THÈSE

présentée à

l'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité : Géotechnique

Tomographie microonde d'objets enterrés. Application à l'auscultation radar

par

Cédric DOURTHE

Soutenue le 19 Septembre 1997 devant la commission composée de :

M.	Christian	PICHOT	Directeur de thèse
MM.	John	CASHMAN	Rapporteurs
	Pierre	DEGAUQUE	
Mme.	Laure	BLANC-FÉRAUD	Examinatrice
MM.	Michel	BARLAUD	Examinateurs
	Armel	de LA BOURDONNAYE	
	Philippe	CÔTE	
	David	DANIELS	
MM.	Jean-Yves	DAUVIGNAC	Invités
	Xavier	DÉROBERT	

, à la mémoire de mon grand-père

Remerciements

Aucun mot ne saurait exprimer la reconnaissance et l'estime que je porte à mon directeur de thèse, Christian PICHOT. Par son aide sincère, tant morale que scientifique, son extraordinaire disponibilité et sa remarquable communicabilité, il a su me guider tout au long de mes travaux. Ce fut un réel plaisir de travailler à ses côtés.

Je veux aussi exprimer toute ma gratitude à Armel de LA BOURDONNAYE, pour être resté à mon écoute et pour avoir mis toutes ses compétences à mon service durant ces trois années.

Je remercie vivement les membres du jury pour leur attention concernant mes travaux de recherche ainsi que leur présence à ma soutenance.

Je veux plus particulièrement remercier mes rapporteurs, Pierre DEGAUQUE et John CASHMAN, pour leur lecture approfondie du mémoire et pour tous les conseils prodigués après cette lecture.

De la même façon, je tiens à remercier Michel BARLAUD, Philippe CÔTE et Xavier DÉROBERT, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté durant la réalisation de la thèse.

Je suis par ailleurs très reconnaissant à David DANIELS qui me fait l'honneur d'assister à ma soutenance.

Je dois aussi énormément au soutien de Jean-Yves DAUVIGNAC et Laure BLANC-FÉRAUD. Tous deux ont pris sur leur temps de recherche pour comprendre mon sujet et apporter leur compétence à la réalisation de projets décrits dans la thèse. Je les en remercie amicalement.

Toute l'approche expérimentale n'aurait pas pu exister sans l'aide sincère de Odile BLONDEL, Jacques CARIOU et Alain GENDRON du Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Rouen.

Un grand et sincère merci à mes deux "electromagnéticiens" favoris, Loula FEZOUI et Jean-Pierre CIONI, qui ont toujours répondu présent quand j'en avais besoin. Merci pour tout.

Une grande partie de la thèse n'aurait pas pris forme sans le concours de mon jumeau du LEAT, transfuge de l'I3S, Docteur Pierre LOBEL. Ses calculs et sa méthode m'ont permis de gagner un temps précieux.

Enfin, je tiens vraiment à congratuler notre Chef système à nous, l'incroyable Robert RIVIÈRE et sa patience que j'ai maintes et maintes fois mise à rude épreuve... Bob, je jure que je ne faisais pas exprès!

Je remercie également les gens qui de près ou de loin ont participé à cette aventure. Que vous soyez du Cermics d'en haut, du Cermics d'en bas, de l'I3S ou du LEAT, footeux ou non, de Nice, d'Eysines ou d'ailleurs, recevez tous ma sympathie éternelle!

Merci surtout à mes parents, à mes frérots, et à toute la famille qui était loin de moi mais toujours présente...

Pour finir, je tenais à associer à ce travail ma bien aimée qui m'a tant donné pour mener à bien cette thèse. Merci à toi, la Nouche!

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'auscultation du sol est un sujet vaste pour lequel de nombreuses méthodes géophysiques ont été développées. À partir de la mesure de champs physiques en surface ou en profondeur (forages), ces méthodes proposent d'accéder à la répartition des propriétés physiques des matériaux constituant le sous-sol.
Parmi les méthodes les plus usitées, les méthodes sismiques utilisent les propriétés des ondes mécaniques et étudient leur vitesse dans le sol ainsi que le facteur de qualité Q. Employées principalement dans le cadre de la prospection pétrolière, on retrouve ces techniques dans le domaine du génie civil [25][64] ou de l'hydrogéologie [33]. Elles restent parfaitement adaptées aux cas des objets non-métalliques pour des profondeurs d'investigation de l'ordre de la centaine de mètres ou du kilomètre, dans les sites en milieu aquatique.
Les méthodes électriques et électromagnétiques regroupent aussi une grande variété de techniques de sondage. Elles se distinguent par le paramètre physique qu'elles étudient: résistivité ou conductivité des objets métalliques avec la prospection par courant continu [71], la magnétotellurique artificielle [53], les méthodes d'auscultation par induction [83]; permittivité essentiellement pour les méthodes d'auscultation radar [75][29][30][74].
Toutes ces méthodes sont largement employées dans le cadre de la prospection minière, dans le domaine du génie civil, dans le domaine du sondage non-destructif à des fins civiles, militaires ou humanitaires (détection de mines).
Des méthodes d'auscultation du sol par activation neutronique sont aussi appliquées dans la recherche géologique des minerais ou dans la détection des mines enterrées [4]. Elles utilisent et mesurent les photons γ générés par les matériaux sous l'effet d'un bombardement de neutrons.
Enfin, depuis quelques temps, d'autres méthodes ont été conçues en étroite relation avec les cibles à atteindre (par exemple, les biosenseurs qui étudient les composants gazeux contenus dans les objets [12]).
L'auscultation radar s'inscrit donc dans le cadre des méthodes d'asucultation électromagnétiques. Mais, contrairement aux autres méthodes, elle utilise un procédé similaire à celui de la sismique rélexion: une impulsion électromagnétique est émise en direction du sol, se propage dans celui-ci (notion de vitesse de l'onde) et se réfléchit sur les interfaces de nature différentes. La manière classique utilisée pour retrouver une information sur la structure du sol est de mesurer et d'étudier le temps de retour de l'onde. Ce système d'auscultation, pouvant être porté, tiré voire héliporté, est employé intensivement dans les domaines du génie civil et du sondage nondestructif. Néanmoins, cette technique possède une faiblesse importante. L'atténuation des ondes électromagnétiques dans le sol est proportionnelle à la teneur en eau du sol, mais elle est inversement proportionnelle à la fréquence d'illumination. La profondeur d'investigation se trouve limitée à quelques mètres. De plus, la résolution est elle proportionnelle à la fréquence: il paraît donc nécessaire de trouver un compromis entre la résolution désirée et la profondeur de pénétration admissible en vue d'une bonne auscul-

tation radar.
La recherche actuelle s'organise autour de la conception de systèmes capables de pénétrer le sol sur une profondeur maximale, tout en gardant une résolution acceptable. Chaque élément du système radar (antenne, onde incidente, traitement du signal réfléchi) est donc étudié pour satisfaire ces critères.
Il existe un grand nombre de techniques de modulations utilisables par un radar d'auscultation de sol. Les deux techniques les plus fréquemment rencontrées utilisent soit une impulsion temporelle réelle (radar impulsionnel à modulation de fréquence [70], ou radar impulsionnel à ultra large bande [21][3]), soit une série de fréquences émises selon une rampe linéaire (radar à impulsion synthétique [47][68]). Ces deux types de radar ont un pouvoir de résolution sensiblement égal (proportionnel à l'inverse de la largeur de l'impulsion). Cependant, dans le cas du radar à impulsion synthétique, il est nettement plus facile de contrôler la forme du signal; de plus, la possibilité de maîtriser l'amplitude de chaque fréquence et donc d'envoyer un signal de forte énergie pour chaque fréquence permet d'obtenir une profondeur de pénétration plus importante lors de mesures avec un radar synthétique. Pour notre part, nous nous attachons à la prise en compte des deux techniques de modulation, reliées numériquement par une transformée de Fourier adéquate.
Le traitement du signal correspond aux étapes d'extraction de l'information sur l'objet à partir du champ diffracté mesuré par le système radar et de présentation de l'image résultante sous une forme facile à interpréter par l'utilisateur. Comme la plupart des systèmes radar utilisent des données temporelles, les techniques générales de traitement du signal sont explicitées dans le domaine temporel et sont similaires à celles utilisées dans les méthodes sismiques (procédure de déconvolution, réduction du bruit par moyennage, migration des données, technique microonde avec approximation de Kirchhoff...). On peut noter d'autres méthodes développées en étroite relation avec les objets recherchés (étude des résonances des objets, des propriétes de polarisation des cibles...). Ces techniques permettent une détection et une localisation de l'objet enterré sans toutefois obtenir une grande précision sur la forme de celui-ci. Une étude plus approfondie du système radar en général peut être consultée dans [22].
Le travail de recherche présenté dans ce mémoire s'intéresse essentiellement au développement d'algorithmes d'imagerie microonde adaptés au cas de l'auscultation radar du sous-sol. Le spectre microonde procure en effet une pénétration intéressante en vue d'une auscultation du sol, tout en conservant une résolution spatiale en accord avec les objets rencontrés dans les applications. La technique d'imagerie développée dans ce mémoire s'inspire du phénomène physique de la diffraction. Le sol est illuminé par une onde électromagnétique, appelé champ incident (ou champ d'antenne). L'interaction entre ce champ et les différentes inhomogénéités du sol crée un champ diffracté que l'on mesure à l'aide d'une ligne de récepteurs électromagnétiques située sur le sol ou au dessus du sol. Ce champ diffracté, contenant les informations liées aux différents constituants du sol, est analysé puis transformé en une image en coupe tomographique du sol par l'algorithme d'imagerie. L'objectif du présent mémoire consiste à modéliser le système radar complet (champ incident, champ diffracté mesuré, image reconstruite par un traitement de signal adapté).

Plan du mémoire
Dans le **chapitre 1**, on expose la modélisation du champ diffracté par un objet enterré me-

suré par le système radar (domaine fréquentiel ou temporel). L'objet hétérogène est enterré dans un milieu homogène. On résout ainsi le problème direct qui consiste à exprimer le champ électromagnétique vérifiant les équations de Maxwell dans la configuration étudiée, à partir des données du problème physique (caractéristiques électromagnétiques du sol, du milieu de mesure, et de l'objet enterré; valeurs du champ incident, ou champ d'antenne; paramètres géométriques du problème). Cette partie utilise essentiellement la méthode des moments qui permet de transformer l'expression intégrale des champs dans les milieux étudiés en une représentation discrète regroupée dans un système linéaire résolu de façon classique.
Puis, la technique d'imagerie est abordée dès le **chapitre 2**, d'abord d'une manière qualitative correspondant à une information sur la présence ou non de l'objet, et sur sa forme géométrique (profondeur d'enfouissement et dimensions). La technique décrite dans cette partie pour résoudre le problème de diffraction inverse (que peut on dire sur l'objet enterré à partir de la mesure de son champ diffracté ?) est une extension de la méthode générale de tomographie par diffraction, décrite dans le cadre d'un formalisme de type onde plane [19]. On se propose ici d'étendre la théorie au cas d'un champ incident quelconque. Cette extension permet entre autre de pouvoir prendre en compte le champ physique rayonné par l'antenne en vue d'une validation expérimentale des algorithmes.
Après une étude théorique de l'algorithme de reconstruction, divers cas d'intérêt pratique ont été simulés afin de dégager les propriétés de la méthode d'imagerie mise en œuvre. Le **chapitre 3** est donc consacré à l'étude de l'influence sur l'image résultante de paramètres importants tels que les caractéristiques électromagnétiques des milieux rencontrés, le type d'onde incidente, la prise en compte du phénomène de dispersion. Une quantification de l'erreur résultante est proposée dans cette partie. L'étude numérique est précédée par un rapide coup d'œil sur l'influence de la diversité en fréquence et du nombre de position de source sur l'image d'un point source.
Après une phase d'étude simulée, des résultats expérimentaux à partir de champs mesurés sont présentés dans le **chapitre 4**. Ces résultats permettent de valider d'un point de vue pratique l'algorithme de reconstruction défini précédemment. L'étude de l'erreur de mesure et des images résultantes conduit à une certaine fiabilité du processus d'imagerie mis en place. Les résultats obtenus permettent surtout de délimiter avec une certaine précision la zone d'enfouissement de l'objet. Cette information a conduit au développement d'une deuxième génération d'algorithmes définis et étudiés dans une seconde partie.

La seconde partie de la thèse est donc consacrée à une imagerie quantitative. En effet, l'information contenue dans les images reconstruites à l'aide du premier procédé ne permet pas d'identifier l'objet précisément. La méthode développée ici propose donc de reconstruire la permittivité complexe (permittivité et conductivité) de l'objet enterré. La méthode utilisée est basée sur une méthode de type gradient conjugué appliqué avec succès au cas de la reconstruction d'objets dans l'espace libre illuminé par une onde plane [60]. Cette méthode est étendue à l'étude multifréquentielle des objets enterrés et illuminés par une onde quelconque.
Dans un premier temps, on s'intéresse à la mise en place des algorithmes d'imagerie et des méthodes de résolution choisies. Ainsi, dans le **chapitre 5**, on développe les équations décrivant le problème inverse à partir des résultats donnés par la résolution du problème direct. Puis, deux méthodes de résolution itératives sont comparées à travers des exemples simulés. L'apport de la diversité en fréquence est mis à jour à partir d'une étude monodi-

mensionnelle. Les reconstructions obtenues étant améliorées par une approche régularisante qui suit ce chapitre.

Le problème inverse est souvent non linéaire et mal posé. En effet, contrairement au cas qualitatif où la relation définissant le problème inverse est linéaire, la nouvelle relation reliant la fonction objet au champ diffracté est non linéaire conduisant à un problème mal-posé. L'unicité, l'existence et la stabilité de la solution du problème inverse ne sont pas assurées simultanément. On peut résoudre en partie ce problème en utilisant une information à priori qui permet de réduire l'ensemble des solutions admissibles. Dans le **chapitre 6**, une technique de régularisation basée sur une préservation des discontinuités [16] est ainsi appliquée sur les algorithmes quantitatifs. Les résultats des simulations témoignent de l'amélioration obtenue sur les images reconstruites.

Chapitre 1

Diffraction 2D

Sommaire

Le problème est d'abord posé dans le cadre général de l'électromagnétisme à l'aide des équations de Maxwell. Il est ensuite modélisé en fonction de la configuration étudiée.
Il devient alors possible d'exprimer de façon rigoureuse le champ électrique sous une forme intégrale, à partir des données fournies (champ incident, caractéristiques physiques des différents milieux).
Les champs sont enfin calculés via l'utilisation de la méthode des moments. Les résultats sont analysés afin de dégager un pas de discrétisation assurant une certaine convergence de la méthode présentée.

I Problème à résoudre

I.1 Équation des ondes vectorielle

Le concept général d'ondes électromagnétiques est essentiellement fondé sur les équations de Maxwell regroupant la loi d'induction de Faraday (1.1) et la loi de Maxwell-Ampère (1.2) permettant de relier les champs électriques et magnétiques. Ces deux lois sont complétées par les lois de Gauss électrique (1.3) et Gauss magnétique (1.4).
Ces lois physiques peuvent être représentées sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{rot}\vec{E}(\vec{X},t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{X},t)}{\partial t} &= \vec{0} && (1.1)\\
\overrightarrow{rot}\vec{H}(\vec{X},t) - \frac{\partial \vec{D}(\vec{X},t)}{\partial t} &= \vec{J}(\vec{X},t) && (1.2)\\
div\vec{D}(\vec{X},t) &= \rho(t) && (1.3)\\
div\vec{B}(\vec{X},t) &= 0 && (1.4)
\end{aligned}$$

Ainsi, toute tude de comportement électromagnétique d'un milieu quelconque consiste dterminer les quatre champs vectoriels:
- $\vec{E}$ champ électrique ($V.m^{-1}$)
- $\vec{D}$ champ d'induction électrique ($C.m^{-2}$)
- $\vec{H}$ champ magnétique ($A.m^{-1}$)
- $\vec{B}$ champ d'induction magnétique (T)

Les termes $\vec{J}$ et ρ, qui reprsentent les sources du systme, définissent respectivement les densités de courant lectrique et de charge lectrique. Ces quantits sont relies par la loi de conservation de la charge:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + div\vec{J}(\vec{X},t) = 0 \qquad (1.5)$$

Les solutions du systme de Maxwell gnral sont obtenues en considrant gnralement que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont directement lis aux champs $\vec{D}$ et $\vec{H}$ travers les lois constitutives des matriaux:

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \tag{1.6}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{B} \tag{1.7}$$

avec respectivement ε_r et μ_r les permittivit et permabilit relatives du milieu, tandis que ε_0 et μ_0 reprsentent leurs valeurs dans l'espace libre [1].
Dans ce mémoire, nous nous restreignons à l'étude des matériaux non magnétiques ($\mu_r = 1$) sans charge libre ($\rho = 0$). Dans ces conditions, les courants sont directement reliés au champ électrique par la troisième loi constitutive (loi d'Ohm):

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{1.8}$$

où σ désigne la conductivité électrique du milieu.
Les caractéristiques électromagnétiques des milieux sont considérées invariantes dans le temps.
En incorporant les trois équations constitutives au sein du système de Maxwell, complété par les hypothèses précédentes, on peut écrire l'équation vectorielle vérifiée par le champ électrique d'un milieu hétérogène $(\varepsilon(\vec{X}),\mu_0,\sigma(\vec{X}))$:

$$\boxed{\Delta \vec{E}(\vec{X},t) - \overrightarrow{grad}.div \vec{E}(\vec{X},t) = \mu_0 \sigma(\vec{X}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{X},t) + \mu_0 \varepsilon(\vec{X}) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(\vec{X},t)} \tag{1.9}$$

Cette équation est complétée par des conditions sur le champ électrique (rayonnement, condition d'onde sortante, condition d'énergie finie,...) afin d'obtenir l'unicité de la solution.

I.2 Modélisation 2D TM

Le domaine d'étude (Fig. 1.1) est composé de trois milieux homogènes $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1,3}$ caractérisés par une permittivité relative ε_{r_i} et une conductivité σ_i. La présence de trois milieux n'est pas restrictive, la théorie pouvant être aisément étendue au cas de N milieux.
L'objet est un cylindre infini suivant la direction $\vec{z}$, de section arbitraire D$_D$ enfoui à une profondeur d dans le milieu dissipatif $\mathcal{D}_3$ sous une couche d'épaisseur h. Le domaine inhomogène $\mathcal{D}_D$ est caractérisé par une permittivité $\varepsilon_D(\vec{X})$ et une conductivité $\sigma_D(\vec{X})$.
L'objet est éclairé par un champ incident $\vec{E}^I(\vec{X},t)$ de dépendance spatio-temporelle arbitraire. Ce champ est polarisé dans la direction $\vec{z}$ (cas fondamental 2D-TM). Cette propriété est également vraie pour le champ diffracté $\vec{E}^D(\vec{X},t)$ et le champ total $\vec{E}(\vec{X},t)$.

1. $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}\, F.m^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\, H.m^{-1}$

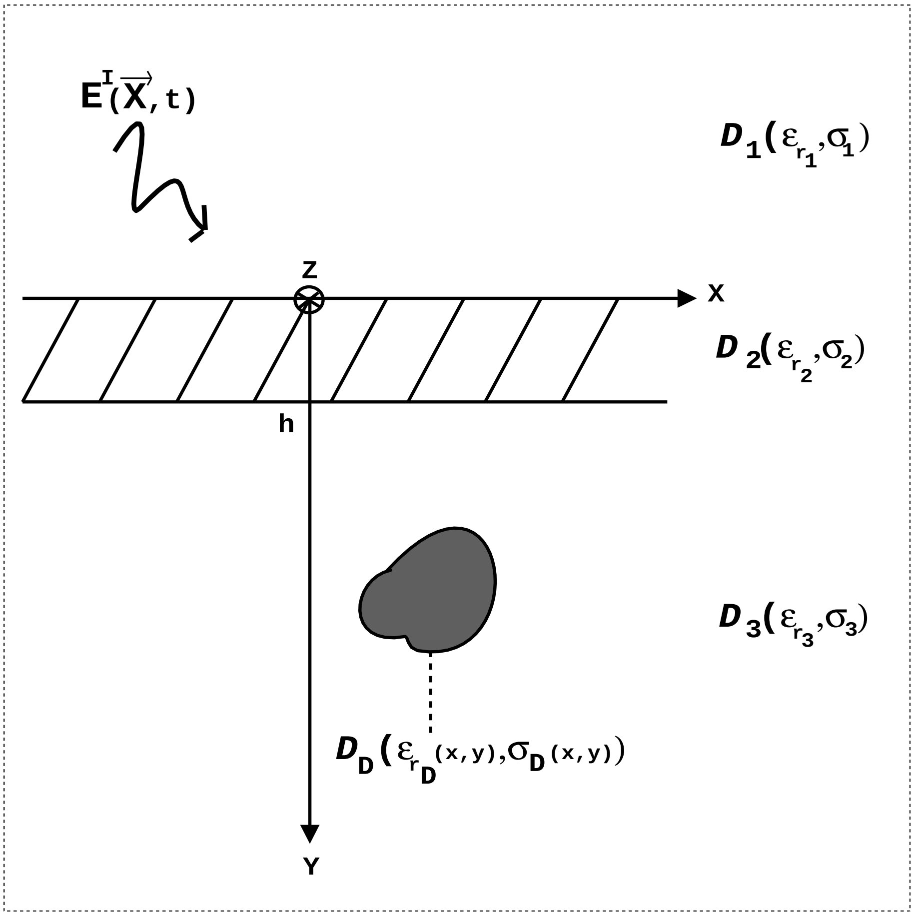


FIG. 1.1 – *Géométrie du problème*

La configuration proposée simplifie considérablement l'équation (1.9). En effet, l'invariance du problème suivant l'axe $\vec{z}$ et l'étude du cas 2D-TM permet de transformer l'équation vectorielle en une équation scalaire ($\vec{E} = E_z\vec{z}$ et $div\vec{E}$=0). Enfin, l'utilisation de la transformée de Fourier temporelle du champ électrique

$$\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} E_z(\vec{X},t)dt \tag{1.10}$$

permet d'écrire l'équation de Helmholtz scalaire vérifiée par chaque composante du spectre de E_z:

$$\boxed{\Delta\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) + k^2(\vec{X},\omega)\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) = 0,\ \forall\vec{X},\ \forall\omega} \tag{1.11}$$

où $\quad k^2(\vec{X},\omega) = \begin{cases} k_1^2(\omega) & pour\ \vec{X} \in \mathcal{D}_1 \\ k_2^2(\omega) & pour\ \vec{X} \in \mathcal{D}_2 \\ k_3^2(\omega) & pour\ \vec{X} \in \mathcal{D}_3 \\ k_D^2(\vec{X},\omega) & pour \vec{X} \in \mathcal{D}_D \end{cases}$

avec $\left| \begin{array}{l} k(\vec{X},\omega) = \omega\sqrt{\varepsilon^*(\vec{X},\omega)\mu_0} \text{ constante de propagation complexe} \\ \varepsilon^*(\vec{X},\omega) = \varepsilon(\vec{X}) + j\frac{\sigma(\vec{X})}{\omega} \text{ permittivité complexe} \end{array} \right.$

et $\quad \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ opérateur de Laplace scalaire à deux dimensions.

Cette équation des ondes est vérifiée à la fois par le champ incident, considéré comme le champ électrique en l'abscence d'objet, et par le champ diffracté. D'après la linéarité du système de Maxwell, le champ total défini par

$$\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) = \widetilde{E_z}^I(\vec{X},\omega) + \widetilde{E_z}^D(\vec{X},\omega), \forall\vec{X}, \forall\omega \tag{1.12}$$

vérifie aussi l'équation (1.11). C'est à partir de son expression que l'on va expliciter le champ diffracté dans $\mathcal{D}_1$.

II Formulation du problme direct

Afin de résoudre l'équation de Helmholtz scalaire (1.11), de nombreuses méthodes sont proposées en étroite relation avec la grandeur fréquentielle caractéristique de l'onde utilisée (longueur d'onde λ). Dans le domaine de la résonance (dimensions de l'objet $\approx \lambda$), peu de cas sont résolus de manière analytique. Des méthodes ont été développées en vue d'une résolution numérique du problème posé (méthodes par différences finis, méthodes par éléments finis, méthodes intégrales...).
Notre approche est base sur une formulation exacte des champs sous forme intgrale. Cette méthode repose essentiellement sur l'emploi des fonctions de Green adaptées aux milieux stratifiés [18].

II.1 Théorème de Green

On rappelle ici l'énoncé du théorème [84]:

Soient deux fonctions scalaires $U(\vec{X})$ et $V(\vec{X})$ appartenant à $C^2(D)$ ensemble des fonctions continûment dérivables sur le domaine D , soit γ le contour délimitant D, alors:

$$\int_D [U(\vec{X})\Delta V(\vec{X}) - V(\vec{X})\Delta U(\vec{X})]d\vec{X} = \int_\gamma [U(\vec{X})\partial_n V(\vec{X}) - V(\vec{X})\partial_n U(\vec{X})]d\gamma \tag{1.13}$$

où $\partial_n = \vec{n}.\vec{grad}$ ($\vec{n}$ étant la normale sortante à γ).

La représentation intégrale du champ total $\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)$, solution de l'équation scalaire (1.11), s'obtient en appliquant ce théorème aux deux fonctions scalaires $\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)$ et $G(\vec{X},\vec{X'},\omega)$, fonction de Green représentant le rayonnement au point $\vec{X}$ d'un filament source placé au point $\vec{X'}$.

II.2 Solution élémentaire

La fonction de Green est calculée comme solution élémentaire de l'équation (1.11). Elle satisfait le système d'équations:

$$\Delta_{\vec{X}} G(\vec{X},\vec{X'},\omega) + {k_H}^2(\omega) G(\vec{X},\vec{X'},\omega) = -\delta(\vec{X}-\vec{X'}) \ , \forall \vec{X},\ \forall \vec{X'},\ \forall \omega$$

Continuité:

$$\begin{cases} G(\vec{X},\vec{X'},\omega) \ continue \ en \ \vec{X} \ sur(I\!R^2 - \vec{X'}) \\ \partial_{n_{\vec{X}}} G(\vec{X},\vec{X'},\omega) \ continue \ \vec{X} \ sur(I\!R^2 - \vec{X'}) \end{cases} \tag{1.14}$$

Condition d'onde sortante (Sommerfeld):

$$\forall \vec{X'},\ \lim_{r\to\infty} \sqrt{r}[\frac{\partial G(\vec{X},\vec{X'},\omega)}{\partial r} - jk_H(\omega) G(\vec{X},\vec{X'},\omega)] = 0, \text{ avec } r = |\vec{X}-\vec{X'}|,$$

où $k_H(\omega) = \begin{cases} k_l(\omega), & pour \ \vec{X} \in \mathcal{D}_l,\ l = 1,2,3 \\ k_3(\omega), & pour \ \vec{X} \in \mathcal{D}_D \end{cases}$ et $\delta(\vec{X}-\vec{X'})$ la distribution de Dirac.

La résolution de (1.14) utilise la transformée de Fourier spatiale de G suivant x définie par:

$$g(\nu,y,\vec{X'},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi\nu x} G(\vec{X},\vec{X'},\omega) dx. \tag{1.15}$$

L'expression complète de G est donnée en annexe A.

Remarque:
En vertu du théorème de réciprocité [72], on montre que $G(\vec{X},\vec{X'},\omega) = G(\vec{X'},\vec{X},\omega)$, ce qui permet dans les calculs de prendre pour $(\vec{X},\vec{X'})$ soit le couple (source,mesure), soit le couple (mesure,source).

II.3 Représentation intégrale du champ électrique

Appliquons le théorème de Green aux champs $U(\vec{X}) = \widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)$ et $V(\vec{X}) = G(\vec{X},\vec{X'},\omega)$:

$$\begin{aligned} \forall \omega, \forall \vec{X'},\ & \int_D [\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) \Delta_{\vec{X}} G(\vec{X},\vec{X'},\omega) - G(\vec{X},\vec{X'},\omega) \Delta \widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)] d\vec{X} \\ & = \int_\gamma [\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) \partial_{n_{\vec{X}}} G(\vec{X},\vec{X'},\omega) - G(\vec{X},\vec{X'},\omega) \partial_n \widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)] d\gamma \ , \end{aligned} \tag{1.16}$$

où $D = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_D \cap B(O,r_0)$ et γ représente la circonférence de $B(O,r_0)$ le disque de centre O de rayon r_0.

L'évaluation du membre de gauche I_D de (1.16) utilise les équations (1.11) et (1.14) vérifiées par $\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)$ et par $G(\vec{X},\vec{X'})$, en faisant apparaître k_H dans (1.11). L'équation vérifiée par le champ peut donc s'écrire:

$$\Delta\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) + k_H^2(\omega)\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) = -[k^2(\vec{X},\omega) - k_H^2(\omega)]\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega),\ \forall\vec{X},\ \forall\omega \tag{1.17}$$

On obtient, après décomposition du domaine D:

$$I_D = -\int_D \widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)\delta(\vec{X}-\vec{X'})d\vec{X} + \int_{\mathcal{D}_D} [k^2(\vec{X},\omega) - k_3^2(\omega)]\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)G(\vec{X},\vec{X'},\omega)d\vec{X}\ , \tag{1.18}$$

Le membre de droite I_γ de l'quation (1.16) est calculé en utilisant la dcomposition du champ lectrique (1.12).
En étendant le domaine D à tout $\mathbb{R}^2$ ($r_0 \to \infty$) et en utilisant les condition de rayonnement des champs, on trouve [93]:

$$I_D = -\widetilde{E_z}(\vec{X'},\omega) + \int_{\mathcal{D}_D} [k^2(\vec{X},\omega) - k_3^2(\omega)]\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)G(\vec{X},\vec{X'},\omega)d\vec{X}\ , \tag{1.19}$$

$$I_\gamma = -\widetilde{E_z^I}(\vec{X'},\omega) \tag{1.20}$$

Après changement de variable et application du théorème de réciprocité, on obtient enfin la représentation intégrale du champ électrique dans $\mathbb{R}^2$ tout entier:

$$\boxed{\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) = \widetilde{E_z^I}(\vec{X},\omega) + \int_{\mathcal{D}_D}[k^2(\vec{X'},\omega) - k_3^2(\omega)]\widetilde{E_z}(\vec{X'},\omega)G(\vec{X},\vec{X'},\omega)d\vec{X'}\ ,\forall\vec{X},\forall\omega} \tag{1.21}$$

avec

$$\boxed{\widetilde{E_z^D}(\vec{X},\omega) = \int_{\mathcal{D}_D}[k^2(\vec{X'},\omega) - k_3^2(\omega)]\widetilde{E_z}(\vec{X'},\omega)G(\vec{X},\vec{X'},\omega)d\vec{X'},\ \forall\vec{X},\ \forall\omega.} \tag{1.22}$$

L'expression (1.22) reprsente l'quation du problme direct (calcul du champ diffract par l'objet en fonction des données du problème). Comme le champ total apparaît dans l'intégrale explicitant le champ diffracté, il nous faut d'abord résoudre l'équation intégrale en champ total (1.21).
Les caractristiques des milieux tudis ainsi que le champ incident sont supposs connus. Un calcul analytique du champ incident est propos en annexe B.

III Étude numrique

Il n'existe pas de solution analytique exacte du problème de la diffraction par un cylindre enfoui dans un demi-espace. Néanmoins, pour des cas particuliers (cylindre circulaire [63]

ou cylindre fini homogène [20]), des solutions approchées ont pu être mises à jour. Cependant, le développement des techniques de calcul informatique a permis d'obtenir des solutions exactes non analytiques, mais résolubles numériquement [44494449], ainsi que l'amélioration ou la création de solutions approchées.
La méthode des moments généralisés utilisée dans cette partie permet de transformer la représentation intégrale exacte des champs obtenue grace aux équations de Maxwell [28] en un système d'équations linéaires que l'on résout de manière classique. A l'aide de cette méthode, le champ électrique total est calculé à l'intérieur de l'objet. Puis, en utilisant la relation (1.22), le champ diffracté peut être calculé sur la ligne de mesure. Des résultats issus de simulations du problème sont présentés et analysés.

III.1 Méthode des moments généralisés

Cette méthode numérique [40734073] a pour but de remplacer un opérateur linéaire par un système approché d'équations linéaires. Les inconnues de ce système peuvent être reliées soit aux valeurs aux points de la solution, soit aux coefficients de son développement sur une base donnée de fonctions.
Soit $\mathcal{L}$ l'endomorphisme sur $\mathcal{H}$, espace de Hilbert des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{H}$, telles que:

$$\mathcal{L}(f) = g \tag{1.23}$$

En supposant l'opérateur $\mathcal{L}$ suffisamment régulier, on résout (1.23) en calculant l'inverse $\mathcal{L}^{-1}$ de $\mathcal{L}$. La méthode des moments fournit alors une approximation de $\mathcal{L}^{-1}$ et donc de f.
Soient $\{f_n\}_{n=1,\infty}$ et $\{g_m\}_{n=1,\infty}$ deux bases complètes de $\mathcal{H}$.
En décomposant f sur f_n et en projetant l'équation (1.23) sur g_m, on obtient le système suivant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \mathcal{L}(f_n), g_m > = < g, g_m > , m = 1,,\infty \tag{1.24}$$

avec ¡.,.¿ le produit scalaire défini sur $\mathcal{H}$.
Ce système linéaire de rang infini, résoluble pour des cas particuliers de $\mathcal{L}$, est transformé en un système de rang fini en approchant f par f^N et en tronquant le système (1.24) au rang M (N et M finis). On obtient alors la relation matricielle suivante:

$$\mathbf{A}.X = \mathbf{B} \tag{1.25}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \mathbf{A} = \{A_{mn}\} = \{< \mathcal{L}(f_n), g_m >\} & m = 1,M; n = 1,N, \\ \mathbf{B} = \{B_m\} = \{< g, g_m >\} & m = 1,M, \\ X = \{X_n\} = \{\alpha_n^N\} & n = 1,N. \end{cases}$$

Pour A assez régulière, ce système de M équations à N inconnues est résoluble par les méthodes classiques (méthodes directes de type Gauss par exemple, méthodes itératives de type Gradient-Conjugué [82] pour M=N; moindres carrées pour M¿N). D'autres méthodes

adaptées à l'électromagnétisme (décomposition spatiale du problème [89948994], pseudo-inversion [32]) ont été récemment testées avec succès. Comme tous les problèmes matriciels rencontrés dans notre étude restent de petite taille, un algorithme de résolution directe de type Gauss-Jordan [56] est utilisé pour résoudre le système linéaire.
Les fonctions de base $\{f_n\}$ et $\{g_m\}$ (appelées fonctions de poids ou de projection) sont choisies afin de faciliter le calcul de la matrice $\mathbf{A}$, tout en représentant au mieux la fonction inconnue. Lorsque $\mathcal{L}$ et son adjoint portent sur le même domaine, on peut prendre $\{g_m\} = \{f_m\}$ (méthode de Galerkin).

III.2 Calcul du champ total à l'intérieur de l'objet

D'après la dépendance en champ total contenue dans la représentation intégrale du champ diffracté (1.22), on doit calculer, dans un premier temps, le champ total à l'intérieur de l'objet donné par:

$$\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) = \widetilde{E_z^I}(\vec{X},\omega) + \int_{\mathcal{D}_D} [k_D^2(\vec{X'},\omega) - k_3^2(\omega)]\widetilde{E_z}(\vec{X'},\omega)G(\vec{X},\vec{X'})d\vec{X'},$$
$$\forall \vec{X} \in \mathcal{D}_D,\ \forall\omega. \qquad (1.26)$$

Cette équation intégrale (ou équation de Fredholm de seconde espèce, car l'inconnue $\widetilde{E_z}$ apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale) est résolue pour chaque fréquence en utilisant la méthode des moments avec les notations:

$$f(\vec{X},\omega) = \widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) \quad , \quad g(\vec{X},\omega) = \widetilde{E_z^I}(\vec{X},\omega) \quad , \quad \mathcal{L} = \mathbb{I} - \mathcal{L}' \qquad (1.27)$$

où $\mathcal{L}' = \int_{\mathcal{D}_D} \left[k_D^2(\vec{X'},\omega) - k_3^2(\omega)\right] G(\vec{X},\vec{X'},\omega)d\vec{X'},\forall(\vec{X}) \in \mathcal{D}_D,\forall\omega$

et $\mathbb{I}$ l'opérateur identité.
Le choix des paramètres de discrétisation (maillage et fonctions de base) est important. En effet, un maillage en cellules triangulaires reste plus adapté aux différents types d'objets rencontrés. Cependant, nous nous limitons dans nos exemples à des objets de section rectangulaire. C'est pourquoi nous utilisons ici un maillage rectangulaire pour l'objet.
Si l'introduction de fonctions de base de type triangle a l'avantage de décrire de façon continue les grandeurs calculées, l'utilisation de fonctions de base de type rectangle simplifie les calculs d'intégrales et réduisent le temps d'exécution de l'algorithme.
L'étude des différents cas des paramètres de discrétisation ainsi que leur incidence sur les champs calculés est approfondie dans [32].
Pour tous les résultats contenus dans ce mémoire, le domaine étudié est donc décomposé en $N = N_x * N_y$ cellules élémentaires C_n d'aire $\Delta_x * \Delta_y$ sur lesquelles le champ total est supposé constant. Les fonctions de base sont choisies pour définir une méthode de collocation de type Point-Segment:

$$\begin{aligned} \{f_n(\vec{X},\omega)\} &= \begin{cases} 1, & \forall\vec{X} \in C_n \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \\ \{g_m(\vec{X},\omega)\} &= \delta(\vec{X} - \vec{X}_m) \end{aligned} \qquad (1.28)$$

En notant $\vec{X}_m = (x_m,y_m)$ le point d'observation et $\vec{X}_n = (x_n,y_n)$ le point courant dans l'objet, on obtient le système de N équations à N inconnues:

$$\boxed{\widetilde{E}_z^I(\vec{X}_m,\omega) = \sum_{n=1}^{N_x * N_y} \left\{\delta_{m,n} - \left[k_D^2(\vec{X}_n,\omega) - k_3^2(\omega)\right] G_{m,n}\right\} \widetilde{E}_z(\vec{X}_n,\omega) \quad ,\text{m=1,N}; \forall\omega} \tag{1.29}$$

avec $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{si } \vec{X}_m = \vec{X}_n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, et $G_{m,n} = \int_{C_n} G(\vec{X}_m,\vec{X}_n,\omega)d\vec{X}_n$, $\forall\, \omega$.

La fonction de Green d'un milieu stratifié peut être décomposée en deux termes: un terme singulier correspondant à la fonction de Green de l'espace libre et un terme non singulier correspondant aux couches proprement dites. Une expression approchée de la fonction de Green de l'espace libre intégrée sur la cellule peut être obtenue analytiquement en approximant chaque cellule rectangulaire par un cercle de rayon r. L'expression de $G_{m,n}$ est alors complétée par le terme non singulier sous forme d'une transformée de Fourier 1D.
Après calcul, on a [18]:

$$\begin{aligned} G_{m,n} = & \left\{\frac{j\pi}{2k_3}[rH_1^{(1)}(rk_3) + \frac{j\pi}{2k_3}]\right\} \delta_{m,n} + \left\{\frac{j\pi r}{2k_3} H_0^{(1)}(d_{mn}k_3)J_1(rk_3)\right\}(1 - \delta_{m,n}) \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\chi_m(\nu)\frac{2}{\pi\nu\widetilde{\gamma}_3} sin(\frac{\widetilde{\gamma}_3\Delta_y}{2}) sin(\pi\nu\Delta_x) e^{j\widetilde{\gamma}_3 y_n}\right\} \; e^{-2j\pi\nu x_n} d\nu \end{aligned} \tag{1.30}$$

où $\chi_m(\nu) = \dfrac{j(K_{32} + K_{21}e^{2j\widetilde{\gamma}_2 h})}{2\widetilde{\gamma}_3(1 + K_{32}K_{21}e^{2j\widetilde{\gamma}_2 h})} e^{-2j\widetilde{\gamma}_3 h} e^{j\widetilde{\gamma}_3 y_m} e^{2j\pi\nu x_m}$, $d_{mn} = \|\overrightarrow{X_m X_n}\|$

(K_{32},K_{21} définis en Annexe A.)

