6.5 Illustration numérique

On considère le système de Vlasov-Maxwell adimensionné en deux dimensions d'espace, en polarisation transverse électrique (TE):

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (E + v \wedge H) \cdot \nabla_v f = 0,$$

et :

$$
\begin{aligned}
\partial_t H_z &+ \partial_x E_y - \partial_y E_x = 0,\\
\partial_t E_x &- \frac{c^2}{v_c^2}\partial_y H_z = -j_x,\\
\partial_t E_y &+ \frac{c^2}{v_c^2}\partial_x H_z = -j_y,
\end{aligned}
$$

où $j_x = \int v_x f dv$ et $j_y = \int v_y f dv$. On cherche une fonction de distribution de la forme :

$$
f(t, v_x, v_y) = \frac{n}{2\pi a^2}\exp(\frac{v_x - a\sin(\omega_p t))^2 + (v_y - a\sin(\omega_p t))^2}{2a^2}).
$$

Cette distribution modélise les oscillations de plasma à la fréquence ω_p. Si on néglige le champ magnétique, on déduit :

$$
\begin{aligned}
E_x &= a\omega_p\cos(\omega_p t),\\
E_y &= a\omega_p\cos(\omega_p t),\\
\omega_p^2 &= n,
\end{aligned}
$$

d'où on obtient la fréquence adimensionnée des oscillations de plasma :

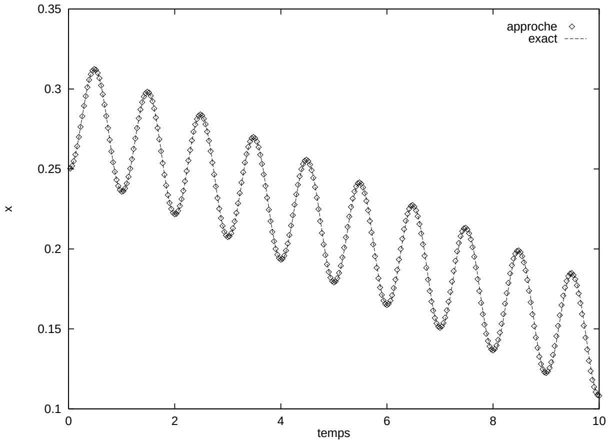
$$
\omega_p = \sqrt{n}. \tag{6.33}
$$

On vérifie facilement que $(f, E_x, E_y, B_z = 0)$ donnés ci-dessus constituent une solution analytique du système de Vlasov-Maxwell. Nous allons utiliser la méthode introduite dans la section précédente pour la résolution numérique de ce cas test. Sur les figures 6.1 (a) et 6.1 (b) ont été représentées la position et la vitesse d'une particule au cours du temps. La trajectoire de la particule dans le plan (x, y) a été tracée sur la figure 6.1 (c). L'image 6.1 (d) montre l'évolution en temps du champ électrique. L'énergie électromagnétique, définie par :

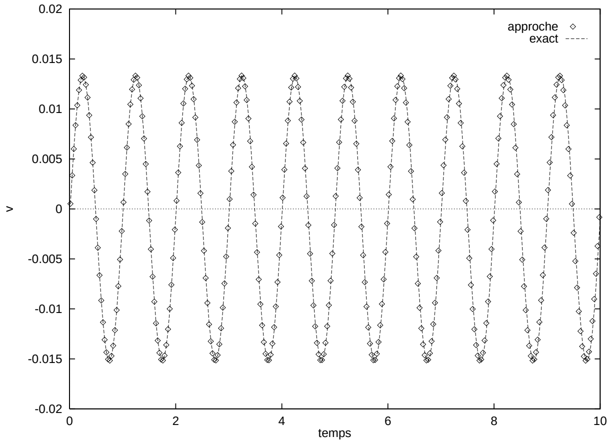
$$
\begin{aligned}
W_{pot}(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|E|^2 + |H|^2) dxdy\\
&= Aire(\Omega) a^2\omega_p^2\cos^2(\omega_p t),
\end{aligned}
$$

est représentée dans la figure 6.1 (f). La figure 6.1 (e) montre l'énergie cinétique :

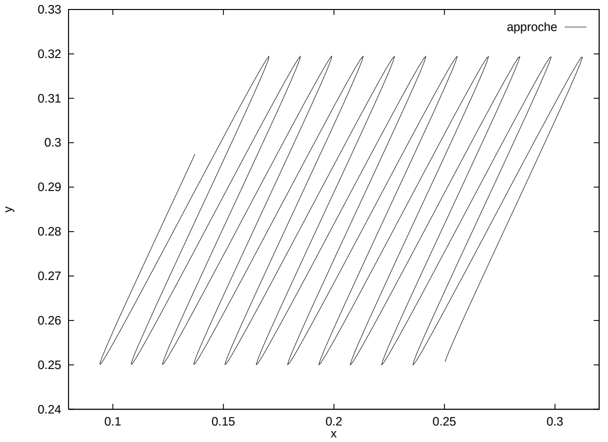
$$
\begin{aligned}
W_{cin} &= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_v |v|^2 f(t, v_x, v_y) dxdydv_xdv_y\\
&= Aire(\Omega) a^2\omega_p^2\sin^2(\omega_p t),
\end{aligned}
$$



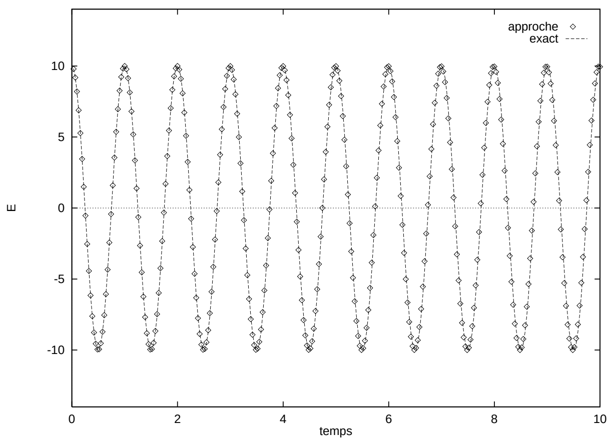
(a) $x = x(t)$



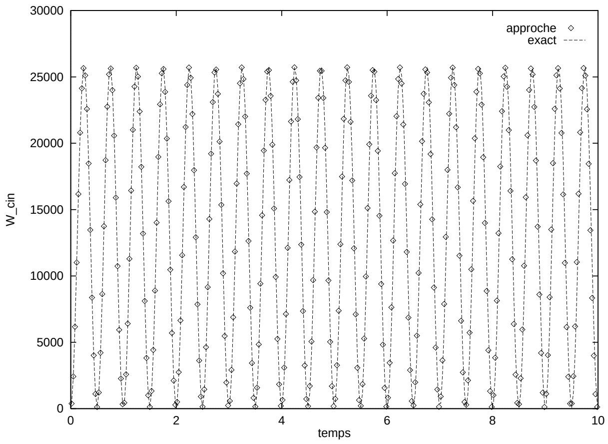
(b) $v = v(t)$



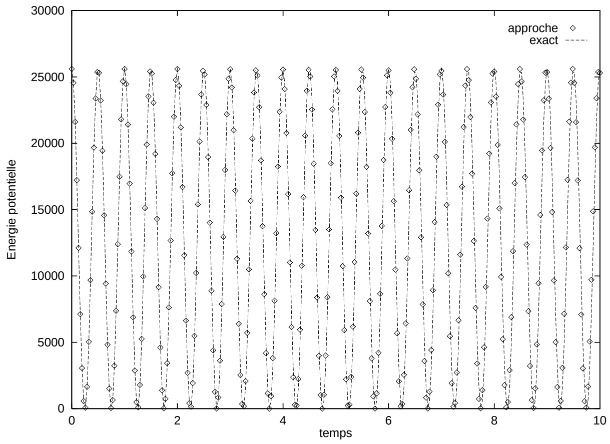
(c) $y = y(x)$



(d) Champ électrique

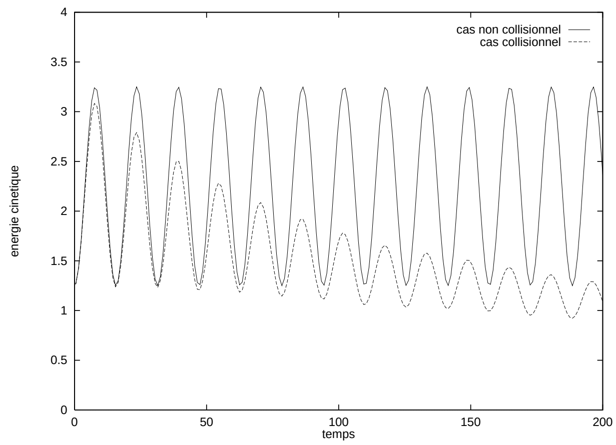


(e) Énergie cinétique

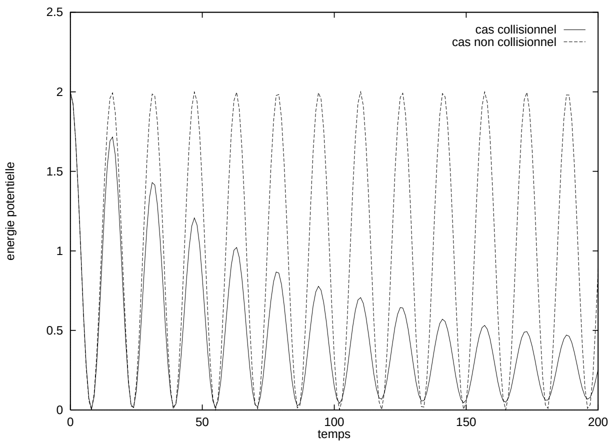


(f) Énergie potentielle

FIG. 6.1: *Simulations d'oscillations de plasma non collisionnel*



(a) Énergie cinétique



(b) Énergie potentielle

FIG. 6.2: *Simulations d'oscillations de plasma collisionnel*

On remarque la conservation de l'énergie totale :

$$W_{pot} + W_{cin} = Aire(\Omega)na^2.$$

On applique la même méthode à la modélisation des oscillations de plasma en présence d'un terme de collision de type temps de relaxation. Dans ce cas on pose :