On note: $\begin{cases} H_0^{(1)} \text{ la fonction de Hankel d'ordre 0 et de première espèce} \\ H_1^{(1)} \text{ la fonction de Hankel d'ordre 1 et de première espèce} \\ J_1 \text{ la fonction de Bessel d' ordre 1 et de première espèce} \end{cases}$

La définition de ces fonctions ainsi que leur expression intégrale sont présentées dans de nombreux ouvrages ([67] par exemple).

Remarque:
On retrouve bien le système matriciel (1.25) à inverser avec:

$$\begin{array}{ll} A = \{\delta_{m,n} - [k_D^2(\vec{X}_n,\omega) - k_3^2(\omega)]G_{m,n}\} & m = 1,N; n = 1,N \\ B = \{\widetilde{E}_z^I(\vec{X}_m,\omega)\} & m = 1,N \\ X = \{\widetilde{E}_z(\vec{X}_n,\omega)\} & n = 1,N \end{array} \tag{1.31}$$

III.3 Calcul du champ diffracté à l'extérieur de l'objet

La connaissance du champ total à l'intérieur de l'objet permet de calculer ce champ dans tout l'espace et de parvenir à l'expression du champ diffracté sur L_1 en utilisant la formule

(1.22).
Avec les notations précédentes, on peut écrire le champ diffracté sous forme discrète à l'extérieur de l'objet sur la ligne de mesure L_1 pour une hauteur y_1:

$$\boxed{\widetilde{E_z^D}(\vec{X_m},\omega) = \sum_{n=1}^{N_x * N_y} \left[k_D^2(\vec{X_n},\omega) - k_3^2(\omega)\right] \widetilde{E_z}(\vec{X_n},\omega) G_n^m \\ ,\forall \vec{X_m} \in L_1 \, , \forall \omega.} \tag{1.32}$$

avec

$$G_n^m = \int_{C_n} G(\vec{X_m},\vec{X_n},\omega) d\vec{X_n}, \ \forall \vec{X_m} \in L_1 \, , \forall \, \omega.$$

Après calcul, il vient [19671967]:

$$G_n^m = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \Theta^m(\nu) \frac{2}{\pi\nu\widetilde{\gamma}_3} sin(\frac{\widetilde{\gamma}_3 \Delta_y}{2}) sin(\pi\nu\Delta_x) e^{j\widetilde{\gamma}_3 y_n} \right\} \, e^{-2j\pi\nu x_n} d\nu \tag{1.33}$$

$$\text{où } \Theta^m(\nu) = \frac{j L_{21} e^{2j(\widetilde{\gamma}_2 - \widetilde{\gamma}_3)h}}{(\widetilde{\gamma}_2 + \widetilde{\gamma}_3)(1 + K_{32} K_{21} e^{2j\widetilde{\gamma}_2 h})} e^{-j\widetilde{\gamma}_1 y_1} e^{2j\pi\nu x_m} \tag{1.34}$$

(K_{21},K_{32},L_{21} définis en Annexe A.)

III.4 Résultats des simulations

L'équation (1.32) résolue numériquement, il reste à démontrer la convergence de l'algorithme utilisé et donc à trouver un pas d'échantillonnage Δ limitant l'erreur sur les champs calculés. Ce pas de discrétisation dont dépend la convergence est étroitement lié aux diverses approximations utilisées (champ constant sur chaque cellule, cellule approchée par un cercle pour l'intégration de la fonction de Green singulière,...).
Plusieurs études ont permis de mieux connaître l'influence du pas spatial sur le calcul du champ diffracté à l'aide de la méthode définie précédemment.
L'approche qualitative entreprise dans [18] montre qu'un pas proche de $\frac{\lambda_3}{2}$ (si λ_3 est la longueur d'onde dans le domaine $\mathcal{D}_3$) est suffisant pour une imagerie qualitative. Un tel pas n'est cependant pas généralisable à tout type d'objet. Ainsi, pour un objet diélectrique pur ($\varepsilon_{r_D} = 3$; $\sigma_D = 0 \, S.m^{-1}$) carré de côté variable (Tab. 1.1) enterré à 30 cm de profondeur dans un sable sec ($\varepsilon_{r_3} = 2{,}55$; $\sigma_3 = 4.10^{-3} \, S.m^{-1}$), le module du champ diffracté calculé à 10 cm du sol ne varie plus (forme et maximum) à partir d'un pas proche de $\frac{\lambda_3}{\pi}$ (Fig. 1.2). Ce critère semble mieux adapté aux objets rencontrés dans notre étude [37]. Cependant, pour un objet métallique ($\sigma = 10^7 \, S.m^{-1}$) de même dimension que l'objet 2, le critère défini dans [18] est vérifié (Fig. 1.3).

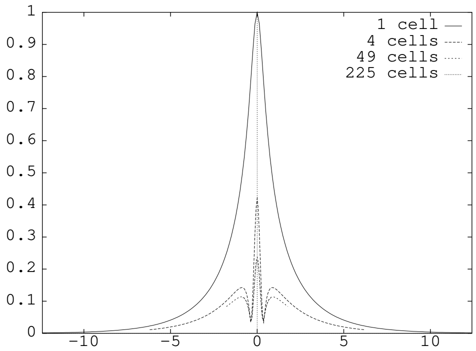
Cellules	**Objet 1**	**Objet 2**	**Objet 3**
1	$\dfrac{2\lambda_3}{\pi}$	$\dfrac{\lambda_3}{2}$	$\dfrac{\lambda_3}{\pi}$
4	$\dfrac{\lambda_3}{\pi}$	$\dfrac{\lambda_3}{4}$	$\dfrac{\lambda_3}{2\pi}$
49	$\dfrac{2\lambda_3}{7\pi}$	$\dfrac{\lambda_3}{14}$	$\dfrac{\lambda_3}{7\pi}$
225	$\dfrac{2\lambda_3}{15\pi}$	$\dfrac{\lambda_3}{30}$	$\dfrac{\lambda_3}{15\pi}$

TAB. 1.1 – *Valeurs du pas Δ pour 3 objets de taille différente*

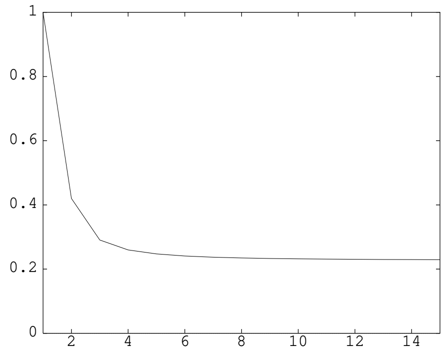
Pour une approche quantitative, le besoin de connaître le champ électrique à l'intérieur de l'objet de manière précise conduit à utiliser un critère de discrétisation plus contraignant. L'étude entreprise dans [81] montre qu'une erreur de l'ordre de 2 $\%$ sur le champ calculé est obtenue avec un pas spatial $\Delta \leq \dfrac{\lambda_3}{5\sqrt{\varepsilon_{r_D}}}$.

Pour ces raisons, on fixe le pas d'échantillonnage du problème direct successivement à

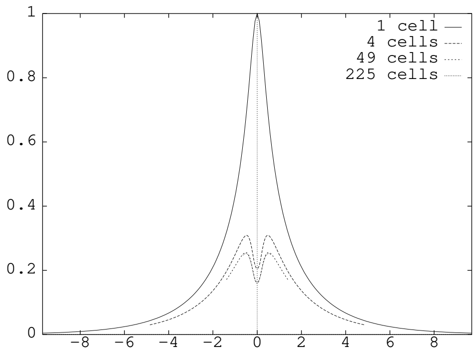
- $\Delta = \dfrac{\boldsymbol{\lambda_3}}{\pi}$ dans le cas d'une imagerie qualitative
- $\Delta = \dfrac{\boldsymbol{\lambda_3}}{\mathbf{5}\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon_{r_D}}}}$ dans le cas d'une imagerie quantitative



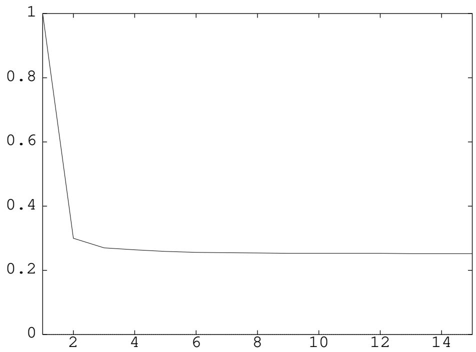
(a) Variation du module normalisé



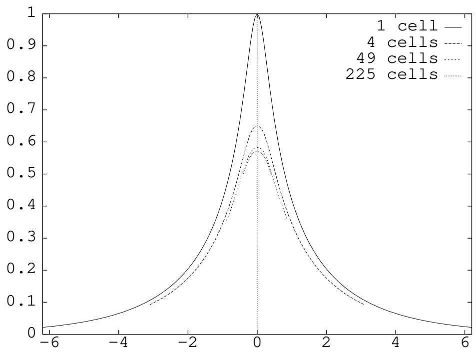
(b) Variation du maximum normalisé



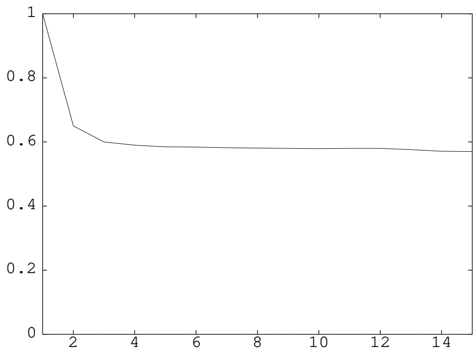
(c) Variation du module normalisé



(d) Variation du maximum normalisé

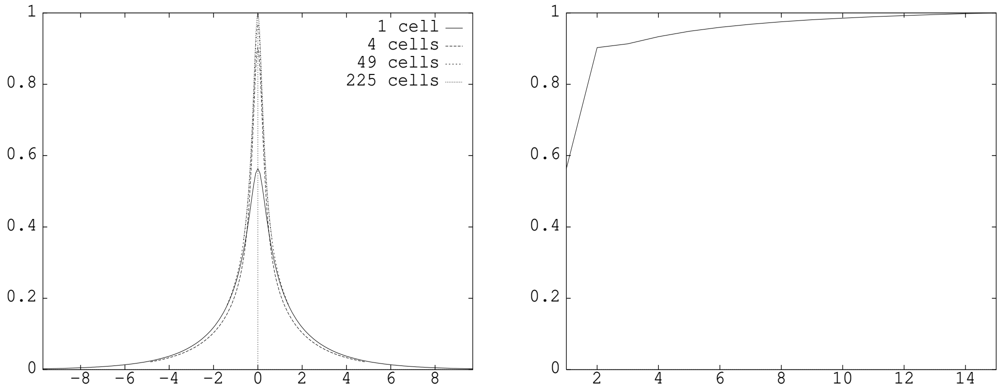


(e) Variation du module normalisé



(f) Variation du maximum normalisé

FIG. 1.2 – *Variations du champ diffracté calculé dans $\mathcal{D}_1$ en fonction du pas Δ pour un objet diélectrique carré de côté $\frac{2\lambda_3}{\pi}$ (a,b), $\frac{\lambda_3}{2}$ (c,d), $\frac{\lambda_3}{\pi}$ (e,f)*



(a) Variation du module normalisé

(b) Variation du maximum normalisé

FIG. 1.3 – *Variations du champ diffracté calculé dans $\mathcal{D}_1$ en fonction du pas Δ pour un objet métallique carré de côté $\frac{\lambda_3}{2}$*

Première partie

IMAGERIE QUALITATIVE

Introduction

L'utilisation des propriétés lectromagntiques des milieux physiques pour reconstruire des images d'objets a conduit depuis longtemps au dveloppement de mthodes diverses. La plupart de ces mthodes ne prennent pas en compte le phnomne de diffraction qui apparat lors de l'interaction entre un champ lectromagntique et un milieu inhomogne. Cependant, dans le domaine des microondes, o les effets de la diffraction sont importants, on ne peut pas ngliger ce paramtre sans risquer de dgrader l'image rsultante.
La technique prsente ici repose sur le principe de la tomographie par diffraction qui gnralise au cas de la diffraction le concept de la tomographie classique.
Le principe de tomographie (image en coupe) utilise le thorme des projections de Radon [58], qui relie sur une ligne du domaine de Fourier la transforme de Fourier spatiale 1D du champ mesur la transforme de Fourier spatiale 2D de la fonction dcrivant l'objet. Appliqu dans le domaine de l'imagerie en transmission, o metteur et rcepteur se trouvent de part et d'autre de l'objet, ce principe conduit la reconstruction de l'indice de rfraction ou du facteur d'attnuation l'intrieur de la zone tudie partir de la mesure du champ lectromagntique monochromatique. Cette technique est appliqu avec succs dans le domaine mdical (tomographie assite par ordinateur).
La configuration du problme (objet enterr) couple la ncessit d'un sondage non destructif a conduit l'extension de cette mthode au cas de la diffraction (imagerie en rflexion) [26][19][18][85][10][6]. Le principe utilis, qui gnralise le thorme de Radon (thorme de Radon gnralis ou thorme de Diffraction par Fourier [2]), relie linéairement les deux transformes de Fourier prcdentes sur un arc de cercle du domaine spectral. La limitation de l'information spatiale (pas de possibilité d'entourer l'objet) restreint le remplissage du domaine de Fourier. Afin d'augmenter le nombre de données accessibles, une variation de la fréquence et de l'incidence du champ incident est proposée. Ainsi, cette mthode de tomographie par diffraction, ou imagerie microonde active, est liée à la reconstruction des courants de polarisation, ou courants induits dans l'objet, partir du champ diffract par l'objet mesur dans l'air. Cette information conduit une reconstruction qualitative de l'objet enterr (localisation et description gomtrique).
On se propose d'tendre cette technique de tomographie par diffraction, explicite dans le cadre d'un formalisme de type onde plane qui reste peu réaliste dans le domaine pratique, au cas d'une onde incidente de dpendance spatio-temporelle arbitraire [74][75][29][30]. La variation d'incidence est alors remplace par une variation des positions des sources du champ incident. Puis, aprs une analyse paramtrique de la mthode mettant en valeur la prise en compte de l'onde incidente dans le processus d'imagerie, une comparaison modle/exprience est prsente en vue d'une validation des algorithmes d'imagerie.

Chapitre 2

Résolution du problème inverse

Sommaire

Le problème inverse se limite donc dans cette partie à retrouver une certaine information sur l'objet enterré liée aux courants induits J dans l'objet, eux mêmes linéairement dépendants du champ diffracté dans le milieu $\mathcal{D}_1$. La résolution du problème passe par une phase d'acquisition des données (synthétiques ou expérimentales) puis par un traitement approprié (méthode spectrale).
On cherche dans un premier à expliciter la relation entre les courants et le champ diffracté permettant de définir la méthode d'imagerie. Puis, on s'intéresse ensuite aux conditions d'existence de cette relation dans le domaine de Fourier, ainsi qu'aux différents moyens de remplissage du domaine d'information. Enfin, les différentes étapes de l'algorithme de reconstruction sont brièvement décrites.

I Relation spectrale

La ligne d'émission et la ligne de mesure sont confondues (L_1) (Fig. 2.1). Pour chaque position de la source (x_S,y_1) dans le domaine $\mathcal{D}_1$, un champ incident $\widetilde{E}_z^I$ induit des courants J sur la surface ou à l'intérieur de l'objet enterré à la profondeur D. Ces courants rayonnent un champ diffracté $\widetilde{E}_z^D$, mesuré sur L_1 pour toutes les positions d'émetteurs (x,y_1).

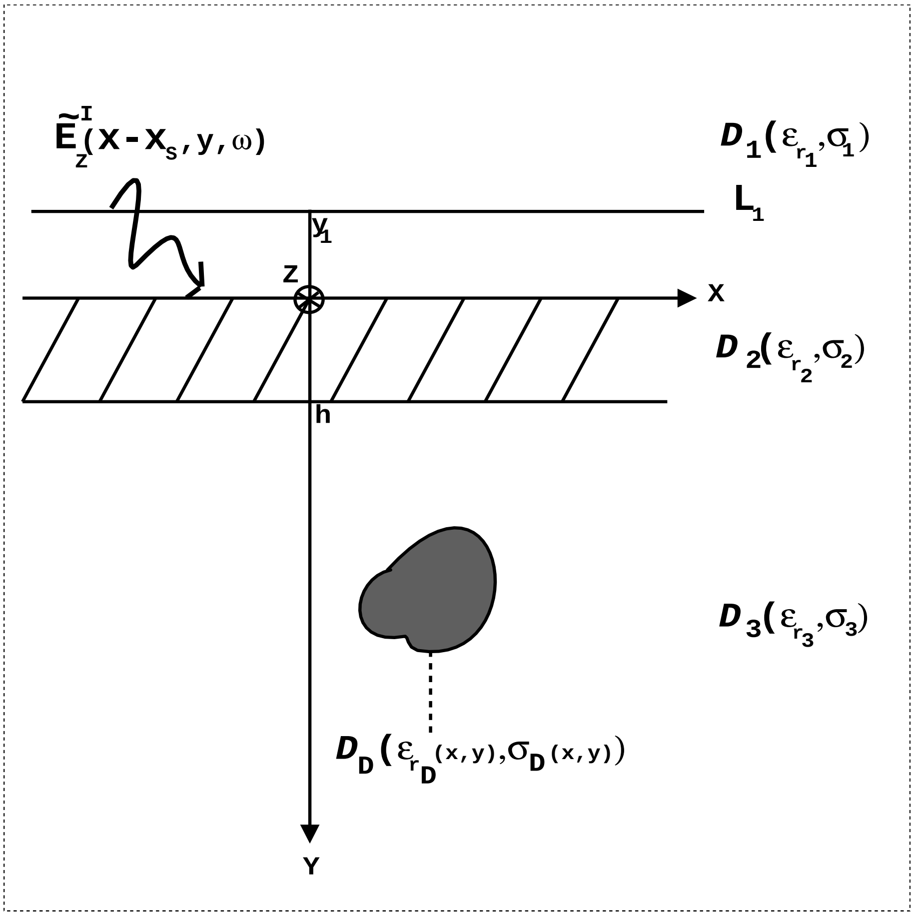


FIG. 2.1 – *Géométrie du problème*

D'après les équations (1.22) et (2.2), le champ diffracté sur L_1 peut s'écrire:

$$\widetilde{E}_z^D(x,y_1,x_S,\omega)=\int_{\mathcal{D}_D} k_3^2(\omega)\widetilde{E}_z^I(x'-x_S,y',\omega)K(x',y',x_S,\omega)G(x,y_1,x',y',\omega)dx'dy' \quad (2.1)$$

avec les courants de polarisation normalisés K définis par:

$$K(x,y,x_S,\omega)=\frac{J(x,y,x_S,\omega)}{k_3^2(\omega)\widetilde{E}_z^I(x-x_S,y,\omega)}=\left\{\frac{k_D^2(x,y,\omega)}{k_3^2(\omega)}-1\right\}\left\{1+\frac{\widetilde{E}_z^D(x,y,x_S,\omega)}{\widetilde{E}_z^I(x-x_S,y,\omega)}\right\} \quad (2.2)$$

en fonction des courants

$$J(x,y,x_S,\omega)=[k_D^2(x,y,\omega)-k_3^2(\omega)]\widetilde{E_z}(x,y,x_S,\omega) \quad (2.3)$$

On cherche donc à relier les courants de polarisation normalisés aux valeurs du champ diffracté mesuré.

- Le champ incident est exprimé à l'aide d'une tranformée de Fourier (B)

$$\widetilde{E}_z^I(x'-x_S,y',\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\widetilde{E}}_z^I(\eta',y',\omega)e^{2j\pi\eta'(x'-x_s)}d\eta' \quad (2.4)$$

où

$$\hat{\widetilde{E}}_z^I(\eta',y',\omega)=A_1(\eta',\omega)T_\perp(\eta',\omega)e^{j\gamma_3(\eta')y'},\ \forall y'\geq 0,\ \forall\omega \quad (2.5)$$

Le terme $A_1(\eta',\omega)$ représente la transformée de Fourier spatiale 2D du champ incident $\widetilde{E}_z^I$ calculé en $y=0$ dans le cas particulier où $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2=\mathcal{D}_3$:

$$A_1(\eta',\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{E_z^{I_0}}(x'-x_s,0,\omega)e^{-2j\pi\eta'(x'-x_s)}d(x'-x_S) \quad (2.6)$$

On note $T_\perp(\eta',\omega)=\dfrac{L_{12}(\eta')L_{23}(\eta')e^{j\gamma_2(\eta')h}e^{-j\gamma_3(\eta')h}}{1+K_{12}(\eta')K_{23}(\eta')e^{2j\gamma_2(\eta')h}}$, $L_{ip}(\eta')=\dfrac{2\gamma_i(\eta')}{\gamma_i(\eta')+\gamma_p(\eta')}$,

$K_{ip}(\eta')=\dfrac{\gamma_i(\eta')-\gamma_p(\eta')}{\gamma_i(\eta')+\gamma_p(\eta')}$ avec $\gamma_i(\eta')=\sqrt{k_i^2-4\pi^2\eta'^2}$ pour i=1,2,3

- La fonction de Green est aussi définie à l'aide d'une transformée de Fourier (A)

$$G(x,y,x',y',\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\nu',y,x',y',\omega)e^{2j\pi\nu' x}d\nu' \quad (2.7)$$

avec en particulier

$$g(\nu',y_1,x',y',\omega)=\Theta(\nu',\omega)e^{-j\gamma_1(\nu')y_1}e^{j\gamma_3(\nu')y'}e^{-2j\pi\nu' x'} \quad (2.8)$$

On note $\Theta(\nu',\omega)=\dfrac{jL_{21}(\nu')e^{j(\gamma_2(\nu')-\gamma_3(\nu'))h}}{(\gamma_2(\nu')+\gamma_3(\nu'))(1+K_{21}(\nu')K_{32}(\nu')e^{2j\gamma_2(\nu')h})}$, et $L_{ip}(\nu')=\dfrac{2\gamma_i(\nu')}{\gamma_i(\nu')+\gamma_p(\nu')}$, $K_{ip}=\dfrac{\gamma_i(\nu')-\gamma_p(\nu')}{\gamma_i(\nu')+\gamma_p(\nu')}$, avec $\gamma_i(\nu') = \sqrt{k_i^2 - 4\pi^2\nu'^2}$ pour i=1,2,3

En introduisant toutes les notations définies précédemment, on obtient:

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_z^D(x,y_1,x_S,\omega) = \int_{\mathcal{D}_D} \Big\{ k_3^2(\omega)\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\eta',\omega)T_\perp(\eta',\omega)e^{j\gamma_3(\eta')y'}e^{2j\pi\eta'(x'-x_s)}d\eta'\Big] \\ \Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\Theta(\nu',\omega)e^{-j\gamma_1(\nu')y_1}e^{j\gamma_3(\nu')y'}e^{2j\pi\nu'(x-x')}d\nu'\Big] K(x',y',x_S,\omega)\Big\}\, dx'dy' \quad (2.9)\end{aligned}$$

En remarquant que $\mathcal{D}_D$ est le support de K, on peut passer à une intégration sur $\mathbb{R}^2$ et on obtient:

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_z^D(x,y_1,x_S,\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big\{ k_3^2(\omega)A_1(\eta',\omega)T_\perp(\eta',\omega)\Theta(\nu',\omega)e^{-j\gamma_1(\nu')y_1} \\ \Big[\int_{\mathbb{R}^2} e^{j(\gamma_3(\nu')+\gamma_3(\eta'))y'}e^{-2j\pi(\nu'-\eta')x'}K(x',y',x_S,\omega)dx'dy'\Big] e^{2j\pi(\nu'x-\eta'x_s)}\Big\}\, d\nu'd\eta' \quad (2.10)\end{aligned}$$

On définit la transformée de Fourier spatiale 2D des courants

$$\widehat{K}(\alpha,\beta,x_S,\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x,y,x_S,\omega)e^{-2j\pi(\alpha x+\beta y)}dxdy \quad (2.11)$$

et la transformée de Fourier spatiale 2D du champ diffracté sur L_1

$$\widehat{\widetilde{E}}_z^D(\nu,y_1,\eta,\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{E}_z^D(x,x_S,y_1,\omega)e^{-2j\pi(\nu x-\eta x_S)}dxdx_S. \quad (2.12)$$

L'équation (2.10) s'écrit alors sous la forme:

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_z^D(\nu,y_1,\eta,\omega) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Big\{ k_3^2(\omega)A_1(\eta',\omega)T_\perp(\eta',\omega)\Theta(\nu',\omega)e^{-j\gamma_1(\nu')y_1} \\ \Big[\int_{\mathbb{R}} \widehat{K}(\nu'-\eta',\frac{-1}{2\pi}(\gamma_3(\nu')+\gamma_3(\eta')),x_S,\omega)e^{2j\pi(\eta-\eta')x_s}dx_S\Big]\int_{\mathbb{R}} e^{2j\pi(\nu'-\nu)x}dx\Big\}\, d\nu'd\eta' \\ (2.13)\end{aligned}$$

En calculant les intgrales suivant x et ν', on peut crire:

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_z^D(\nu,y_1,\eta,\omega) = k_3^2(\omega)\Theta(\nu,\omega)e^{-j\gamma_1(\nu)y_1}. \\ \int_{\mathbb{R}}\Big[\int_{\mathbb{R}} \widehat{K}(\nu-\eta',\frac{-1}{2\pi}(\gamma_3(\nu)+\gamma_3(\eta')),x_S,\omega)e^{2j\pi(\eta-\eta')x_s}dx_S\Big] A_1(\eta',\omega)T_\perp(\eta',\omega)d\eta' \quad (2.14)\end{aligned}$$

On fait ici l'hypothèse simplificatrice que les courants K sont indpendants de la position de la source. Leur valeur en tout point source est alors ramene la valeur en $x_S = 0$. Cette hypothèse esr parfaitement vérifiée lorsque l'on se trouve dans le domaine de validité de l'approximation de Born (objet faiblement diffractant ce qui autorise à remplacer le champ total dans l'objet par le champ incident). Nous ne nous limitons pas dans notre étude au domaine de l'approximation de Born trop contraignante. On préfère donc utiliser l'hypothèse, plus générale, sur les courants qui permet de simplifier considérablement l'équation (2.14). Cette approximation, difficilement justifiable théoriquement, dépend à la fois des caractéristiques

diélectriques de l'objet étudié, du champ incident utilisé et des paramètres de l'étude (profondeur de l'objet, hauteur de la ligne de mesure...). Les reconstructions proposées dans les chapitres suivants témoignent de la validité de cette hypothèse au moins dans le cadre d'une approche qualitative pour une étude en champ relativement proche.
Utilisant l'hypothèse sur les courants, on peut transformer (2.14) en

$$\widetilde{E}_z^D(\nu,y_1,\eta,\omega) = k_3^2(\omega)\Theta(\nu,\omega)e^{-j\gamma_1(\nu)y_1}$$
$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{K}(\nu-\eta',\frac{-1}{2\pi}(\gamma_3(\nu)+\gamma_3(\eta')),0,\omega)A_1(\eta',\omega)T_\perp(\eta',\omega)\left[\int_{\mathbb{R}} e^{2j\pi(\eta-\eta')x_s}dx_S\right]d\eta' \quad (2.15)$$

En calculant les dernires intgrales suivant η' et x_S, on obtient finalement

$$\widehat{\widetilde{E}}_z^D(\nu,\eta,y_1,\omega) = \left[k_3^2(\omega)A_1(\eta,\omega)T_\perp(\eta,\omega)\Theta(\nu,\omega)e^{-j\gamma_1(\nu)y_1}\right]$$
$$\widehat{K}\left(\nu-\eta,\frac{-1}{2\pi}(\gamma_3(\nu)+\gamma_3(\eta)),0,\omega\right) \quad (2.16)$$

D'où la relation dans le plan de Fourier cherchée:

$$\boxed{\widehat{K}\left(\nu-\eta,\frac{-1}{2\pi}(\gamma_3(\nu)+\gamma_3(\eta)),0,\omega\right)=\frac{e^{j\gamma_1(\nu)y_1}}{k_3^2(\omega)A_1(\eta,\omega)T_\perp(\eta,\omega)\Theta(\nu,\omega)}\widehat{\widetilde{E}}_z^D(\nu,\eta,y_1,\omega)} \quad (2.17)$$

Cette équation définit une transformation linéaire qui permet de retrouver l'information qualitative sur l'objet (courants). Les données nécessaires à l'utilisation de cette relation sont:
- le champ diffracté $\widetilde{E}_z^D$
- la hauteur de la ligne de mesure y_1
- les caractéristiques électromagnétiques des milieux de propagation
- le champ incident $\widetilde{E}_z^I$

Pour les champs diffracté et incident, ils peuvent être mesurés tant dans le domaine temporel (radar impusionnel) que dans le domaine fréquentiel (radar synthétique). L'algorithme d'imagerie prend en compte cette possibilité: une transformée de Fourier adéquate permet de retrouver toutes les données dans le domaine spectral.
Les valeurs de la transformée des courants calculées pour une position de source et une fréquence données sont ensuite sommées dans le domaine spectral. La carte des courants de polarisation normalisés est enfin produite à l'aide d'une transformée de Fourier spatiale 2D inverse.

Remarque:

On peut rapprocher cette relation avec celle définie pour le cas d'une onde plane (code "plan" [19][18]). La principale différence provient de l'apparition du facteur $A_1(\eta,\omega)$ dans la formule (2.17). Ce terme, qui résulte du calcul de la transformée de Fourier spatiale et temporelle du champ incident, n'est autre qu'un poids associé à chaque fréquence spatiale et temporelle permettant la prise en compte du champ incident dans le processus de reconstruction. Ce facteur est pris égal à 1 dans l'algorithme onde plane (toutes les fréquences ont le même poids).

Une autre différence fondamentale se trouve dans la méthode d'acquisition du champ diffracté: celui-ci est mesuré pour chaque position de la source x_S (localisation spatiale). Ainsi, contrairement au cas onde-plane, une transformée de Fourier 2D (suivant x et x_S) est utilisée ici pour permettre de retrouver l'image de l'objet.

II Validité

L'équation du problème inverse (2.17) met en relation deux transformées de Fourier. Or, pour utiliser des transformées définies de façon usuelle, il est nécessaire de travailler avec des variables réelles (ceci est valable pour le problème direct en ce qui concerne le calcul du champ incident ou des fonctions de Green). Les variables spectrales doivent satisfaire le système:

$$\begin{cases} \nu \in \mathbb{R} \\ \eta \in \mathbb{R} \\ \alpha(\nu,\eta) = \nu - \eta \in \mathbb{R} \\ \beta(\nu,\eta) = \dfrac{-1}{2\pi}(\gamma_3(\nu) + \gamma_3(\eta)) \in \mathbb{R} \end{cases} , \forall\omega \tag{2.18}$$

Si les trois premières conditions ne posent aucun problème majeur, la dernière n'est généralement pas vérifiée.
En effet, le milieu $\mathcal{D}_3$ est considéré dans notre étude comme un milieu à pertes (k_3, $\gamma_3(\nu)$ et $\gamma_3(\eta)$ sont complexes). Afin de pouvoir vérifier la dernière condition, une solution consiste à n'utiliser dans le processus de reconstruction que la partie réelle de k_3. Physiquement, cela revient à négliger une partie des pertes dans le milieu $\mathcal{D}_3$. L'étude complète de milieux à pertes est cependant envisageable, moyennant l'utilisation de transformées de Laplace ou de transformées de Fourier dans le plan complexe. La difficulté réside dans le passage des champs à fréquences réelles aux champs à fréquences complexes [24].
D'après la définition des variables $\gamma_3(\nu)$ et $\gamma_3(\eta)$ caractérisant le milieu $\mathcal{D}_3$ étudié, la quatrième condition de (2.18) sera vérifiée $\forall\omega$ pour:

$$|\eta| \leq \frac{\mathcal{R}e(k_3)}{2\pi} \text{ et } |\nu| \leq \frac{\mathcal{R}e(k_3)}{2\pi}, \text{ avec } \nu \text{ et } \eta \text{ réels.} \tag{2.19}$$

Une autre condition sur ν et η provient de l'étape de discrétisation (ou échantillonnage) relative au calcul des champs et des transformées de Fourier sous forme discrète. Le théorème de Shannon, fondamental en ce qui concerne le traitement numérique du signal, indique le pas d'échantillonnage maximal Δ_e pour un signal dont le spectre est à support compact I tel que $I \subset [-\frac{1}{\Delta}; \frac{1}{\Delta}]$. Pour notre cas d'étude, la limite de $\Delta = \frac{\lambda_1}{2}$ revient à supposer que le spectre du champ diffracté a pour support compact $[\frac{-\mathcal{R}e(k_1)}{2\pi}; \frac{\mathcal{R}e(k_1)}{2\pi}]$. Physiquement, on néglige donc le spectre des ondes évanescentes ($\nu,\eta > \pm\frac{\mathcal{R}e(k_1)}{2\pi}$).

L'ensemble de ces conditions impose aux variables spectrales ν et η d'appartenir au domaine de variation

$$\nu,\eta \in \left[-\frac{\mathcal{R}e(k_1)}{2\pi}; \frac{\mathcal{R}e(k_1)}{2\pi}\right] = \left[-\frac{1}{\lambda_1}; \frac{1}{\lambda_1}\right]. \tag{2.20}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\alpha = \alpha(\nu,\eta) &\in \left[-\frac{2}{\lambda_1};\frac{2}{\lambda_1}\right] \\
\beta = \beta(\nu,\eta) &\in \left[-\frac{2}{\lambda_3};-2\sqrt{\frac{1}{\lambda_3^2}-\frac{1}{\lambda_1^2}}\right]
\end{aligned} \qquad (2.21)$$

En théorie, il est possible de prendre en compte les ondes évanescentes. Cependant, la variable $\gamma_1(\nu)$ devient alors imaginaire pur entraînant des valeurs importantes $e^{j\gamma_1(\nu)y_1}$ quand ν tend vers l'infini. Les valeurs de $\widehat{K}$ associées à ces ondes deviennent rapidement non significatives du point de vue numérique, compromettant ainsi leur utilisation avec des données synthétiques, à fortiori avec des données expérimentales.

III Reconstruction dans le plan de Fourier

L'expression (2.17) relie donc la transformée de Fourier à deux dimensions des courants de polarisation normalisés K à la transformée de Fourier à deux dimensions du champ diffracté $\widetilde{E}_z^D$ pris sur une ligne de mesure L_1 dans le domaine $\mathcal{D}_1$. On se place dans les conditions de validité définies par l'équation (2.20). Alors, dans le repère (O,α,β) avec $\alpha = \nu - \eta$ et $\beta = \dfrac{-1}{2\pi}(\gamma_3(\nu) + \gamma_3(\eta))$, le domaine décrit par les variables α et β, en fonction des variables spectrales est représenté par la famille d'arcs de cercle d'équation:

$$\boxed{(\alpha+\eta)^2 + (\beta + \frac{\gamma_3(\eta)}{2\pi})^2 = (\frac{\mathcal{R}e(k_3)}{2\pi})^2} \qquad (2.22)$$

Ainsi, avec ν et η vérifiant les conditions (2.20), la transformée de Fourier du champ diffracté fournit des informations sur la transformée de Fourier des courants sur un arc de cercle du domaine spectral. Ce résultat est semblable à celui donné par le théorème de Radon généralisé dans le cadre de l'imagerie par rayons X où le lieu de l'information spectrale est une droite. A chaque fréquence temporelle et spatiale correspond un arc de cercle de centre $\Omega_{\eta,\omega} : (-\eta; -\dfrac{\gamma_3(\eta)}{2\pi})$ et de rayon $r = \dfrac{\mathcal{R}e(k_3(\omega))}{2\pi}$.
Le domaine sur lequel varie les variables est représenté sur la figure 2.2.

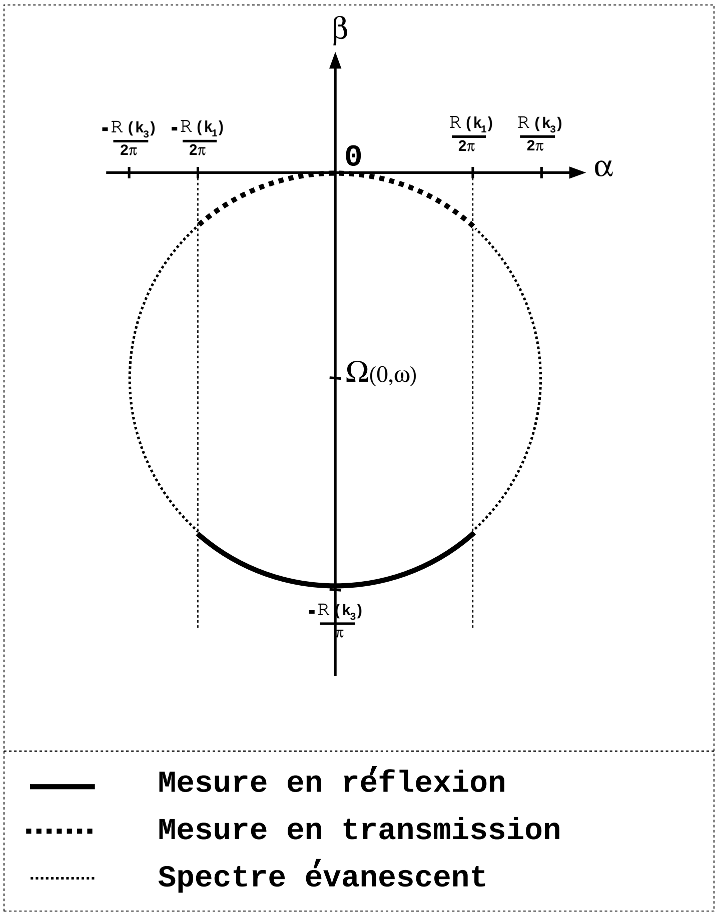


FIG. 2.2 – *Support de $\widehat{K}$ pour une fréquence en $\eta = 0$*

On y distingue les deux différents cas de mesure (transmission et réflexion) dictés par l'équation (2.22). Cependant, d'après le cas d'étude souhaité (auscultation du sous-sol), seul le cas de la réflexion peut être traité ici. La transformée de Fourier 2D des courants de polarisation est donc connue le long d'arcs de cercle dépendant des variables spectrales ν et η correspondant au domaine spatial et ω correspondant au domaine temporel. La donnée d'un seul arc de cercle ne suffit pas pour pouvoir donner une image convenable de l'objet; de plus, l'utilisation de transformées de Fourier temporelles et spatiales nécessite un nombre assez conséquent d'échantillons donc de points de mesure. Cela amène directement à la discussion sur le remplissage du domaine spectral à l'aide d'une variation de positions de la source et d'une variation de fréquence.