$$S(v, v_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{|v|^2}{2}),$$

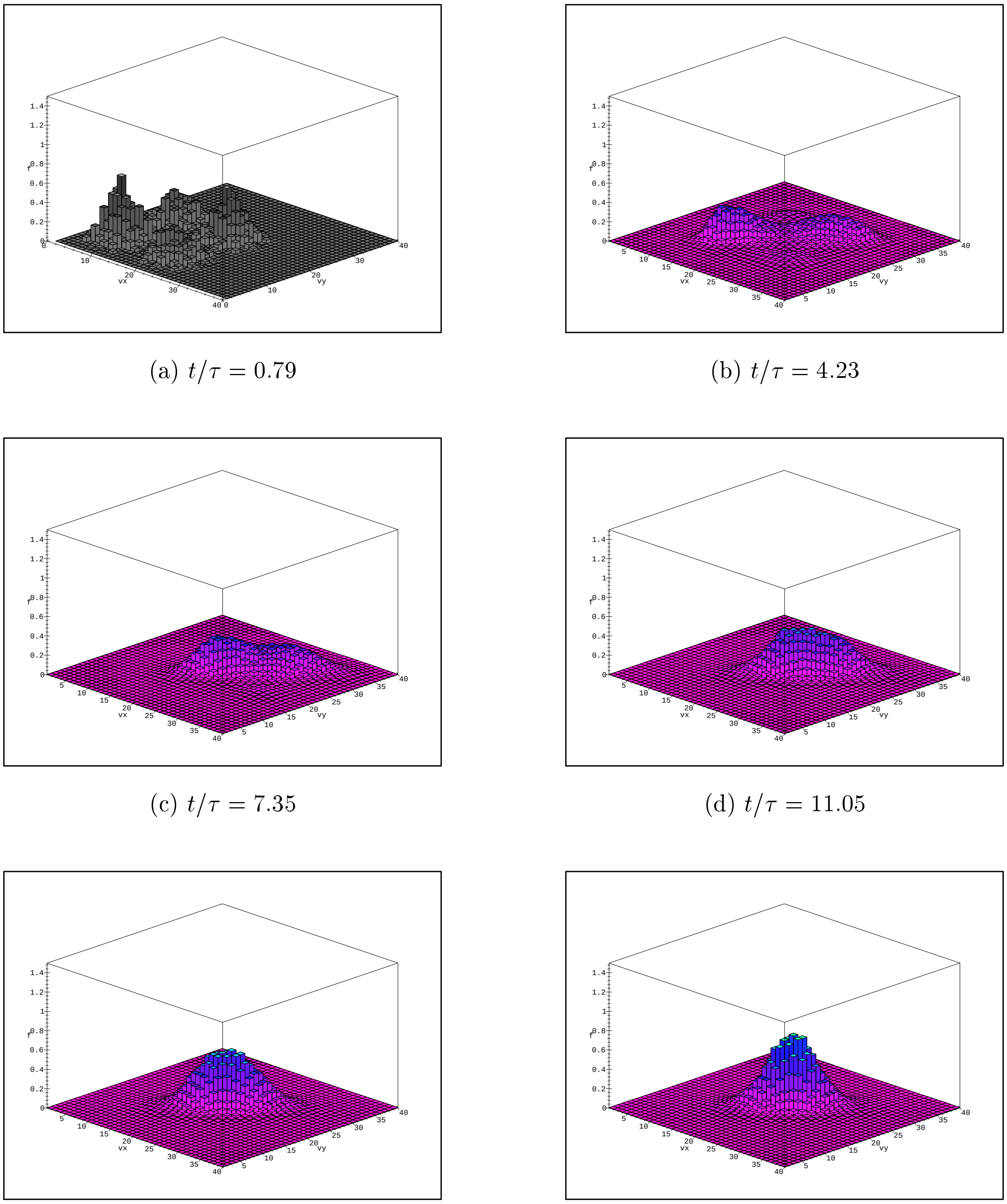
et on considère comme distribution initiale f_0 une somme de quatre maxwellienne :

$$f_0(v_x, v_y) = \frac{n}{4}(M_{b,c} + M_{-b,c} + M_{b,-c} + M_{-b,-c})(v_x, v_y),$$

où:

$$M_{b,c}(v_x, v_y) = \frac{1}{2\pi a^2} \exp\left(-\frac{(v_x - b)^2 + (v_y - c)^2}{2a^2}\right).$$

La figure 6.2 montre les énergies cinétique et potentielle en présence des collisions par rapport à celles obtenues dans le cas non collisionnel. Les figures (6.3) montrent l'effet du terme de collision sur la relaxation de la distribution de particules vers une distribution maxwellienne.



(a) $t/\tau = 0.79$

(b) $t/\tau = 4.23$

(c) $t/\tau = 7.35$

(d) $t/\tau = 11.05$

(e) $t/\tau = 13.48$

(f) $t/\tau = 15.93$

FIG. 6.3: *Simulations d'oscillations de plasma collisionnel*

Chapitre 7

Étude numérique du système périodique de Vlasov-Maxwell

Ce chapitre est une version plus étendue du rapport INRIA ($N^o 3534$) réalisé avec Frédéric Poupaud* et intitulé *Étude numérique des solutions périodiques des systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell par une méthode de contrôle.* Les travaux présentés dans ce chapitre ont également été acceptés pour une communication au congrès ACES99, Monterey, Californie.

* Laboratoire J.A.Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose,06108 Nice Cedex 2, poupaud@math.unice.fr

Introduction

De nombreuses recherche sont de plus en plus liées aux études du transport de particules chargées soumises à des champs électromagnétiques. Ces études concernent aussi bien les dispositifs hyper-fréquence, les accélérateurs de particules, les canons à électrons que la physique des plasmas et les semi-conducteurs. La modélisation de ces dispositifs repose sur les équations de Vlasov-Maxwell ou de Vlasov-Poisson. Le résultat principal dans ce domaine a été obtenu par DiPerna et Lions dans [26]. Ils montrent l'existence de solution faible globale pour le problème Cauchy du système de Vlasov-Maxwell. L'existence de la solution globale classique reste toujours un problème ouvert. Dans l'absence du champ magnétique, qui peut être justifiée par une limite non-relativiste [19], nous obtenons le système de Vlasov-Poisson. Dans ce cas, des solutions faibles globales pour le problème de Cauchy ont été obtenues par Arsenev [2]. L'existence de la solution classique dans deux dimensions d'espace est un résultat de Degond [20] et Ukai [3]. Le même résultat en trois dimensions d'espace a été montré par Pfaffelmoser dans [39] et une méthode simple a été proposée par Lions et Perthame dans [36]. Ce qui est particulièrement intéressant au niveau des applications est la modélisation des régimes permanents avec conditions aux limites. Ces régimes permanent sont caractérisés par des solutions stationnaires ou périodiques. Le cas stationnaire a déjà été étudié tout d'abord pour Vlasov-Poisson en une dimension d'espace dans [29], puis en dimension quelconque et pour Vlasov-Maxwell dans [41]. Dans le cas périodique, des résultats ont été obtenus pour Vlasov-Poisson en une dimension d'espace dans [8], en dimension quelconque dans [9] et pour Vlasov-Maxwell en une dimension d'espace dans [10]. D'autre part, ces régimes sont très difficilement atteints lors des simulations numériques. Afin d'accélérer la convergence vers les états périodiques, nous avons introduit le concept de *solution minimale* comme dans [29] et [41]. Une méthode dite *Absorption Limite* (MAL) a été développée. Nous proposons donc dans ce chapitre une méthode pour calculer numériquement les solutions périodiques des sytèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell. Dans un premier temps on propose cette méthode dans le cadre d'un modèle EDO et une analyse de la vitesse de convergence sera présentée. Après quelques illustrations numériques sur la résolution de problèmes de diffraction d'ondes planes harmoniques, cette méthodologie sera appliquée aux systèmes de Maxwell et de Vlasov-Maxwell.

7.1 Étude d'un cas modèle

Nous proposons ici d'étudier la convergence vers les régimes périodiques des solutions d'une EDO avec un terme source périodique. La méthode utilisée reposera sur le concept de l'absorption limite. Les résultats obtenus avec la nouvelle méthode seront comparés en terme de vitesse de convergence avec ceux obtenus avec une méthode classique.

7.1.1 Convergence vers les états périodiques

On considère l'équation monodimensionnelle :

$$\frac{dx}{dt} + \varepsilon \cdot x(t) = f(t) \ , \ t > 0 \tag{7.1}$$

avec la condition initiale :

$$x(0) = x_0, \tag{7.2}$$

où f est une fonction périodique en temps de période T. La solution analytique de cette équation est donnée par :

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\varepsilon t} + \int_0^t f(s) \cdot e^{-\varepsilon(t-s)} ds. \tag{7.3}$$

On s'intéresse ici aux solutions périodiques et en imposant la condition de périodicité $x(0) = x(T)$, on obtient :

$$x_0 = \frac{\int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds}{1 - e^{-\varepsilon T}}, \tag{7.4}$$

d'où la solution périodique s'écrit:

$$x_\infty(t) = \frac{\int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds}{1 - e^{-\varepsilon T}} \cdot e^{-\varepsilon t} + \int_0^t f(s) \cdot e^{-\varepsilon(t-s)} ds. \tag{7.5}$$

Si la donnée initiale x_0 ne vérifie pas (7.4), l'écart par rapport à la solution périodique est donné par :

$$|x(t) - x_\infty(t)\ | = |x_0 - \frac{\int_0^T f(s) \cdot e^{-\varepsilon(T-s)} ds}{1 - e^{-\varepsilon T}}| \cdot e^{-\varepsilon t}, \ t > 0. \tag{7.6}$$

Nous cherchons à déterminer la valeur minimale du temps $t^\star$ de telle sorte que la solution calculée $x(t)$ soit une η approximation du régime périodique :

$$|x(t) - x_\infty(t)\ | \leq \eta, \ t > t^\star. \tag{7.7}$$

En utilisant (7.6), on déduit pour le temps $t^\star$ une valeur de l'ordre de:

$$t^\star \approx O(\frac{1}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\eta})), \tag{7.8}$$

ce qui implique un grand temps de calcul pour les petites valeurs du paramètre ε. L'énoncé suivant présente la condition sous laquelle les solutions périodiques données par (7.5) sont uniformément bornées, indépendamment par rapport à ε.

Proposition 7.1.1 *Soit $f \in L^\infty$ une fonction périodique en temps de période T et x_∞ la solution périodique du problème (7.1), donnée par (7.5). Si f vérifie :*

$$\int_0^T f(s)ds = 0, \tag{7.9}$$

alors x_∞ est uniformément bornée par rapport à ε.

Démonstration

Comme x_∞ est périodique, il suffit d'estimer $x_\infty(t)$ pour $t \in]0, T[$. En utilisant (7.5) on peut écrire :

$$|x_\infty(t)\,| \leq \left| \frac{\int_0^T f(s)\cdot e^{-\varepsilon(T-s)}ds}{1-e^{-\varepsilon T}} \right| + T\cdot \|f\|_{L^\infty}.$$

Pour finir la preuve, il reste à montrer que la suite $\frac{\int_0^T f(s)\cdot e^{-\varepsilon(T-s)}ds}{1-e^{\varepsilon T}}$ est convergente quand $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_0^T f(s)\cdot e^{-\varepsilon(T-s)}ds}{1-e^{-\varepsilon T}} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_0^T f(s)\cdot[1-\varepsilon(T-s)+\frac{[\varepsilon(T-s)]^2}{2!}+...]}{1-[1-\varepsilon T+\frac{(\varepsilon T)^2}{2!}-...]}\\ &= -\frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(s)\cdot(T-s)ds.\end{aligned}$$

7.1.2 Méthode de l'absorption limite

Afin de réduire le temps de calcul, nous allons introduire un terme d'absorption $\lambda \cdot x(t)$ dans l'équation (7.1):

$$\lambda\cdot x(t) + \frac{dx}{dt} + \varepsilon\cdot x(t) = f(t)\ ,\ t > 0. \tag{7.10}$$

On obtient ainsi une valeur du temps de convergence :

$$t^\star \approx O(\frac{1}{\varepsilon+\lambda}\log(\frac{1}{\eta})) < O(\frac{1}{\lambda}\log(\frac{1}{\eta})). \tag{7.11}$$

Cependant, même si le temps de calcul d'une η approximation périodique est réduit par rapport à la situation précédente (indépendamment de ε), on rappelle que cette approximation ne vérifiera pas l'équation non-perturbée (7.1). L'idée sera de remplacer le paramètre λ par une suite décroissante $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ dont la limite vaut zéro. Nous pouvons enoncer un résultat général de convergence vers le régime périodique :

Proposition 7.1.2 *Soient $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante telle que :*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0, \\ &(ii) \quad \Sigma_{n\geq 0}\lambda_n < \infty, \end{aligned} \tag{7.12}$$

et x_∞ la solution périodique (7.5) du problème (7.1). Alors l'équation:

$$\lambda(t)\cdot x(t) + \frac{dx}{dt} + \varepsilon\cdot x(t) = f(t)\ ,\ t > 0, \tag{7.13}$$

avec la condition initiale :

$$x(0) = x_0, \tag{7.14}$$

où $f \in L^\infty$ est une fonction périodique en temps de période T et $\lambda(t) = \lambda_n,\ t \in [nT,(n+1)T[,\ n \geq 0$ a une solution unique qui converge vers le régime périodique :

$$\lim_{n\to\infty} \|x(nT+\cdot) - x_\infty(\cdot)\|_{L^\infty(0,T)} = 0. \tag{7.15}$$

Démonstration

On vérifie aisément que la solution $x(\cdot)$ est donnée par la formule :

$$x(t) = x_0\cdot e^{-\int_0^t(\varepsilon+\lambda(s))ds} + \int_0^t f(s)\cdot e^{-\int_s^t(\varepsilon+\lambda(\tau))d\tau}ds,\ t > 0. \tag{7.16}$$

Notons x_n les valeurs de la solution x à $t = nT$, $n \geq 0$. Il est facile d'obtenir la relation suivante :

$$x(nT+t) = x(nT)\cdot e^{-(\varepsilon+\lambda_n)t} + \int_0^t f(s)\cdot e^{-(\varepsilon+\lambda_n)(t-s)}ds,\ t\in[0,T[, \tag{7.17}$$

d'où on trouve :

$$x_{n+1} = x_n\cdot e^{-(\varepsilon+\lambda_n)T} + \int_0^T f(s)\cdot e^{-(\varepsilon+\lambda_n)(T-s)}ds,\ n\geq 0. \tag{7.18}$$

Posons $q_n = e^{-(\varepsilon+\lambda_n)T}$ et $\beta_n = \int_0^T f(s)\cdot e^{-(\varepsilon+\lambda_n)(T-s)}ds$. Évidemment:

$$\lim_{n\to\infty} q_n = q := e^{-\varepsilon T}, \tag{7.19}$$

et:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta := \int_0^T f(s)\cdot e^{-\varepsilon(T-s)}ds. \tag{7.20}$$

D'abord, en utilisant (7.16) on constate que la solution $x(\cdot)$ est bornée :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \|f\|_{L^\infty}\cdot \int_0^t e^{-\varepsilon(t-s)}ds \\ &\leq |x_0| + \|f\|_{L^\infty}/\varepsilon. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Avec les notations précédentes, (7.18) devient:

$$x_{n+1} = q_n \cdot x_n + \beta_n,$$

ce qui permet d'écrire :

$$x_{n+1} = q_n q_{n-1}...q_0 x_0 + q_n q_{n-1}...q_1\beta_0 + q_n q_{n-1}...q_2\beta_1 + q_n q_{n-1}...q_3\beta_2 + ... + q_n\beta_{n-1} + \beta_n, \tag{7.22}$$

ou bien:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= q_n q_{n-1}...q_0 x_0 + q_n q_{n-1}...q_1(\beta_0-\beta) + q_n q_{n-1}...q_2(\beta_1-\beta) + ... + (\beta_n-\beta) \\ &+ \beta(q_n q_{n-1}...q_1 + q_n q_{n-1}...q_2 + ... + q_n + 1). \end{aligned} \tag{7.23}$$

Puisque $q_n < q < 1$, on vérifie facilement que $\lim_{n\to\infty} q_n q_{n-1}...q_0 x_0 = 0$. Nous allons montrer maintenant que la série $\sum_{n\geq 0} |\beta_n - \beta\,|$ est convergente puisque le terme général est majoré par :

$$\begin{aligned} |\beta_n - \beta\,| &\leq \int_0^T |f(s)|\cdot e^{-\varepsilon(T-s)}\cdot(1-e^{-\lambda_n(T-s)})ds \\ &\leq \lambda_n \frac{T}{\varepsilon}\|f\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

et donc:

$$\sum_{n\geq 0} |\beta_n - \beta\,| \leq \frac{T}{\varepsilon}\|f\|_{L^\infty}\cdot \sum_{n\geq 0}\lambda_n < +\infty. \tag{7.24}$$

Comme $\sum_{n\geq 0} q^n$ est convergente, alors le produit de convolution est aussi une série convergente, et on a alors nécessairement :

$$\lim_{n\to\infty} q^n|\beta_0-\beta| + q^{n-1}|\beta_{n-1}-\beta| + ... + |\beta_n-\beta| = 0, \tag{7.25}$$

d'où, par majoration:

$$\lim_{n\to\infty} q_n q_{n-1}...q_1(\beta_0-\beta)+q_nq_{n-1}...q_2(\beta_1-\beta)+...+(\beta_n-\beta)=0. \tag{7.26}$$

Reste à montrer que la suite $y_n = 1+q_n+q_nq_{n-1}+...+q_nq_{n-1}...q_1$ est convergente:

$$y_n = 1+q+...q^n+q(e^{-\lambda_n T}-1)+...+q^n(e^{-(\lambda_n+...\lambda_1)T}-1). \tag{7.27}$$

Soit $\delta>0$ et en tenant compte de (ii) on choisit k tel que:

$$\lambda_{k+1}+\lambda_{k+2}+...+\lambda_n<\frac{\delta}{2},\ n>k.$$

Ensuite on choisit N tel que:

$$q^{n-k}<\frac{\delta}{2},\ n>N.$$

On peut écrire:

$$|q(e^{-\lambda_n T}-1)+...+q^n(e^{-(\lambda_n+...\lambda_1)T}-1)|\le T(\lambda_n q+...+(\lambda_n+...+\lambda_1)q^n),$$

mais:

$$\begin{aligned}\lambda_n q+...+(\lambda_n+...+\lambda_1)q^n &= \lambda_n q+...+(\lambda_n+...+\lambda_{k+1})q^{n-k}\\ &+ (\lambda_n+...+\lambda_k)q^{n+1-k}+...+(\lambda_n+...+\lambda_1)q^n\\ &\le (\lambda_n+...+\lambda_{k+1})(q+q^2+...+q^{n-k})\\ &+ (\lambda_n+...+\lambda_1)q^{n+1-k}(1+q+...+q^{k-1})\\ &\le \frac{\delta}{2}\cdot\frac{q}{1-q}(1+\sum_{n\ge0}\lambda_n),\ n>N.\end{aligned}$$

Donc on déduit que $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{1-q}$. Finalement, (7.23) et (7.26) permettent d'écrire:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\beta}{1-q},$$

ce qui donne:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_\infty(nT)) = 0,$$

puisque $x_\infty(nT) = \frac{\beta}{1-q},\ n\ge0$. On peut maintenant terminer facilement la démonstration en utilisant (7.5) et (7.17):

$$\begin{aligned}|x(nT+t)-x_\infty(t)\,| &\le |x(nT)-x_\infty(nT)\,|+(1-e^{-\lambda_n t})|x_\infty(nT)|\\ &+ \int_0^t |f(s)|e^{-\varepsilon(t-s)}(1-e^{-\lambda_n(t-s)})ds\\ &\le |x_n-x_\infty(nT)\,|+\lambda_n T\cdot\|x_\infty\|_{L^\infty}\\ &+ \lambda_n T\cdot\|f\|_{L^1(0,T)}.\end{aligned} \tag{7.28}$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$, on obtient alors (7.15), ce qui achève la démonstration. Nous allons définir maintenant la notion de ξ-approximation du régime périodique :

Définition 7.1.1 *On dit qu'une suite de fonctions $x_\xi(t)$ est une ξ-approximation ($\xi > 0$) du régime périodique $x_\infty(t)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|x_\xi(t) - x_\infty(t)| \leq C \cdot \xi, \ \forall t, \ \xi. \tag{7.29}$$

On montre maintenant un résultat dont on aura besoin pour la suite :

Proposition 7.1.3 *Soit $f \in L^\infty$ une fonction périodique qui vérifie (7.9), $x(t)$ solution de l'équation :*

$$\lambda \cdot x(t) + \frac{dx}{dt} + \varepsilon \cdot x(t) = f(t), \ t \in]0, T[,$$

qui satisfait :

$$|x(T) - x(0)| \leq \eta,$$

et $x_\infty(t)$ le régime périodique donné par (7.5). Alors x est une approximation de x_∞ de l'ordre de $O(\frac{\eta}{\lambda} + \lambda)$. En particulier, si $\lambda = \sqrt{\eta}$, la fonction x est une $\sqrt{\eta}$-approximation du régime périodique.

Démonstration

Posons $\delta = x - x_\infty$. La fonction δ vérifiera :

$$\lambda \cdot \delta(t) + \frac{d\delta}{dt} + \varepsilon \cdot \delta(t) = -\lambda \cdot x_\infty, \quad t \in]0, T[,$$

et :

$$|\delta(T) - \delta(0)\ | \leq \eta.$$

Notons φ la solution périodique du problème :

$$\lambda \cdot \varphi(t) + \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \cdot \varphi(t) = -x_\infty, \quad t \in]0, T[,$$

et $\mu = \delta - \lambda\varphi$. En utilisant (7.1) et (7.9) on déduit que $\int_0^T x_\infty(s)ds = 0$. Ensuite, compte tenu de la *Proposition 7.1.1* on montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\varphi(t)\ | \leq C$, pour $t \in]0, T[$. La fonction μ vérifie :

$$\lambda \cdot \mu(t) + \frac{d\mu}{dt} + \varepsilon \cdot \mu(t) = 0, \quad t \in]0, T[,$$

et :

$$|\mu(T) - \mu(0)\,| \leq \eta. \tag{7.30}$$

Mais $\mu(t) = \mu(0) \cdot e^{-(\varepsilon+\lambda)t}$ et donc la condition (7.30) impose :

$$|\mu(0)\,| \leq \frac{\eta}{1 - e^{-(\varepsilon+\lambda)T}} \approx O\left(\frac{\eta}{(\varepsilon+\lambda)T}\right).$$

Finalement, on déduit:

$$\begin{aligned}
|\delta(t)\,| &\leq |\mu(t)\,| + \lambda|\varphi(t)\,| \\
&\leq C\frac{\eta}{(\varepsilon+\lambda)T} + C\lambda \\
&\leq C\frac{\eta}{\lambda T} + C\lambda.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Il est facile à vérifier maintenant que $|x(t) - x_\infty(y)\,| \approx O(\sqrt{\eta})$ si $\lambda = \sqrt{\eta}$.