III.1 Variation de positions de source

Pour les études en onde planes une variation de l'angle d'incidence dans le milieu $\mathcal{D}_1$ est l'un des moyens pour remplir le domaine spectral ou du moins pour augmenter l'information. Dans le cadre de l'imagerie en transmission, une rotation du dispositif de mesure autour de l'objet assure avec cette variation d'incidence (θ_1 varie de 0 à 2π) un bon remplissage du domaine spectral [31]. La configuration particulière du problème traité dans cette partie ne rend pas possible une telle rotation. Néanmoins, on peut concevoir un système physique où l'angle varierait dans $\mathcal{D}_1$ de $\frac{-\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ [18]. Cette variation d'incidence peut être appliquée à tout type d'onde. En effet, comme le montrent les coordonnées des centres des cercles où varient α et β, une variation de la variable η conduit à un déplacement du centre des cercles le long de l'axe α, le rayon restant inchangé. En fait, si pour une valeur de η, le support de $\widehat{K}$ est un arc de cercle, la variation en η crée d'autres arcs de cercle ayant tous la même équation dans un repère $(O,\alpha_\eta,\beta_\eta)$ variant avec η (Fig. 2.3). Une variation de la variable spectrale correspond donc à un déplacement des centres le long de l'axe α des différents arcs de cercle représenté par:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\frac{\mathcal{R}e(k_3)}{2\pi})^2 \tag{2.23}$$

équation d'un cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $r = \frac{\mathcal{R}e(k_3)}{2\pi}$, avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \alpha \in \left[\dfrac{-\mathcal{R}e(k_1)}{\pi}; \dfrac{\mathcal{R}e(k_1)}{\pi}\right] \\ \beta \in \left[\dfrac{-\mathcal{R}e(k_3)}{\pi}; -\dfrac{1}{\pi}\sqrt{[\mathcal{R}e(k_3)]^2 - [\mathcal{R}e(k_1)]^2}\right] \end{cases} \tag{2.24}$$

Comme η est directement lié à $\vec{X}_S$ (variable de Fourier duale), la variation dans le domaine spectral se traduit par une variation de la position de la source sur L_1. Cette technique permet ainsi de remplir une partie du plan spectral. Mais, contrairement au cas de la variation d'incidence où N incidences de l'onde plane entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ créent N arcs de cercle distincts dans le plan spectral, la variation de N positions de source ne permettent pas en général la création des N arcs de cercle correspondants. En effet, sur N positions de source, seuls M points du domaine spectral (M¡N) satisfont la condition (2.20), alors que la variation d'incidence de l'onde plane satisfait toujours cette condition, en notant $\eta = \frac{\mathcal{R}e(k_1)}{2\pi} sin(\theta_1)$, avec θ_1 l'angle de rotation du repère (O,α,β) correspondant à la variation d'incidence (code "plan").
Cependant, il est toujours possible de trouver un nombre N de positions de points sources permettant d'obtenir un nombre M équivalent de variations d'incidence du code "plan".

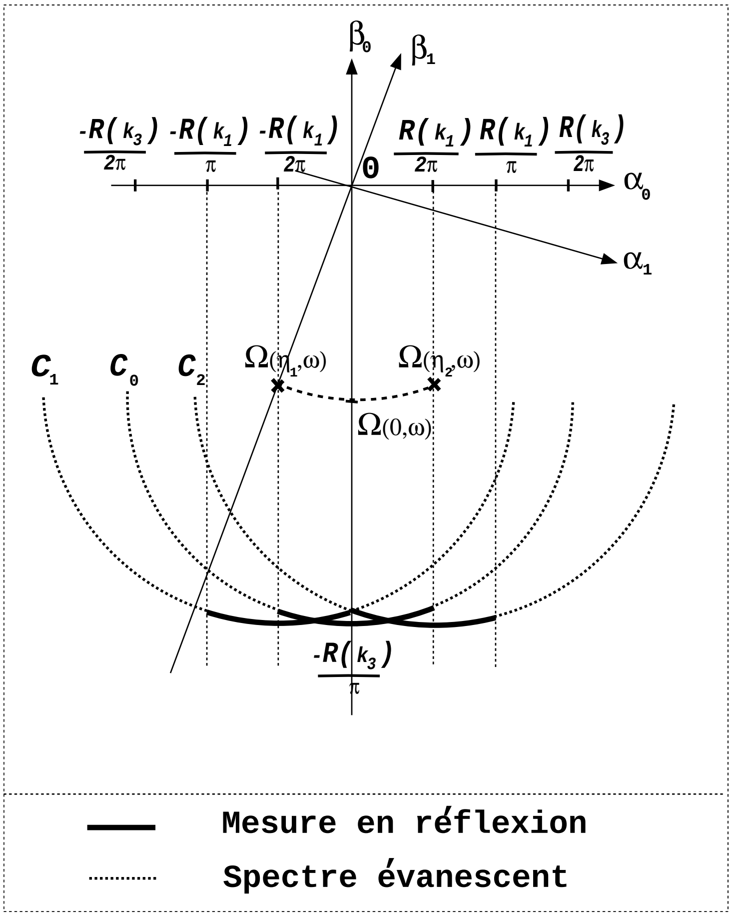


FIG. 2.3 – *Support de $\widehat{K}$ pour une fréquence et trois positions de source*

III.2 Variation de fréquence

L'autre moyen permettant d'augmenter le domaine spectral consiste à faire varier la fréquence d'étude. Tous les résultats concernant la variation de position de source sont formulés à une fréquence fixe. Or, l'équation satisfaite par les coordonnées spectrales (2.22) dépend aussi de la fréquence. Une variation de ce paramètre va entrainer une variation des positions du centre des arcs de cercle; mais contrairement à la méthode précédente, le rayon du cercle variera. En fixant η, on montre que les centres se déplacent le long de l'axe β_η. On a alors, pour $\omega_1 > \omega > \omega_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha \in [\dfrac{-\mathcal{R}e(k_1(\omega_1))}{2\pi} - \eta; \dfrac{\mathcal{R}e(k_1(\omega_1)}{2\pi} - \eta] \\ \beta \in [-\dfrac{\sqrt{\mathcal{R}e(k_3(\omega_2))^2 - \mathcal{R}e(k_1(\omega_2))^2}}{\pi}; \dfrac{-\mathcal{R}e(k_1(\omega_1))}{\pi}] \end{array}\right. , \forall \eta. \qquad (2.25)$$

On remarque que le remplissage du domaine spectral augmente avec l'élargissement de la bande de fréquence (Fig. 2.4). Qualitativement, les résultats obtenues par variation de fréquence sont conformes à ceux du cas plan.

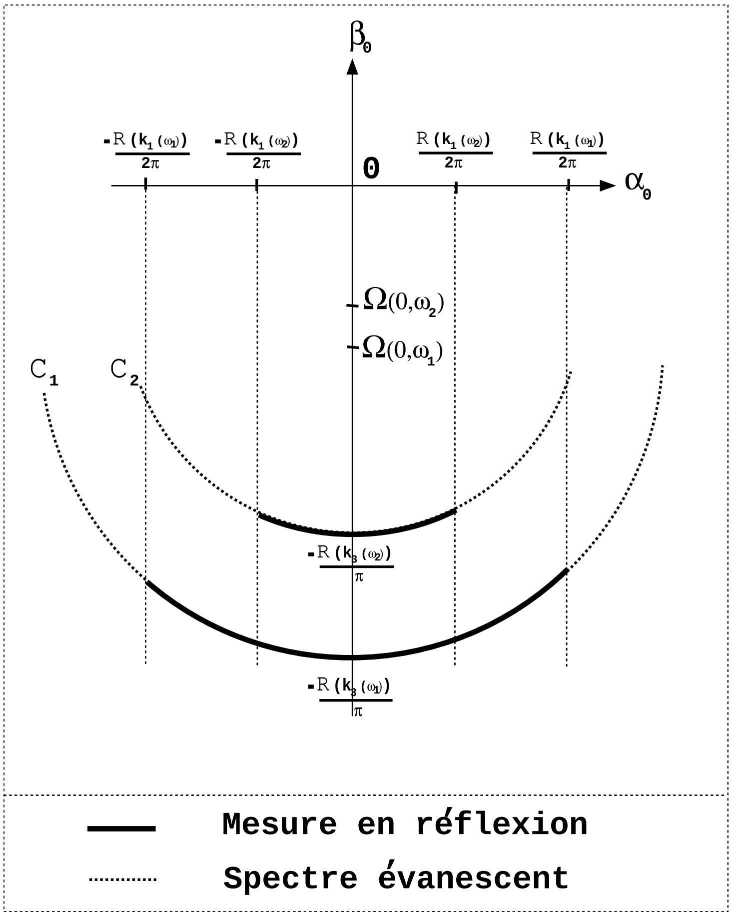


FIG. 2.4 – *Support de $\widehat{K}$ pour une position de source à deux fréquences différentes*

Pour mieux remplir le plan spectral, les deux méthodes peuvent être combinées, augmentant ainsi l'information disponible dans le domaine spectral. Leur influence sur l'image reconstruite sera traitée ultérieurement. Cependant, on peut remarquer que le remplissage est d'autant meilleur que les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont voisins l'un de l'autre, et que la bande de fréquence est large (Fig. 2.5).

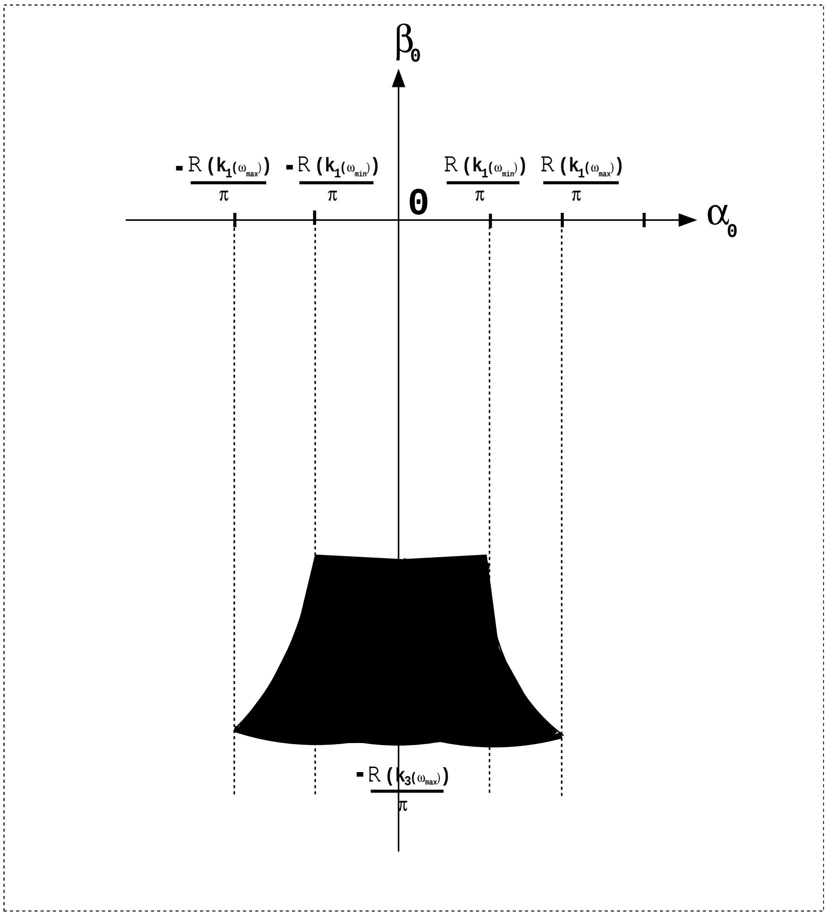


FIG. 2.5 – *Support de $\widehat{K}$ après variation de fréquence et de position de source*

IV Interpolation dans le plan de Fourier

Après avoir montré comment étaient accessibles les données dans le plan de Fourier, il reste désormais à traiter celles-ci pour reconstruire une image du ou des objets. Auparavant, on effectue une opération d'interpolation qui correspond au passage des données connues sur les arcs de cercle définis précédemment dans le plan spectral à des données connues sur un maillage cartésien du plan spectral. Cette opération est nécessaire si l'on veut utiliser des algorithmes de type FFT (*Fast Fourier Transform*) pour le calcul des transformées de Fourier. Parmi les techniques d'interpolation existantes, nous avons utilisé dans notre étude l'interpolation dite du plus proche voisin. Cette méthode, applicable pour un nombre quelconque de variations, permet d'attribuer la valeur d'un point connu d'un des arcs de cercle au point le plus proche du maillage cartésien correspondant (Fig. 2.6). La procédure d'interpolation effectuée, la reconstruction de la fonction objet (courants de polarisation) est désormais possible. Il suffit alors de revenir dans le domaine spatial en utilisant une transformée de Fourier inverse. Pour cela, on utilise des algorithmes de type FFT développés pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Contrairement aux algorithmes usuels valables uniquement pour un nombre d'échantillons $N = 2^m$, ceux utilisées ici sont valables pour un nombre quelconque d'échantillons (décomposition en produit de facteurs premiers) en particulier pour un nombre impair d'échantillons. Bien évidemment, l'emploi de transformées de Fourier sous forme discrète lié aux conditions de validité dans le plan spectral conduit à choisir un pas d'échantillonnage Δ_i dans le problème inverse tel que:

$$\Delta_i \leq \frac{\lambda_1}{2}, \forall \omega$$

Avec l'utilisation d'une bande de fréquence $[f_{min}, f_{max}]$ on doit vérifier:

$$\boxed{\Delta_i \leq \frac{\lambda_1(f_{max})}{2}} \tag{2.26}$$

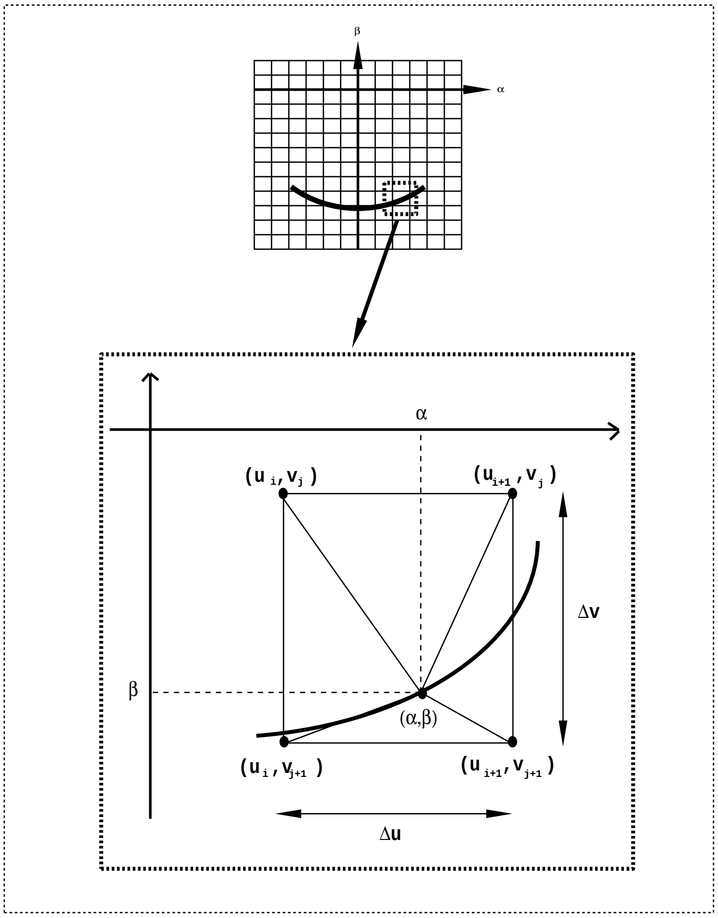


FIG. 2.6 – *Interpolation du plus proche voisin*

V Organigramme du problème inverse

La résolution du problème inverse peut être schématisée par un organigramme (Fig. 2.7) qui décrit les étapes essentielles au bon fonctionnement de l'algorithme d'imagerie. Toutes les notations utilisées sont celles définies précédemment. On peut encore noter que les données initiales sur les champs (incident et diffracté) peuvent être mesurées soit dans le domaine fréquentiel, soit dans le domaine temporel, cette dernière hypothèse nécessitant une transformation de Fourier temporelle afin d'obtenir toutes les données dans le domaine spectral.

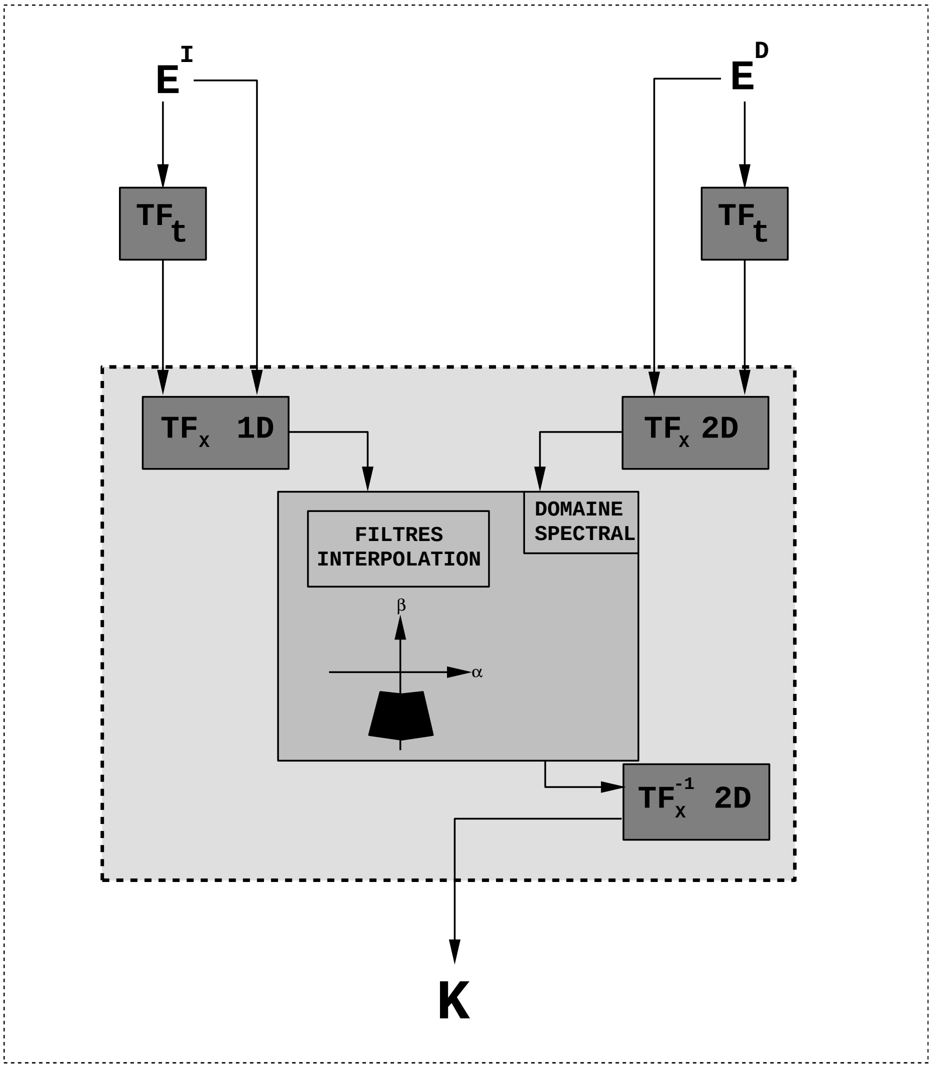


FIG. 2.7 – *Approche spectrale schématisée*

Chapitre 3

Images reconstruites partir de donnes simules

Sommaire

La technique de tomographie par diffraction (champ incident plan ou quelconque) peut être appliquée à la détection d'objets enfouis pour différents types d'application (détection des mines antipersonnelles [74][75][29][30], cartographie des aciers dans le béton armé [18][6], imagerie médicale [31][85],...). Mais avant d'envisager des reconstructions à partir de données expérimentales, il a fallu d'abord effectuer une série de tests numériques afin d'étudier le comportement des algorithmes vis à vis des nombreux paramètres inhérents au problème (caractéristiques électromagnétiques des différents milieux, nombre de points de mesure, nombre de sources et de fréquences, types d'onde incidente,...).
Après une étude sur la réponse impulsionnelle du système d'imagerie, de nombreuses images à partir de données synthétiques ont été reconstruites afin de dégager les qualités et les défauts de ce type d'imagerie qualitative.

I Réponse impulsionnelle

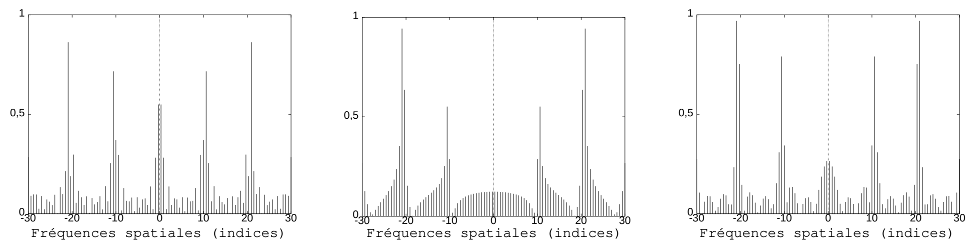
Par analogie avec l'optique, on peut définir la réponse impulsionnelle $h(\vec{X})$ du système d'imagerie comme l'image d'un objet ponctuel (ou de très petite taille) enfoui à une certaine profondeur. Celle-ci permet en fait d'évaluer la résolution spatiale accessible ainsi que sa sensibilité en fonction des paramètres géométriques ou électromagnétiques essentiels.
On suppose que l'objet ponctuel crée des courants $K(\vec{X}) = \delta_{\vec{X}}$ dont la transformée de Fourier est donnée par $\widehat{K}(\alpha,\beta) = 1$. La réponse impulsionnelle est alors définie comme la transformée de Fourier inverse de $\widehat{K}$. Si le plan de Fourier était parfaitement rempli ($\mathbb{R}^2$ tout entier), l'image obtenue serait parfaite et on aurait $h(\vec{X}) = \delta_{\vec{X}}$. Or, dans l'algorithme de reconstruction, le domaine de Fourier décrit est loin d'être $\mathbb{R}^2$. L'image d'un point correspondra à une tache et la résolution obtenue sur l'image sera donc limitée. En fait, $\hat{h}(\vec{X})$ joue le rôle d'un filtre passe-bande, avec une bande passante dépendant des caractéristiques diélectriques des milieux et de la fréquence. De plus, le spectre n'est pas mesuré mais échantillonné (pas Δ_i en espace, Δf en fréquence) sur une ligne de mesure finie. Cette discrétisation des champs sur un domaine borné provoque l'apparition de lobes secondaires parasites dans l'image. Si la ligne de mesure était infinie, le champ échantillonné $E_e(\vec{X})$ serait mis sous la forme d'un produit du champ réel $E(\vec{X})$ avec la distribution peigne de Dirac $H(\frac{\vec{X}}{\Delta_i}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta_i \delta(\vec{X} - n)$ dont la transformée de Fourier est représentée par une succession de pics au fréquences $\nu_n = \frac{n}{\Delta_i}$. En prenant la transformée de Fourier 1D de cette expression, on obtient finalement: $\widehat{E}_e(\nu) = \widehat{E}(\nu) \star \Delta_i \widehat{H}(\nu\Delta_i)$ qui définit une fonction périodique de période $\frac{1}{\Delta_i}$. Le fait de prendre un pas d'échantillonnage suivant le critère de Shannon permet alors d'éviter des recouvrements.
Mais en pratique, la ligne de mesure est finie, le nombre de points étant lui-même fixé à NOXI. La transformée de Fourier 1D du champ $E_p(\vec{X})$ est alors définie par:

$$\widehat{E}_p(\nu) = \widehat{E}(\nu) \star S_{NOXI}(\nu) \tag{3.1}$$

avec

$$S_{NOXI}(\vec{X}) = \sum_{n=-NOXI}^{+NOXI} \Delta_i \delta(\vec{X} - n) \tag{3.2}$$

Quand on fait tendre NOXI vers $+\infty$, le terme S tend vers H (la figure (3.1) montre l'évolution de la transformée de Fourier 1D de S_{NOXI} pour différents NOXI). Plus le nombre de points est restreint, plus ces deux termes sont différents.



(a) NOXI=61 (b) NOXI=101 (c) NOXI=201

FIG. 3.1 – *Allure du module normalisé de $\widehat{S}_{NOXI}$ pour différents NOXI*

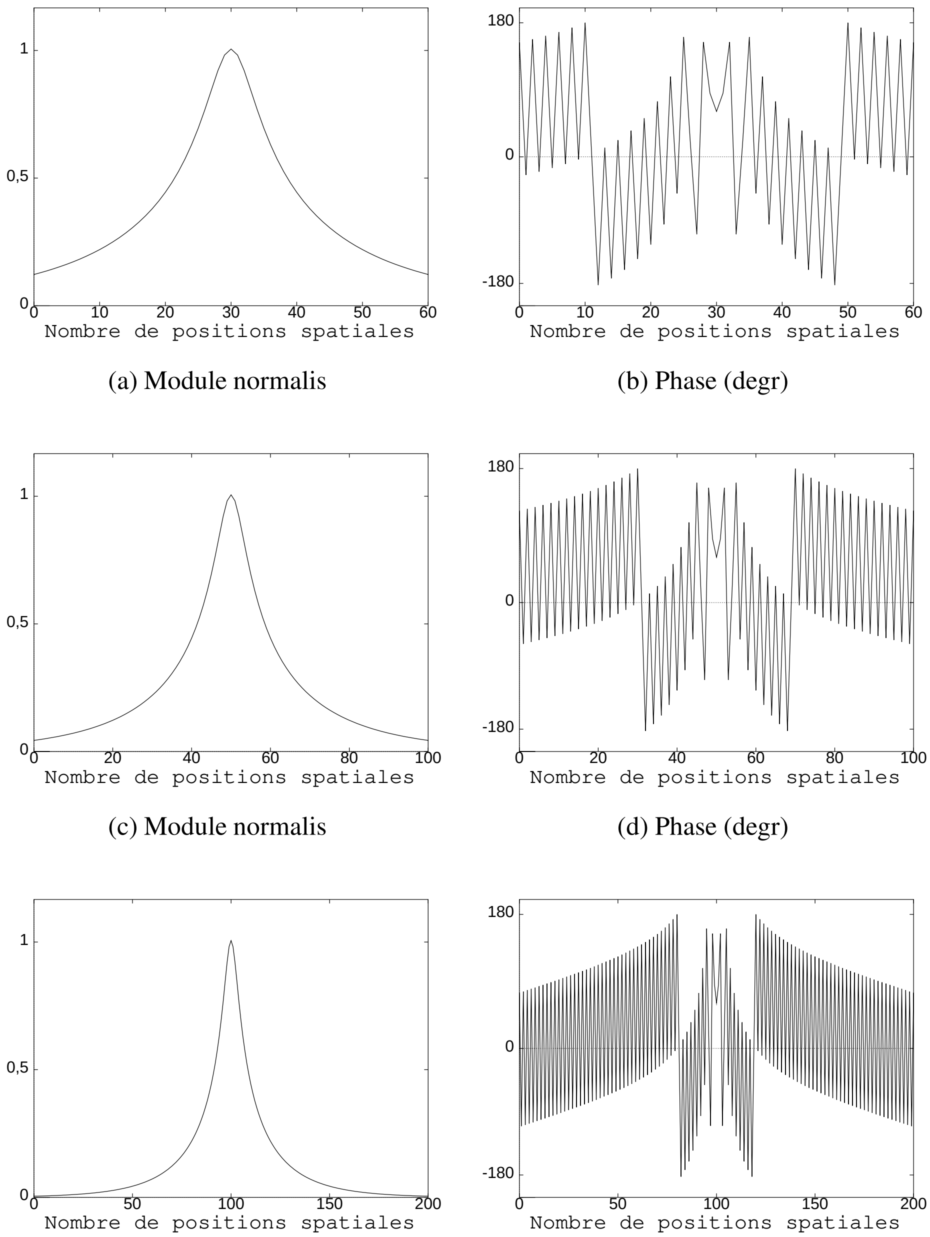
En ce qui concerne les champs mesurés, on retrouve, bien sur, ce problème. La figure (3.2) (respectivement (3.3)) représente l'évolution du champ diffracté (respectivement la transformée 2D du champ diffracté) par un point source ($L_x = L_y = \Delta_i$) mesuré dans $\mathcal{D}_1$ pour des lignes de mesure de longueur croissante. On aperçoit bien les oscillations dues à la longueur finie de L_1. Celles-ci diminuent pour une ligne de mesure suffisamment longue.

Remarque:

Pour toutes les courbes présentées dans cette étude, le pas en espace Δ_i est fixé à $\dfrac{\lambda_1(f_{max})}{2}$.

Pour l'étude en monofréquence ($f = f_0$), il devient $\dfrac{\lambda_1(f_0)}{2}$.

Pour NOXI assez grand on s'affranchit de ce problème. Cependant, un autre facteur entre en ligne de compte. La relation spectrale (2.17) relient des transformées de Fourier 2D. Ce qui était vrai pour le nombre de points de mesure l'est aussi pour le nombre de sources. L'obtention d'une solution analytique de la réponse impulsionnelle n'est possible que pour des cas simples (incidence normale dans le cas d'une onde plane par exemple). Pour NOXI et NXS grands, il est impossible d'étudier analytiquement l'expression de h. Le recours à l'ordinateur est encore nécessaire afin de simuler cette réponse.



(a) Module normalis

(b) Phase (degr)

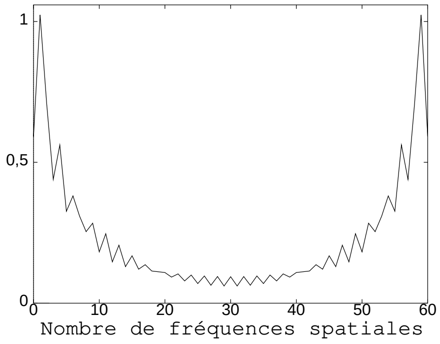
(c) Module normalis

(d) Phase (degr)

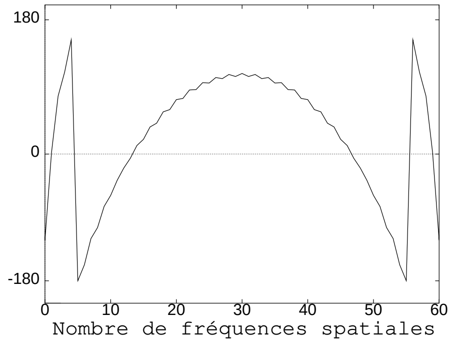
(e) Module normalis

(f) Phase (degr)

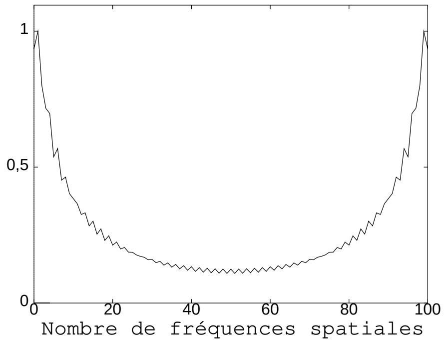
FIG. 3.2 – *Champ diffracté (module, phase) en x=0 pour NOXI=61 (a,b); 101 (c,d); 201 (e,f)*



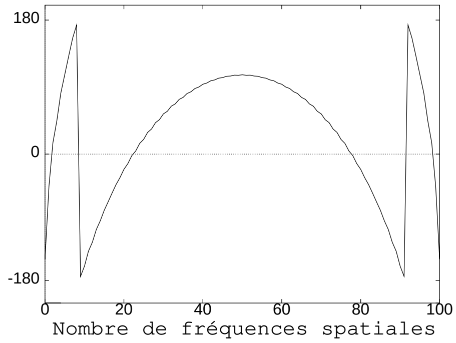
(a) Module normalis



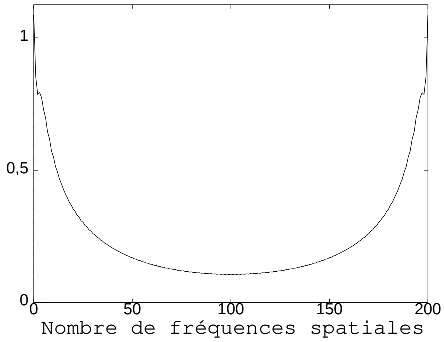
(b) Phase (degr)



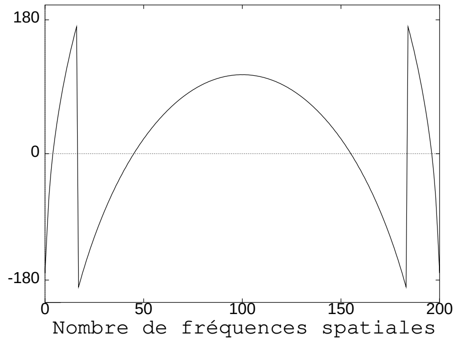
(c) Module normalis



(d) Phase (degr)



(e) Module normalis



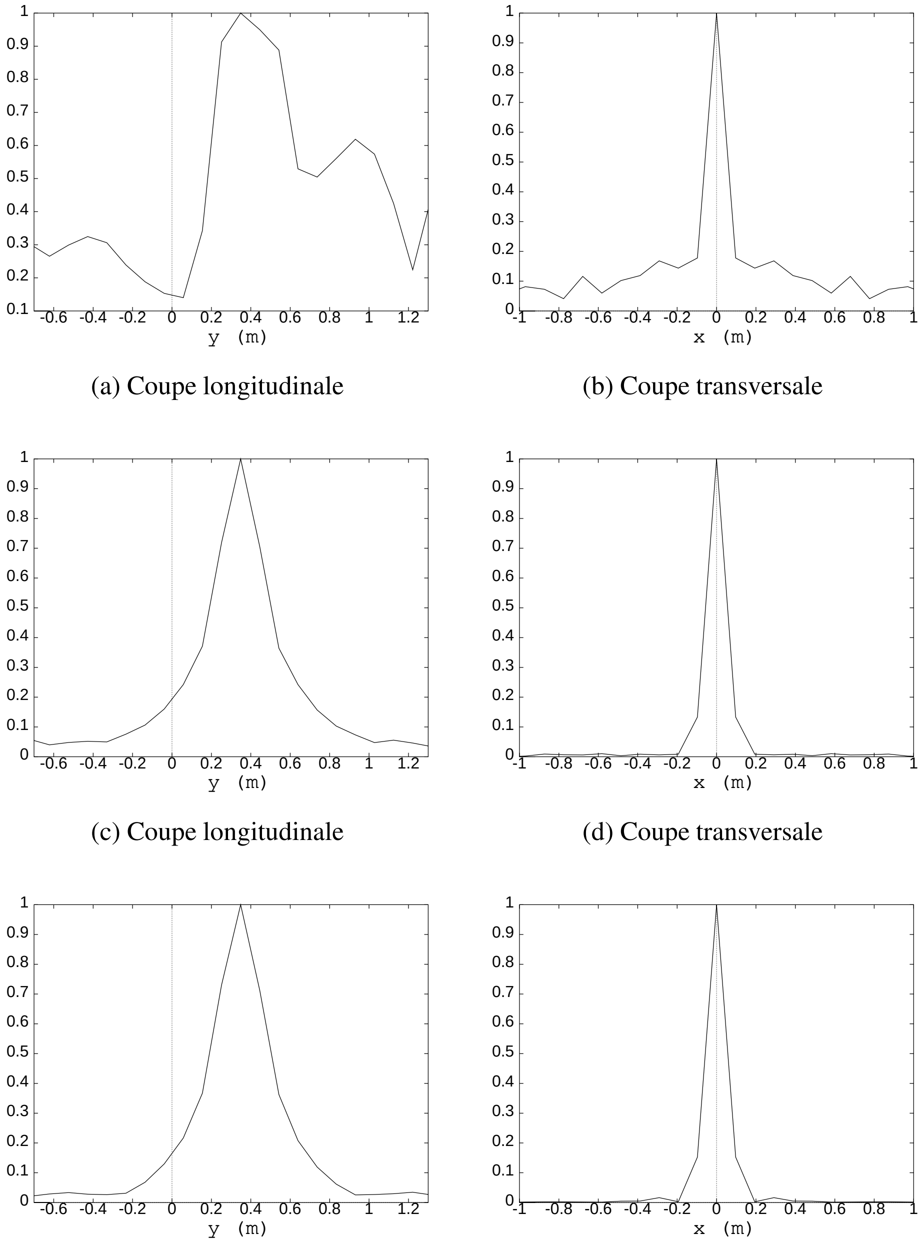
(f) Phase (degr)

FIG. 3.3 – *Transformée de Fourier 2D du champ diffracté (module, phase) en* $\eta = 0$ *pour NOXI=61 (a,b); 101 (c,d); 201 (e,f)*

L'étude a donc été effectuée en étudiant principalement l'influence du nombre de positions de source et du nombre de fréquences sur l'image donnée d'un point source de caractéristiques diélectriques ($\varepsilon_{r_D} = 3$; $\sigma_D = 0\,S.m^{-1}$) discrétisé par une unique cellule de côté $\dfrac{\lambda_3(f_{max})}{2}$ avec $\lambda_3(f) = \dfrac{c}{f\sqrt{\varepsilon_{r_3}}}$, c vitesse de la lumière dans le vide. La distance de l'objet à l'interface $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3$ est de $30\,cm$, tandis que la ligne de mesure est placée sur cette même interface ($y_1 = 0\,m$) permettant ainsi un remplissage optimal du plan spectral (les domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont donc confondus). Le domaine $\mathcal{D}_3$ est constitué d'un sol sablonneux sec ($\varepsilon_{r_3} = 3{,}7$; $\sigma_3 = 4\,10^{-3}\,S.m^{-1}$). Toutefois, un compromis entre la ligne de mesure et la résoultion finale recherchée doit être déterminé en vue d'une meilleure image obtenue pour un coût minimal.

I.1 Influence du nombre de positions de l'émetteur (NXS)

On se place à une fréquence donnée $f_0 = 800\,MHz$ et on étudie l'évolution de la réponse impulsionnelle en fonction de la variation de positions de la source (Fig. 3.4). Par souci de simplicité, l'objet de dimensions ($L_x = L_y = 9{,}7.10^{-2}\,m$) est centré au point de coordonnées ($0\,m$;$0{,}3\,m$) et seules une coupe longitudinale (le long de $x = 0\,m$) et une coupe transversale (le long de $y = 0.3\,m$) sont présentées.
La résolution spatiale est définie comme la largeur à mi-hauteur de la coupe. Si la résolution transversale reste correcte (de l'ordre de $0{,}6\lambda_0$), la résolution longitudinale est nettement moins bonne ($2{,}5\lambda_0$) pour NXS=1. On peut remarquer les nombreuses perturbations présentes dans ces deux premières courbes. Celles-ci sont essentiellement dues à la transformée de Fourier suivant $\vec{X}_S$ du champ diffracté. Théoriquement, il n'est pas concevable d'étudier ce cas là (NXS=1). Toutefois, il est possible de simuler un signal spatial qui, après transformée de Fourier, ne contient qu'une valeur non nulle (ou presque). Par ce biais, il est donc possible désormais de donner une image à une fréquence et une position de source fictive. Pour cette raison, on obtient une meilleure résolution longitudinale que dans le cas d'une seule incidence pour le code "plan" ($6\lambda_0$). La réponse impulsionnelle suit cependant la même variation d'un point de vue qualitatif. En effet, la variation de position de source, en augmentant le nombre de données accessibles dans le plan de Fourier, doit permettre une meilleure image. Cette amélioration est vérifiée dès la seconde série de courbes (NXS=31), puis confirmée pour NXS=101. La résolution transversale demeure inchangée ($0{,}5\lambda_0$) tandis que la résolution longitudinale est sensiblement améliorée ($1{,}5\lambda_0$ pour NXS=101). Cependant, le déficit entre les deux est toujours assez grand (facteur 3). On note la disparition des lobes secondaires suivant y sinsi que leur diminution suivant x. Une nouvelle augmentation de NXS ne conduit pas à une meilleure résolution spatiale, ce qui est encourageant d'un point de vue pratique.



(a) Coupe longitudinale

(b) Coupe transversale

(c) Coupe longitudinale

(d) Coupe transversale

(e) Coupe longitudinale

(f) Coupe transversale

FIG. 3.4 – *Coupes de h en f_0 pour NXS=1 (a,b); 31 (c,d); 101 (e,f)*

I.2 Influence du nombre de pas en fréquence (NFT)

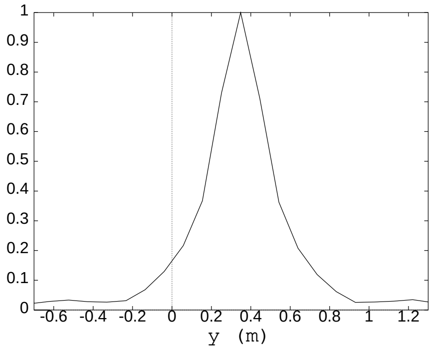
Une variation de position de la source apporte une certaine amélioration à l'image d'un objet ponctuel. Qu'en-est-il de la variation de fréquence?
Pour cette étude, le nombre de sources est fixé à NXS=101 de manière à s'affranchir de tous les problèmes liés aux approximations successives de l'algorithme. L'objet étudié demeure ponctuel (réponse impulsionnelle). Mais, d'après (2.26), l'utilisation d'une bande de fréquence $[f_{min}, f_{max}]$ implique un pas en espace différent. C'est pourquoi les dimensions de l'objet varieront de ($L_x = L_y = 9{,}7\,cm$) pour le cas de la monofréquence f_0 (Fig. 3.5 (a) et (b)) à ($L_x = L_y = 6\,cm$) pour le cas de la multifréquence (Fig. 3.5 (c) à (f)) sur la bande [0,3;1,3] GHz. La fréquence du signal est calculée pour NF fréquences discrètes données par:

$$f_i = f_{max} - \frac{(i-1)(f_{max} - f_{min})}{NFT - 1}. \tag{3.3}$$

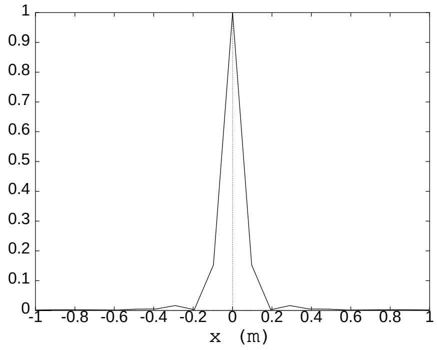
On retrouve le phénomène déjà observé dans la partie précédente pour le cas de la monofréquence. La variation de fréquence permet cependant une nette amélioration de la résolution longitudinale qui passe de $1{,}5\lambda_0$ à $0{,}1\lambda_0$. La résolution transversale est aussi améliorée en atteignant $0{,}1\lambda_0$. Pour cette bande de fréquence, on note donc une symétrisation de l'image, ce qui est conforme aux résultats exposés dans [18]. Une augmentation supérieure de NFT n'apporte aucune amélioration notable du point de vue de la réponse impulsionnelle du système, mais baisse considérablement l'effet des lobes secondaires. Une étude plus complète montre que la résolution longitudinale dépend de la largeur de bande, alors que la résolution transversale dépend de la fréquence la plus haute.
La résolution limite accessible correspondant à une ligne de mesure infinie peut alors être exprimée de manière approchée par:

- $0{,}6\lambda_1$ pour la résolution transversale
- $1{,}2\lambda_1(\sqrt{\varepsilon_{r_3}} - \sqrt{\varepsilon_{r_3} - 1})^{-1}$ pour la résolution longitudinale

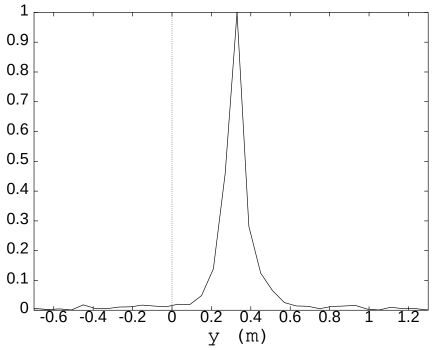
On peut noter une différence entre les deux paramètres étudiés dans cette partie: si, en pratique, il semble judicieux de compter le moins d'échantillons spatiaux afin de réduire le temps de mesure, le nombre de fréquences peut être augmenté de manière à obtenir la meilleure résolution sur l'image finale. L'étude de la réponse impulsionnelle en fonction des deux paramètres principaux ne permet pas une complète caractérisation de la méthode d'imagerie. Si l'on a su mettre en évidence les relations existant entre une bonne image et le nombre de fréquences ou de positions de source, des paramètres tels que la longueur de la ligne de mesure, la hauteur de celle-ci, la profondeur de l'objet à reconstruire jouent aussi un rôle important. L'effet de la longueur de la ligne de mesure sur le résultat de la méthode a été étudié précédemment. Il est clair qu'un ligne de mesure de longueur infinie placée à l'interface $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ pour un objet peu enterré constitue une configuration idéale pour tout système d'imagerie. Mais outre l'aspect non réaliste de cette étude, il est nécessaire d'aborder une phase de simulation numérique afin de dégager d'autres tendances difficilement envisageables avec la réponse impulsionnelle.



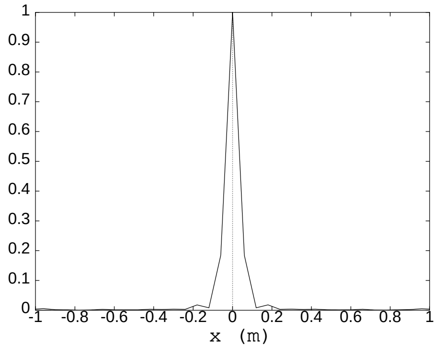
(a) Coupe longitudinale



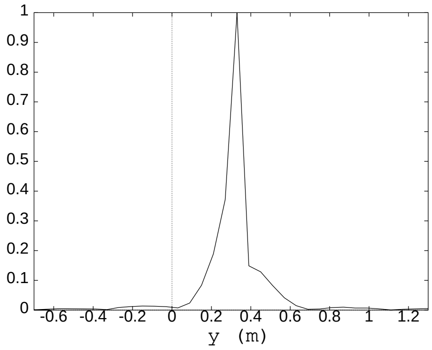
(b) Coupe transversale



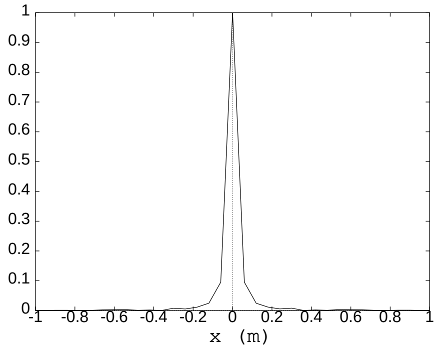
(c) Coupe longitudinale



(d) Coupe transversale



(e) Coupe longitudinale



(f) Coupe transversale

FIG. 3.5 – *Coupes de h en 101 sources pour NTF=1 (a,b); 11 (c,d); 101 (e,f)*

II Images d'objets enterrés

L'étude de la réponse impulsionnelle a permis de mettre à jour le rôle primordial du nombre de fréquences temporelles et spatiales dans la qualité de l'image d'un objet enterré. Il reste désormais à étendre les résultats obtenus pour la réponse impulsionnelle aux cas d'objets de dimensions non négligeables. Pour éviter un trop grand nombre d'images, il apparaît nécessaire de limiter le nombre de tests à l'étude de paramètres importants comme la différence de permittivité entre un objet et le domaine environnant, la prise en compte du phénomène dispersif ou le type d'onde illuminant l'objet. On terminera l'étude numérique par des exemples plus complexes illustrant le rôle des autres paramètres rencontrés.
Dans toute la suite, on suppose les antennes en contact avec le sol ($y_1 = 0\,m$) et parfaitement adaptées avec celui-ci (réduction du couplage direct et du couplage Air/Sol). Cette dernière hypothèse permet de considérer les milieux $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ comme identiques (remplissage spectral optimal). Enfin, la totalité des images reconstruites dans cette partie représente la reconstruction des courants induits normalisés sous forme de courbes de niveaux (15). On y distingue en trait plein l'emplacement réel de l'objet à reconstruire.

II.1 Influence des permittivités de l'objet et du sol

Etudions tout d'abord l'influence de la permittivité sur la qualité de l'image reconstruite de l'objet enterré.
L'objet étudié de dimensions ($LX = 30\,cm$, $LY = 18\,cm$) est constitué d'un matériau diélectrique sans pertes ($\sigma_D = 0\,S.m^{-1}$) dont la permittivité relative ε_{r_D} varie de 1 à 20. Il est enterré à une profondeur $D = 30\,cm$ dans un sol de caractéristiques electromagnétiques (ε_{r_3}, σ_3) variables. L'objet est alors illuminé par un signal incident composé de deux parties disjointes $p(X,t) = s(X)r(t)$.
La composante spatiale $s(X)$ est définie par un pulse gaussien d'équation

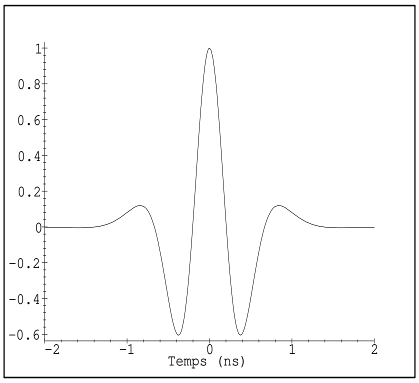
$$s(X) = \sqrt{\frac{\alpha_x}{\pi}} e^{-\alpha_x x^2} \text{ où } \alpha_x = ln(\frac{1+\tau}{\frac{LX^2}{400}}) \text{ et } \tau = 1 \tag{3.4}$$

La composante temporelle $r(t)$ (Fig. 3.6(a)) est composée d'une impulsion large bande (UWB) défini comme un pulse de Rayleigh [46]

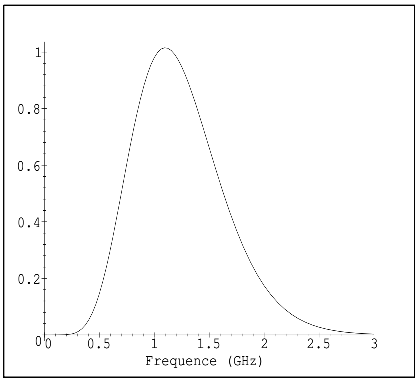
$$r(t) = j(\frac{\tau'}{j\tau' - t})^{n+1} \text{ où } n = 8, \tau' = \frac{n}{2\pi f_0} \text{ avec } f_0 = 1.1 \text{ GHz} \tag{3.5}$$

Son spectre temporel $\tilde{r}(\omega)$ (Fig. 3.6(b)) peut alors être mis sous la forme

$$\tilde{r}(\omega) = 2(-j\omega)^n e^{-j\omega\tau'} u(\omega) \text{ où } u(\omega) = \begin{cases} 0, \text{ si } \omega \leq 0 \\ 1, \text{ si } \omega \geq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$



(a) Pulse réel normalisé



(b) Spectre temporel normalisé

FIG. 3.6 – *Pulse utilisé pour les simulations*

Sa large bande de fréquence, couplé à son comportement spatial confère au signal utilisé des propriétés intéressantes en vue d'une utilisation dans le processus d'imagerie (bonne résolution, important remplissage du plan spectral...).
D'un point de vue numérique, tous les tests effectués ont été simulés avec au moins 101 points source disposés régulièrement sur une ligne de mesure longue de 2 mètres environ ($\Delta_i = 2\,cm$). Du point de vue temporel, 101 fréquences régulièrement réparties dans la bande [0,3;3] GHz ont été utilisées ($\Delta_f = 27\,MHz$).
Dans un premier temps, la permittivité de l'objet est fixée ($\varepsilon_{r_D} = 3$). Une image de l'objet est alors reconstruite pour 4 différents types de sol (un sable sec, deux sols moyens à tendance sèche et un sol humide -Tab. 3.1-).

SOLS	**SEC**	**MOY 1**	**MOY 2**	**HUM**
ε_{r3}	2.55	6	10	20
σ_3 (S/m)	$2.21\ 10^{-3}$	$4.1\ 10^{-3}$	$7\ 10^{-3}$	$4\ 10^{-2}$

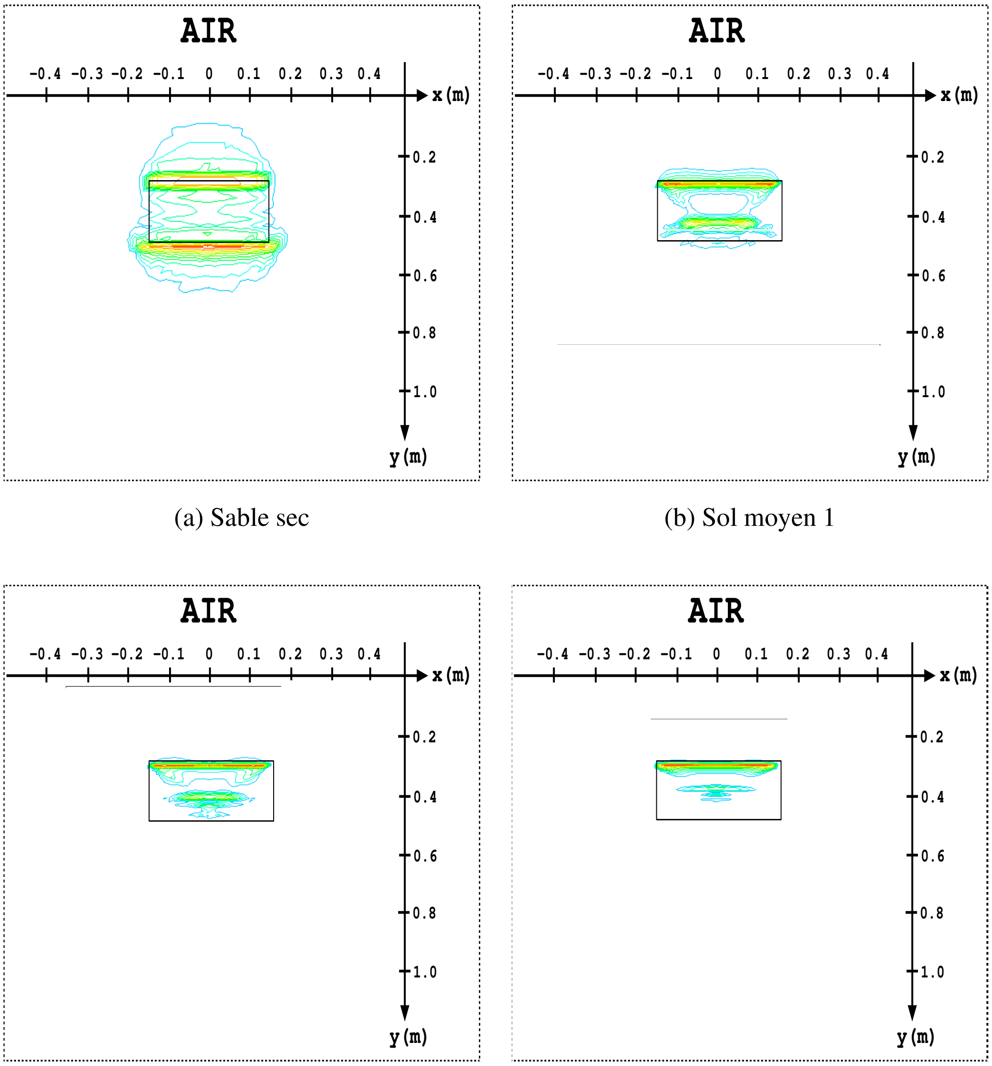
TAB. 3.1 – *Propriétés diélectriques du sol*

On constate sur les images obtenues (Fig. 3.7) que seules les faces avant et arrière de l'objet (faces parallèles à l'interface air/sol) sont reconstruites. On ne discerne pas les faces orthogonales. Cette détérioration générale de l'image peut provenir de l'hypothèse prise en compte pour modéliser les ondes (seul le cas 2D-TM est étudié). Un moyen immédiat pour retrouver l'information manquante sur ces faces consiste à tenir compte de la polarisation 2D-TE des champs. Une autre possibilité réside dans l'extension de la méthode d'imagerie 2D au cas 3D [18]. Cette extension reste néanmoins très coûteuse au niveau mémoire et CPU.
En comparant chaque image, on voit très bien que la face supérieure de l'objet est nettement mieux reconstruite que la face inférieure. Cette différence s'accentue lorsque l'humidité du sol augmente. Comme les milieux sont caractérisés par leurs propriétés électromagnétiques,

définissons le rapport diélectrique $\frac{\varepsilon_{r_D}}{\varepsilon_{r_3}}$. On constate alors que plus ce rapport devient faible ($\varepsilon_{r_3} > \varepsilon_{r_D}$), plus le fond de l'objet apparaît réduit tandis que sa position remonte vers celle du haut de la boîte (Figs. 3.7(a) à 3.7(d)). Une extension de la longueur de la ligne de mesure, ainsi qu'une augmentation du nombre de fréquences spectrales ne permet qu'une amélioration de la qualité de l'image sans pour autant permettre de corriger le problème visualisé. Les propriétés du sol semblent jouer un rôle important dans la reconstruction de la face inférieure de l'objet.

Si on fixe désormais les caractéristiques du sol (on étudie un sable sec avec $\varepsilon_{r_3} = 2{,}55$ et $\sigma = 2{,}21\ 10^{-3}\, S.m^{-1}$), les images obtenues pour différents diélectriques enterrés révèlent la même dégradation (Figs. 3.8 et 3.9). En effet, une diminution de la permittivité de l'objet produit les mêmes effets que l'augmentation de la permittivité du sol (réduction de la face supérieure et position rehaussée -Fig. 3.8-). De plus, une augmentation de la permittivité de l'objet (d'où augmentation du rapport diélectrique) provoque l'effet opposé: extension de la face inférieure et abaissement de sa position (Fig. 3.9). La meilleure reconstruction provient du cas où les caractéristiques diélectriques de l'objet sont proches de celles du sol (Fig. 3.8(d)) ce qui reste paradoxal car ce cas correspond à des valeurs de champ diffracté très faibles...

L'erreur commise sur la face inférieure semble donc être reliée au rapport diélectrique défini précédemment. Un bref passage au cas 1D peut permettre une meilleure analyse de ce phénomène.



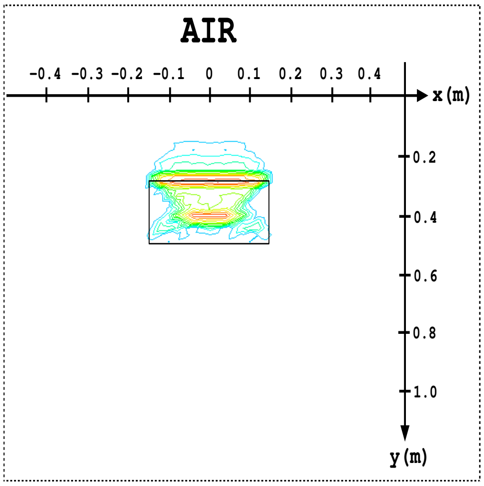
(a) Sable sec

(b) Sol moyen 1

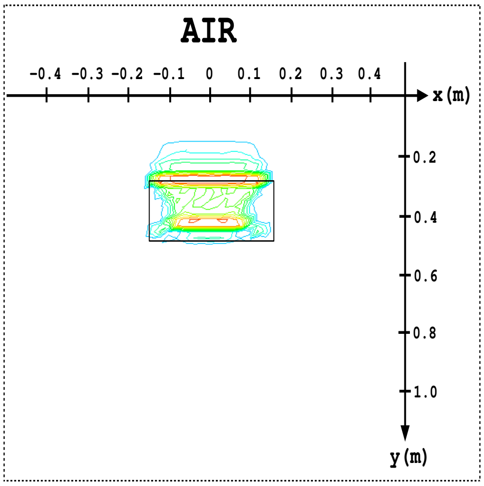
(c) Sol moyen 2

(d) Sol humide

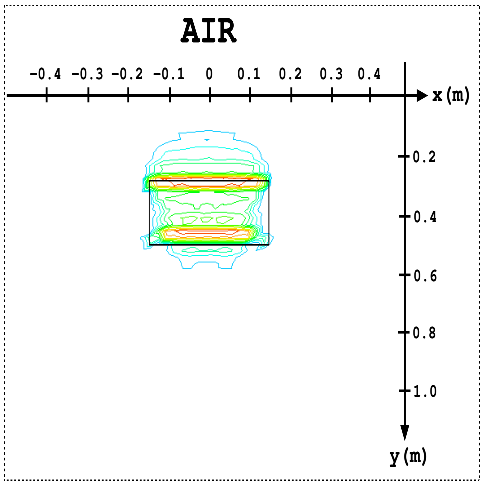
FIG. 3.7 – *Reconstructions d'un diélectrique pur enterré dans différents sols*



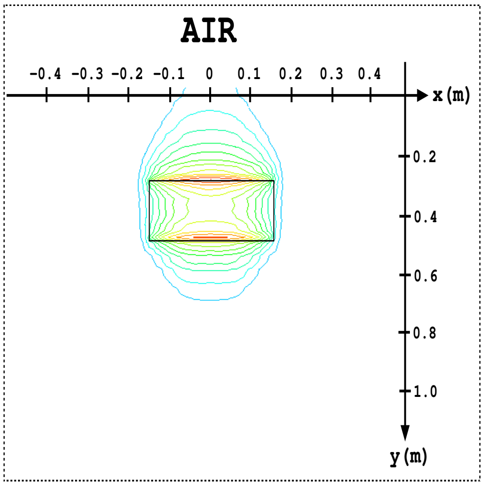
(a) $\varepsilon_{r_D} = 1$



(b) $\varepsilon_{r_D} = 1{,}5$

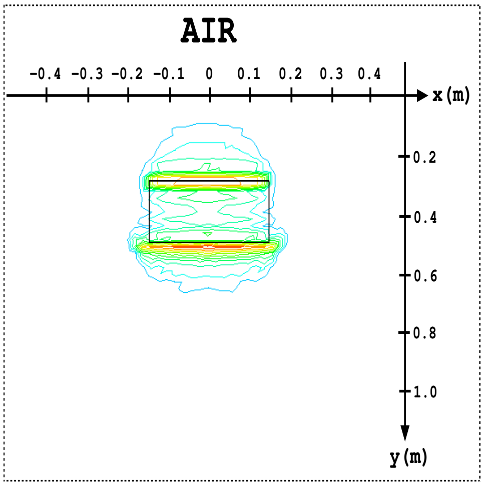


(c) $\varepsilon_{r_D} = 2$

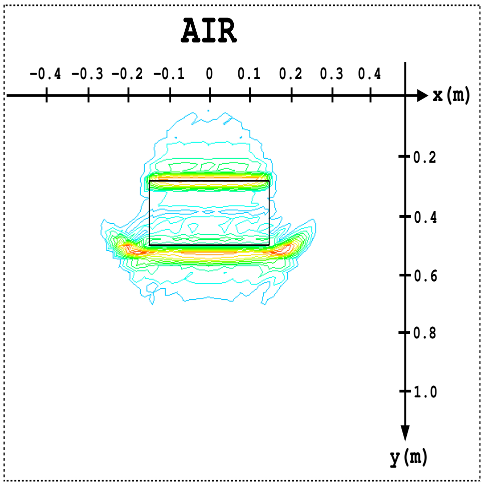


(d) $\varepsilon_{r_D} = 2{,}5$

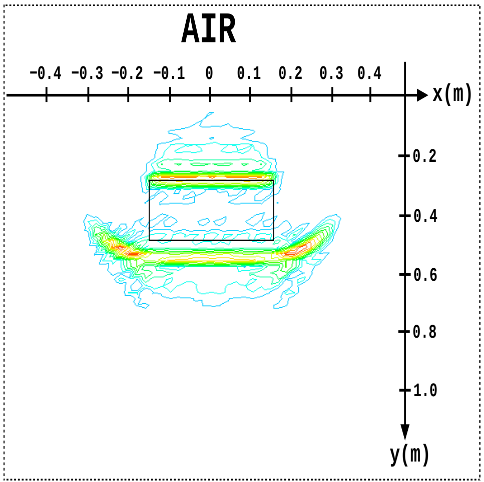
FIG. 3.8 – *Reconstructions de différents diélectriques purs enterrés dans un sable sec (I)*



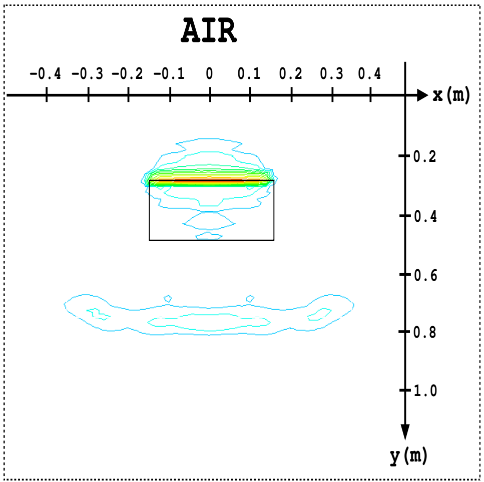
(a) $\varepsilon_{r_D} = 3$



(b) $\varepsilon_{r_D} = 4$



(c) $\varepsilon_{r_D} = 5$



(d) $\varepsilon_{r_D} = 20$

FIG. 3.9 – *Reconstructions de différents diélectriques purs enterrés dans un sable sec (II)*

Explications à partir du cas 1D

Prenons le cas monodimensionnel d'une plaque infinie suivant x, d'épaisseur L et de caractéristique k_D plongée dans l'air et illuminée à une fréquence ω par une onde plane d'incidence normale, d'amplitude unité (Fig. 3.10).

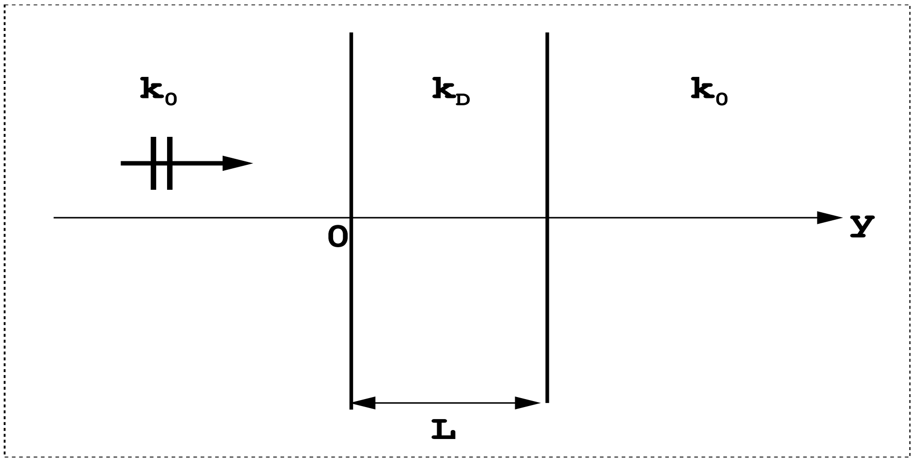


FIG. 3.10 – *Cas d'une plaque infinie d'épaisseur L illuminée par une onde plane*

Un rapide calcul nous donne l'expression du champ total dans les trois domaines présents:

$$E(y) = e^{jk_0y} + \frac{\frac{k_0-k_D}{k_0+k_D}(1 - e^{2jk_DL})}{1 - (\frac{k_0-k_D}{k_0+k_D})^2 e^{2jk_DL}} e^{-jk_0y} \quad \text{, pour } y \leq 0$$

$$E(y) = \frac{\frac{2k_0}{k_0+k_D} e^{jk_DL} e^{-jk_0L}}{1 - (\frac{k_0-k_D}{k_0+k_D})^2 e^{2jk_DL}} (e^{jk_Dy} - \frac{k_0 - k_D}{k_0 + k_D} e^{2jk_DL} e^{-jk_Dy}) \quad \text{, pour } 0 \leq y \leq L \tag{3.7}$$

$$E(y) = \frac{\frac{4k_0k_D}{(k_0+k_D)^2} e^{jk_DL} e^{-jk_0L}}{1 - (\frac{k_0-k_D}{k_0+k_D})^2 e^{2jk_DL}} e^{jk_0y} \quad \text{, pour } y \geq L$$

D'après les équations fondamentales, on peut écrire pour $y_1 \leq 0$:

$$E^D(y_1) = \int_{y' \in [0;L]} k_0^2 E^I(y') G_1(y_1,y') K(y') dy' = \frac{jk_0}{2} e^{-jk_0y_1} \int_{\mathbb{R}} K(y') e^{2jk_0y'} dy' \tag{3.8}$$

avec G_1 la fonction de Green du cas 1D définie par:

$$G_1(y_1,y') = \frac{je^{jk_0(y'-y_1)}}{2k_0} \tag{3.9}$$

Comme $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0}$, on peut définir deux variables spectrales duales y' et $\xi = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_0}}{\pi}$. En notant $\int_{\mathbb{R}} K(y') e^{2jk_0y'} dy' = \widehat{K}(\xi)$, on obtient:

$$\widehat{K}(\xi) = \frac{2e^{jk_0y_1}}{jk_0} E^D(y_1), \forall y_1 \leq 0 \tag{3.10}$$

Notons n le rapport $\frac{k_D}{k_0}$. En utilisant une transformée de Fourier inverse et en introduisant l'expression analytique de E^D donnée par l'équation (3.7), on aboutit à l'expression analytique des courants 1D pour $y_1 = 0$:

$$K(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{j\pi\xi} \bullet \frac{\frac{1-n}{1+n}(1 - e^{2\pi jn\xi L})}{1 - (\frac{1-n}{1+n})^2 e^{2\pi jn\xi L}} e^{-2\pi j\xi y} d\xi \tag{3.11}$$

L'expression (3.11) est calculée numériquement et représentée pour différentes valeurs du paramètre n en notant en abscisse la proportion de longueur reconstruite L_r ($100\% = L$) et en ordonnée le module des courants (Fig. 3.11). On voit bien que l'erreur visualisée dans le cas 2D est toujours présente lorsque l'on traite le cas 1D. De plus, l'erreur $er = \frac{L_r}{L}$ vérifie $er = n$. On montre ainsi que cette erreur systématique présente dans le cas 2D comme dans le cas 1D ne peut être causée par un problème de maillage (le cas présenté ici ne traite qu'une unique cellule). Cette erreur est inhérente à la méthode d'imagerie et provient uniquement du manque de renseignements sur l'objet enterré (caractéristiques diélectriques, dimensions géométriques...). En fait, l'objet est vu comme un milieu à part entière dans un premier temps puis il est reconstruit comme faisant partie du sol dans un deuxième temps (ε_D inconnu). Pour toute fréquence angulaire ω, chaque dimension de l'objet réel peut alors être décomposée soit dans le domaine associé à l'objet, soit dans le domaine associé au sol:

$$L = m_D\lambda_D = m_3\lambda_3, \text{ avec } m_D \neq m_3 \text{ si } \mathcal{D}_D \neq \mathcal{D}_3 \tag{3.12}$$

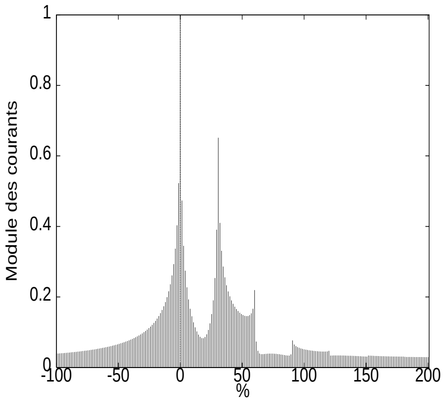
où λ_i (i=1,D) est la longueur d'onde du milieu $\mathcal{D}_i$ à la fréquence ω.
Dans le processus de reconstruction, seul le paramètre λ_3 est connu. La dimension reconstruite L_r associée à L est donnée par

$$L_r = m_D\lambda_3 \neq m_D\lambda_D, \text{ si } \mathcal{D}_D \neq \mathcal{D}_3 \tag{3.13}$$

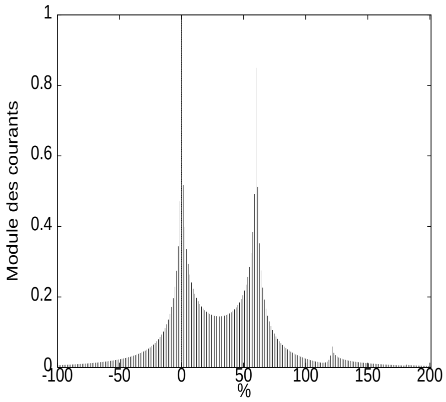
Soit $e = log(\frac{L_r}{L})$ l'erreur commise sur la dimension L de l'objet. Alors, en utilisant la définition de L_r et en négligeant les pertes dans les milieux rencontrés, on peut écrire:

$$e = log(\frac{m_D\lambda_3}{m_D\lambda_D}) = log\sqrt{\frac{\varepsilon_{r_D}}{\varepsilon_{r_3}}} = 0.5 \times log(\frac{\varepsilon_{r_D}}{\varepsilon_{r_3}}) \tag{3.14}$$

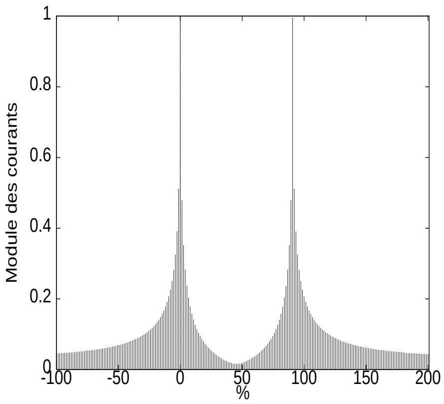
La relation (3.14), déjà vérifiée dans le cas 1D, est vraie dans le cas 2D. Si on trace l'erreur commise e sur la reconstruction de deux objets différents en fonction du rapport $r = log\frac{\varepsilon_{r_D}}{\varepsilon_{r_3}}$, la courbe obtenue (Fig. 3.12) est proche de celle représentant l'équation (3.14). Seuls quelques petits problèmes sont présents, lorsque la face inférieure se superpose à la face supérieure, et lorsque la permittivité de l'objet devient trop forte.



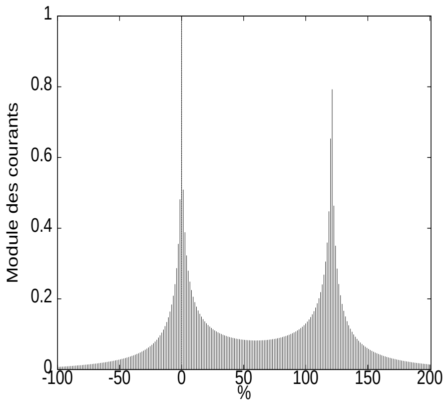
(a) $n = 0{,}3$



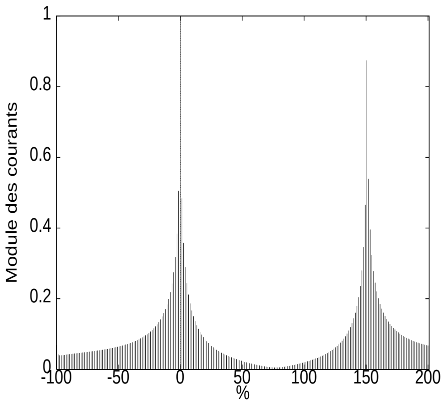
(b) $n = 0{,}6$



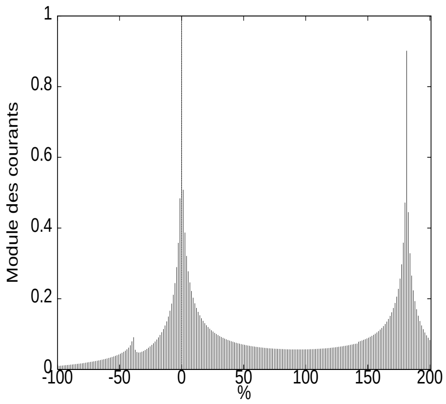
(c) $n = 0{,}9$



(d) $n = 1{,}2$



(e) $n = 1{,}5$



(f) $n = 1{,}8$

FIG. 3.11 – *Courants 1D en fonction du rapport* $n = \dfrac{k_D}{k_0}$

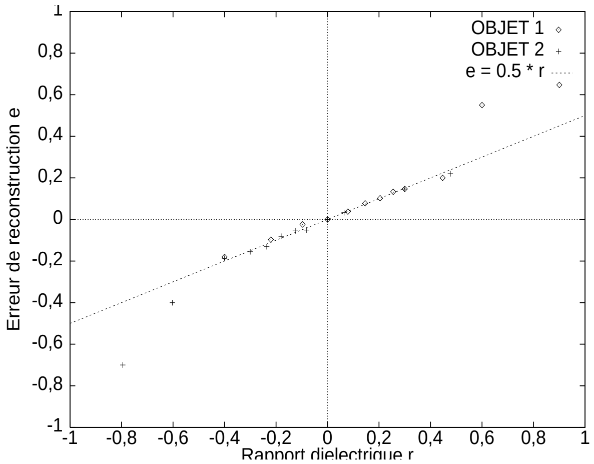


FIG. 3.12 – *Erreur de reconstruction en fonction du rapport diélectrique*

Pour des valeurs de r comprises entre -0,5 et 0,5, correspondant à un rapport $\frac{\varepsilon_{r_D}}{\varepsilon_{r_3}}$ allant de $\frac{1}{3}$ à $\frac{3}{1}$, l'erreur de la méthode d'imagerie qualitative peut être quantifiée par la loi (3.14). À partir de cette formule de quantification de l'erreur, la connaissance d'un des paramètres inconnus de l'objet (ε_{r_D} ou LX et LY) suffit pour corriger l'erreur commise sur l'image et donc de reconstruire l'objet de manière précise.

II.2 Prise en compte de la dispersion

Dans la littérature, la majorité des reconstructions préentées ne prennent pas en compte les phénomènes physiques rencontrés lors de mesures sur le terrain (dispersion, atténuation des ondes,...). Ces paramètres peuvent dans certains cas dégrader tout ou partie de l'image résultante.
On présente ici une étude concernant le phénomène dispersif qui influent souvent sur les mesures réelles. Ainsi, après un bref descriptif et la caractérisation numérique de ce paramètre pour quelques types de sols, des images de l'objet enterré défini précédemment sont reconstruites en utilisant un champ incident identique à celui exprimé dans la dernière étude (pulse de Rayleigh et pulse gaussien) et en introduisant le terme de dispersion.

Dispersion dans les sols

De nombreuses séries de mesure ont montré par le passé l'évolution des caractéristiques diélectriques d'un sol en fonction de paramètres intrinsèques tels que sa température [43], sa teneur en eau [919087919087919087], voire sa texture [42384238]. Même si certains résultats ont pu être mis à jour pour des cas particuliers de sols, aucune loi d'évolution générale n'a été encore obtenue. Néanmoins, toutes ces études ont montré le rôle primordial joué par la teneur en eau du sol. Ce paramètre représente le facteur principal gouvernant le comportement diélectrique d'un sol. La présence d'eau dans le sol, en augmentant les caractéristiques diélectriques du sol, provoque une atténuation des ondes électromagnétiques se propageant dans celui-ci (Fig. 3.13).

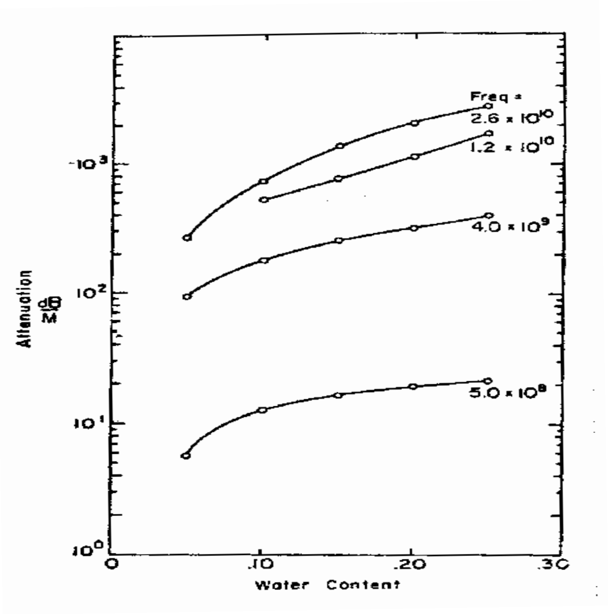


FIG. 3.13 – *Atténuation d'une onde plane dans un sol en fonction de la teneur en eau du sol pour différentes fréquences (en Hz) [43]*

Considérons un sol avec une permittivité complexe $\varepsilon_3^* = \varepsilon_3' + j\varepsilon_3''$, où ε_3' et ε_3'' sont respectivement la partie réelle et imaginaire de ε_3^*. Le phénomène physique d'atténuation se compose en fait d'une partie appelée absorption et d'une partie appelée dispersion. Le phénomène de dispersion est défini en géophysique comme la variation de la vitesse de propagation dans le sol en fonction de la fréquence. La vitesse et la permittivité complexe étant liées, la dispersion se retrouve dans la dépendance en fréquence de ε_3^*. Or, dans tous les résultats présentés jusqu'ici, les caractéristiques électromagnétiques des milieux étaient considérées indépendantes de la fréquence($\varepsilon_3' = \varepsilon_0\varepsilon_{r_3}$ et $\varepsilon_3'' = \dfrac{\sigma_3}{\omega}$ avec ε_{r_3} et σ_3 deux constantes réelles).
De nombreux modèles ont été développés afin de modéliser au mieux la dispersion. L'apparition du phénomène étant lié à la présence d'eau dans le sol, les premiers modèles furent formés en prenant en compte la loi d'évolution de l'eau en fonction de la fréquence, ou loi de simple relaxation de Debye (Fig. 3.14 avec $K^* = K' + jK'' = \dfrac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0}$).