7.1.3 Vitesse de convergence

Comme annoncé dans la section précédente, nous sommes intéressés par l'estimation du temps de calcul pour atteindre une approximation du régime périodique. On peut enoncer la proposition suivante :

Proposition 7.1.4 *Avec les mêmes notations que dans la Proposition 7.1.2, supposons que $f \in L^\infty$ est une fonction périodique qui vérifie (7.9) et que la suite λ_n est donnée par:*

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= 1, \\
\lambda_{n+1} &= \lambda_n, \quad si\ \ |x_{n+1} - x_n\,| > \eta,\ n \geq 0, \\
\lambda_{n+1} &= \lambda_n e^{-cT}, \quad si\ \ |x_{n+1} - x_n\,| \leq \eta,\ n \geq 0.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Alors le temps de convergence vers une $\sqrt{\eta}$-approximation du régime périodique est de l'ordre de :

$$t^\star = O(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \log(\frac{1}{\eta})). \tag{7.33}$$

Démonstration

On a bien $\{\lambda_0, \lambda_1, ...\lambda_n, ...\} \subset \{1, e^{-cT}, e^{-2cT}, ...\}$. Nous allons montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers zéro, ce qui revient à montrer que chaque valeur e^{-ncT} ne peut être prise que d'un nombre fini de termes λ_m. Soit par exemple $m \geq 0$, $n \geq 0$ tels que

$\lambda_m = e^{-ncT}$ et on cherche à estimer la longueur de la chaîne constante $\lambda_m = \lambda_{m+1} + ... + \lambda_{m+p-1} > \lambda_{m+p}$, où $\lambda_{m+p} = e^{-cT}\lambda_{m+p-1} = e^{-(n+1)cT}$. On peut écrire :

$$x_{m+k} = q_m x_{m+k-1} + \beta_m,\ k = 1, 2, ...p,$$

ce qui conduit à:

$$x_{m+k} = \frac{\beta_m}{1-q_m} + q_m^k(x_m - \frac{\beta_m}{1-q_m}),\ k = 1, 2, ...p$$

et donc:

$$x_{m+k} - x_{m+k-1} = q_m^{k-1}(x_m - \frac{\beta_m}{1-q_m})(q_m - 1),\ k = 1, 2, ...p.$$

Compte tenu du choix (7.32), p est le plus petit nombre entier qui vérifie :

$$\eta \geq |x_{m+p} - x_{m+p-1}\ | = q_m^{p-1} \cdot \left| x_m - \frac{\beta_m}{1-q_m} \right| \cdot (1 - q_m).$$

En utilisant la *Proposition 7.1.1* , on déduit que la suite $(x_m - \frac{\beta_m}{1-q_m})_{m\geq 0}$ est bornée et donc il existe une constante $a > 0$ telle que :

$$p_m \leq \frac{1}{T(\varepsilon + \lambda_m)} \cdot \log(\frac{a}{\eta}). \tag{7.34}$$

Donc chaque valeur se répéte $[\frac{1}{T(\varepsilon+\lambda_m)} \cdot \log(\frac{a}{\eta})]$ fois. Maintenant , il est évident que la suite $(\lambda_m)_{m\geq 0}$ n'est pas stationnaire, donc $lim_{m\to\infty}\lambda_m = 0$ et en plus :

$$\begin{aligned}
\sum_m \lambda_m &\leq \sum_n \lambda_m \frac{1}{T(\varepsilon + \lambda_m)} \cdot \log(\frac{a}{\eta}) \\
&= \log(\frac{a}{\eta}) \sum_n \frac{e^{-ncT}}{T(\varepsilon + e^{-ncT})} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon T(1 - e^{-cT})} \cdot \log(\frac{a}{\eta}) < \infty.
\end{aligned}$$

Donc les hypothèses $(i), (ii)$ sont vérifiées et on a la convergence vers le régime périodique. Pour terminer la démonstration, nous allons estimer le temps de convergence vers une $\sqrt{\eta}$ approximation du régime périodique. Comme nous avons montre dans la *Proposition 7.1.3* il suffit que le paramètre λ soit de l'ordre de $O(\sqrt{\eta})$. Alors le temps de convergence sera de l'ordre de :

$$\begin{aligned}
t^\star &= \sum_{\lambda_m > \sqrt{\eta}} T p_m = \sum_{\lambda_m > \eta} T \frac{1}{T(\varepsilon + \lambda_m)} \cdot \log(\frac{a}{\eta}) \\
&= \sum_{e^{-ncT} > \sqrt{\eta}} e^{ncT} \cdot \log(\frac{a}{\eta}) \\
&= O\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \log(\frac{a}{\eta})\right).
\end{aligned}$$

Remarque 7.1.1 *Le choix (7.32) de la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ peut être donné par une équation du type :*

$$\frac{d\lambda}{dt} + \mathcal{R}(x_{n+1} - x_n) \cdot \lambda(t) = 0,\ t \in [(n+1)T, (n+2)T[,. \tag{7.35}$$

où $\mathcal{R}(\cdot) = c \cdot \chi_{[-\eta,\eta]}(\cdot)$.

D'une façon encore plus générale, comme fonction $\mathcal{R}$ on choisira un critère de périodicité pour $x(\cdot)$. Dans tous ces cas, le calcul des solutions périodiques de l'équation (7.1) reviendra à la résolution du système :

$$\begin{cases} \lambda(t) \cdot x(t) + \dfrac{dx}{dt} + \varepsilon \cdot x(t) & = f(t), \quad t > 0, \\ \\ \dfrac{d\lambda}{dt} + \mathcal{R}(x(\cdot))\lambda(t) & = 0, \qquad t > 0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ \\ \lambda(0) = \lambda_0. \end{cases}$$

Remarque 7.1.2 *Si à l'instant initial $\lambda_0 = 0$, alors le problème (7.1.3) se réduit à l'équation (7.1).*

Démonstration
La conclusion est immédiate en tenant compte de (7.32) dans le cas discret, ou bien de (7.35) dans le cas continu.

7.1.4 Illustration numérique

Nous souhaitons maintenant comparer numériquement les vitesses de convergence de la méthode (MAL)($\lambda_0 > 0$) avec celle d'une méthode classique ($\lambda_0 = 0$). On s'intéresse dans un premier temps aux régimes périodiques de l'équation (7.1) et du système (7.1.3) pour une valeur du paramètre $\varepsilon = 0.01$ et un terme source périodique $f(t) = cos(\omega t)$ avec $\omega = 1$. Le régime périodique de ce problème est donné par:

$$x_\infty(t) = (\varepsilon cos(\omega t) + \omega sin(\omega t))/(\varepsilon^2 + \omega^2),\ t > 0. \tag{7.36}$$

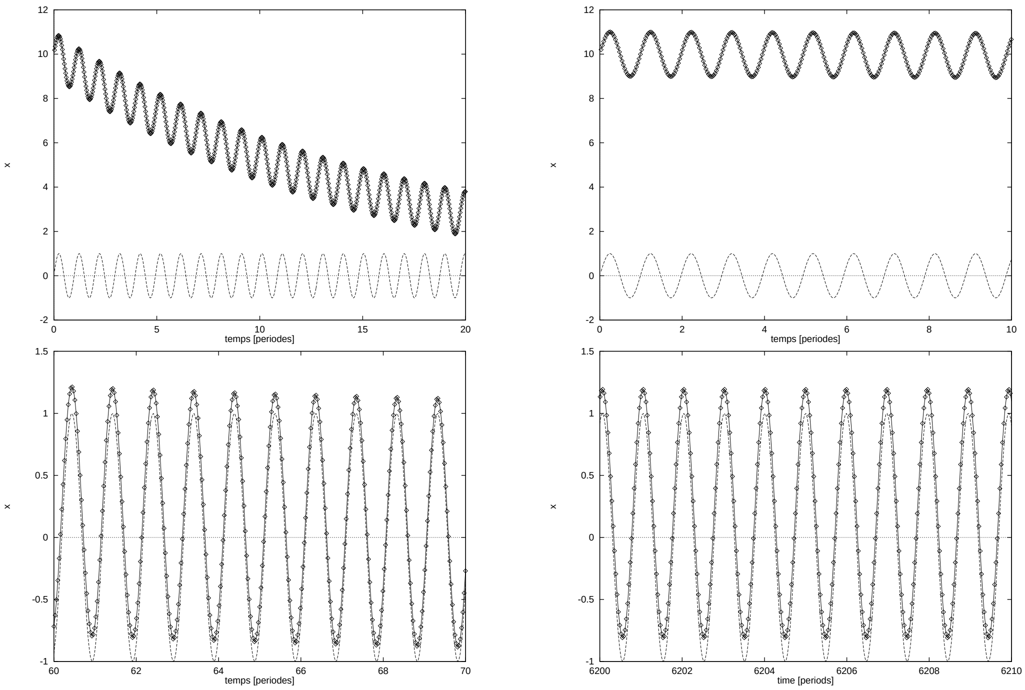


FIG. 7.1: *Convergence vers le régime périodique par la méthode classique*

Comme fonction $\mathcal{R}$ nous avons choisi:

$$\mathcal{R}(x(t)) = \chi_{[-\eta,\eta]}(x(nT) - x((n-1)T)),\ t \in [nT, (n+1)T[. \tag{7.37}$$

On présente les solutions calculées, obtenues avec les deux méthodes. Ensuite, on étudie le comportement des méthodes dans le cas $\varepsilon = 0.0001$. Dans le premier cas ($\varepsilon = 0.01$), la méthode classique (7.1) donne une bonne approximation de la solution périodique après 70 périodes, tandis que la méthode (MAL) calcule le régime périodique après 6 périodes. Si dans cette situation les différences ne sont pas importantes, ce n'est pas le cas dans la deuxième. Cette fois-ci, le gain en temps de calcul s'avéra très important. On constate ainsi une très lente convergence de la solution calculée a l'aide de la méthode classique (7.1). Au contraire, la méthode (MAL) assure une convergence très rapide vers la solution périodique, une très bonne approximation étant ateinte après 6 périodes. Au vu des résultats présentés ci-dessus, la nouvelle méthode (MAL) introduite dans ce chapitre nous semble bien adaptée à nos calculs. De plus, on remarquera l'indépendance de la vitesse de convergence par rapport au petit paramètre ε.