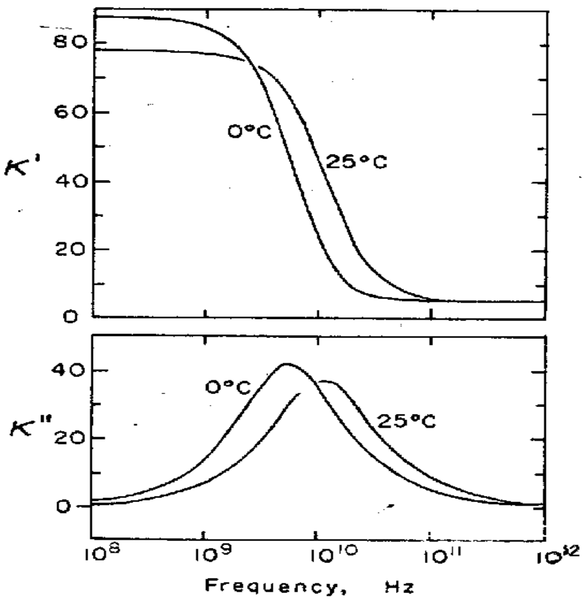


FIG. 3.14 – *Loi de relaxation de l'eau à deux températures différentes [43]*

Le modèle de Debye [27], adapté aux matériaux dispersifs d'ordre 1, a été ensuite étendu aux matériaux dispersifs d'ordre supérieur (modèle de Cole-Cole [43][236979236979236979], de Lorentz [49], de Jonscher [5]...). Dans cette partie, nous nous intéressons uniquement à l'évolution de l'image reconstruite en fonction de la prise en compte ou non de la dispersion diélectrique, modélisé par une formule simplifiée de type Debye (dispersion d'ordre 1). Cette formule n'est pas généralisable à tout type de matériau mais son implémentation dans l'algorithme de reconstruction permet de dégager certaines tendances.
La permittivité complexe d'un milieu de type Debye peut être définie en fonction de la fréquence angulaire ω par:

$$\varepsilon_3^*(\omega) = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_{r_3} + j \frac{\sigma_3}{\omega \varepsilon_0} + F(j\omega) \right) \tag{3.15}$$

avec $F(j\omega) = \dfrac{\varepsilon^0 - \varepsilon^\infty}{1 + j\frac{\omega}{\omega_R}}$ et $\begin{cases} \varepsilon^0 = \text{la limite basse fréquence } (\omega < \omega_R) \text{ de } \varepsilon_{r_3} \\ \varepsilon^\infty = \text{la limite haute fréquence}(\omega > \omega_R) \text{ de } \varepsilon_{r_3} \\ \omega_R = \text{la fréquence de relaxation} \end{cases}$

Le développement de la formule précédente aboutit à la définition des nouveaux paramètres diélectriques introduisant la dispersion:

$$\varepsilon_{r_3}(\omega) = \frac{\varepsilon^0 + \frac{\omega^2}{\omega_R^2}\varepsilon^\infty}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_R^2}} \tag{3.16}$$

et

$$\sigma_3(\omega) = \sigma^0 + \varepsilon_0 \omega_R (\varepsilon^0 - \varepsilon^\infty) \frac{\frac{\omega^2}{\omega_R^2}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_R^2}} \tag{3.17}$$

tels que $\varepsilon_3^*(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_3}(\omega) + j\dfrac{\sigma_3(\omega)}{\omega}$.
σ^0 désigne la conductivité du sol, sans tenir compte de la dispersion ($\omega < \omega_R$).
Si l'on note σ^∞ la limite haute fréquence de la conductivité ($\omega \to \infty$), on voit que:

$$\omega_R = \frac{\sigma^\infty}{\varepsilon^0 - \varepsilon^\infty} \tag{3.18}$$

Des mesures ont ainsi été effectuées afin de déterminer les paramètres ε^0, ε^∞, σ^0 et σ^∞ caractérisant les différents sols étudiés.
Ces résultats sont présentés pour trois types de sol (sable sec, sol moyen et sol humide) dans la bande de fréquence $[0{,}3; 1{,}3]$ GHz (Tab. 3.2).

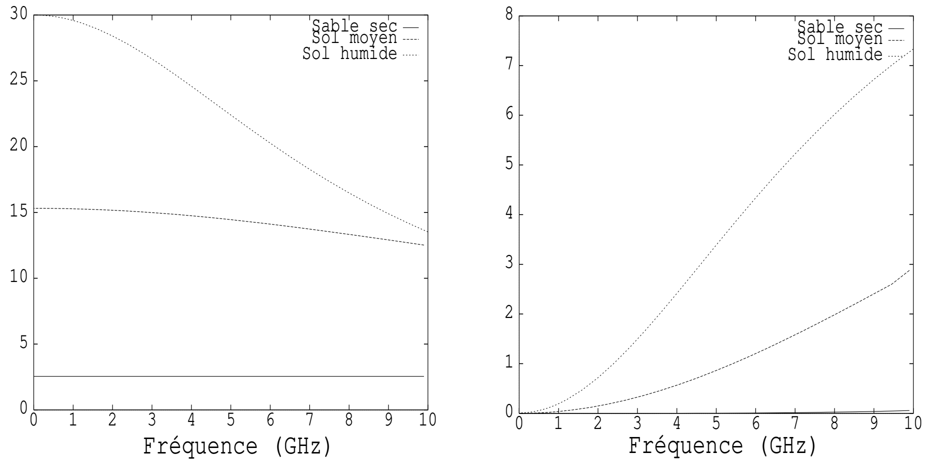
SOLS	**SEC**	**MOYEN**	**HUMIDE**
ε^0	2.55	15	30
ε^∞	2.55	3	3
$\sigma^0(S.m^{-1})$	$1\ 10^{-4}$	$1\ 10^{-3}$	$1\ 10^{-2}$
$\sigma^\infty(S.m^{-1})$	1	12	12
ε_m	2.55	14.8	29
$\sigma_m(S.m^{-1})$	$2.21\ 10^{-3}$	$1\ 10^{-1}$	$5\ 10^{-1}$

TAB. 3.2 – *Propriétés diélectriques mesurés de milieux de type Debye*

Les paramètres ε_m et σ_m représentent les caractéristiques électromagnétiques du sol considérés constantes dans le processus de reconstruction (la dispersion n'est pas prise en compte).
Dans le cas du sol sablonneux, comme $\varepsilon^0 = \varepsilon^\infty$, on définit un nouveau modèle dispersif adapté au sol sec:

$$\varepsilon_{r_3}(\omega) = \varepsilon^0 \text{ et } \sigma_3(\omega) = \sigma^0 + \frac{(\frac{\omega}{4\pi\ 10^{10}})^4}{(1 + \frac{\omega}{4\pi\ 10^{10}})^4} \tag{3.19}$$

Si on représente l'évolution des caractéristiques diélectriques des trois sols étudiés en fonction de la fréquence sur une bande allant de quelques MHz jusqu'à une dizaine de GHz, on s'aperçoit dans un premier temps que la permittivité relative décroît avec la fréquence (excepté pour le sable sec où elle reste constante) tandis que la conductivité croît avec la fréquence (Fig. 3.15). L'influence de la teneur en eau est alors visible en comparant pour chaque sable les pentes des courbes de variation (la valeur du coefficient de pente augmente en valeur absolue avec la teneur en eau du sol).



(a) Permittivité relative ε_{r_3}

(b) Conductivité σ_3 $(S.m^{-1})$

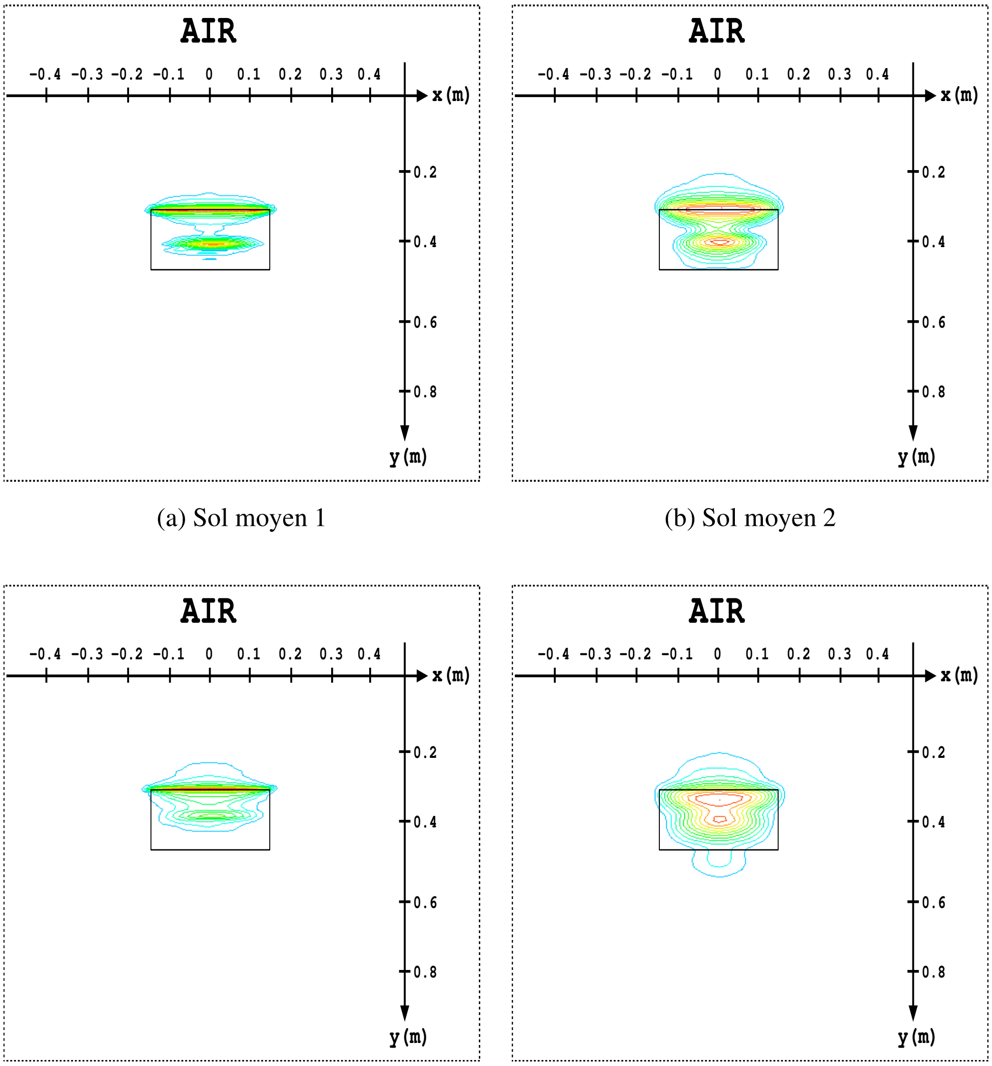
FIG. 3.15 – *Caractéristiques diélectriques des sols étudiés en fonction de la fréquence (GHz)*

On se propose de reconstruire des images à partir de champs diffractés prenant en compte le phénomène dispersif. Dans le processus de reconstruction, les caractéristiques des sols sont supposées constantes (ε_m et σ_m). On compare ces images avec celles n'incluant pas la dispersion.

Images résultantes

Pour la bande de fréquence utilisé, le phénomène dispersif n'apparaît pas dans le cas du sable sec. Aussi, on obtient une image de l'objet diélectrique identique à celle du cas non-dispersif. En revanche, la prise en compte de la dépendance en fréquence joue un rôle important pour les deux derniers sols. Ainsi la permittivité relative du sol moyen varie de 15 à $14{,}9$ tandis que sa conductivité croît de $4\,10^{-3}$ S/m à $6\,10^{-2}$ S/m. Pour le sol humide, on observe une variation de permittivité de 30 à $29{,}3$ alors que la conductivité varie de $3\,10^{-1}$ S/m à $2{,}7\,10^{-2}$ S/m. Pour ces deux derniers types de sol, une image a été reconstruite en tenant compte de la dispersion (Figs. 3.16(a) et 3.16(c)) puis sans en tenir compte (mesures effectuées avec des milieux dispersifs et image reconstruite pour des caractéristiques moyennes) (Figs. 3.16(b) et 3.16(d)).
Même si le phénomène dispersif semble négligeable pour les trois types de sols étudiés dans la bande de fréquence utilisée, une dégradation sur l'image finale apparaît lorsque le phénomène de dispersion n'est pas pris en compte dans le procédé d'inversion (Figs. 3.16(b) et 3.16(d)). Les deux faces de l'objet sont alors moins bien définies. De plus, l'utilisation de fréquences supérieures, en aggravant le caractère dispersif du sol, provoquerait une perte de résolution significative conduisant à une image floue, englobant l'objet réel sans toutefois permettre la reconnaissance géometrique de celui-ci. Néanmoins, on peut remarquer que les erreurs commises sur les caractéristiques du sol introduites dans le processus d'inversion n'engendrent pas d'artefacts dans l'image, ce qui dénote une certaine stabilité de l'algorithme d'imagerie. Il apparaît cependant utile (mais utopique) de connaître les caractéristiques du sol (et donc la loi d'évolution en fonction de la fréquence) afin d'obtenir

une image avec une résolution satisfaisante.



(a) Sol moyen 1

(b) Sol moyen 2

(c) Sol humide 1

(d) Sol humide 2

FIG. 3.16 – *Images reconstruites pour un objet diélectrique dans un milieu dispersif*

II.3 Influence du type d'onde sur l'image reconstruite

Comme pour le phénomène dispersif, l'onde incidente est rarement prise en compte dans les processus de reconstruction décrits dans la littérature. Dans la plupart des cas, un formalisme de type onde plane est utilisé pour modéliser le champ incident. Or, cette hypothèse s'avère inconcevable d'un point de vue pratique: le champ proche rayonné par une antenne ne peut être considéré comme plan. L'algorithme d'imagerie développé dans ce mémoire prend réellement en compte ce champ incident qui présente une dépendance spatio-temporelle complètement quelconque. On propose donc dans cette partie de modéliser, dans un premier temps, le champ proche rayonné par une antenne réelle (antenne papillon décrite plus en détail dans le prochain chapitre). Puis, une étude sur des images d'un objet enterré obtenues avec différents champs incidents est présentée.

Simulation du champ réel

Les données relatives au champ incident réel (ou champ d'antenne) ne sont pas mesurées dans un premier temps mais modélisées. En effet, la mesure du champ proche rayonné par l'antenne n'est pas concevable ici. De plus, contrairement à certains types d'antennes, aucune expression analytique ne décrit l'antenne étidiée ici. Une nouvelle phase de simulation numérique apparaît donc dans cette partie. Celle-ci a été réalisée par J.Y. DAUVIGNAC (Laboratoire d'Électronique Antennes et Télécommunications , Université de Nice-Sophia Antipolis/CNRS) en collaboration avec France-Télécom/CNET La Turbie (J.P. BLOT, BRACHAT, C. DEDEBAN, P. RATAJCZAK et J. HAUSSEGUY) avec le logiciel de simulation SR3D [80118011].

Pour simuler le champ électrique rayonné par l'antenne, le logiciel SR3D utilise une méthode de type éléments finis basée sur une représentation des équations de Maxwell harmonique sous forme intégrale est utilisée. Les densités de courant électriques et magnétiques, calculées avec cette méthode, permettent d'obtenir le champ électromagnétique en tout point de l'espace libre ou dans un milieu dissipatif (sol).

Toute la surface de l'antenne (à la fois le substrat et le métal) est discrétisée en cellules triangulaires, à l'aide d'un maillage adaptatif, choisi pour représenter au mieux les contours de l'antenne (Fig. 3.17). Le nombre de points par longueur d'onde passe ainsi de 20 pour le maillage le plus grossier à 60 pour le maillage le plus fin (au voisinage de l'interface substrat/métal). La simulation peut prendre en compte la connection par un coaxial présente dans la réalité. Cependant, le calcul du champ ne nécessite pas la modélisation exacte du connecteur coaxial. Pour assurer l'excitation de l'antenne, deux dipôles, polarisés dans la direction z et pris en opposition de phase, sont placés au centre du substrat et excitent l'antenne de manière symétrique.

D'un point de vue numérique, la symétrie du problème par rapport au plan $x = 0$ couplé au type d'excitation électrique employée permet de réduire le domaine de calcul à la moitié de l'antenne. Le système linéaire obtenu pour chaque fréquence et représenté par une matrice complexe de taille 15000×15000 est résolu en utilisant une méthode d'inversion de type Cholesky associé à une gestion optimale des matrices par bloc. Malgré les simplifications numériques, le temps de calcul reste important (plus de trois heures pour chaque fréquence). En conséquence, seules quelques fréquences sont étudiées dans cette partie.

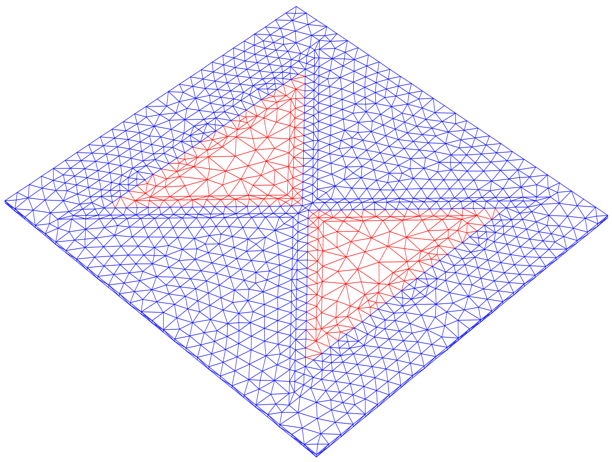


FIG. 3.17 – *Maillage de l'antenne*

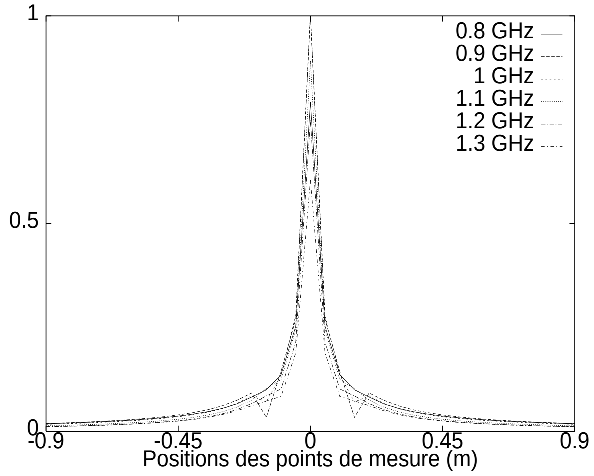


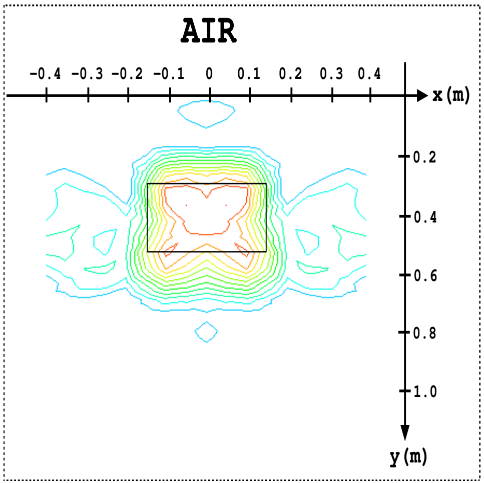
FIG. 3.18 – *Champ d'antenne normalisé dans la bande [0,8;1,3] GHz*

Comparaison des différents résultats

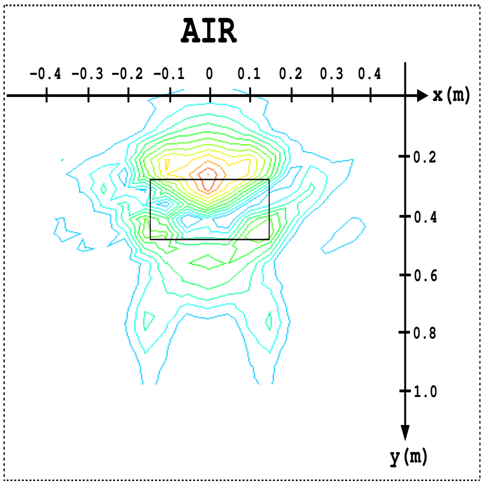
Théoriquement, il est parfaitement concevable d'étudier le problème en illuminant l'objet avec une onde plane (incidence nulle). Cette hypothèse ne posant aucun problème d'un point de vue numérique, une image de l'objet peut être reconstruite à l'aide de l'algorithme d'imagerie (3.19(a)). Le champ diffracté considéré dans le processus de reconstruction est simulé à partir d'une champ incident plan. L'image produite présente quelques artefacts notables qui rendent l'image assez floue (pas de localisation des faces avant et arrières de l'objet, bruit tout autour de l'image). Elle permet néanmoins de rendre compte de l'existence d'une hétérogénéité dans la zone d'étude.
La mise au point pratique de l'algorithme d'imagerie nécessite la prise en compte du champ diffracté réel (ou mesuré). Ce champ est donc simulé dans un premier temps à partir du champ d'antenne calculé précédemment. L'étape de reconstruction offre plusieurs choix.

- La plus classique revient à supposer que le champ incident, générateur du champ diffracté mesuré, est plan (Fig. 3.19(b)). L'image finale est complètement dégradée. Il paraît impossible de localiser l'objet. D'un point de vue pratique, cette image peut complètement être considérée comme du bruit de mesure.

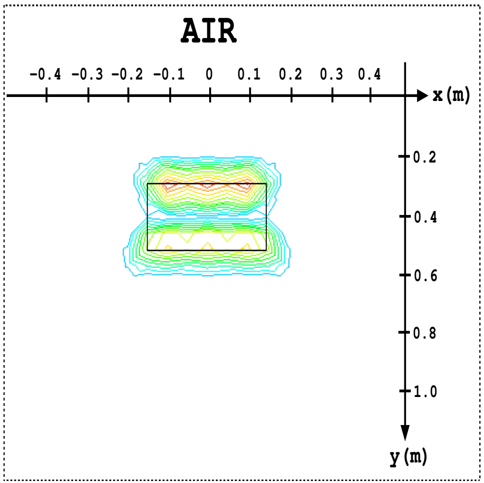
- La possibilité de la prise en compte du champ incident dans la résolution du problème inverse conduit au meilleur résultat (Fig. 3.19(c)). Pour cette image, le champ incident incorporé dans l'algorithme est le vrai champ d'antenne qui est à l'origine du champ diffracté utilisé. On retrouve le résultat provenant d'une variation des positions de source et d'une variation de fréquence.



(a) Champ plan (problèmes direct et inverse)



(b) Champ d'antenne (problème direct) + champ plan (problème inverse)



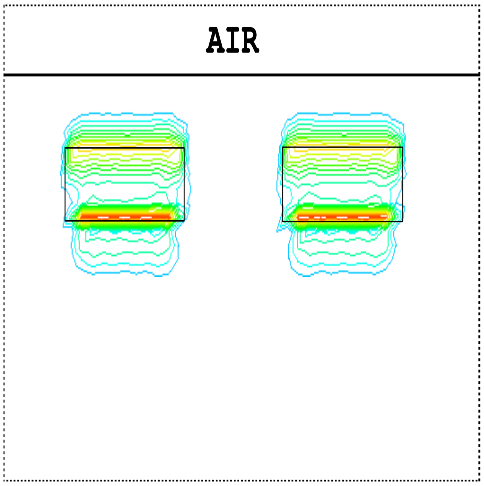
(c) Champ d'antenne (problèmes direct et inverse)

FIG. 3.19 – *Reconstructions pour différents champs incidents*

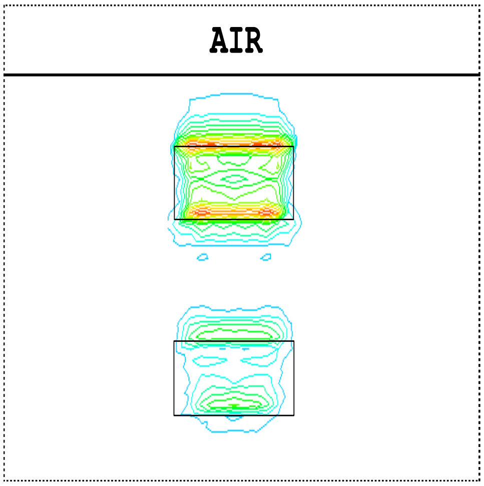
Cette brève étude souligne parfaitement l'influence prépondérante du champ incident pris en compte dans le processus d'inversion. Une erreur sur ce champ, ou une non-prise en compte implique une nette dégradation de l'image. Une étude complémentaire sur le type d'antennes à employer ainsi que sur le champ proche rayonné par celles-ci permettrait de dégager certaines tendances conduisant à une amélioration des images.

II.4 Reconstructions d'hétérogénéités enfouies

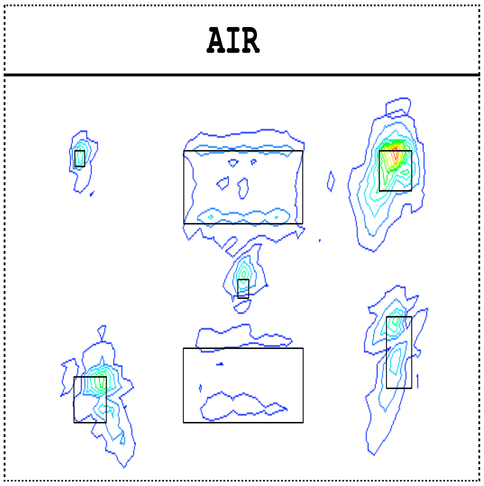
Pour terminer avec les résultats issus de simulation, quelques images de domaines "inhomogènes" (constitués de plusieurs objets) sont reconstruites.
En effet, dans tous les réultats présentés jusqu'ici, un seul objet se trouvait dans le domaine à reconstruire. Afin de démontrer l'efficacité de l'algorithme mis en place, en ce qui concerne la discrimination des objets présents, quelques configurations particulières sont proposées. Ainsi, plusieurs objets ont été placés dans différentes configurations réalistes d'un point de vue pratique (Fig. 3.20).
Dans les trois premières reconstructions, l'objet principal est un diélectrique ($\varepsilon_{r_D} = 3$, $\sigma_D = 0\, S.m^{-1}$) rectangulaire ($45 \times 28\, cm^2$) enterré dans un sable sec ($\varepsilon_{r_3} = 4$, $\sigma_3 = 4.10^{-3}\, S.m^{-1}$) à une profondeur de $30\, cm$. Le champ incident est du type Rayleigh-Gaussien comme précédemment pour la même bande de fréquence [0,3;1,3] MHz. Le pas en espace est de l'ordre de $4\, cm$ (101 points). Les inhomogénéités entourant les deux objets (Fig. 3.20(c)) représent des trous d'air ($\varepsilon_r = 1$, $\sigma = 0$ S/m).
Dans chacune de ces images, il est possible de distinguer clairement les différents objets présents. Les images présentant des objets se chevauchant (*"overlapping"*) (Figs. 3.20(b) et 3.20(c)) rendent compte de l'efficacité de la variation d'incidence.
La dernière reconstruction fut choisie pour décorée les cartes de vœux du LCPC pour l'année 1997. Elle représente la reconstruction tomographique du sigle LCPC simulée dans la bande de fréquence [0,7;2] GHz pour des lettres modélisées avec des cellules de $1\, cm$ de côté.



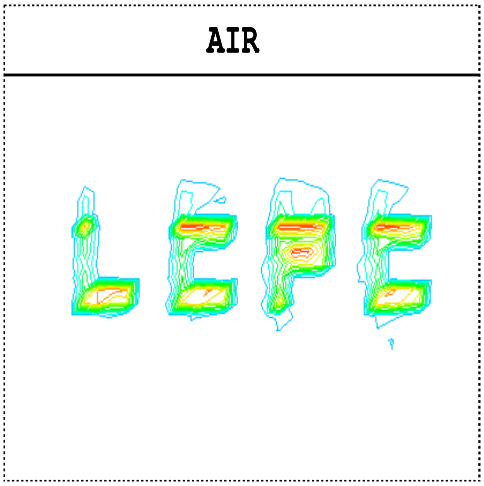
(a) Reconstruction de deux objets enterrés à la même profondeur



(b) Reconstruction de deux objets enterrés se chevauchant



(c) Reconstruction de deux objets enterrés se chevauchant entourés d'inhomogénéités (air)



(d) Reconstruction du sigle LCPC

FIG. 3.20 – *Reconstructions d'objets multiples*

Chapitre 4

Images reconstruites partir de donnes exprimentales

Sommaire

Après avoir étudié les propriétés de la méthode d'imagerie microonde en utilisant des données synthétiques obtenues après une phase de simulation du problème direct, l'efficacité des algorithmes reste à prouver en reconstruisant des images d'objets enterrés à partir de données réelles. Cette étape fournit ainsi un moyen de valider d'un point de vue pratique la méthode et de dégager certaines tendances visant à améliorer celle-ci.
Mais avant de passer aux résultats issus d'essais sur le terrain, il semble nécessaire, dans un premier temps, de définir le domaine d'étude rencontré suivi d'une description complète de la mesure (matériel utilisé et configuration choisie). Les premiers résultats relatifs aux champs mesurés ou modélisés sont ensuite présentés avant la reconstruction des images en coupe tomographique de l'objet.

I Domaine d'étude

Le domaine d'étude (Fig. 4.1) se compose d'une fosse d'essai de dimension $3 \times 3 \times 2{,}5\,m^3$ remplie d'un matériau sableux. La fosse est elle-même encastrée dans un sol de béton. Dans cette fosse est fixé, à une profondeur de $1{,}1\,m$, un cube de polystyrène de $80\,cm$ de côté. Enfin, une barre de polystyrène de dimension $1 \times 0{,}3 \times 0{,}2\,m^3$ et de section rectangulaire est enterrée à un profondeur de $30\,cm$. C'est ce dernier objet que nous proposons de reconstruire à l'aide de la méthode d'inversion décrite précédemment.
S'il est nécessaire de connaître de manière précise à la fois le champ d'antenne et le champ diffracté par l'objet seul, il est tout aussi important, en vue d'une bonne reconstruction tomographique de l'objet, de connaître les caractéristiques diélectriques des milieux rencontrés. Les propriétés des sols ont été le sujet de nombreuses études expérimentales et théoriques depuis de nombreuses années. Ces études ont conduit à une augmentation des données collectées et des modèles théoriques mis en place. Cependant, comme on l'a vu précédemment (étude de la dispersion), aucun des modèles n'est universel. En effet, même si la composition d'un échantillon d'un sol est connue (composants et propriétés individuels de chacun d'eux), cela ne suffit pas pour définir la nature diélectrique du sol. La taille des particules, la nature électrochimiques des interfaces, la manière dont l'eau est distribuée dans le sol, sont autant de facteurs qui affectent le comportement diélectrique du sol.
Les premiers travaux sur la caractérisation des sols ont été effectué pour les basses fréquences. L'utilisation des microondes à l'auscultation du sous-sol a conduit au développement de techniques adaptées aux hautes fréquences. Parmi elles, on peut noter deux grandes tendances. La première, peu adaptée à l'auscultation en temps réel, consiste à étudier les caractéristiques du sol par une mesure en mode transmission [87][38]. En plaçant les antennes dans des forages, ou en remplissant un cable coaxial du matériau à ausculter, on mesure de part et d'autre du dispositif le coefficient de transmission de l'onde émise, directement relié à la permittivité complexe du sol.
L'autre catégorie de méthodes de mesures consistent à étudier l'impédance d'entrée de l'antenne qui se trouve en contact ou dans le sol. Parmi les techniques existantes, certaines travaillent dans le régime temporel (*Time Domain Reflection method*). Il s'agit alors de mesurer le temps de retour du signal correspond à l'écho de sol [42][43]. D'autres méthodes sont utilisées dans le domaine fréquentiel (*Frequency Domain Reflection method*). C'est une méthode de ce type qui nous a permis de retrouver les constantes diélectriques du sable

(méthode capacitive). On calibre le coefficient de réflexion de l'antenne dans le domaine fréquentiel en le comparant à des courbes simulées avec des caractéristiques du sol connues. On procède ici par identification des caractéristiques diélectriques du sol.
En utilisant cette dernière méthode, les propriétés électromagnétiques du sable ont été mesurées quelques temps auparavant. Toutefois, il est utile de remarquer que les valeurs mesurées ($\varepsilon_{r_3} = 3{,}7$; $\sigma_3 = 4{,}12\,10^{-3}\,S.m^{-1}$), dépendant de nombreux paramètres (humidité, température, etc), restent valables uniquement pour la configuration initiale pour laquelle l'objet n'est pas encore présent. La présence de celui-ci modifie les propriétés du sol dans sa partie supérieure. En effet, lors de l'enfouissement de l'objet, le sable remué s'assèche (apport d'air) et possède désormais, dans le domaine étudié, des caractéristiques proches de celles d'un sable sec ($\varepsilon_{r_3} = 2{,}55$; $\sigma_3 = 2{,}21\,10^{-4}\,S.m^{-1}$).
Dans l'étude expérimentale, deux types de sable sont donc considérés: le premier sable ($\varepsilon_{r_3} = 3{,}7$; $\sigma_3 = 4{,}12\,10^{-3}\,S.m^{-1}$) avant que l'objet ne soit enterré et le second ($\varepsilon_{r_3} = 2{,}55$; $\sigma_3 = 2{,}21\,10^{-4}\,S.m^{-1}$) lorsque l'objet recherché est présent.

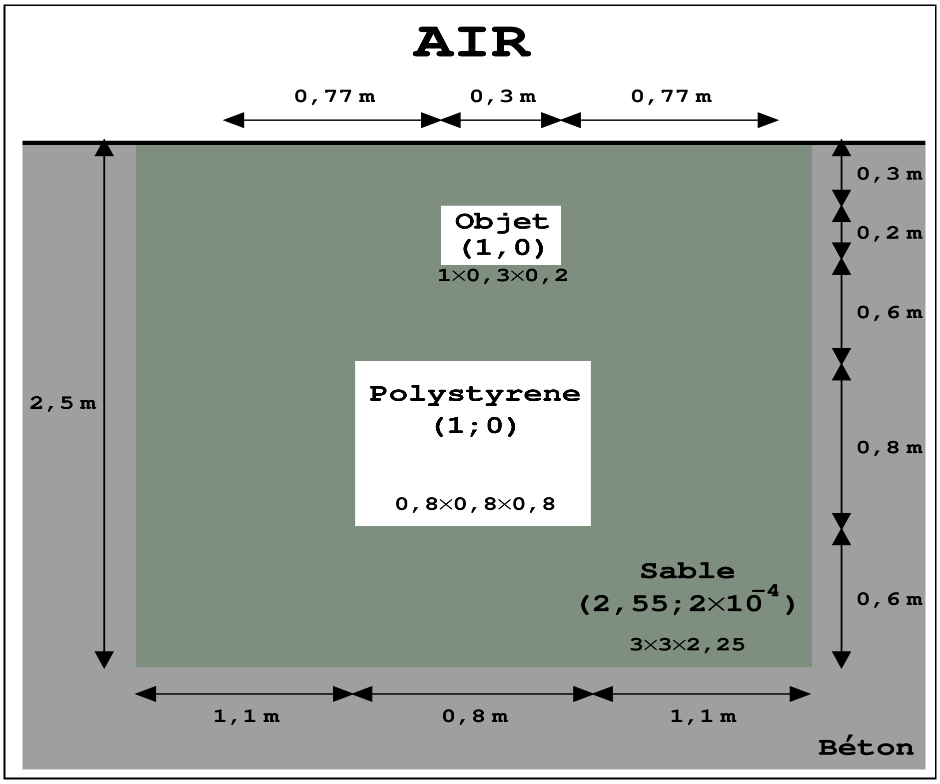


FIG. 4.1 – *Domaine d'étude*

II Matériel de mesure

Le matériel utilisé au cours des mesures comprend un analyseur de réseau HP8510 de type vectoriel au bout duquel se trouvent deux antennes dites "papillon" (Fig. 4.2). Ces deux éléments forment ainsi un radar synthétique, capable de détecter et de localiser des objets enterrés en utilisant des données émises et mesurées dans le domaine fréquentiel.

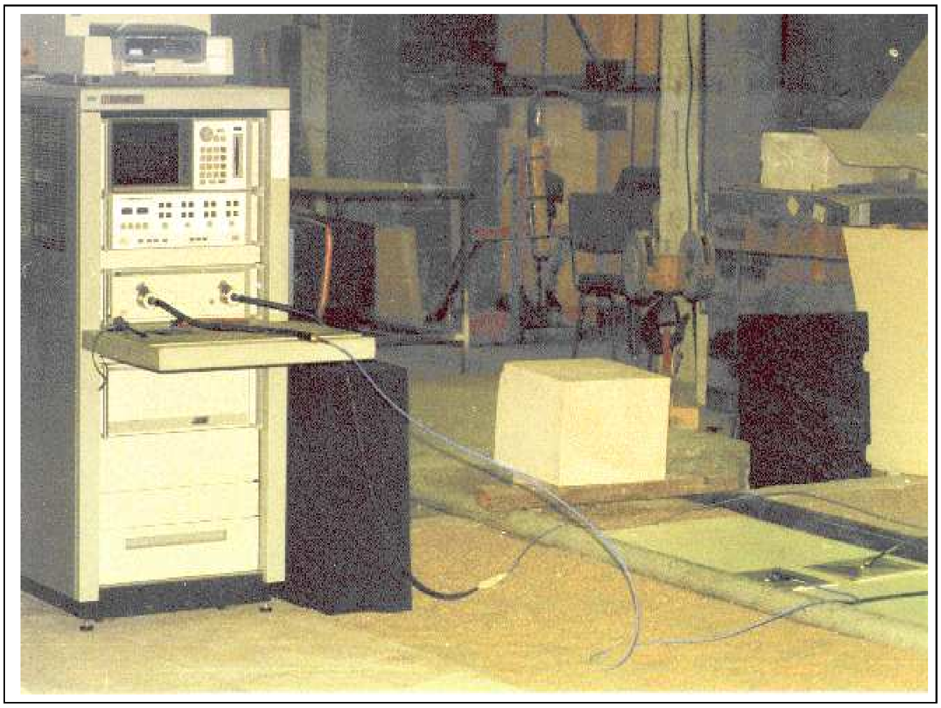


FIG. 4.2 – *Système de mesure (Analyseur + Antennes)*

II.1 Analyseur de réseau HP8510

L'analyseur est le coeur même du radar synthétique. Un analyseur de réseau de type vectoriel permet de mesurer l'amplitude et la phase de réseaux et de nombreux composants tels que filtres, amplificateurs ou antennes. Pour notre étude, seules les mesures de transmission sont prises en compte. Ainsi, un signal incident engendré par une source RF contrôlée par le HP8510 est appliquée aux antennes et comparé au signal transmis depuis l'entrée du dispositif de mesure.
L'analyseur de réseau utilisé par le Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées (LRPC) de Rouen (76) comprend différents instruments tels que:
- un écran et un processeur (HP8510C),
- un dispositif de mesure de paramètres S (HP8515A),
- un vobulateur synthétisé (HP83631A)

ainsi que d'autres composants parmi lesquels des périphériques tels qu'une imprimante et une unité de disque, commandés directement par la face avant de l'analyseur (Fig. 4.3). Des cables HP semi-rigides permettant une meilleure liaison entre l'analyseur et les antennes font aussi partie du dispositif de mesure.
Après avoir déterminé la bande de fréquence utilisée pour les mesures, la source, balayée de la fréquence la plus basse vers la fréquence la plus haute selon une rampe linéaire, émet le signal RF qui est divisé en un signal incident transmis à l'antenne d'émission (notée E) et un signal de référence auquel sera comparé le signal transmis. Le dispositif de mesure achemine ensuite le signal transmis entre l'antenne de réception (notée R) et l'analyseur qui traite ce signal à l'aide d'un microprocesseur intégré. Le résultat de la mesure est alors affiché sous le format désiré (amplitude et phase, parties réelle et imaginaire, affichages po-

laires ou d'abaque de Smith...) et peut être envoyé vers les périphériques.
Le dispositif de mesure de paramètres S assure enfin la sélection automatique des paramètres S_{11}, S_{12}, S_{21} et S_{22}. Ces paramètres S sont essentiellement utilisés en hyper-fréquences microondes car ils permettent une notation simple avec des données exactes sur les performances des antennes. Ils représentent le rapport de deux quantités complexes, le premier indice indiquant le port où provient l'énergie tandis que le second indique le port où l'énergie est incidente. Notre étude porte uniquement sur le paramètre S_{12}.