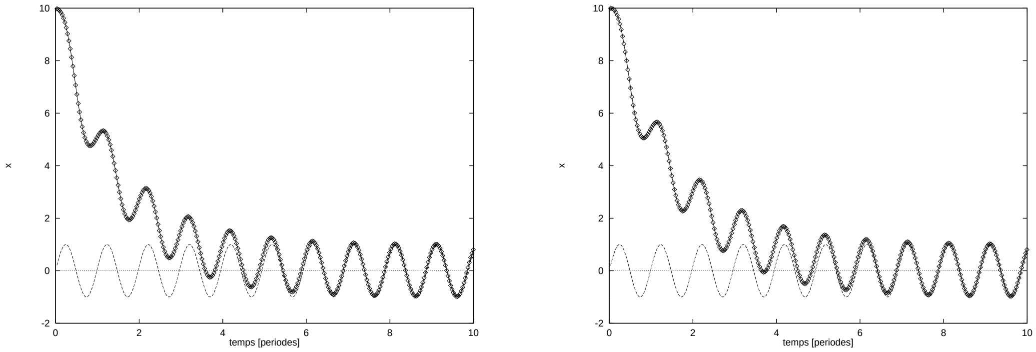


FIG. 7.2: *Convergence vers le régime périodique par la MAL* ($\lambda_0 > 0$)
(gauche : $\varepsilon = 0.01$ */ droite :* $\varepsilon = 0.0001$*)*

7.2 Applications aux équations de Maxwell

On s'intéresse maintenant à la résolution de phénomènes électromagnétiques périodiques. Ils sont régis par les équations de Maxwell qui s'écrivent dans le vide en l'absence de charges et de courant sous la forme :

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, \\ \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = 0, \end{cases} \tag{7.38}$$

où $\vec{E} = \vec{E}(t, \vec{x})$ et $\vec{H} = \vec{H}(t, \vec{x})$ sont respectivement les champs électrique et magnétique, μ_0 et ε_0 la perméabilité magnétique et la permittivité électrique du vide. L'approximation numérique utilisée reposera sur la méthode de volumes finis introduite dans le paragraphe (2.2). Sur le bord du domaine de calcul on imposera des conditions limites métalliques et absorbantes (voir 2.4).

7.2.1 Solutions périodiques obtenues par la méthode classique

Dans un premier temps on s'intéresse à la propagation d'une combinaison d'ondes planes dans une cavité rectangulaire métallique semi-ouverte, en deux dimensions d'espace. Le domaine de calcul sera un rectangle $\Omega =]0, 25m[\times]0, 11m[$. On impose des conditions limites absorbantes sur la frontière extérieure Γ_{ext} et métalliques sur la frontière intérieure Γ_{int}. Nous avons considéré le mode Transverse Magnétique ($H_z = 0$). Le champ incidant

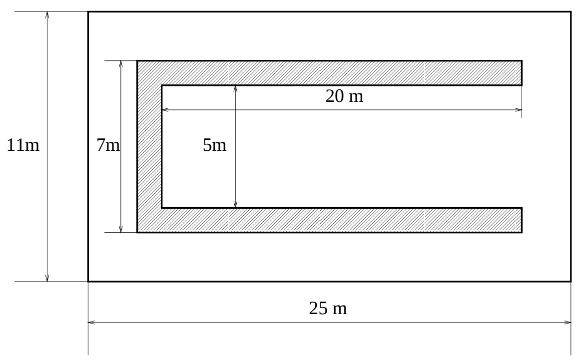


FIG. 7.3: *Cavité métallique rectangulaire semi-ouverte*

arrive de droite à gauche sur la cavité métallique et il est donné par les formules :

$$H_x = -\frac{k_y}{|k|}cos(\omega(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|})) - \frac{k_y}{|k|}cos(0.5 \cdot \omega(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}))$$

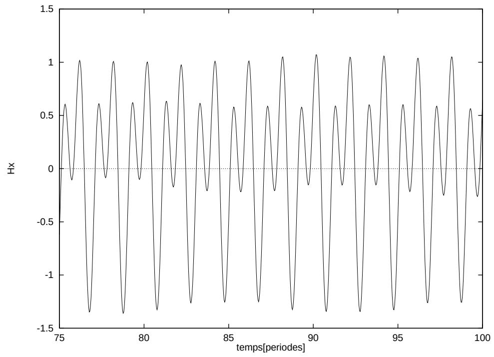
$$H_y = +\frac{k_x}{|k|}cos(\omega(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|})) + \frac{k_x}{|k|}cos(0.5 \cdot \omega(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|}))$$

$$E_z = cos(\omega(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|})) + cos(0.5 \cdot \omega(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|})),$$

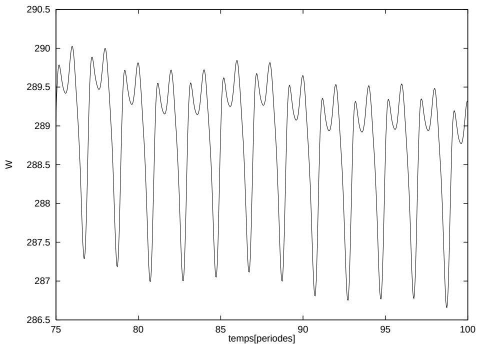
où $|k| = \omega/c = \pi\sqrt{2}$, $k_x = -|k|$, $k_y = 0$. Nous avons utilisé un maillage structuré en triangles, comportant une quinzaine de points par longueur d'onde ($\lambda = \sqrt{2}$). On décide maintenant de suivre l'évolution en temps de la composante H_x du champ magnétique en un point à l'intérieur de la cavité métallique et de l'énergie du champ électromagnétique. Dans un deuxième temps, nous allons illuminer une cavité métallique circulaire par une onde harmonique. On choisira comme domaine de calcul une boite $\Omega =]0, 11m[\times]0, 11m[$ et le champ incident sera donné par les formules:

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{k_y}{|k|}cos(\omega(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|})), \\ H_y &= +\frac{k_x}{|k|}cos(\omega(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|})), \\ E_z &= cos(\omega(t - \frac{k_x x + k_y y}{c|k|})), \end{aligned} \tag{7.39}$$

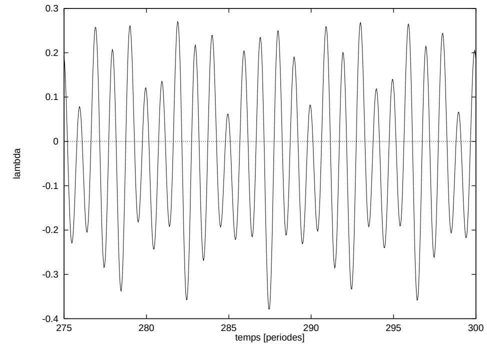
avec les mêmes valeurs des paramètres ω, k_x, k_y comme dans le cas précédent. On constate que les régimes périodiques sont très difficilement atteints dans le premier cas, tandis que dans le deuxième cas on n'observe aucune périodicité (à cause de la géometrie plus compliquée). En effet, la méthode classique ne permet pas de calculer des bonnes approximations des solutions périodiques, même pour des longs temps de calcul (quelques centaines de



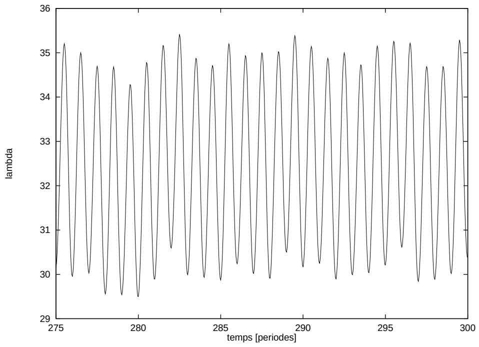
(a) $H_x(t)$-cavité rectangulaire



(b) Énergie électromagnétique-cavité rectangulaire



(c) $H_x(t)$-cavité circulaire



(d) Énergie électromagnétique-cavité circulaire

FIG. 7.4: *Solutions obtenues en utilisant la méthode classique*

périodes). Dans le paragraphe suivant nous allons appliquer la méthode (MAL) afin de calculer des bonnes approximations des solutions périodiques.

7.2.2 Méthode de l'absorption limite pour le système de Maxwell

On présente maintenant la méthode (MAL) appliquée au système des équations de Maxwell. Comme dans la section précédente, nous introduisons une perturbation proportionnelle au champ électromagnétique. Le système perturbé des équations de Maxwell en trois dimensions d'espace s'écrit :

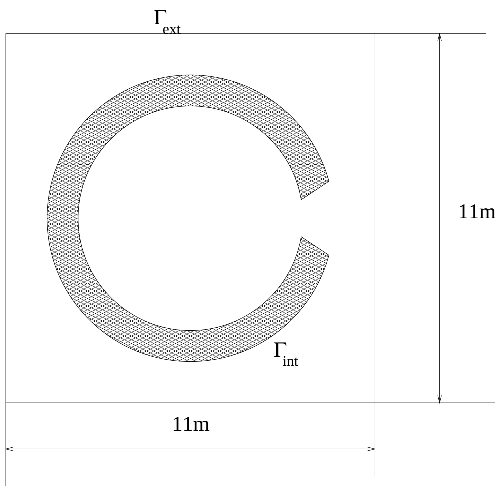


FIG. 7.5: *Cavité métallique circulaire*

$$\begin{cases} \lambda(t)\vec{H} + \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, \\ \\ \lambda(t)\vec{E} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = 0. \end{cases} \tag{7.40}$$

Pour fermer le système, il faudra préciser l'évolution en temps de la fonction inconnue $\lambda(\cdot)$, qui sera donnée par une équation supplémentaire du type (7.35). Lorsque nous calculons des solutions périodiques du système classique de Maxwell (non-perturbé) par la méthode (MAL), on doit considérer les points suivants:

(i) s'assurer que l'état périodique est bien atteint,

(ii) s'assurer que le paramètre λ converge rapidement vers zéro.

Le point (i) revient à la définition d'un bon critère de périodicité. Nous avons d'abord utlilisé le critère proposé dans [37]. Si la solution est supposée harmonique :

$$Q(t,x) = Q_0(x)cos(\omega t + \varphi),$$

alors elle vérifie l'équation différentielle en temps :

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0,$$

ce qui donne :

$$\int_\Omega \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 + \omega^2 Q^2 dx = const.$$

Nous proposons ici un critère basé sur un calcul en utilisant la norme L^2 du champ Q et de sa dérivée temporelle $\frac{dQ}{dt}$ à chaque pas de temps. Le critère $\mathcal{C}^1$ est donné par :

$$\mathcal{C}^1 = \frac{\left|\int_\Omega \{ \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 (ndt) + \omega^2 Q^2(ndt) - \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 ((n-1)dt) - \omega^2 Q^2((n-1)dt)\} dx\right|}{\int_\Omega \{ \left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 ((n-1)dt) + \omega^2 Q^2((n-1)dt)\} dx}.$$

Toutefois, si le champ Q n'est pas une onde harmonique, le critère $\mathcal{C}^1$ ne sera plus satisfait (par exemple une combinaison de deux ondes planes). Un nouveau critère, plus général, doit être utilisé. On pourra prendre comme base du critère l'énergie évaluée sur la totalité du domaine et à chaque période en temps :

$$\mathcal{C}^2(Q(nT)) = \frac{\left|\int_\Omega \{Q^2(nT,x) - Q^2((n-1)T,x)\} dx\right|}{\int_\Omega Q^2((n-1)T,x) dx}, \ n \geq 1.$$

Finalement, le critère $\mathcal{C}^2$ peut être améliorer en calculant le résidu de la façon suivante :

$$\mathcal{C}^3(Q(nT)) = \frac{\int_\Omega |Q(nT,x) - Q((n-1)T,x)|^2 dx}{\int_\Omega Q^2((n-1)T,x) dx}, \ n \geq 1.$$

Contrairement au premier cas, quand le résidu $\mathcal{C}^1$ était calculé à chaque pas de temps, on observe que les résidus $\mathcal{C}^2, \mathcal{C}^3$ sont à calculer seulement à chaque période. Maintenant, on peut completer le système (7.40) par l'équation :

$$\frac{d\lambda}{dt} + \mathcal{R}(\mathcal{C}(H,E)) \cdot \lambda(t) = 0, \ t > 0, \tag{7.41}$$

avec la condition initiale :

$$\lambda(0) = \lambda_0,$$

où $\mathcal{R} = \chi_{[-\eta,\eta]}$. Nous reprenons maintenant les expériences numériques du paragraphe précédent, en utilisant (7.40) et (7.41). On a choisit comme valeur initiale $\lambda_0 = 0.1$ pour la cavité rectangulaire et $\lambda_0 = 0.5$ pour la cavité circulaire. Comme résidu nous avons utilisé $\mathcal{C}^3$ pour la combinaison d'ondes planes et $\mathcal{C}^1$ pour l'onde harmonique. Nous présentons l'évolution en temps des composantes du champ électromagnétique. On constate que les régimes périodiques sont bien atteints, après une cinquantaine de périodes, les résidus étant de l'ordre de 10^{-3}.

Au même temps il faut s'assurer que les solutions obtenues vérifient le système classique de Maxwell, ce qui revient à une décroissance rapide du paramètre λ vers zéro. En effet, on observe des valeurs de l'ordre de 10^{-5} pour l'absorption λ après 150 périodes.

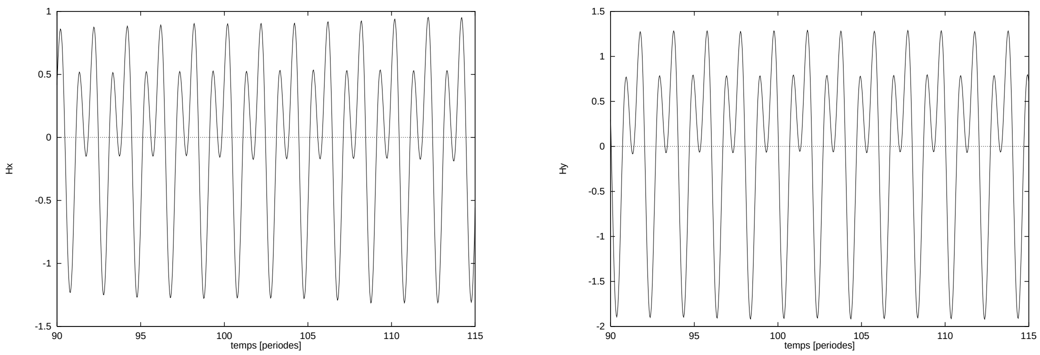


FIG. 7.6: *H_x/H_y dans la cavité rectangulaire*

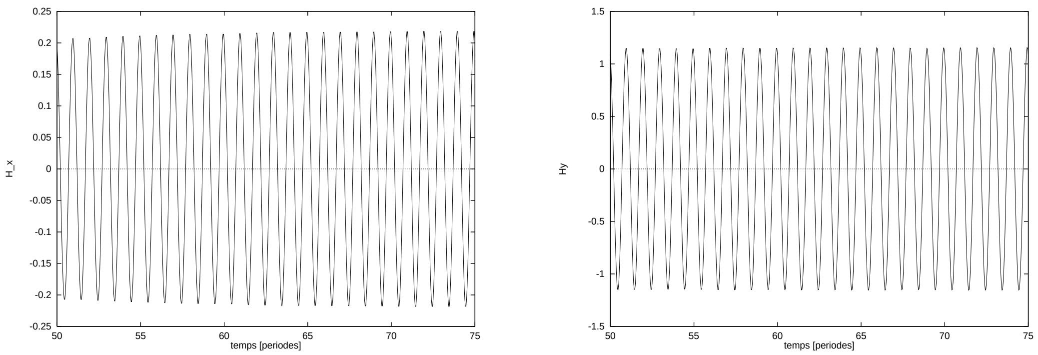


FIG. 7.7: *H_x/H_y dans la cavité circulaire*

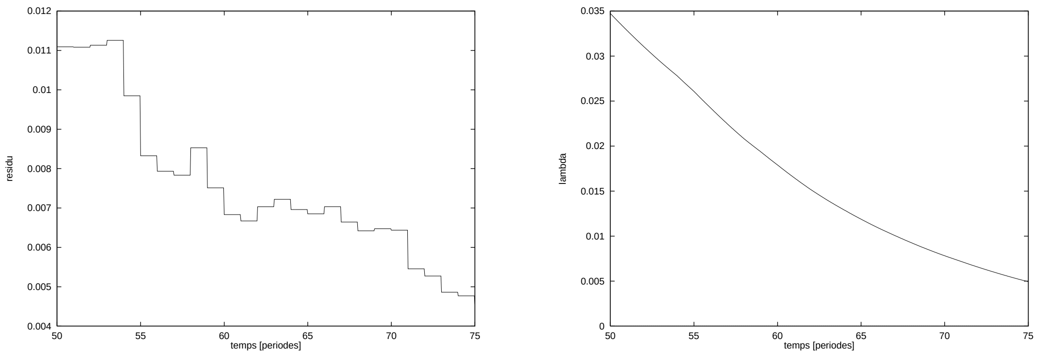


FIG. 7.8: *Résidu $\mathcal{C}^1$/paramètre λ dans la cavité circulaire*

7.3 Applications au système de Vlasov-Maxwell

On propose dans cette partie d'effectuer quelques expériences numériques pour illustrer la précision et la vitesse de convergence vers les régimes périodiques de la méthode (MAL) appliquée au transport de particules chargées soumises aux champs électromagnétiques.

7.3.1 Présentation des équations

Le modèle le plus général pour la simulation du transport de particules chargées sans collisions repose sur les équations couplées de Vlasov et de Maxwell:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m}(E + v \wedge (\mu_0 H)) \cdot \nabla_v f = 0, \tag{7.42}$$

$$\begin{cases} \mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, \\ \\ \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\vec{j}, \end{cases} \tag{7.43}$$

où le couplage est donné par la densité de courant :

$$\vec{j}(t,x) = \int_v \vec{v} f(t,x,v) dv. \tag{7.44}$$

Ici (t,x,v) représente le temps, la position et la vitesse, f est la fonction de distribution de particules chargées, (E,H) est le champ électromagnétique.
Pour l'approximation numérique des équations de Maxwell, on utilise la méthode volumes finis introduite dans le paragraphe 2.2. L'équation de Vlasov (7.42) est approchée numériquement en utilisant une méthode déterministe qui repose sur une approximation de la fonction de distribution f par une combinaison de fonctions de Dirac :

$$f(t,x,v) = \sum_{k=1}^{N} w_k f_k \delta(x - x_k(t)) \otimes \delta(v - v_k(t)), \tag{7.45}$$

où N et le nombre de particules, w_k est le volume dans l'espace des phases de la cellule associée à la particule k et f_k est le poids de la particule k. Les fonctions $(x_k(t), v_k(t))$ vérifient le système différentiel:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = v_k(t), \\ \\ \dfrac{dv_k}{dt} = \dfrac{q}{m}(E(t,x_k(t)) + v_k(t) \wedge (\mu_0 H(t,x_k(t)))). \end{cases}$$

La densité de courant s'écrit :

$$\vec{j}(t,x) = q\sum_{k=1}^{N} w_k f_k \vec{v}_k(t)\delta(x - x_k(t)).$$

Le champ électromagnétique dans chaque point $x_k(t)$ est interpolé à l'aide des fonctions P^1 et la densité de courant au noeud S_i du maillage est calculée par :

$$\begin{aligned}\vec{j}(t,S_i) &= \frac{1}{V_i}\int \vec{j}(t,x)\phi_i(x)dx \\ &= \frac{q}{V_i}\sum_{k=1}^{N} w_k f_k \vec{v}_k(t)\phi_i(x_k(t)),\end{aligned}$$

où $V_i = \int \phi_i(x)dx$ et ϕ_i est la fonction P^1 associée au noeud S_i.

7.3.2 Résultats numériques

Nous présentons dans ce paragraphe les solutions numériques obtenues, dans un premier temps, par la méthode classique ($\lambda = 0$) et dans un deuxième temps en utilisant la méthode (MAL). Le domaine de calcul sera une boite 2D rectangulaire $]0,1m[\times]0,1m[$ et on considère le mode *Transverse Électrique* ($E_z = 0$). On impose des conditions limites absorbantes et métalliques comme indiqué dans la figure. Deux espèces de particules chargées sont injectées dans le domaine, par la partie gauche de la frontière absorbante, à la fréquence de résonance de la boite :

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

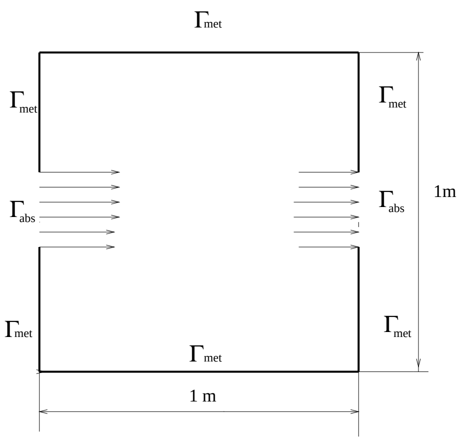


FIG. 7.9: *Cavité métallique/absorbante*

Les fonctions de distributions des deux espèces de particules sont données par :

$$g_e(t,x,v) = \begin{cases} -|e|(2+cos(\omega t)) \cdot \delta(v-3), & x=0, v_x>0, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases}$$

et :

$$g_i(t,x,v) = \begin{cases} +|e|(2+sin(\omega t)) \cdot \delta(v-3), & x=0, v_x>0, \\ 0, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Plusieurs expériences numériques ont été faites, selon la largeur de la bande d'injection qui jouera le rôle du petit paramètre ε introduit dans la section 7.1.1, compte tenu du fait que les conditions limites absorbantes ont un effet dissipatif. En utilisant la méthode classique (pas de perturbation, $\lambda = 0$) on observe un bon comportement des solutions périodiques après une dizaine de périodes si la frontière absorbante represente 50% de la frontière totale. Si Γ_{abs} est réduite à 20% ou à 10%, des difficultés apparaissent pour capter les solutions périodiques. Nous avons représenté les solutions calculées sur un temps de l'ordre de quelques dizaines de périodes, mais en effet, les régimes périodiques semblent très difficilement à atteindre même pour des grands temps de calcul (des centaines de périodes).