FIG. 4.3 – *Analyseur de réseau HP8510*

II.2 Antennes papillon

Si l'analyseur demeure le coeur du système radar, les antennes jouent elles le rôle d'organes sensoriels essentiels à une bonne mesure.
En effet, le choix de l'antenne conditionne la performance du système radar. Comme le montrent les études précédentes effectuées à partir de simulations, afin de reconstruire une image satisfaisante (correspondant à un remplissage du plan de Fourier maximal), elle doit présenter à la fois une large bande de fréquence, une directivité et une adaptation avec le sol maximales. De plus, il est préférable d'utiliser deux antennes respectivement pour l'émission et la réception.
Quatre grands types d'antenne sont ainsi utilisées dans les systèmes de radar de sol (les dipoles résistifs, les antennes cornets, les antennes papillons et les antennes indépendantes de la fréquence [22][21]). L'antenne mise à notre disposition pour les mesures est une antenne papillon (*bow-tie antenna*) (Figs. 4.4 & 4.5) utilisée avec succès dans de nombreux systèmes

radar [15][66]. Elle présente une large bande passante pour un rapport d'ondes stationnaires ROS<2 [48]. Ses propriétés correspondant à celles des dipôles épais [86] lui permettent de rayonner dans la bande de fréquence [0,3;1,3] GHz.

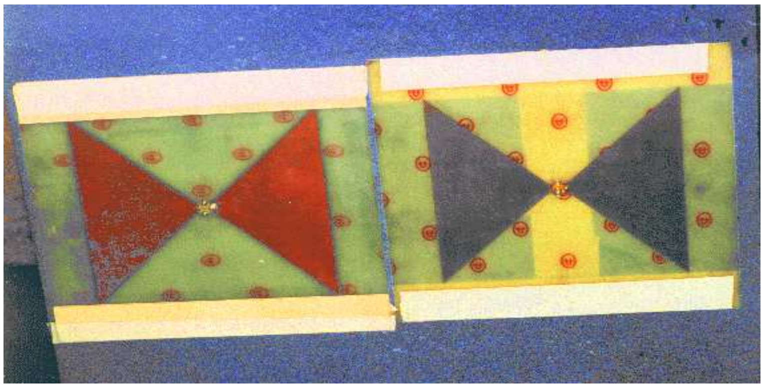


FIG. 4.4 – *Image des deux antennes papillon*

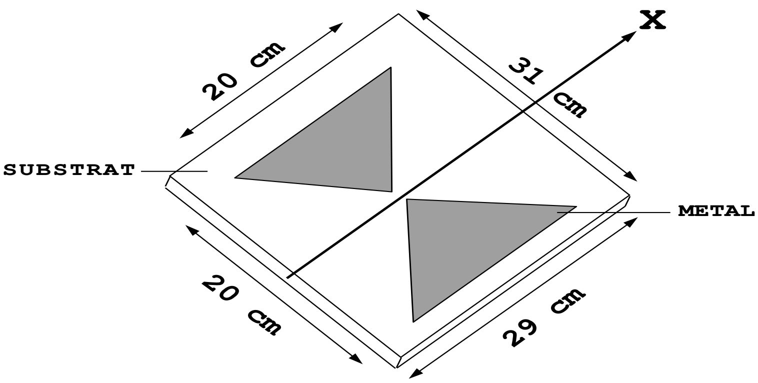


FIG. 4.5 – *Description d'une antenne papillon*

III Configuration de la mesure

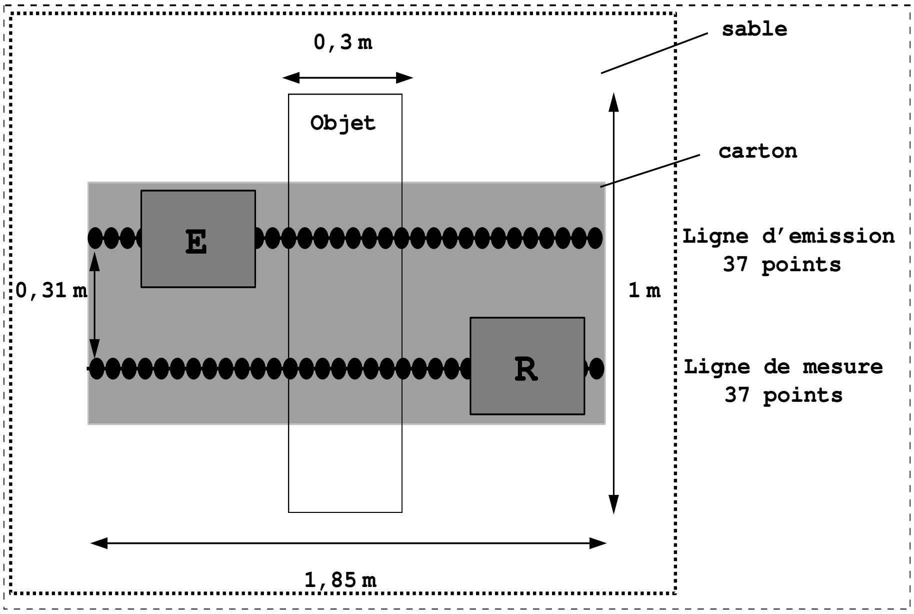


FIG. 4.6 – *Configuration de la mesure (vue de dessus)*

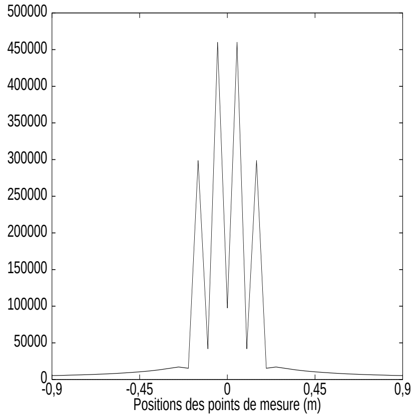
Une configuration en mode réflection de type multi-bistatique est choisie, en accord avec les hypothèses prises en compte dans les algorithmes d'imagerie. Pour chaque position X_S de l'antenne émettrice E, le champ diffracté est mesuré par variation de position X de l'antenne réceptrice R le long de la ligne de mesure. Celle-ci, tout comme la ligne d'émission, longue de $1{,}85\,m$ est constituée de 37 points espacés d'un pas $\Delta_i = 5\,cm$ qui satisfait les critères imposés par l'approche spectrale. Deux conduites en PVC guident les antennes le long de la ligne de mesure et d'émission. Pour réduire au maximum les frottements entre les antennes et l'interface air/sol, une bande de carton supposé invisible pour les mesures est posée sur le sol aplani. On suppose dans toute la suite une parfaite adaptation des antennes avec le sol (coefficient de réflexion nul) correspondant au remplissage optimal du plan spectral pour cette configuration.
Cependant, pour tenter d'éliminer au mieux les multiples interférences pouvant bruiter les mesures (dûes au caractère omnidirectionnel des antennes), chacune d'elles est recouverte d'une large épaisseur d'absorbant. L'encombrement spatial de l' antenne entourée d'absorbant, couplé au critère spatial imposé ($\Delta_i \leq \dfrac{\lambda_1(f_{max})}{2}$) ne permet en aucun cas la prise en compte de toutes les données si les lignes de mesure et d'émission sont confondues. Par conséquent, et contrairement aux hypothèses de la méthode de reconstruction, les points de mesure et les points d'émission ne varient pas sur une seule et même ligne mais sur deux lignes parallèles, distantes de $31\,cm$.
Du point de vue fréquentiel, les mesures sont effectuées ainsi pour 101 fréquences comprises entre $f_{min} = 0{,}3$ GHz et $f_{max} = 1{,}3$ GHz. Au total, pas moins de 300000 données sont mesurées en l'espace de quelques jours pour cette configuration, avec le système radar décrit précédemment.

IV Champs expérimentaux

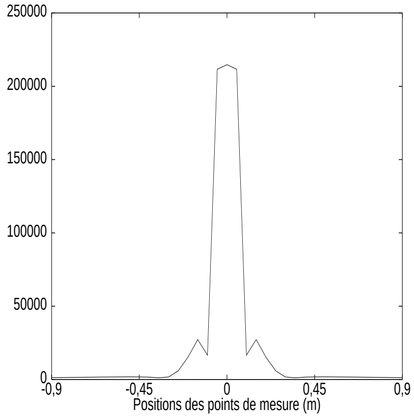
On présente, dans cette partie, les résultats sur le champ diffracté mesuré et sur le champ d'antenne simulé. Une courte étude à propos du bruit de mesure est proposée par la suite.

IV.1 Champ incident calculé

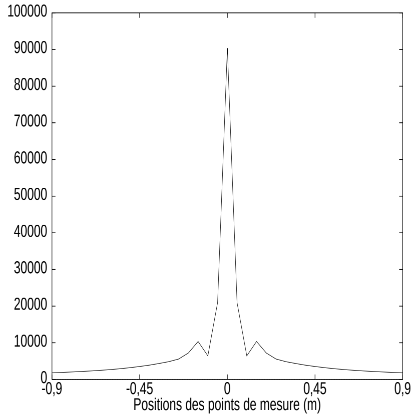
Comme on l'a vu précédemment, à partir des densités de courant à la surface de l'antenne, il est possible de calculer le champ électrique généré par l'antenne sur la ligne de mesure L_1 longue de $1{,}85$ m. Cependant, si en théorie le champ incident doit être pris le plus près possible du centre d'excitation ($y_0 = 0$ m), la simulation numérique ne permet pas de satisfaire rigoureusement cette hypothèse. Le champ d'antenne est donc calculé successivement dans l'air pour différentes hauteurs y_0 (15 mm, 25 mm, 50 mm et 75 mm) et pour 21 fréquences espacées de 50 MHz. On représente alors le module des champs obtenus pour certaines fréquences dans la bande de fréquence étudiée (Figs. 4.7 à 4.10).
L'allure du champ dépend bien évidemment de la fréquence ainsi que de la hauteur y_0. D'après les mesures réalisées les plus proche du centre de l'antenne pour les fréquences les plus hautes (Fig. 4.7 (c) à (f)), celle-ci possède une répartition spatiale proche d'une antenne directive (faisceau maximum au point central et largeur à mi-hauteur faible devant la ligne de mesure). Pour les plus basses fréquences, apparaissent deux pics secondaires de part et d'autre du point central espacés d'une distance voisine des dimensions de l'antenne (30 cm) (Fig. 4.7 (a) à (d)). Ces pics disparaissent peu à peu quand y_0 augmente. Des problèmes surviennent aussi lorsque le champ est rétropropagé afin d'accéder aux valeurs en $y_0 = 0$ m à partir des données simulées. Pour les basses fréquences, les pics secondaires ne réapparaissent pas. Les champs obtenus par rétropropagation se révèlent donc peu satisfaisants pour pouvoir être utilisés par la suite. Cet aspect compromet l'emploi des champs simulées à des hauteurs trop grandes. L'emploi des fréquences les plus basses ($f \leq 0{,}7$ GHz) est compromis en raison de la profondeur de l'objet enterré par rapport à la longueur d'onde correspondante (couplage entre l'objet et l'antenne).
Un moyen de s'affranchir de ce problème consiste à calculer le champ généré par l'antenne non pas dans l'air mais dans le sol, ou, dans un premier temps, dans l'air sur une bande de fréquence image de la première dans l'homothétie de rapport ε_{r_3} (Fig. 4.12). Cet artifice permet ainsi de calculer de manière précise le champ pour un nombre de fréquences plus important que pour une modélisation dans l'air. Cette hypothèse n'est concevable que dans le cas d'une parfaite adaptation de l'antenne avec le sol (hypothèse prise en compte dans le processus de reconstruction).
Enfin, une autre configuration est modélisée (Fig. 4.11). Celle-ci considère que la mesure du champ incident s'effectue non pas sur la même ligne que l'émission ($z = 0$) mais sur une ligne parallèle dituée à $0{,}15$ m de la première, comme dans la configuration choisie.



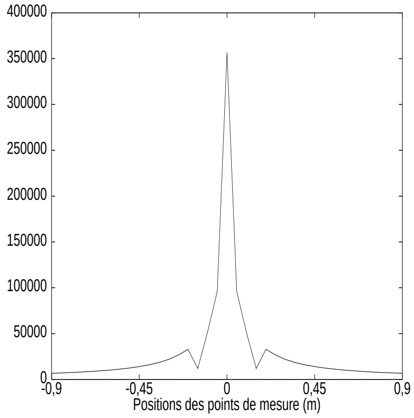
(a) 0,3 GHz



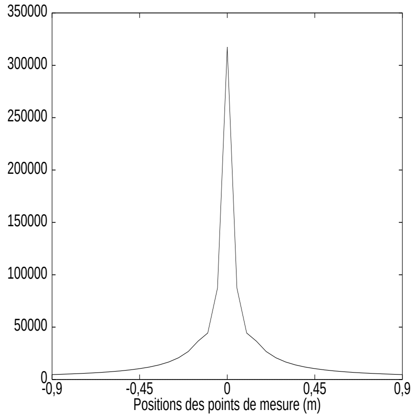
(b) 0,5 GHz



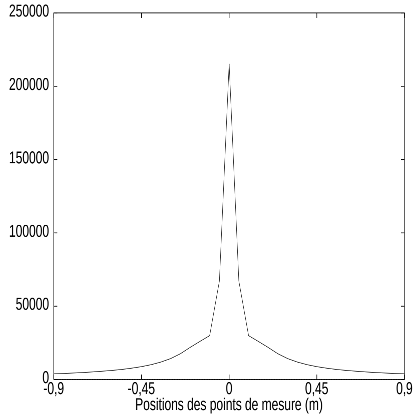
(c) 0,7 GHz



(d) 0,9 GHz

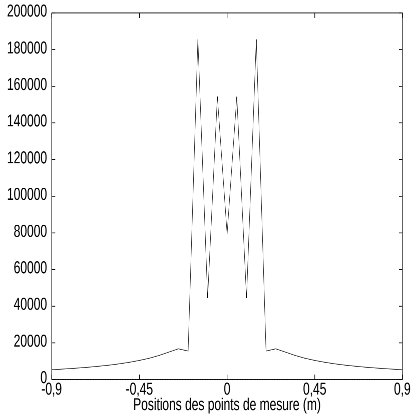


(e) 1,1 GHz

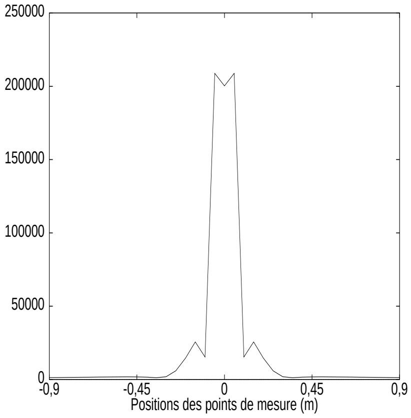


(f) 1,3 GHz

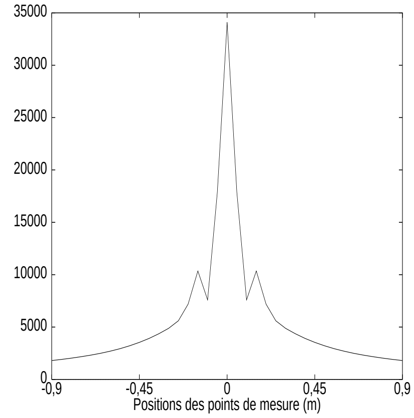
FIG. 4.7 – *Module du champ incident simulé dans l'air* ($y = 15$ *mm*) *à différentes fréquences*



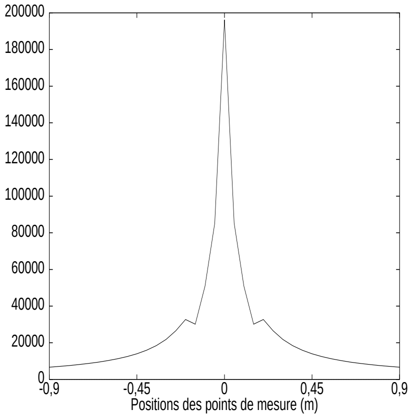
(a) 0,3 GHz



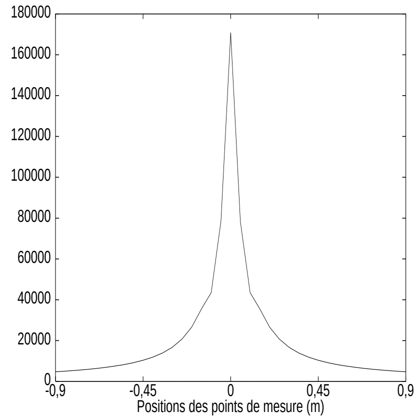
(b) 0,5 GHz



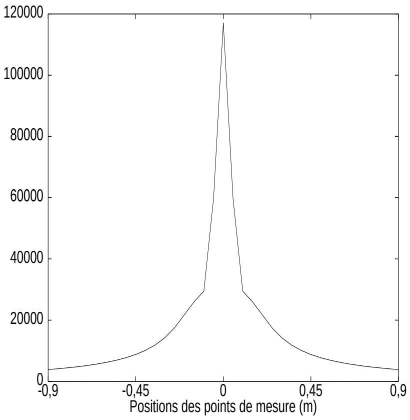
(c) 0,7 GHz



(d) 0,9 GHz

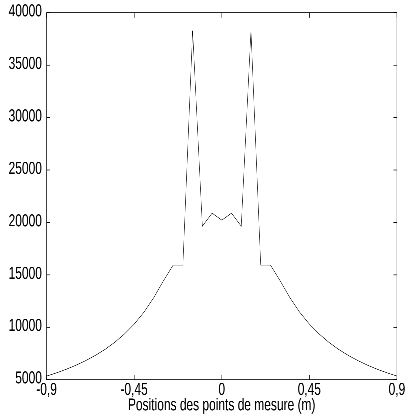


(e) 1,1 GHz

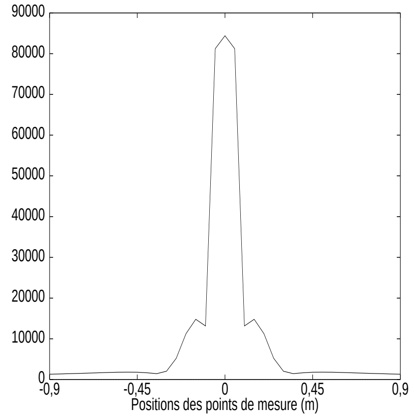


(f) 1,3 GHz

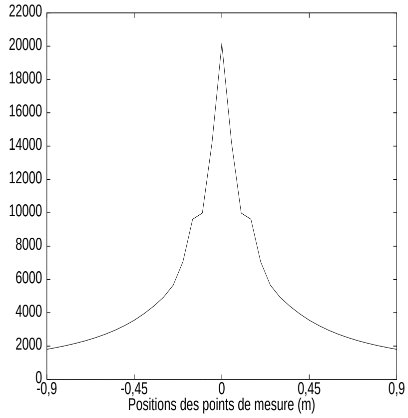
FIG. 4.8 – *Module du champ incident simulé dans l'air ($y = 25$ mm) à différentes fréquences*



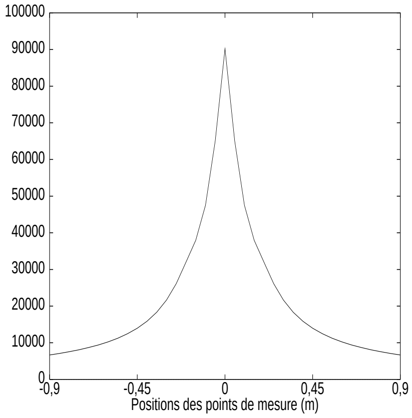
(a) 0,3 GHz



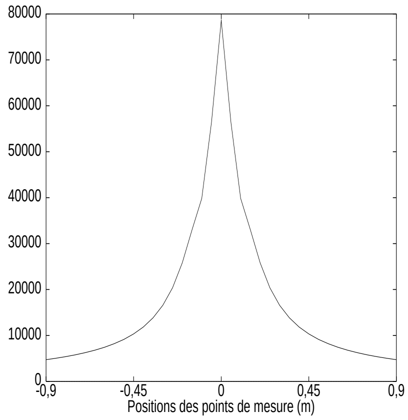
(b) 0,5 GHz



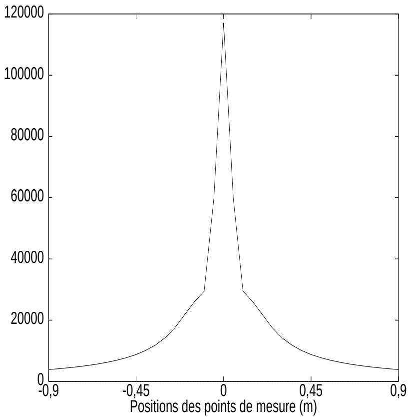
(c) 0,7 GHz



(d) 0,9 GHz

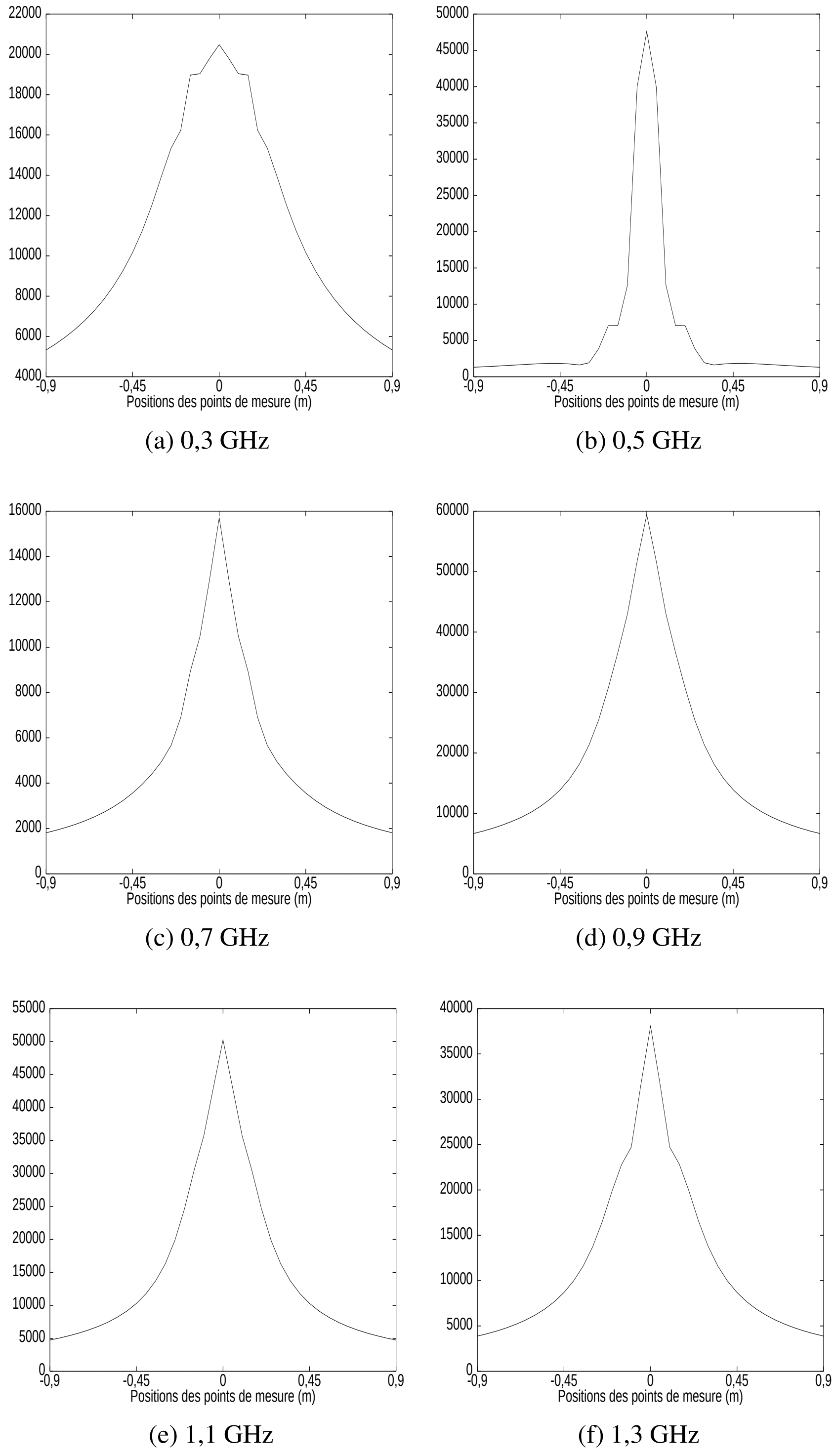


(e) 1,1 GHz



(f) 1,3 GHz

FIG. 4.9 – *Module du champ incident simulé dans l'air* ($y = 50$ *mm*) *à différentes fréquences*

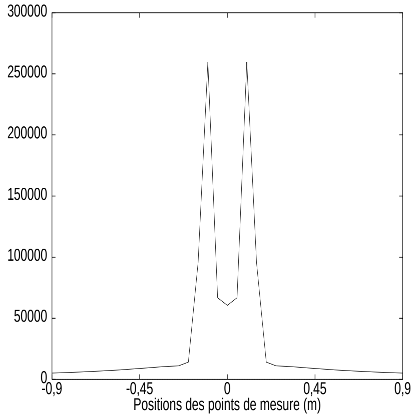


(a) 0,3 GHz (b) 0,5 GHz

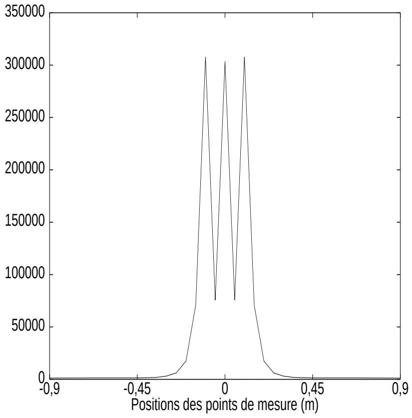
(c) 0,7 GHz (d) 0,9 GHz

(e) 1,1 GHz (f) 1,3 GHz

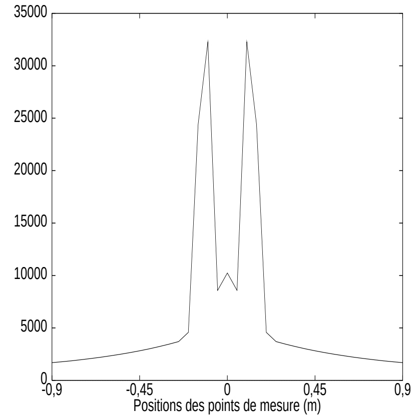
FIG. 4.10 – *Module du champ incident simulé dans l'air ($y = 75\,mm$) à différentes fréquences*



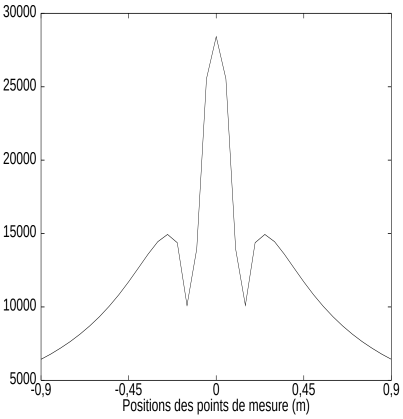
(a) 0,3 GHz



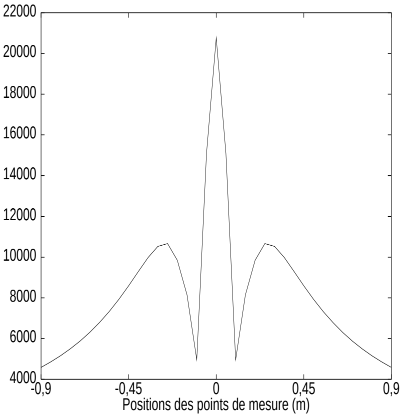
(b) 0,5 GHz



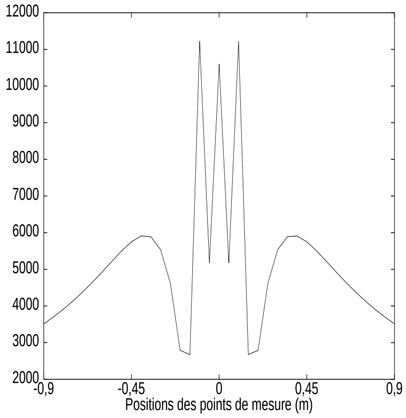
(c) 0,7 GHz



(d) 0,9 GHz

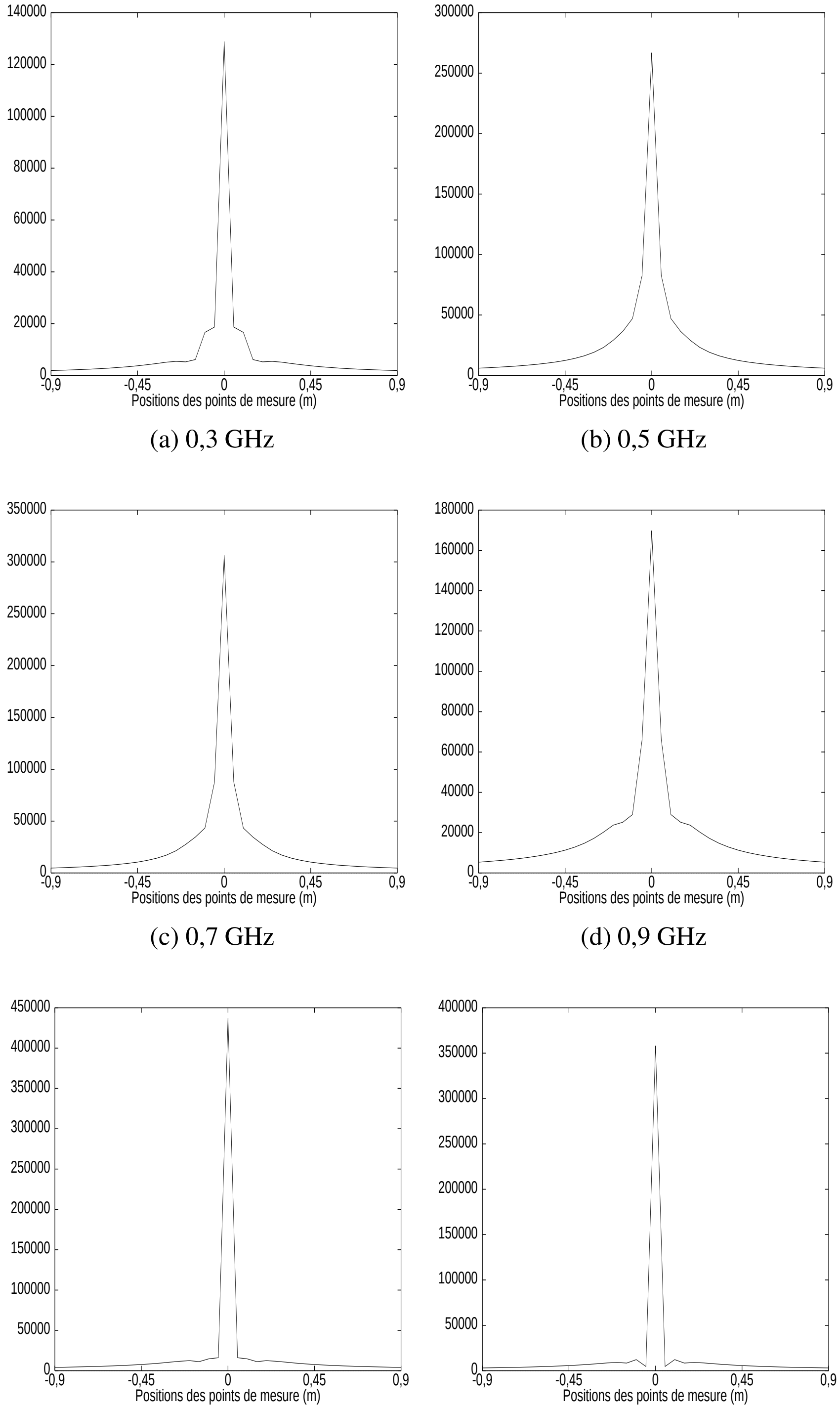


(e) 1,1 GHz



(f) 1,3 GHz

FIG. 4.11 – *Module du champ incident simulé dans l'air ($y = 15\,mm$ + décalage) à différentes fréquences*



(a) 0,3 GHz (b) 0,5 GHz

(c) 0,7 GHz (d) 0,9 GHz

(e) 1,1 GHz (f) 1,3 GHz

FIG. 4.12 – *Module du champ incident simulé dans l'air (bande homothétique) à différentes fréquences*

IV.2 Champs diffractés mesurés

Les données relatives au champ diffracté ont été recueillies lors d'une campagne de mesure effectuée au sein du LRPC de Rouen avec le concours de Mlle O. BLONDEL, Mrs J. CARIOU et A. GENDRON.
Toutefois, si en théorie, le champ diffracté par l'objet seul est nécessaire à la reconstruction d'une image en coupe tomographique, ce paramètre n'est, en pratique, pas mesuré directement. Le signal provenant de l'objet seul (ou signal utile) apparaît en fait noyé dans le signal mesuré constitué par de nombreux signaux parasites (Fig. 4.13).

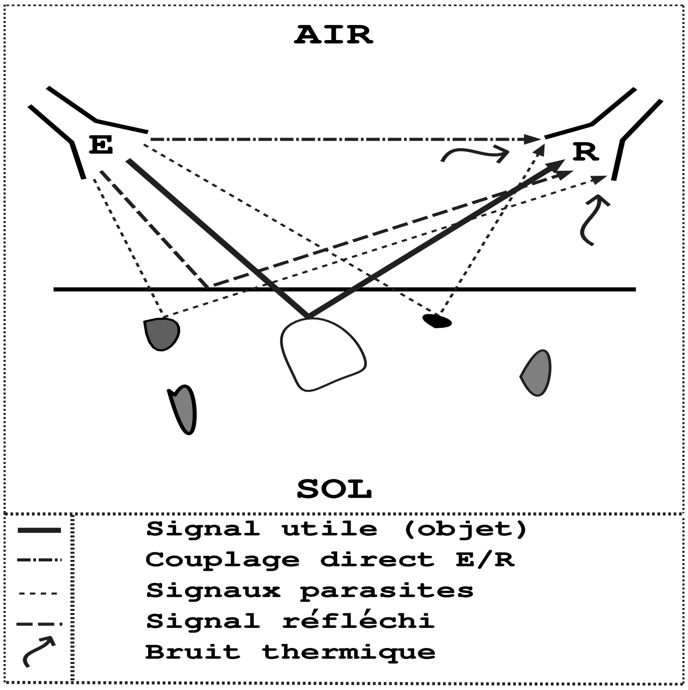


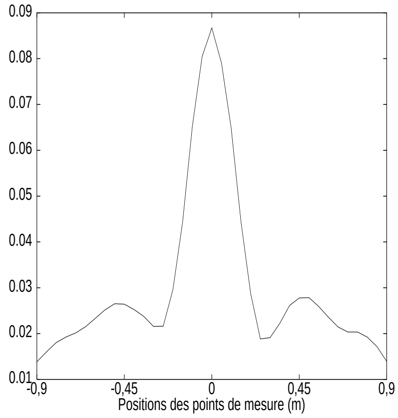
FIG. 4.13 – *Signal mesuré*

De nombreuses techniques d'extraction du signal utile existent tant dans le domaine spatial que dans le domaine spectral. L'une des plus courantes consiste à retrancher des données réelles E^D_{re} le champ moyen mesuré E^D_{moy} défini par:

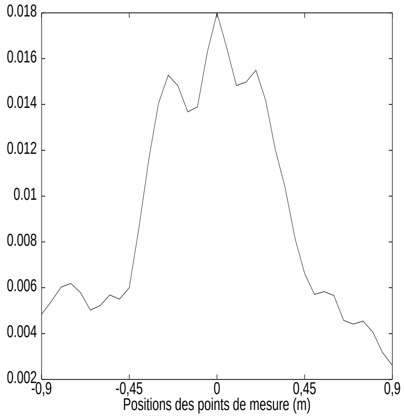
$$E^D_{moy} = \frac{1}{NOXI} \sum_{k=1}^{NOXI} E^D_{re}(X_k) \tag{4.1}$$

Cette technique, qui ne nécessite qu'une unique série de mesure, est relativement efficace dans le cas de signaux parasites constants (couplage direct et champ réfléchi) soit à variation rapide et aléatoire (signaux parasites).
Un autre moyen de résoudre ce problème consiste à calibrer les mesures sur un domaine ne contenant pas l'objet étudié. Le champ recueilli, ou champ initial E^D_0, est alors retranché du champ réel E^D_{re}.
Pour comparer ces deux types de filtrage spatial et vérifier leur influence sur l'image résultante, une première série de mesures est effectuée en l'absence d'objet (données initiales). Une seconde série de mesures est ensuite réalisée en présence de l'objet enterré (données réelles).

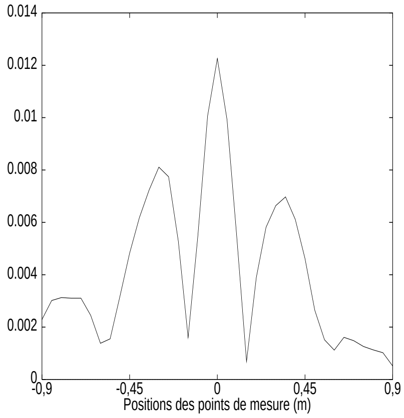
L'obtention du champ diffracté par l'objet seul est alors possible en retranchant des données réelles soit E^D_{moy}, soit E^D_0 pour chaque fréquence et pour chaque position de source.
La répartition spatiale du module du champ mesuré est présentée pour chaque série de mesures, à différentes fréquences (Fig. 4.14 à 4.17) et pour une position de source prise au centre de la ligne.
Avant de traiter ces données et de reconstruire les images, on peut déjà noter une nette différence entre le champ diffracté calculé par moyennage (Fig. 4.16) et celui calculé par calibration (Fig. 4.17). La présence de l'objet enterré perturbe peu le module du champ mesuré (champ initial et champ réel quasiment identiques). De plus, les tentatives d'identification de l'objet enterré (permittivité comprise entre 1 et 3) à partir des champs diffractés présentés s'avèrent toutes stériles. Une étude sur la précision peut apporter quelques indications sur la validité des mesures.



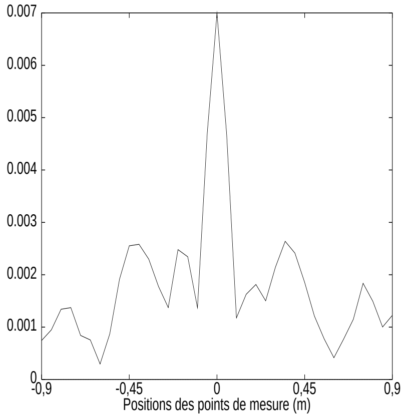
(a) 0,3 GHz



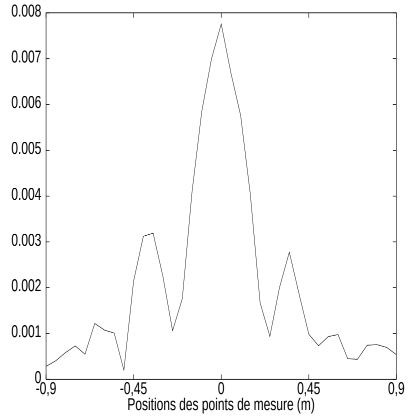
(b) 0,5 GHz



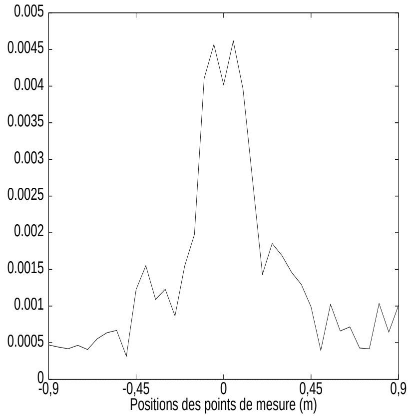
(c) 0,7 GHz



(d) 0,9 GHz

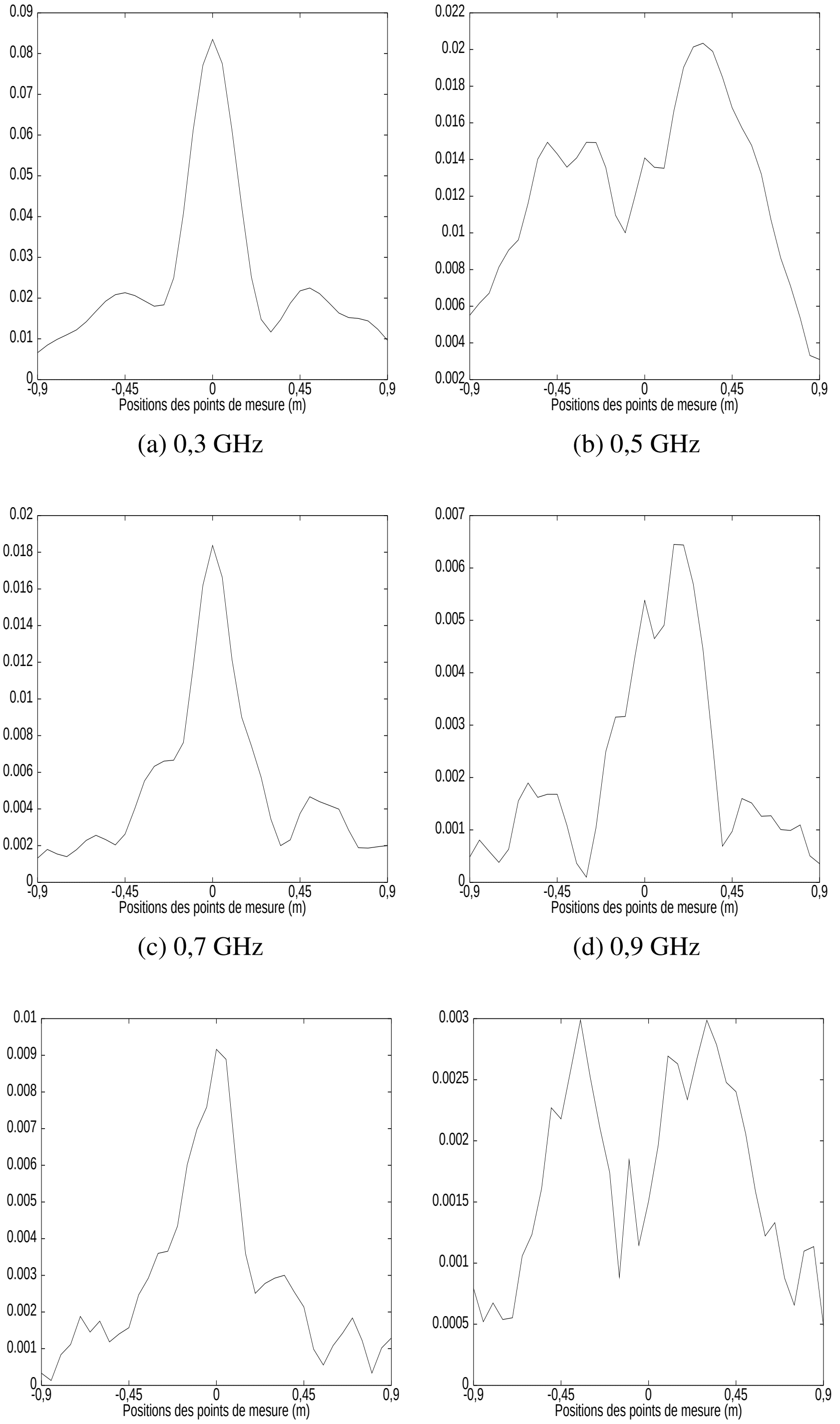


(e) 1,1 GHz



(f) 1,3 GHz

FIG. 4.14 – *Module du champ initial E_0^D à différentes fréquences*

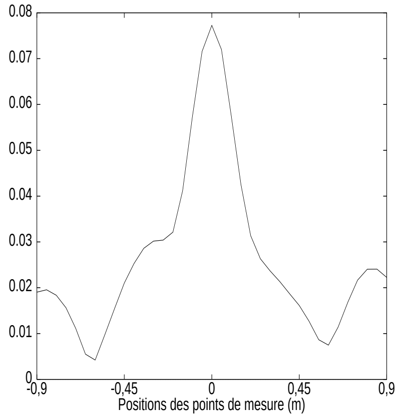


(a) 0,3 GHz (b) 0,5 GHz

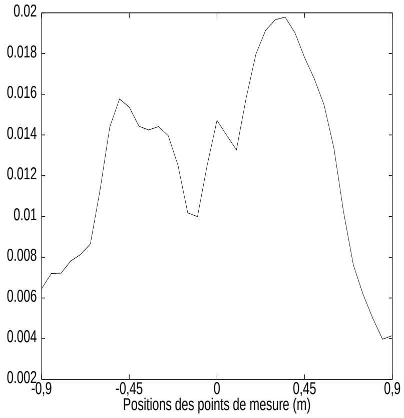
(c) 0,7 GHz (d) 0,9 GHz

(e) 1,1 GHz (f) 1,3 GHz

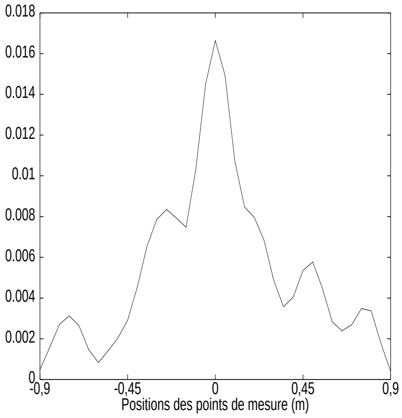
FIG. 4.15 – *Module du champ réel E_{re}^{D} à différentes fréquences*



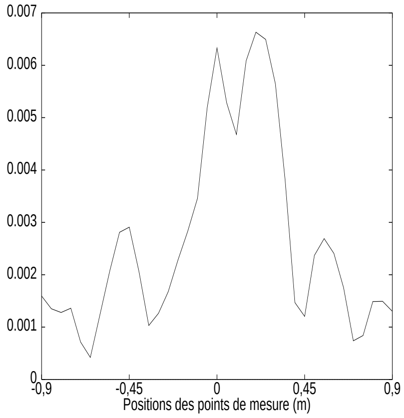
(a) 0,3 GHz



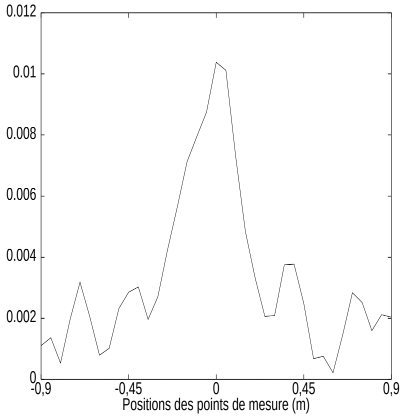
(b) 0,5 GHz



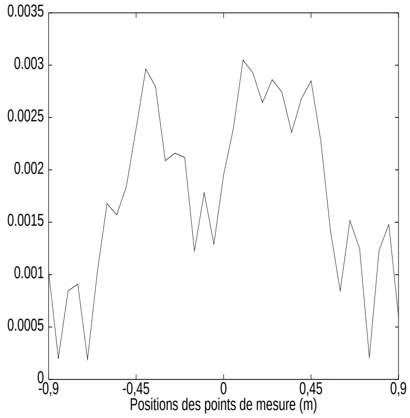
(c) 0,7 GHz



(d) 0,9 GHz

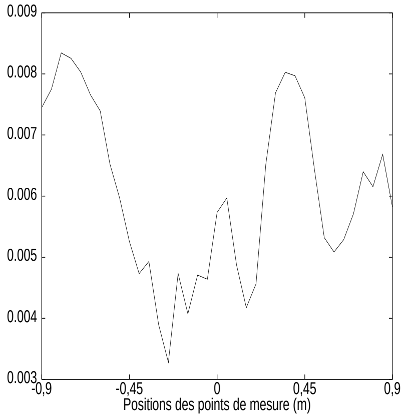


(e) 1,1 GHz

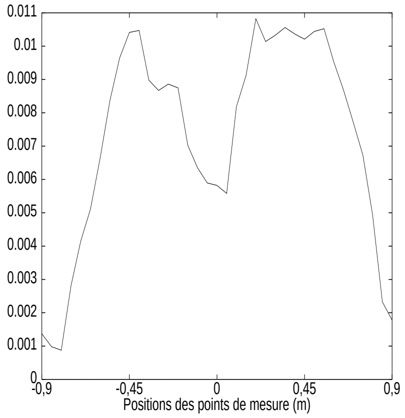


(f) 1,3 GHz

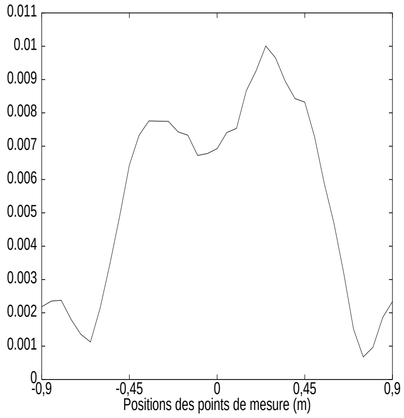
FIG. 4.16 – *Module du champ diffracté ($E^D_{re} - E^D_{moy}$) à différentes fréquences*



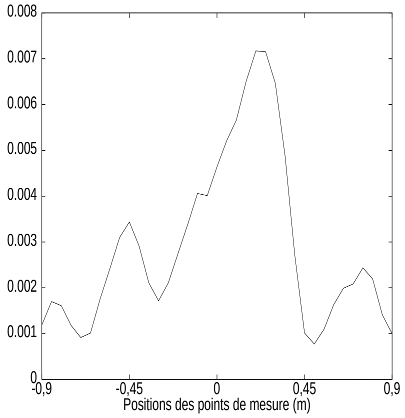
(a) 0,3 GHz



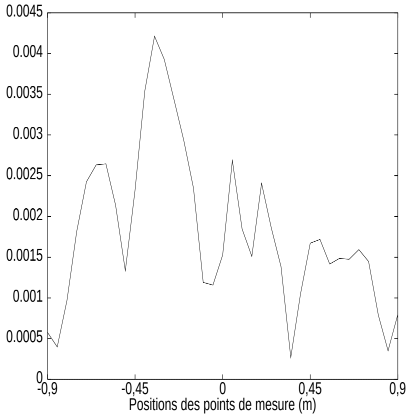
(b) 0,5 GHz



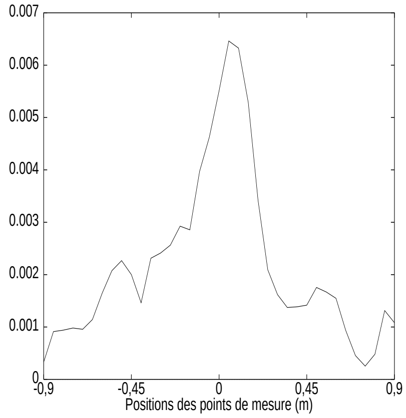
(c) 0,7 GHz



(d) 0,9 GHz



(e) 1,1 GHz

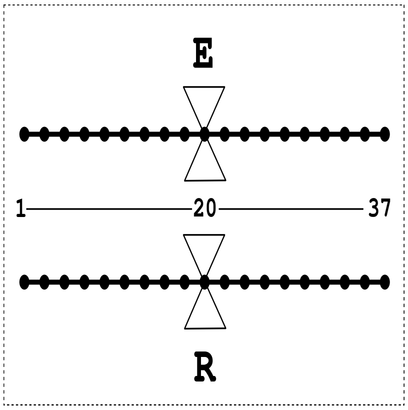


(f) 1,3 GHz

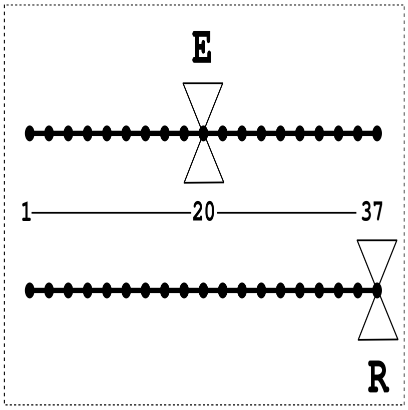
FIG. 4.17 – *Module du champ diffracté ($E_{re}^D - E_0^D$) à différentes fréquences*

IV.3 Erreurs de mesure

Avant de procéder au traitement des données recueillies expérimentalement, il paraît intéressant de quantifier l'erreur commise lors des différentes mesures de champs.
Ainsi, pour deux positions fixes du couple (antenne émettrice, antenne réceptrice), dix séries de mesure sont effectuées (Fig. 4.18), dans un premier temps, sans toucher au montage expérimental (mesures fixes), puis en replaçant l'ensemble récepteur sur sa position fixée après l'avoir préalablement déplacé (mesures mobiles). Cette deuxième option consiste, tout en gardant les mêmes positions d'antennes, à faire varier certains paramètres physiques (comme la position du cable, par exemple) pour mettre en évidence le rôle de ces paramètres non pris en compte dans la méthode d'imagerie. Enfin, deux dernières mesures sont réalisées dans la même configuration que pour le premier test pour deux différentes positions de l'antenne réceptrice. Cela permet ainsi de mettre en évidence l'effet d'un mauvais positionnement des antennes sur les données mesurées.



(a) (E,R) = (20,20)

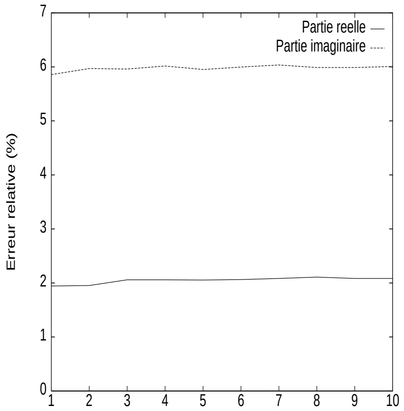


(b) (E,R) = (20,37)

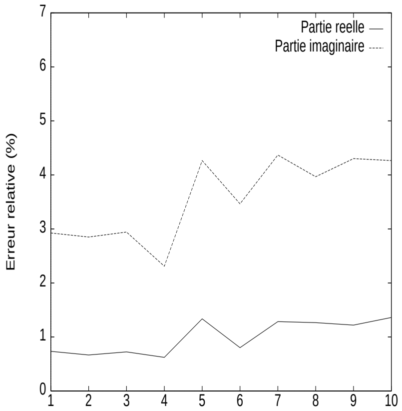
FIG. 4.18 – *Configurations des mesures d'erreur*

Chaque série de mesures est représentée en terme d'erreur par rapport aux données effectivement prises en compte dans le processus de reconstruction. Une première information concerne l'erreur, exprimée en pourcentage, entre les données effectives et les données mesurées pour chaque série (partie réelle et partie imaginaire). Il apparaît clairement que pour les deux premiers tests, l'erreur doit varier très peu ou de façon non visible lors de mesures fixes ou consécutives (Figs. 4.19 (a) et 4.21 (a)) alors qu'elle varie, de manière aléatoire, lorsqu'on déplace puis replace l'antenne réceptrice (Figs. 4.19 (b) et 4.21 (b)). Si l'on compare les deux tests, on remarque que le fait d'éloigner les deux antennes (Fig. 4.21) détériore la mesure à la fois en partie réelle et imaginaire surtout dans le cas de mesures mobiles où l'erreur atteint 12% (Fig. 4.21 (b)).
Si l'on présente les erreurs en comparant la n-ième mesure complexe $E_n^D = R_n^{j\theta_n}$ avec la donnée effective correspondante $E_{re}^D = R_{re}e^{j\theta_{re}}$, on obtient un nuage de points dans le plan complexe (Figs. 4.19 et 4.20 de (c) à (f)). Chaque point a ainsi pour module le quotient $\dfrac{R_n}{R_{re}}$ et pour phase le nombre $e^{j(\theta_n-\theta_{re})}$ Le point d'affixe 1 correspond donc à une erreur relative

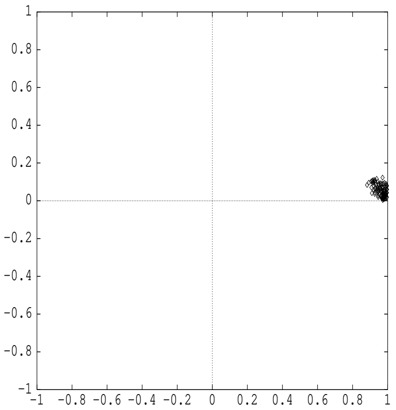
nulle.
On confirme alors les aspects entrevus précédemment. En effet, si pour les mesures en configuration proche, le nuage de points reste compact et près du point d'affixe 1, pour la configuration éloignée, certains fichiers présentent un nuage éclaté où l'on retrouve des erreurs à la fois sur le module et la phase du champ mesuré. Cette différence peut s'expliquer par l'existence d'objets parasites dans cette configuration (dalles de béton, ferrailles) absents invisibles de la première configuration (antennes éloignées de ces objets). Cependant, l'éloignement des antennes couplé à leur directivité influe aussi sur les mesures. Comme on a pu déja le constater, les valeurs mesurées en des points éloignés de l'antenne émettrice peuvent être considérées comme négligeables en comparaison de celles mesurées près de l'émission (cf. répartition spatiale du champ d'antenne IV.1). Les erreurs trouvées dans ce cas correspondent en fait à un faible rapport signal/bruit.
On peut aussi remarquer l'efficacité du cablage utilisé dans le système radar. En effet, le rôle néfaste des cables, introduisant principalement une erreur sur la phase, n'est pas visible dans cette étude. Pour la première configuration, où la position des cables est la moins contrôlable, l'erreur mesurée est de l'ordre de l'erreur machine inhérente au système de mesure ($\approx 3\%$)).



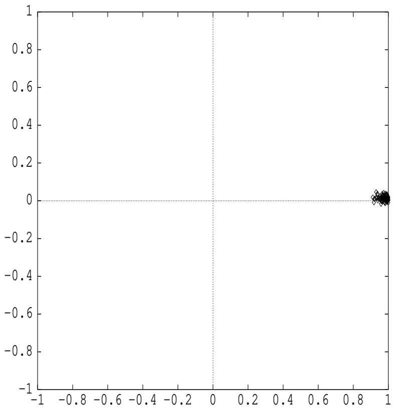
(a) Mesures fixes



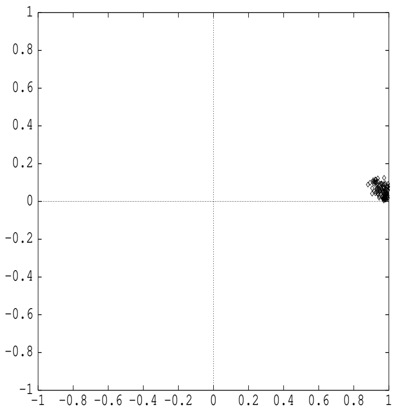
(b) Mesures mobiles



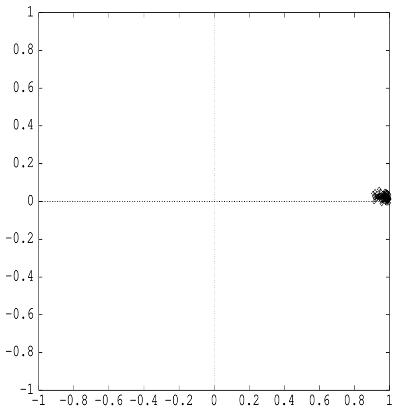
(c) Représentation complexe



(d) Représentation complexe

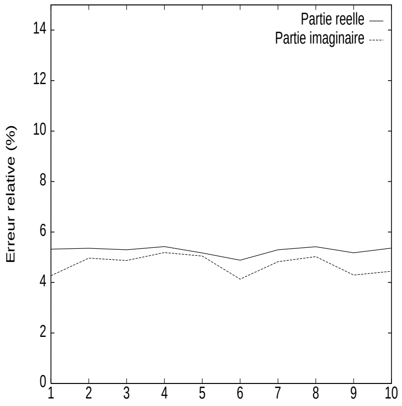


(e) Représentation complexe

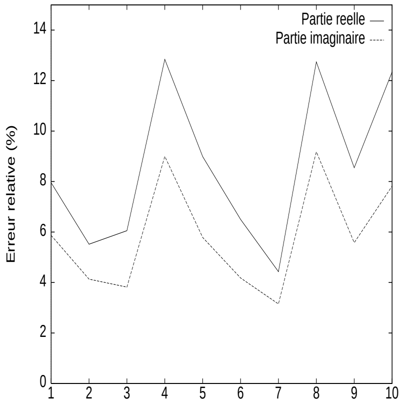


(f) Représentation complexe

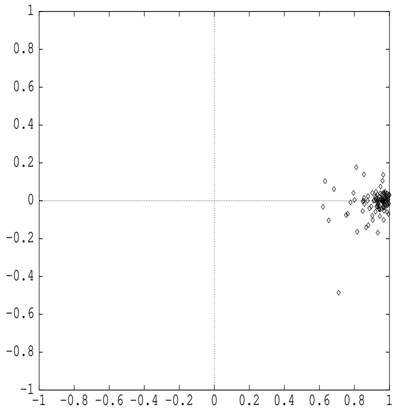
FIG. 4.19 – *Erreurs sur les mesures (E,R)=(20,20)*



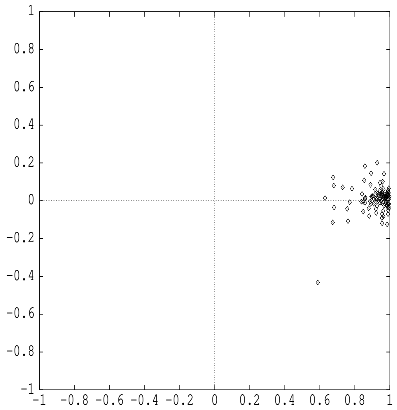
(a) Mesures fixes



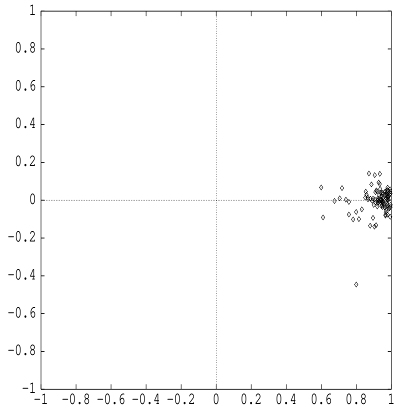
(b) Mesures mobiles



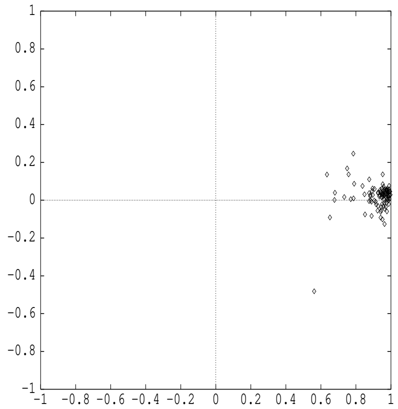
(c) Représentation complexe



(d) Représentation complexe



(e) Représentation complexe

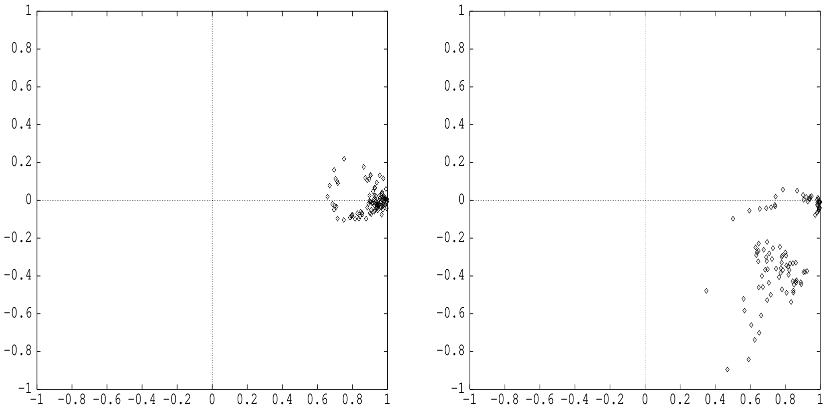


(f) Représentation complexe

FIG. 4.20 – *Erreurs sur les mesures (E,R)=(20,37)*

Quant aux dernières séries de mesures effectuées pour deux élévations particulières de l'antenne réceptrice (élévation d'une hauteur h d'un seul côté de l'antenne puis élévation d'une hauteur h de toute l'antenne), l'erreur sur la partie réelle demeure faible (de 3% à

6%), tandis qu'elle n'est plus négligeable pour la partie imaginaire (15% pour la première série de mesures et supérieure à 30% pour la seconde).
Cette différence se retrouve dans la représentation complexe où l'on aperçoit la dégradation progressive de la précision des mesures. On note une erreur importante sur la phase pour de nombreux points de mesure dans la deuxième figure. Cette courte étude prouve bien qu'il est nécessaire d'avoir une distance constante entre le plan de l'antenne et l'interface air/sol tout au long des différentes mesure pour satisfaire au mieux l'hypothèse d'une ligne de mesure parallèle et à hauteur constante par rapport au sol. Un contrôle strict de la position des deux antennes permet ainsi d'obtenir des données respectant les critères exigés par la méthode de reconstruction.



(a) Elévation I (b) Elévation II

FIG. 4.21 – *Erreurs II sur les mesures (E,R)=(20,20)*

En conclusion de cette étude d'erreurs, on peut se réjouir de la certaine fiabilité du système de mesure utilisé (radar + antennes) pour la configuration choisie (erreurs faibles). Tous les paramètres externes au problème (objets parasites, humidité, température, profil du sol...) jouent apparemment un rôle minime dans notre étude, ce qui n'est, en général, pas le cas. On peut donc espérer obtenir des résultats satisfaisants après traitement de toutes les données dépouillées. Cependant, il ne faut pas oublier que dans la réalité les paramètres externes rencontrés sont la cause de bruits de mesure qui faussent considérablement les résultats s'ils ne sont pas traités au préalable.

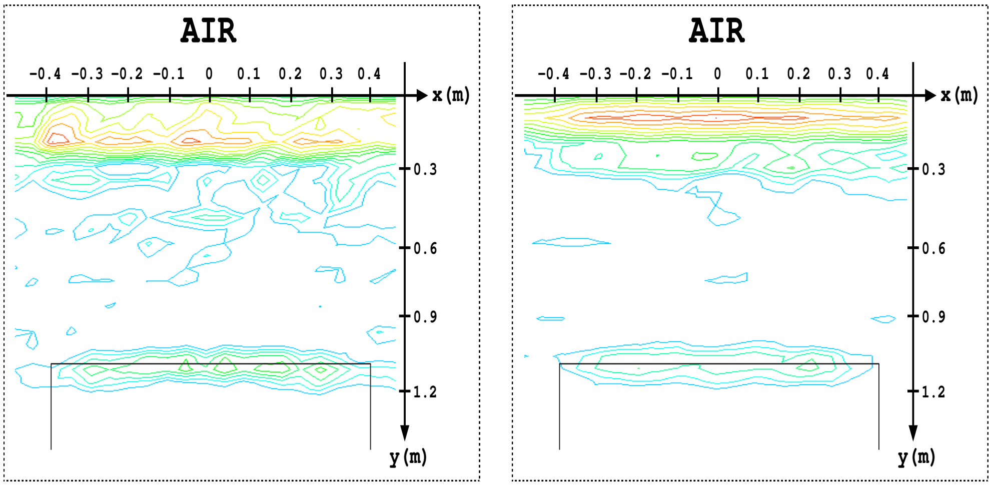
V Images reconstruites

Après la collecte (numérique et expérimentale) des différents paramètres, des images des différentes configurations sont reconstruites en utilisant la méthode d'imagerie qualitative. Ainsi, de nombreuses reconstructions ont été effectuées à partir des données initiales (sans objet), des données réelles (avec objet) et à partir du champ diffracté par l'objet (moyenné ou calibré) pour les différents champs incidents présentés précédemment.
De premiers résultats confirment les précédents aspects concernant la modélisation du champ

incident. Si la précision des calculs ne peut être remise en cause, il apparaît une certaine dégradation des résultats lors de l'utilisation des basses fréquences. De plus, l'emploi de champs modélisés trop loin du centre de l'antenne perturbe le système d'imagerie. Enfin, le champ simulé sur une ligne parallèle à la ligne d'émission n'offre que peu de possibilités de reconstruction. Seul le champ incident calculé en $y_0 = 15\,mm$, pour des fréquences comprises entre 800 MHz et $1{,}3$ GHz, ainsi que celui modélisé sur la bande homothétique, pour des fréquences comprises entre 500 MHz et $1{,}3$ GHz, conduisent à une image conforme à la réalité.

V.1 Images du domaine d'étude (sans l'objet)

Les images présentées ici (Fig. 4.22) correspondent au cas initial pour lequel l'objet n'est pas encore enterré. On discerne nettement la face supérieure du cube en polystyrène (trait continu) reconstruite dans les deux configurations à la fois en hauteur ($1{,}1\,m$) et en longueur ($80\,cm$). On peut aussi apercevoir sur quelques centimètres en hauteur, à un niveau plus élevé, une bande correspondant à l'énergie réactive des antennes, ou couplage direct, bruitée par le champ réfléchi par l'interface air/sol.



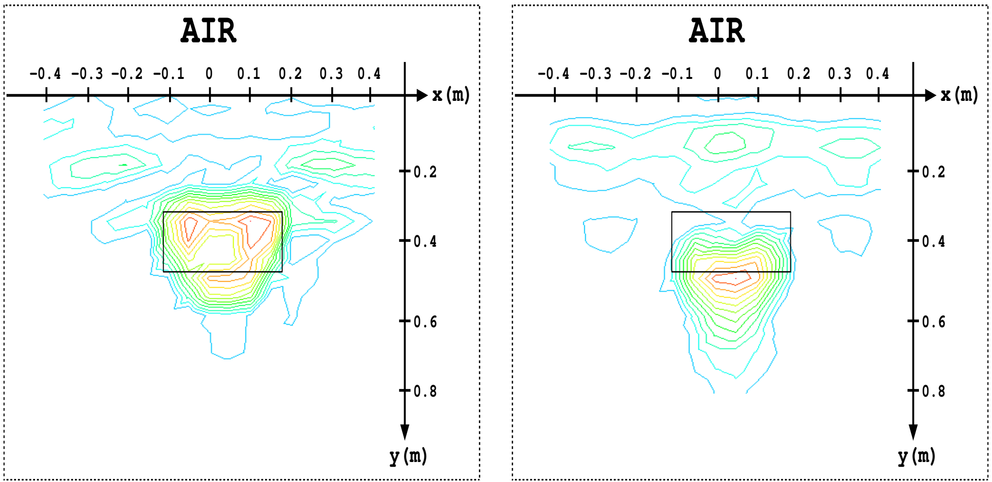
(a) Air (b) Air (bande homothétique)

FIG. 4.22 – *Images intiales (sans objet)*

V.2 Images reconstruites à partir du champ réel

L'objet (trait continu) est désormais présent dans la fosse d'essai. On observe néanmoins une différence entre les deux images presentées (Fig. 4.23). Si pour la première configuration, l'objet est reconstruit avec une profondeur, des dimensions et une forme peu difféerentes de la réalité, son image dans la deuxième représentation diffère de l'image réelle. On note dans cette image, une erreur à la fois sur la profondeur d'enfouissement de l'objet, sur ces dimensions et sur sa forme. Cette remarque conduit désormais à ne prendre en compte dans le processus de reconstruction que les données relatives au champ incident

simulé dans l'air à une hauteur $y_0 = 15$ mm.
On peut cependant remarquer le faible niveau de bruit présent dans les images. Toutefois, afin d'améliorer les reconstructions et de comparer celles-ci avec des reconstructions synthétiques, on peut représenter l'objet à partir du champ diffracté par celui-ci, en employant les deux techniques précédemment décrites.

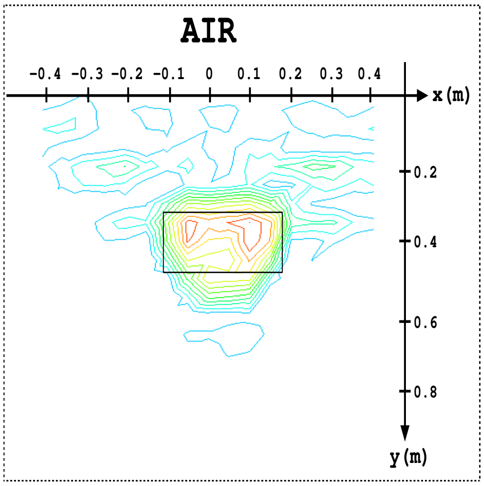


(a) Air (b) Air (bande homothétique)

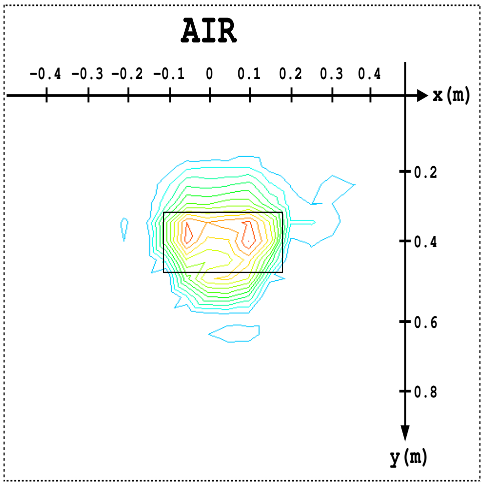
FIG. 4.23 – *Images réelles (avec objet)*

V.3 Images reconstruites à partir du champ diffracté

Les images réelles sont donc rehaussées en leur retranchant le champ moyenné ou le champ calibré (Fig. 4.24). L'amélioration apporté en calibrant les mesures apparaît supérieure à celle obtenue par moyennage. Dans la dernier cas (Fig. 4.24 (a)), le bruit est encore présent.



(a) Champ moyenné



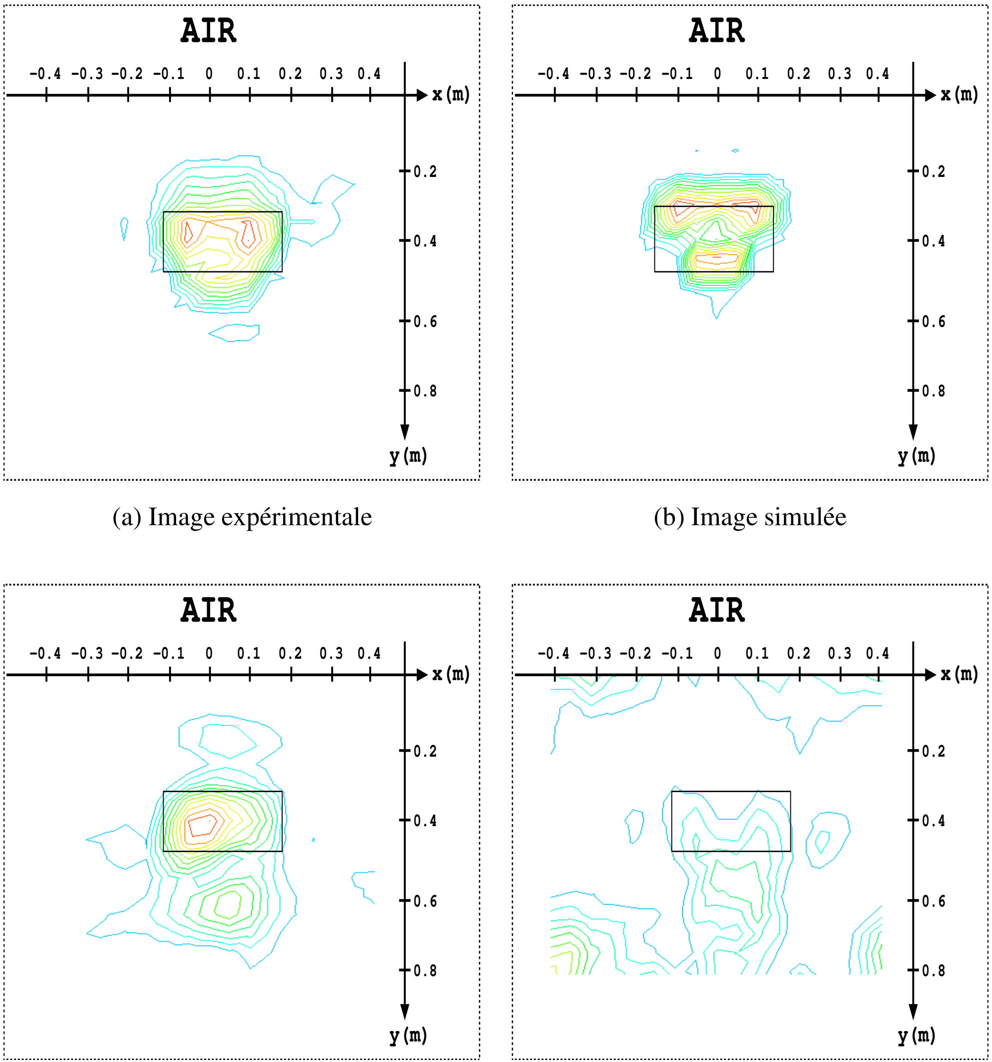
(b) Champ calibré

FIG. 4.24 – *Images filtrées*

VI Comparaisons des différentes reconstructions

Pour conclure cette étude expérimentale, l'image de l'objet obtenue après calibration est comparée à l'image donné par la simulation (champ incident et champ diffracté) pour la même configuration (ligne de mesure, nombre de points en espace et fréquence...). L'objet diffractant ($\varepsilon_{r_D} = 1$; $\sigma_D = 0\,S.m^{-1}$) de dimension $30 \times 18\,\mathrm{cm}^2$ est enterré à une profondeur de $30\,c$ dans un sol semblable à celui étudié expérimentalement ($\varepsilon_{r_3} = 2{,}55$; $\sigma_3 = 2{,}21\,10^{-4}\,S.m^{-1}$). L'image reconstruite, quoique moins bruitée, diffère peu de l'image expérimentale. Dans les deux images, la face supérieure de l'objet est mieux définie que la face inférieure. La reconstruction expérimentale présente cependant un manque de précision sur la profondeur de l'objet et sur sa face inférieure. Ce problème peut être partiellement résolu en modélisant le champ d'antenne à une plus petite hauteur et en prenant en compte la terre par exemple. Ces premiers résultats expérimentaux obtenus sont néanmoins assez satisfaisants du point de vue de la reconstruction de l'objet en utilisant le champ d'antenne pour un montage multi-bistatique.
En effet, on peut comparer cette image avec une image obtenue en considérant le champ incident comme plan (Fig. 4.25 (c)). L'image résultante confirme la présence de l'objet dans une zone moins bien définie que celle révélée par la reconstruction expérimentale avec le champ incident simulé. On ne trouve pas d'indication concernant la profondeur, les dimensions et la forme de l'objet. Ces différences entre ces deux reconstructions confirment l'amélioration apportée par la variation de positions de source (mesure multi-bistatique).
De plus, en remplaçant dans le processus de reconstruction le champ d'antenne modélisé par un champ incident de répartition spatiale quelconque, l'image obtenue à partir des données mesurées devient totalement inexploitable (Fig. 4.25 (d)): l'objet n'est alors plus visible. Pour obtenir une bonne image, la prise en compte du champ d'antenne implique donc une bonne modélisation de ce champ. Une étude préalable sur le type d'antenne à utiliser peut

s'avérer utile en vue d'une amélioration des résultats expérimentaux (antenne plus directive, large-bande, mieux adaptée au sol...).
Quant au choix de la technique de séparation du champ diffracté par l'objet, si la calibration apporte la meilleure amélioration, le moyennage reste la technique la plus rapide (une seule série de mesures contre deux pour la calibration) et donc la plus utilisée. De plus, la méthode de calibration se heurte dans la réalité au caractère inhomogène des sols rencontrés.