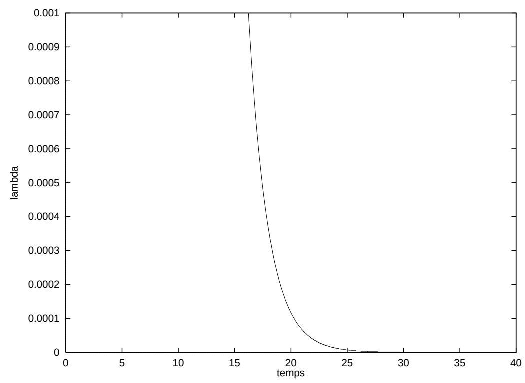
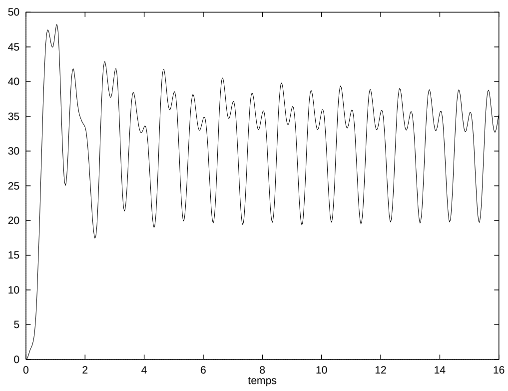
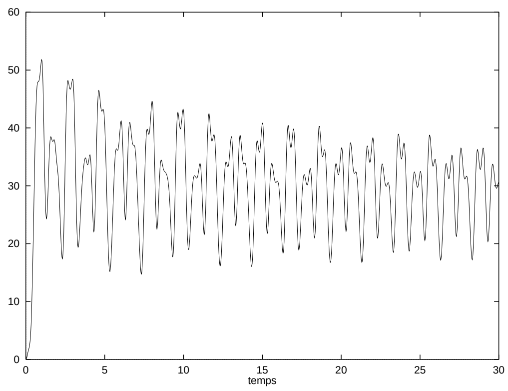


FIG. 7.10: $\lambda = \lambda(t)$, $\lambda_0 = 0.1, CLA = 10\%$

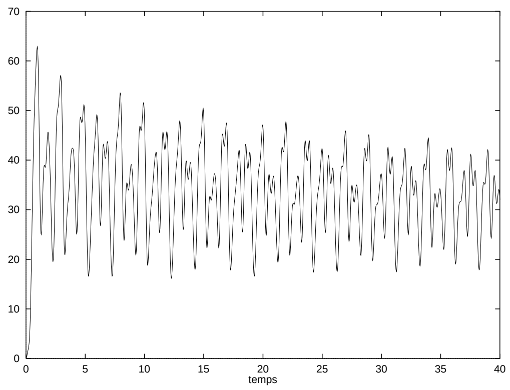
Dans le deuxième cas (MAL, $\lambda > 0$) des bonnes approximations des régimes périodiques sont obtenues après une dizaine de périodes, même dans le cas de Γ_{abs} réduite à 10%. L'indépendence du temps de convergence par rapport au facteur dissipatif confirme les résultats de la *Proposition 7.1.4*. Nous avons suivi aussi l'évolution en temps du paramètre λ, afin de justifier la convergence des solutions du système perturbé vers les solutions du système classique de Vlasov-Maxwell. Nous observons des valeurs très petits $\lambda \approx 10^{-4}$ après une vingtaine de périodes.



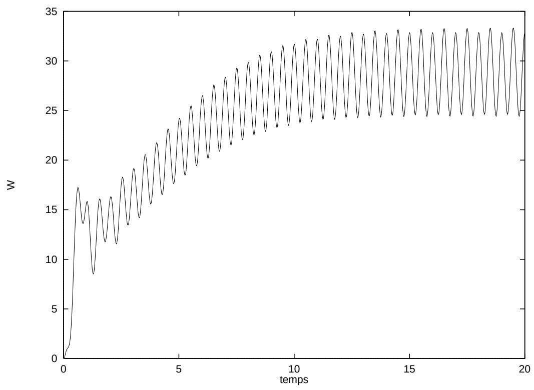
(a) $\lambda_0 = 0, CLA = 50\%$



(b) $\lambda_0 = 0, CLA = 20\%$



(c) $\lambda_0 = 0, CLA = 10\%$



(d) $\lambda_0 = 0.1, CLA = 10\%$

FIG. 7.11: *Énergie du champ électromagnétique*

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons présenté à la fois des résultats théoriques et numériques de la physique du transport de particules chargées soumises au champ électromagnétique. La recherche des régimes périodiques est une opération délicate.

Nous avons montré l'existence de la solution faible périodique du système de Vlasov-Poisson dans un domaine multi-dimensionnel. Dans une dimension d'espace on montre aussi un résultat d'unicité. La preuve repose sur l'application du théorème du point fixe de Schauder. Le point clé des démonstrations est d'imposer des conditions reliant les données au bord qui assureront une durée de vie finie dans le domaine pour toutes les particules. La même méthodologie s'applique aussi au système de Vlasov-Maxwell. Nous avons présenté des résultats d'existence pour les cas non-relativiste et relativiste en une dimension d'espace.

Dans un deuxième temps nous nous sommes intéressés à la résolution numérique du système de Vlasov-Maxwell périodique. Pour la discrétisation des équations de Maxwell nous avons utilisé un schéma décentré précis en temps et en espace (d'ordre trois) dans une formulation de type volumes finis en maillages non structurés. L'équation de Vlasov a été approchée par une méthode particulaire.

Les résultats présentés montrent qu'une telle méthode ne permet pas de restituer de bonnes approximations des régimes périodiques (on pense au grand nombre d'itérations et à la faible convergence vers les solutions périodiques).

Une méthode, dite de l'absorption limite, a été développée pour la résolution numérique du système de Vlasov-Maxwell. Des résultats théoriques ont été montrés dans le cadre d'un modèle 1D simplifié et ensuite cette méthode a été appliquée avec succès au système de Vlasov-Maxwell. Elle repose sur l'introduction d'un terme d'absorption et à notre connaissance elle est inédite. D'abord nous avons mis en évidence une très rapide convergence vers les régimes périodiques des solutions d'un système perturbé par un terme d'absorption $\lambda > 0$, bien que ces solutions ne vérifient pas les équations originales. Nous avons ensuite remplacé le paramètre constant $\lambda > 0$ par une fonction du temps, inconnue nouvelle du système, décroissante vers zéro pour t vers l'infini. L'évolution de cette fonction sera décrite par une équation de contrôle qui tiendra compte d'un critère de périodicité.

L'étude préliminaire que nous avons faite dans le cas simplifié a démontré que cette méthode permet de gagner énormément en temps de calcul (passer à une dizaine de périodes par rapport à 6000 périodes dans certains cas). D'autre part, les simulations faites pour la résolution du sytème de Vlasov-Maxwell ont montré qu'on dispose d'une méthode à la fois rapide et robuste pour l'approximation des régimes périodiques.

Les travaux effectués au cours de cette thèse constituent donc une première étude des solutions périodiques du système de Vlasov-Maxwell. En ce qui concerne les résultats théoriques, l'existence et l'unicité de telles solutions ont été obtenues, mais la difficulté principale a été de trouver une méthode numérique appropriée. Nous pensons avoir montré l'efficacité et l'intérêt d'une telle méthode numérique à travers les nombreux cas test présentés.

Annexe A

La discrétisation spatiale utilisée dans la section 3.1.1 correspond au système semi-discret associé à chaque noeud I (les indices I et h sont omis) :

$$U_t + \Psi(U) = 0\,,$$

où Ψ représente la discrétisation spatiale.
On rappelle ici l'algorithme d'intégration temporelle multi-pas Runge-Kutta utilisé (RK3) :

$$\begin{cases} U^0 = U^n \\ U^l = U^0 - \dfrac{\Delta t}{(4-l)}\Psi(U^{l-1}) \quad l = 1, 2, 3 \\ U^{n+1} = U^3 \end{cases}$$

où Δt représente le pas de temps tel que : $t^n = n\Delta t$.

Annexe B

On donne ici le flux numérique Φ_I obtenu dans le cas du schéma écrit en maillage **rectangulaire**. On a :

$$\frac{d\,U_I}{d\,t} = -\frac{\Phi_I}{\Delta x \Delta y},$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi_I = \quad & \Delta x\,(\tfrac{C_2}{2}(1+\beta) - \beta\gamma \mid c_2 \mid) U_{i\,j+1} \\
& -\Delta x\,(\tfrac{C_2}{2}(1+\beta) + \beta\gamma \mid c_2 \mid) U_{i\,j-1} \\
& +\tfrac{1}{4}\beta\Delta x\,(c_2 + \gamma \mid c_2 \mid) U_{i\,j-2} \\
& +\tfrac{1}{4}\beta\Delta x\,(-c_2 + \gamma \mid c_2 \mid) U_{i\,j+2} \\
& \Delta y\,(\tfrac{C_1}{2}(1+\beta) - \beta\gamma \mid c_1 \mid) U_{i+1\,j} \\
& -\Delta y\,(\tfrac{C_1}{2}(1+\beta) + \beta\gamma \mid c_1 \mid) U_{i-1\,j} \\
& +\tfrac{1}{4}\beta\Delta y\,(c_1 + \gamma \mid c_1 \mid) U_{i-2\,j} \\
& +\tfrac{1}{4}\beta\Delta y\,(-c_1 + \gamma \mid c_1 \mid) U_{i+2\,j} \\
& +\tfrac{3\beta\gamma}{2}(\mid c_2 \mid \Delta x + \mid c_1 \mid \Delta y) U_{ij}
\end{aligned}$$

Annexe C

On donne ici le flux numérique Φ_I obtenu dans le cas du schéma écrit en maillage **triangulaire**. On a :

$$\frac{dU_I}{dt} = -\frac{\Phi_I}{\Delta x \Delta y},$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi_I = \quad & A_{0,0}U_{i,j} + A_{1,1}U_{i+1,j+1} + A_{2,2}U_{i+2,j+2} + A_{1,2}U_{i+1,j+2} + A_{2,1}U_{i+2,j+1} \\
& A_{1,0}U_{i+1,j} + A_{0,1}U_{i,j+1} + A_{0,-1}U_{i,j-1} + A_{-1,0}U_{i-1,j} + A_{-1,-1}U_{i-1,j-1} \\
& A_{0,2}U_{i,j+2} + A_{-1,1}U_{i-1,j+1} + A_{-2,0}U_{i-2,j} + A_{-2,-1}U_{i-2,j-1} + A_{-1,-2}U_{i-1,j-2} \\
& A_{-2,-2}U_{i-2,j-2} + A_{1,-1}U_{i+1,j-1} + A_{0,-2}U_{i,j-2} + A_{2,0}U_{i+2,j}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_{0,0} &= 10\beta\gamma(|N_1| + |N_2| + |N_3| + |N_4| + |N_5| + |N_6|) \\
A_{1,1} &= 6N_1 + \beta(2N_1 + 2N_2 - N_3 - 2N_4 - N_5 + 2N_6) - \beta\gamma(2\,|N_4| + |N_3| + 10\,|N_1| + |N_5|) \\
A_{2,2} &= -2\beta(N_1 - \gamma\,|N_1|) \\
A_{1,2} &= -\beta(N_1 + N_2) + \beta\gamma(|N_1| + |N_2|) \\
A_{2,1} &= -\beta(N_1 + N_6) + \beta\gamma(|N_1| + |N_6|) \\
A_{1,0} &= 6N_6 + \beta(2N_1 - N_2 - 2N_3 - N_4 + 2N_5 + 2N_6) - \beta\gamma(2\,|N_3| + |N_2| + 10\,|N_6| + |N_4|) \\
A_{0,1} &= 6N_2 + \beta(2N_1 + 2N_2 + 2N_3 - N_4 - 2N_5 - N_6) - \beta\gamma(2\,|N_5| + |N_4| + 10\,|N_2| + |N_6|) \\
A_{0,-1} &= 6N_5 + \beta(-N_1 - 2N_2 - N_3 + 2N_4 + 2N_5 + 2N_6) - \beta\gamma(|N_1| + 2\,|N_2| + 10\,|N_5| + |N_3|) \\
A_{-1,0} &= 6N_3 + \beta(-N_1 + 2N_2 + 2N_3 + 2N_4 - N_5 - 2N_6) - \beta\gamma(|N_1| + 10\,|N_3| + |N_5| + 2\,|N_6|) \\
A_{-1,-1} &= 6N_4 + \beta(2(-N_1 + N_3 + N_4 + N_5) - N_2 - N_6) - \beta\gamma(2\,|N_1| + |N_2| + 10\,|N_4| + |N_6|)
\end{aligned}$$

$$A_{0,2} = 2\beta(-N_2 + \gamma \mid N_2 \mid) \qquad A_{-1,1} = -\beta(N_2 + N_3) + \beta\gamma(\mid N_2)+ \mid N_3 \mid)$$
$$A_{-2,0} = 2\beta(-N_3 + \gamma \mid N_3 \mid) \qquad A_{-2,-1} = -\beta(N_3 + N_4) + \beta\gamma(\mid N_3)+ \mid N_4 \mid)$$
$$A_{-1,-2} = -\beta(N_4 + N_5) + \beta\gamma(\mid N_4 \mid + \mid N_5 \mid) \qquad A_{-2,-2} = 2\beta(-N_4 + \gamma \mid D \mid)$$
$$A_{1,-1} = -\beta(N_5 + N_6) + \beta\gamma(\mid N_5 \mid + \mid N_6 \mid) \qquad A_{0,-2} = 2\beta(-N_5 + \gamma \mid N_5 \mid)$$
$$A_{2,0} = 2\beta(-N_6 + \gamma \mid N_6 \mid)$$

et

$$N_1 = \tfrac{1}{36}(c_1\Delta y + c_2\Delta x) \qquad N_4 = \tfrac{1}{36}(-c_1\Delta y - c_2\Delta x)$$

$$N_2 = \tfrac{1}{36}(-c_1\Delta y + 2c_2\Delta x) \qquad N_5 = \tfrac{1}{36}(c_1\Delta y - 2c_2\Delta x)$$

$$N_3 = \tfrac{1}{36}(-2c_1\Delta y + c_2\Delta x) \qquad N_6 = \tfrac{1}{36}(2c_1\Delta y - c_2\Delta x)$$

Bibliographie

[1] N. Ben.Abdallah *Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov-Poisson system*, Preprint.

[2] A. Arsenev, *Global existence of a weak solution of Vlasov's system of equations*, USSR Comp. Math. and Math. Phys. 15, 1975, pp. 131-143.

[3] K. Asano and S. Ukai, *On the Vlasov-Poisson limit of the Vlasov-Maxwell equation*, [CA] Pattern and waves. Qualitative analysis of nonlinear differential equations, Stud. Math. Appl. 18, 369-383 (1986).

[4] C. Bardos, *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. Sci. Ecole norm. sup., 4:185:233, (1969).

[5] M. Bezard, *Boundary value problems for the Vlasov-Maxwell system*, Semin. Equ. Deriv. Partielles, Ec. Polytech., Cent. Math., Palaiseau Semi 1992-1993, Exp. No.4, pp. 17 (1993).

[6] C. K. Birdsall, A. B. Langdon *Plasma physics via computer simulations* Mc Graw Hill, New-York, (1985).

[7] B. Bodin, *Modélisation et simulation numérique du régime de Child-Langmuir*, Thèse de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (1995).

[8] M. Bostan and F. Poupaud, *Periodic solutions of the Vlasov-Poisson system with boundary conditions*, C.R.Acad.Sci.Paris, t.325, Série I, p.1333-1336, 1997.

[9] M. Bostan and F. Poupaud, *Periodic solutions of the Vlasov-Poisson system with boundary conditions*, M3AS.

[10] M. Bostan and F. Poupaud, *Periodic solutions of the 1D Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, report INRIA N^o 3554, (Novembre 1998).

[11] M. Bostan and F. Poupaud, *Etude numérique des solutions périodiques des systèmes de Maxwel et de Vlasov-Maxwell par une méthode de contrôle*, Rapport de Recherche INRIA N^o 3534, (Octobre 1998).

[12] R. Carpentier, *Approximation et analyse numérique d'écoulements instationnaires, application à des instabilités tourbillonaires*, Thèse de Ph.D., Université de Nice Sophia-Antipolis, 1995.

[13] R. Carpentier, A. de la Bourdonnaye and B. Larrouturou, *Sur le calcul des équations équivalentes pour l'analyse des méthodes numériques linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 319, no.I, pp. 757-760, (1994)

[14] R. Carpentier, A. de La Bourdonnaye and B. Larrouturou, *On the derivation of the modified equation for the analysis of linear numerical methods*, M2AN, vol. 31, no. 4, pp. 459-470, (1997).

[15] J.P. Cioni *Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de volumes finis.* Thèse de Ph.D., Université de Nice Sophia-Antipolis, 1995.

[16] J.P. Cioni, L. Fezoui et D. Issautier *High-order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equation.* La Recherche Aérospatiale, no 5, 1994, pp. 319-328.

[17] J.P. Cioni, L. Fezoui et H. Steve *Approximation des équations de Maxwell par des schémas décentrés en éléments finis* Rapport INRIA, no 1601, (1992).

[18] P. Degond, *Regularité de la solution des équations cinétiques en physiques de plasmas*, [J] Semin., Equations Deriv. Partielles 1985-86, Expose No.18, 11 p. (1986).

[19] P. Degond, *Local existence of solutions of the Vlasov-Maxwell equations and convergence to the Vlasov-Poisson equations for infinite light velocity*, [J] Math. Methods Appl. Sci. 8, 533-558 (1986).

[20] P. Degond, *Global existence of smooth solutions for the Vlasov-Fokker-Planck equation in 1 and 2 space dimensions*, [J] Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser. 19, 519-542 (1986).

[21] P. Degond, P. A. Raviart *On the paraxial approximation of the stationary Vlasov-Maxwell system* Rapport CMLA de l'ENS Cachan, No 9313, (1993).

[22] S. Depeyre, *Étude de schémas d'ordre élevé en volumes finis pour des problèmes hyperboliques. Application aux équations de Maxwell, d'Euler et aux écoulements diphasiques dispersés*, Thèse de Ph.D., École Nationale des Ponts et Chaussées, (1997).

[23] S. Depeyre, B. Larrouturou et R. Carpentier, *Méthodes numériques décentrées d'ordre élevé en deux dimensions d'espace*, Rapport de Recherche CERMICS, no. 95-41, (1995).

[24] A. Dervieux, *Steady Euler simulations using unstructured meshes*, Von Karman Institute Lecture Series 85-04, (1985).

[25] J. A. Desideri, A. Goudjo and V. Selmin *Third order numerical schemes for hyperbolic problems*, Rapport INRIA, no. 607, (1987).

[26] R. J. Diperna et P. L. Lions, *Global weak solutions of Vlasov-Maxwell system*, Comm. Pure Appl. Math. XVII(1989), pp. 729-757.

[27] R. J. Diperna et P. L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., 98:511:547, (1989).

[28] L. Fézoui and B. Stoufflet, *A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes*, J. Comp. Phy., vol. 84, pp. 174-206, (1989).

[29] C. Greengard and P.A. Raviart, *A boundary value problem for the stationary Vlasov-Poisson system*, Comm. Pure and Appl. Math. XLIII(1990), pp. 473-507.

[30] Y. Guo, *Regularity for the Vlasov equation in a half space*, Indiana Univ. Math. J. 43(1994), pp.255-320.

[31] Y. Guo, *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Comm. Math. Phys. 154(1993), pp. 245-263.

[32] R. F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, Mc Graw-Hill Book Company, (1961).

[33] A. Harten, *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phy., vol. 49, pp.357-393, (1983).

[34] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, seconde édition, John Wiley & Sons, New York, (1975).

[35] P.D. Jackson, A. Harten and B. Van Leer, *On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws* SIAM Revue, vol.25, no.1, (1983).

[36] P.L. Lions and B. Perthame *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math. 105(1991), pp. 415-430.

[37] R. Löhner and J. Ambrosiano *A finite element solver for the Maxwell equations* GAMNI-SMAI conference on numerical methods for the solution of Maxwell equations, Paris, 1989.

[38] S. Mas-Gallic *A deterministic particle method for the linearized Boltzmann equation*, Transp. Theory Stat. Phy. vol. 16, pp. 855-887, (1987).

[39] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in 3 dimensions for general initial data*, J. Diff. Eq. 95(1992), pp. 281-303.

[40] S. Piperno and S. Depeyre *Criteria for the design of limiters yielding efficient high resolution TVD schemes*, J. Computers and Fluids, vol. 27, no. 2, pp. 183-197, (1998).

[41] F. Poupaud, *Boundary value problems for the stationary Vlasov-Maxwell system*, Forum Math., 4(1992), pp. 499-527.

[42] P. A. Raviart, *Modèles numériques en transport des particules chargées* École CEA-EDF-INRIA, (1994).

[43] L. Reggiani, *Hot electric transport in semiconductors* Springer Verlag, Berlin, (1985).

[44] B. Van Leer, *Flux vector splitting for the Euler equations*, Lecture Notes in Physics, vol. 170, pp. 405-512 (1982).

[45] B. Van Leer, *Towards the ultimate conservative difference schemes V: a second order sequel to Godunov's method*, J. Comp. Phy., vol. 32, (1979).

[46] R. F. Warming and F. Hyett, *The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods*, J. Comput. Phy., vol. 14, no. 2, pp. 159, (1974).