(a) Image expérimentale

(b) Image simulée

(c) Image expérimentale (champ incident plan)

(d) Image expérimentale (champ incident quelconque)

FIG. 4.25 – *Comparaison des différents résultats*

Conclusion

La méthode d'imagerie présentée dans la première partie du mémoire est basée essentiellement sur l'utilisation intensive de transformées de Fourier rapides (de type FFT). Ces techniques numériques permettent de reconstruire rapidement des images qualitatives d'objets enterrés au moyen de cartes de courants induits. Le temps d'exécution du processus de reconstruction ainsi que le faible volume de données à inverser (champ diffracté mesuré sur une ligne) confèrent à la méthode une certaine portabilité pouvant conduire à une implémentation des algorithmes sur des ordinateurs de type PC en vue d'une imagerie en temps quasi-réel.
Après quelques test numériques qui ont permis d'étudier de manière exhaustive certains paramètres, la méthode d'imagerie a été validée d'un point de vue pratique, lors d'une campagne de mesure en site expérimental (LRPC de Rouen). Conçu pour une acquisition des données en mode réflexion de type multibistatique (émetteurs et récepteurs mobiles les uns par rapport aux autres), le système d'imagerie a souffert principalement de l'aspect rudimentaire de la configuration utilisée pour les mesures, couplé à la nécessité d'échantillonner les champs avec un pas spatial contraignant. Ne disposant pas encore d'un dispositif de mesure de type multicapteurs (à l'aide d'un réseau d'antennes) ni d'un système assisté par ordinateur [88], toutes les mesures ont été effectuées à partir d'un déplacement manuel de la source et du récepteur. Pour éviter des problèmes d'encombrement spatial, les deux antennes ont été disposées séparément sur deux lignes parallèles. Ainsi, malgré le temps de mesure important généré par ce système, des images d'objet enterré ont pu être reconstruites à partir de données réelles. Les différents résultats ont confirmé entre autres l'influence primordiale du champ incident sur la qualité de l'image. Mise à jour, dans un premier temps, à partir de simulations, la prise en compte du champ rayonné par l'antenne améliore nettement les résultats obtenus sans l'introduction de ce paramètre au sein du processus de reconstruction. Cette caractéristique principale de la nouvelle méthode doit être reliée directement aux deux autres paramètres fondamentaux (la fréquence d'illumination et le nombre de positions de la source). La recherche actuelle s'articule désormais autour de l'optimisation des antennes utilisées pour l'imagerie microonde (dimensions, lobe de rayonnement, rapport d'ondes stationnaires) en étudiant et en construisant des antennes large bande (voire ultra large bande) et très directives.
Parmi les autres paramètres qui influent sur le rendement de la méthode, on peut retenir les caractéristiques du sol. Une bonne connaissance de ces paramètres, et en particulier de la loi de dispersion, garantie un résultat satisfaisant. Il reste cependant à étendre cette méthode à tous les milieux à pertes (selue une partie des pertes est prise en compte dans la méthode actuelle).
En vue d'une utilisation industrielle, il faudrait étendre au cas 2D-TE et surtout au cas 3D,

cette méthode explicitée dans le cas 2D-TM. D'après les résultats obtenus en utilisant un formalisme de type onde plane [18][55], un gain en résolution est espéré dans l'étude du cas 3D pour une onde incidente de dépendance spatio-temporelle quelconque. En effet, le problème de la résolution spatiale, limitée ici au critère physique de Rayleigh ($\frac{\lambda_1}{2}$) demeure le principal défaut de ce type d'imagerie. Viennent s'ajouter des problème d'ordre géométrique (longueur finie de la ligne de mesure, objet non infini...) qui affectent aussi la résolution finale. Il est néanmoins possible d'améliorer considérablement la résolution en appliquant un algorithme conçu pour une imagerie quantitative (super résolution) résolue de manière itérative. De plus, les résultats qualitatifs obtenus suffisent pour considérer la méthode spectrale comme une estimée initiale géométrique de la méthode quantitative. Toutes les propriétés rencontrées lors de l'étude qualitative permettent en effet de dégager un domaine restreint contenant l'objet. Ce paramètre s'avèrera non négligeable lorsque l'on cherchera à connaître de manière précise la constitution de l'objet enterré.

Deuxième partie

IMAGERIE QUANTITATIVE

Introduction

La géométrie du problème ainsi que les hypothèses sur les champs définies dans le **chapitre 1** demeurent inchangées. Les équations intégrales définissant le problème direct sont désormais exprimées en fonction du contraste de permittivité complexe normalisé C défini par

$$C(\vec{X},\omega) = \varepsilon^*_{r_D} - \varepsilon^*_{r_3} = (\varepsilon_{r_D} - \varepsilon_{r_3}) + j(\frac{\sigma_D - \sigma_3}{\omega\varepsilon_0})$$

On obtient alors les deux expressions fondamentales:

$$\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega) = \widetilde{E^I_z}(\vec{X},\omega) + \int_{\mathcal{D}_D} k_0^2(\omega)C(\vec{X'},\omega)\widetilde{E_z}(\vec{X'},\omega)G(\vec{X},\vec{X'},\omega)d\vec{X'}, \quad \forall\vec{X} \in \mathcal{D}_D,\ \forall\omega.$$

$$\widetilde{E^D_z}(\vec{X},\omega) = \int_{\mathcal{D}_D} k_0^2(\omega)C(\vec{X'},\omega)\widetilde{E_z}(\vec{X},\omega)G(\vec{X},\vec{X'},\omega)d\vec{X'}\ ,\ \forall\vec{X} \in \mathcal{D}_1,\ \forall\omega$$

avec les mêmes notations définies dans la partie précédente.
La résolution du problème direct reste semblable à celle effectuée pour l'approche qualitative (Méthode des Moments avec collocation de type Point/segment).
Le problème de diffraction inverse consiste désormais à retrouver la permittivité complexe de l'objet à partir de la mesure du champ diffracté sur L_1. On cherche donc, dans un premier temps, à établir une relation entre le contraste C et le champ électrique $\widetilde{E^D_z}$. Contrairement au cas de l'imagerie qualitative, où la relation spectrale était linéaire, le problème inverse défini ici apparaît comme non linéaire par rapport au paramètre C.
Les premières méthodes d'imagerie quantitative ont cependant contourné ce problème en étudiant des objets avec des hypothèses particulières (approximation de Born, de Rytov, haute fréquence...[45][35]) conduisant à la linéarisation des solutions du problème inverse [8]. Parmi les techniques le plus souvent utilisées pour résoudre le problème linéarisé, on distingue les méthodes de rétropropagation des ondes électromagnétiques (techniques d'inversion essentiellement basées sur l'emploi de transformées de Fourier [26][54]) ainsi que les techniques de résolution de systèmes linéaires [41][1].
Les approximations employées initialement ne peuvent être généralisées à tous les types d'objets recherchés. La non linéarité du problème, couplé au besoin de résoudre différents problèmes sans hypothèse restrictive a conduit au développement de nouvelles méthodes itératives d'imagerie quantitative. Deux grandes classes sont principalement utilisées [57]:

les méthodes itératives de type gradient conjugué (GC) [54][65][39][32] et de type Newton-Kantorovich (NK) [6][32][60][92][50][34][17][59][7]. Ces deux classes de méthodes permettent de résoudre de manière itérative le problème inverse en minimisant une fonctionnelle adaptée au problème traité, généralement définie par l'écart quadratique moyen entre les valeurs mesurées et celles calculées numériquement. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode du gradient modifié [52][6][7] qui permet de résoudre simultanément les problèmes direct et inverse.
La principale différence entre les méthodes GC et NK provient de la technique utilisée pour minimiser la fonctionnelle. Elle conserve le caractère non linéaire de la fonctionnelle pour les méthodes GC tandis qu'elle linéarise localement celle-ci dans les méthodes NK (d'où le nom de méthodes itératives de type Born). D'autres méthodes explicitées dans l'espace libre profitent de l'approche multivue (sources et capteurs tout entourant l'objet) [51] et multifréquentielle [36] pour donner de l'objet une image super-résolution. Enfin, des méthodes de type probabiliste ont récemment été développées [32][34][13]. Ces techniques itératives de résolution, pour lesquelles aucune direction de recherche n'est privilégiée à chaque itération (optimisation globale), conduisent à d'excellents résultats mais restent très coûteuses en temps de calcul.
Cette partie propose d'adapter ce type de méthode au cas de la reconstruction d'objets enfouis dans des sols à pertes. On s'intéresse en particulier à l'extension multifréquentielle d'un algorithme d'imagerie de type GC [60], au cas des objets enterrés illuminés par un champ incident de dépendance spatio-temporelle arbitraire.
Dans un second temps, une régularisation est proposée afin d'améliorer les résultats obtenus précédemment. On se propose alors d'appliquer une technique de préservation des discontinuités [16] appliquée récemment avec succès dans le domaine de l'imagerie d'objets dans l'espace libre [62][61].

Chapitre 5

Résolution du problème inverse

Sommaire

En utilisant les mêmes notations que celles définies dans le chapitre 1 (III.2 et III.3), on peut connaître le champ total à l'intérieur de l'objet:

$$\widetilde{E_z^I}(\vec{X}_m,\omega) = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \delta_{m,n} - G_{m,n} C(\vec{X}_n,\omega) \right\} \widetilde{E_z}(\vec{X}_n,\omega), \text{m=1,N}; \forall \omega \tag{5.1}$$

avec $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{si} \vec{X}_m = \vec{X}_n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ et $G_{m,n} = \int_{C_n} k_0^2(\omega) G(\vec{X}_m,\vec{X}_n,\omega) d\vec{X}_n \,, \forall\, \omega$.

Puis le champ diffracté à l'extérieur de l'objet est calculé sur la ligne de mesure L_1 dans le milieu $\mathcal{D}_1$:

$$\widetilde{E_z^D}(\vec{X}_m,\omega) = \sum_{n=1}^{N} G_n^m C(\vec{X}_n,\omega) \widetilde{E}_z(\vec{X}_n,\omega), \forall\, \vec{X}_m \in L_1 \,, \forall\, \omega \tag{5.2}$$

avec $G_n^m = \int_{C_n} k_0^2(\omega) G(\vec{X}_m,\vec{X}_n,\omega) d\vec{X}_n, \ \forall\, \vec{X}_m \in L_1 \,, \forall\, \omega$

Ces deux équations vont permettre de définir la relation fondamentale du problème d'imagerie quantitative. Par souci de simplicité, la notation matricielle est employée. Le problème est alors résolu en utilisant une méthode itérative de type gradient conjugué. Une variante à ce premier algorithme est aussi proposé, avant d'étudier quelques exemples de reconstructions simulées d'objets enterrés.

I Relations matricielles

Soients
- N le nombre de points de discrétisation de $\mathcal{D}_D$,
- $NOXI$ le nombre de points de mesure sur L_1,
- NXS le nombre de points source sur L_1,
- NTF le nombre de fréquences utilisées

On définit, pour chaque fréquence et pour chaque position de source, les vecteurs suivants:

$$e^I = \left\{ \widetilde{E_z^I}(\vec{X}_m,\omega) \right\}_{m=1..N} \qquad e = \left\{ \widetilde{E_z}(\vec{X}_m,\omega) \right\}_{m=1..N}$$

$$e^D = \left\{ \widetilde{E_z^D}(\vec{X}_m,\omega) \right\}_{m=1..NOXI} \qquad c = \left\{ C(\vec{X}_m,\omega) \right\}_{m=1..N}$$

- Dimension des matrices associées aux différents champs à une fréquence:

$\mathbf{E^I}$, matrice champ incident de dimension $N*NXS$

$\mathbf{E}$, matrice champ total de dimension $N*NXS$

$\mathbf{E^D}$, matrice champ diffracté de dimension $NOXI*NXS$

- Dimension des matrices de Green à une fréquence:

$\mathbf{G^O} = \{G_{m,n}\}_{n=1..N}^{m=1..N}$,

matrice de Green intégrale Objet-Objet de dimension $N*N$

$\mathbf{G^R} = \{G_n^m\}_{m=1..NOXI}^{n=1,N}$, matrice de Green intégrale Objet-Recepteur de dimension $NOXI*N$

- Expression et dimension de la matrice associée au contraste:

C telle que $\left\{ \begin{array}{ll} C_{m,m} = c_m, & m = 1..N \\ C_{m,n} = 0, & m = 1..N, n = 1..N, m \neq n \end{array} \right.$

matrice de contraste de dimension N

Numériquement, chaque matrice est rangée ligne par ligne. Par exemple, le vecteur c est construit en faisant varier les points de $\mathcal{D}_D$ suivant x_m en fixant y_m. De même, E^I est constituée de NXS colonnes de N coefficients complexes. La matrice E^I sera rangée en fixant le numéro de ligne et en variant le numéro de colonne.
Par souci de simplicité, on notera de la même manière les matrices pour les différentes fréquences. Les matrices sont en fait considérées comme des listes de matrices construites à fréquence fixée. Le nombre de fréquences détermine la longueur de la liste.

II Formulation du problème inverse

En utilisant les notations précédentes, on peut réécrire les équations (5.1) et (5.2) sous forme matricielle pour chaque fréquence angulaire $\omega = 2\pi f$. On obtient le système:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{E^I} & = & (\mathbf{I} - \mathbf{G^O C})\mathbf{E} \\ \mathbf{E^D} & = & \mathbf{G^R C E} \end{array} \right. \tag{5.3}$$

où **I** représente la matrice identité de dimension $N * N$.
En supposant la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}$ suffisamment régulière, on trouve alors l'équation matricielle non-linéaire suivante:

$$\mathbf{E^D} = \mathbf{G^R C}(\mathbf{I} - \mathbf{G^O C})^{-1}\mathbf{E^I}, \forall\omega \tag{5.4}$$

Les caractéristiques électromagnétiques ε et σ des domaines sont prises indépendantes de la fréquence. Cependant, la partie imaginaire des éléments de la matrice de contraste **C** contient des termes fréquentiels (en $\frac{1}{\omega\varepsilon_0}$). On définit alors la variable **C** dépendante de la fréquence, en fonction de la variable caractéristique $\chi = (\varepsilon, \sigma)$ indépendante de la fréquence ($\mathbf{C} = \mathbf{C}(\chi)$).

Notre problème s'écrit désormais en fonction de la variable caractéristique:

$$\boxed{\mathbf{E^D} = \mathbf{G^R C}(\chi)(\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}(\chi))^{-1}\mathbf{E^I}, \forall\omega} \tag{5.5}$$

La résolution de (5.5) non linéaire en χ permet ainsi de reconstruire la permittivité et la conductivité du ou des objets et donc le contraste dans le domaine désigné par $\mathcal{D}_D$, à partir de la donnée du champ diffracté connu sur la ligne de mesure L_1 de $\mathcal{D}_1$ et du champ incident

connu à l'intérieur de l'objet. Les données du milieu $\mathcal{D}_3$ sont elles aussi supposées connues. La résolution du problème direct couplé (inversion de la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}(\chi)$) est effectuée en utilisant une méthode directe de type Gauss-Jordan.
Pour trouver χ, on résout (5.5) de manière itérative en utilisant une technique de minimisation de fonctionnelle à l'aide d'un algorithme de descente de type gradient conjugué [56].

III Méthode itérative de type gradient conjugué GC

Le problème représenté par l'équation (5.5) est redéfini par équivalence en un problème de minimisation de fonctionnelle. Chercher χ qui satisfait (5.5) revient à chercher χ minimisant le critère J, ou fonctionnelle coût, défini par:

$$J(\chi) = \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \|\rho_{S,F}(\chi)\|^2_{L_1} \tag{5.6}$$

avec le résidu[1] $\rho_{S,F}(\chi) = e^D - \mathbf{G^R C}(\chi)(\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}(\chi))^{-1} e^I$ calculé à chaque fréquence pour chaque position de source $\vec{X}_S$.
Le terme $\|.\|_{L_1}$ désigne la norme associée au produit hermitien $(.,.)_{L_1}$ défini sur l'espace $\mathcal{L}^2(L_1)$ des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable sur L_1 par:

$$(u,v)_{L_1} = \int_{L_1} u(\vec{X})\overline{v(\vec{X})} d\vec{X}, \forall\ u \in \mathcal{L}^2(L_1), \forall\ v \in \mathcal{L}^2(L_1) \tag{5.7}$$

où $\overline{v(\vec{X})}$ représente le complexe conjugué de $v(\vec{X})$.

Pour minimiser la fonctionnelle J, les méthodes de descente sont construites en choisissant à l'itération $k+1$ une direction de descente η^k le long de laquelle évolue χ^k, et un réel α^k appelé facteur d'échelle optimal pour la minimisation de J dans la direction η^k tels que:

$$\chi^{k+1} = \chi^k + \alpha^k \eta^k \tag{5.8}$$

où χ^k représente la variable caractéristique à l'itération k.
Les nombreuses méthodes de descente dépendent du choix des paramètres de descente η^k. Pour notre problème, une méthode de gradient conjugué de type Polak-Ribière est utilisée [14].
Quant au paramètre α^k, il est recalculé à chaque nouvelle itération afin de rendre minimum le nouveau critère.

III.1 Calcul de la direction de descente

On cherche alors η^k dans le plan formé par les deux directions orthogonales η^{k-1} et g^k, où g^k représente le gradient de la fonctionnelle J. On a ainsi:

$$\eta^k = g^k + \beta^k \eta^{k-1} \tag{5.9}$$

1. ρ représente l'écart entre le champ diffracté mesuré et le champ diffracté calculé

avec le réel β^k défini par:

$$\beta^k = \frac{< g^k,g^k - g^{k-1} >_{\mathcal{D}_D}}{|g^{k-1}|^2_{\mathcal{D}_D}} \tag{5.10}$$

Le terme $|.|_{\mathcal{D}_D}$ désigne la norme associée au produit scalaire $< .,. >_{\mathcal{D}_D}$ défini sur l'espace $\mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D)$ des fonctions à valeurs réelles de carré intégrable sur $\mathcal{D}_D$ par:

$$< u,v >_{\mathcal{D}_D} = \int_{\mathcal{D}_D} u(\vec{X})v(\vec{X})d\vec{X}, \forall\ u \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D), \forall\ v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D) \tag{5.11}$$

Afin de définir complètement la direction de descente, il faut donc dans un premier temps calculer le gradient $g^k = \nabla J(\chi^k)$.
En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 de la fonctionnelle à l'itération $k+1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} J(\chi^{k+1}) &= J(\chi^k) + \alpha^k < \nabla J(\chi^k),\eta^k >_{\mathcal{D}_D} \\ &= J(\chi^k) + \alpha^k < \nabla_{\varepsilon_r} J(\chi^k),\eta^k_{\varepsilon_r} >_{\mathcal{D}_D} + \alpha^k < \nabla_\sigma J(\chi^k),\eta^k_\sigma >_{\mathcal{D}_D} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Or, on montre que (D.10):

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}(\chi^{k+1})\|^2_{L_1} = \|\rho_{S,F}(\chi^k)\|^2_{L_1} &- 2\alpha^k \mathcal{R}e\left(\rho_{S,F}(\chi^k),\mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\mathbf{D}^k\mathbf{A}^k e^I\right)_{L_1} \\ &+ (\alpha^k)^2\|\mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\mathbf{D}^k\mathbf{A}^k e^I\|_{L_1} \end{aligned} \tag{5.13}$$

avec $\mathbf{A}^k = [\mathbf{I} - \mathbf{G^O}\mathbf{C}(\chi^k)]^{-1}$ et la matrice complexe $\mathbf{D}^k = \eta^k_{\varepsilon_r} + \dfrac{j}{\omega\varepsilon_0}\eta^k_\sigma$.

On peut noter que $\mathbf{D^k}$ est une matrice diagonale de dimension $N*N$, $\mathbf{A}^k e^I$ est un vecteur de dimension N. On peut donc les commuter en changeant $\mathbf{D^k}$ en vecteur d^k contenant la diagonale de $\mathbf{D}^k$ et $\mathbf{A}^k e^I$ en matrice diagonale $\mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)$.
En comparant (5.12) et (5.13), il vient donc:

$$\begin{aligned} < \nabla J(\chi^k),\eta^k >_{\mathcal{D}_D} &= -2\sum_{F=1}^{NTF}\sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e\left(\rho_{S,F}(\chi^k),\mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)d^k\right)_{L_1} \\ &= -2\sum_{F=1}^{NTF}\sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e\left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I})\overline{\mathbf{A}^k}\mathbf{G^R}^*\rho_{S,F}(\chi^k),d^k\right)_{\mathcal{D}_D} \end{aligned} \tag{5.14}$$

avec $(.,.)_{\mathcal{D}_D}$ le produit hermitien défini sur l'espace $\mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D)$ des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable sur $\mathcal{D}_D$ par:

$$(u,v)_{\mathcal{D}_D} = \int_{\mathcal{D}_D} u(\vec{X})\overline{v(\vec{X})}d\vec{X}, \forall\ u \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D), \forall\ v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D) \tag{5.15}$$

En développant l'expression (5.14) suivant ε_r et σ, on obtient finalement:

$$\boxed{g^k_{\varepsilon_r} = \nabla_{\varepsilon_r} J(\chi^k) = -2\sum_{F=1}^{NTF}\sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e\left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I})\overline{\mathbf{A}^k}\mathbf{G^R}^*\rho_{S,F}(\chi^k)\right)} \tag{5.16}$$

$$\boxed{g_\sigma^k = \nabla_\sigma J(\chi^k) = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \mathcal{I}m \left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I}) \overline{\mathbf{A}^k} \mathbf{G}^{\mathbf{R}^*} \rho_{S,F}(\chi^k) \right)} \tag{5.17}$$

La direction de descente η^k est alors calculée à chaque itération en injectant la valeur de g^k dans l'équation (5.9) avec β^k donné par l'équation (5.10).

III.2 Calcul du facteur d'échelle optimal associé

Après avoir défini la direction de descente η^k, il reste à lui associer un poids α^k pour permettre le calcul des estimées successives de χ. Pour cela, α^k est choisi comme minimum local de J à l'itération $k+1$.
Soit à résoudre:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^k} J(\chi^{k+1}) = 0 \tag{5.18}$$

En dérivant l'équation (5.13), on définit le facteur d'échelle α^k par:

$$\boxed{\alpha^k = \frac{\displaystyle\sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e \left(\rho_{S,F}(\chi^k), \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I) d^k \right)_{L_1}}{\| \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I) d^k \|_{L_1}^2}} \tag{5.19}$$

Tous les différents paramètres sont à présent définis. Il reste donc à étudier quelques exemples témoignant de l'efficacité de cette méthode assez intuitive. Or, dès les premiers résultats, un constat s'impose: cette technique d'inversion ne semble pas adaptée aux cas traités. En effet, si l'on cherche à reconstruire l'image d'un diélectrique pur ($\varepsilon_{r_D} = 3$) enfoui dans un sable sec sans pertes ($\varepsilon_{r_3} = 2{,}55$) à une profondeur de 30 cm, l'image résultante de permet pas de retrouver l'objet. Les valeurs du paramètre χ calculées ne réduisent pas l'erreur sur le champ diffracté, premier critère de convergence de l'algorithme mis en place (Fig. 5.1 courbe ERR-ED). Après 500 itérations, on conserve une erreur proche de 50%. De même, la permittivité calculée diffère complètement de la permittivité réelle de l'objet (Fig. 5.1 courbe ERR-EPS).

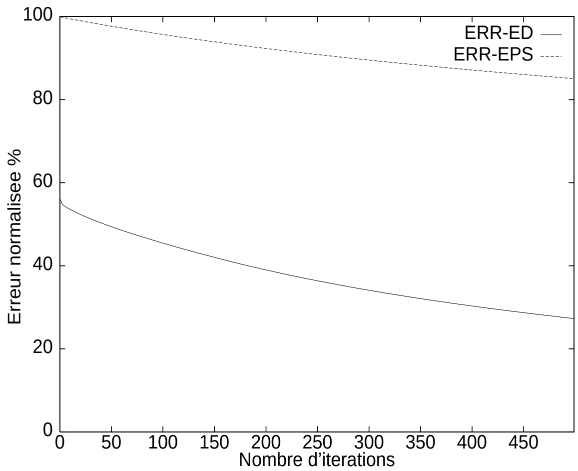


FIG. 5.1 – *Convergence de la méthode GC*

Le manque d'efficacité de cette première méthode peut être expliqué en utilisant l'approche physique du problème. Les deux paramètres fondamentaux (la permittivité relative et la conductivité) sont ici considérés de manière complètement similaire: les deux gradients respectifs sont couplés pour calculer la direction de descente générale de l'algorithme. Or, dans l'exemple traité, on obtient une direction suivant ε_r de l'ordre de 10^{-2} tandis que celle suivant σ est proche de 10^{-1}. En couplant les deux directions indépendantes, on néglige l'information sur la permittivité au profit de celle concernant la conductivité. De plus, hormis les matériaux métalliques ($\sigma \approx 10^7\, S.m^{-1}$), la part de la permittivité est prépondérante. Il paraît nécessaire de découpler l'étude du gradient et donc de traiter ces deux variables de façon indépendante en définissant une nouvelle méthode de minimisation.

IV Méthode itérative de type bigradient conjugué BiGC

Dans un premier temps, on sépare la variable caractéristique χ en deux paramètres ε et σ. On applique alors sur chacune des deux variables, une méthode de type gradient conjugué. On cherche ainsi à minimiser la fonctionnelle J dépendant des deux nouveaux paramètres:

$$J(\varepsilon_r,\sigma) = \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \|\rho_{S,F}(\varepsilon_r,\sigma)\|^2_{L_1} \tag{5.20}$$

Afin de minimiser ce critère, on calcule à chaque itération de l'algorithme deux directions de descente η_{ε_r} et η_σ le long desquelles évoluent respectivement ε_r et σ, ainsi que deux facteurs d'échelle respectifs α_{ε_r} et α_σ tels que:

$$\begin{aligned} {\varepsilon_r}^{k+1} &= {\varepsilon_r}^k + \alpha^k_{\varepsilon_r}\eta^k_{\varepsilon_r} \\ \sigma^{k+1} &= \sigma^k + \alpha^k_\sigma \eta^k_\sigma \end{aligned} \tag{5.21}$$

IV.1 Calcul des directions de descente

On procède de la même façon que pour la méthode du gradient conjugué. Ici, cependant, on cherche directement les deux directions en découplant le système obtenu précédemment:

$$\begin{aligned} \eta_{\varepsilon_r}^k &= g_{\varepsilon_r}^k + \beta_{\varepsilon_r}^k \eta_{\varepsilon_r}^{k-1} \\ \eta_\sigma^k &= g_\sigma^k + \beta_\sigma^k \eta_\sigma^{k-1} \end{aligned} \tag{5.22}$$

avec les réels $\beta_{\varepsilon_r}^k$ et β_σ^k définis par:

$$\begin{aligned} \beta_{\varepsilon_r}^k &= \frac{< g_{\varepsilon_r}^k, g_{\varepsilon_r}^k - g_{\varepsilon_r}^{k-1} >_{\mathcal{D}_D}}{|g_{\varepsilon_r}^{k-1}|_{\mathcal{D}_D}^2} \\ \beta_\sigma^k &= \frac{< g_\sigma^k, g_\sigma^k - g_\sigma^{k-1} >_{\mathcal{D}_D}}{|g_\sigma^{k-1}|_{\mathcal{D}_D}^2} \end{aligned} \tag{5.23}$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 de la fonctionnelle à l'itération $k+1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} J({\varepsilon_r}^{k+1}, \sigma^{k+1}) = J(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \\ + \alpha_{\varepsilon_r}^k < \nabla_\varepsilon J({\varepsilon_r}^k, \sigma^k), \eta_{\varepsilon_r}^k >_{\mathcal{D}_D} \\ + \alpha_\sigma^k < \nabla_\sigma J({\varepsilon_r}^k, \sigma^k), \eta_\sigma^k >_{\mathcal{D}_D} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Or, on montre (E.16):

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}({\varepsilon_r}^{k+1}, \sigma^{k+1})\|_{L_1}^2 = & \|\rho_{S,F}({\varepsilon_r}^k, \sigma^k)\|_{L_1}^2 \\ & - 2\alpha_{\varepsilon_r}^k < \mathcal{R}e\left(\mathbf{M^{k^*}} \rho_{S,F}({\varepsilon_r}^k, \sigma^k)\right), \eta_{\varepsilon_r}^k >_{\mathcal{D}_D} \\ & - 2\frac{\alpha_\sigma^k}{\omega\varepsilon_0} < \mathcal{I}m\left(\mathbf{M^{k^*}} \rho_{S,F}({\varepsilon_r}^k, \sigma^k)\right), \eta_\sigma^k >_{\mathcal{D}_D} \\ & + (\alpha_{\varepsilon_r}^k)^2 \left\{ |\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right) \eta_{\varepsilon_r}^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right) \eta_{\varepsilon_r}^k|_{L_1}^2 \right\} \\ & + (\frac{\alpha_\sigma^k}{\omega\varepsilon_0})^2 \left\{ |\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right) \eta_\sigma^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right) \eta_\sigma^k|_{L_1}^2 \right\} \\ & + 2\frac{\alpha_{\varepsilon_r}^k \alpha_\sigma^k}{\omega\varepsilon_0} < \mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right) \eta_\sigma^k, \mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right) \eta_{\varepsilon_r}^k >_{L_1} \\ & - 2\frac{\alpha_{\varepsilon_r}^k \alpha_\sigma^k}{\omega\varepsilon_0} < \mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right) \eta_{\varepsilon_r}^k, \mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right) \eta_\sigma^k >_{L_1} \end{aligned} \tag{5.25}$$

avec la matrice complexe $\mathbf{M}^k = \mathbf{G^R} \mathbf{A^{k^t}} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)$ de dimension $NOXI * N$.
Le terme $|.|_{L_1}$ désigne la norme associée au produit scalaire $< .,. >_{L_1}$ défini sur l'espace $\mathcal{L}^2(L_1)$ des fonctions à valeurs réelles de carré intégrable sur L_1 par:

$$< u, v >_{L_1} = \int_{L_1} u(\vec{X}) v(\vec{X}) d\vec{X}, \forall\ u \in \mathcal{L}^2(L_1), \forall\ v \in \mathcal{L}^2(L_1) \tag{5.26}$$

En identifiant (5.24) avec (5.25), il vient:

$$\boxed{g_{\varepsilon_r}^k = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e\left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I}) \overline{\mathbf{A}^k} \mathbf{G^{R^*}} \rho_{S,F}({\varepsilon_r}^k, \sigma^k)\right)} \tag{5.27}$$

$$\boxed{g_\sigma^k = -2\sum_{F=1}^{NTF}\sum_{S=1}^{NXS}\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\mathcal{I}m\left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I})\overline{\mathbf{A}^k}\mathbf{G}^{\mathbf{R}^*}\rho_{S,F}({\varepsilon_r}^k,\sigma^k)\right)} \tag{5.28}$$

Les deux directions de descente $\eta_{\varepsilon_r}^k$ et η_σ^k sont alors calculées à chaque itération en injectant dans chaque équation de (5.22) la valeur respective du gradient calculée ici avec $\beta_{\varepsilon_r}^k$ et β_σ^k donnés par (5.23).

IV.2 Calcul des facteurs d'échelle optimaux associés

Le calcul des poids associés à chaque direction de descente consiste toujours à minimiser le critère à l'itération $k+1$. Ainsi, on cherche à trouver les réels $\alpha_{\varepsilon_r}^k$ et α_σ^k qui doivent satisfaire:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_{\varepsilon_r}^k}J({\varepsilon_r}^{k+1},\sigma^{k+1}) = 0 \tag{5.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_\sigma^k}J({\varepsilon_r}^{k+1},\sigma^{k+1}) = 0 \tag{5.30}$$

En dérivant l'équation (5.25), on arrive au système définissant les deux facteurs:

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_1\alpha_{\varepsilon_r}^k + B_1\alpha_\sigma^k & = & C_1 \\ B_1\alpha_{\varepsilon_r}^k + B_2\alpha_\sigma^k & = & C_2 \end{array}\right. \tag{5.31}$$

soit

$$\boxed{\alpha_{\varepsilon_r}^k = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{B_1^2 - B_2A_1} \text{ et } \alpha_\sigma^k = \frac{B_1C_1 - A_1C_2}{B_1^2 - B_2A_1}} \tag{5.32}$$

avec les notations

$$A_1 = \sum_{F=1}^{NTF}\sum_{S=1}^{NXS}|\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right)\eta_{\varepsilon_r}^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right)\eta_{\varepsilon_r}^k|_{L_1}^2 \tag{5.33}$$

$$B_1 = \sum_{F=1}^{NTF}\sum_{S=1}^{NXS}\frac{1}{\omega\varepsilon_{r0}}\Big\{< \mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right)\eta_\sigma^k,\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right)\eta_{\varepsilon_r}^k >_{L_1} - < \mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right)\eta_{\varepsilon_r}^k,\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right)\eta_\sigma^k >_{L_1}\Big\} \tag{5.34}$$

$$B_2 = \sum_{F=1}^{NTF}\sum_{S=1}^{NXS}(\frac{1}{\omega\varepsilon_{r0}})^2\left\{|\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right)\eta_\sigma^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right)\eta_\sigma^k|_{L_1}^2\right\} \tag{5.35}$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} < g_{\varepsilon_r}^k,\eta_{\varepsilon_r}^k >_{\mathcal{D}_D} \tag{5.36}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} < g_\sigma^k, \eta_\sigma^k >_{\mathcal{D}_D} \tag{5.37}$$

Reprenons l'exemple précédent pour rendre compte de l'amélioration apportée par le découplage du gradient proposée ici. On étudie l'évolution de l'erreur sur le champ diffracté calculé ainsi que l'erreur sur le calcul de la permittivité (Fig. 5.2).

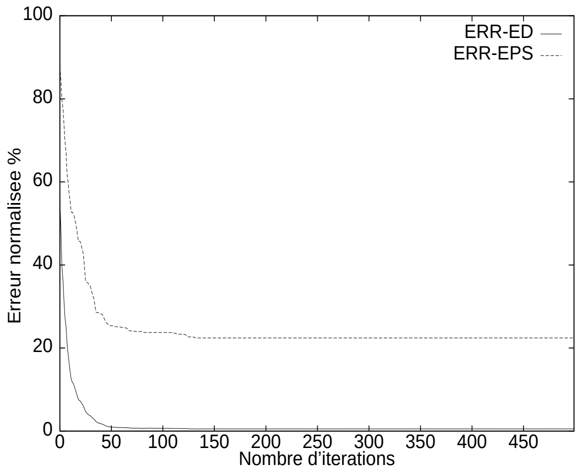


FIG. 5.2 – *Convergence de la méthode BiGC*

En comparant les courbes de convergence obtenues avec les deux méthodes présentées, on peut noter que l'erreur sur le calcul du champ diffracté décroît plus vite pour la nouvelle méthode. En ce qui concerne l'erreur sur le calcul de la permittivité, l'utilisation du bigradient permet d'obtenir le meilleur résultat avec une erreur légérement supérieure à 20% à partir de 50 itérations. L'amélioration apportée par l'utilisation du bigradient est clairement démontrée. Ceci s'explique par la différence des deux termes recherchés. En effet, ε et σ ne varient pas dans les mêmes espaces. Il faut donc les étudier séparément.
Pour la suite du mémoire, on préfère donc utiliser la méthode de bigradient conjugué qui paraît mieux adaptée à notre configuration que la méthode de gradient simple. On pourrait tout aussi bien découpler les deux paramètres α_{ε_r} et α_σ. Mais cette méthode ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants. Ceci peut être expliqué en considérant la définition même des coefficients de pondération α. En effet, ces coefficients sont calculés afin de minimiser la fonctionnelle à l'étape $k+1$. Or, d'un point de vue numérique, il est préférable de minimiser la fonctionnelle globalement plutôt que de fixer l'un ou l'autre des paramètres pour obtenir le coefficient correspondant. La seconde méthode de minimisation entraîne des dégradations sur l'image résultante.
Il reste désormais à étudier, au travers de simulations, les différents paramètres de la méthode BiGC qui assurent la convergence des résultats.

V Résultats des simulations

Cette partie propose à travers différentes simulations de rendre compte de l'apport primordial du paramètre fréquence (cas 1D et 2D). L'étude numérique est complétée par des reconstructions d'objets enterrés simulées pour différentes configurations (nombre de points de mesure, nombre de positions de la source...).

V.1 Étude de l'apport du multifréquence à partir du cas 1D

Comme pour l'étude du processus d'imagerie qualitative, prenons le cas monodimensionnel d'une plaque infinie suivant x, d'épaisseur L et de caractéristique k_D plongée dans l'air et illuminée à une fréquence ω par une onde plane d'incidence normale, d'amplitude unité (Fig. 3.10 dans II.1).
On rappelle l'expression du champ électrique dans les trois domaines présents (n est le rapport $\frac{k_D}{k_0}$):

$$E(y) = e^{jk_0y} + \frac{\frac{k_0-k_D}{k_0+k_D}(1-e^{2jk_DL})}{1-(\frac{k_0-k_D}{k_0+k_D})^2e^{2jk_DL}}e^{-jk_0y} \qquad \text{, pour } y \leq 0$$

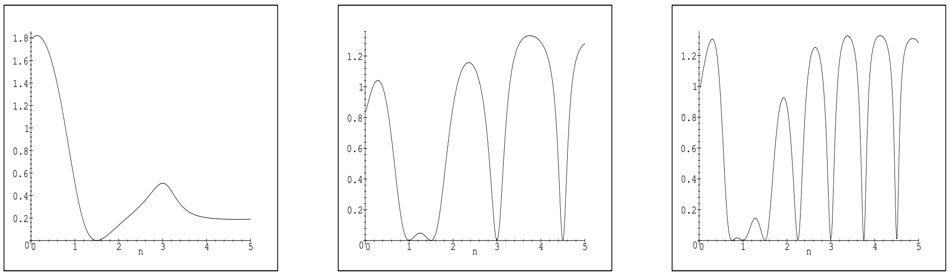
$$E(y) = \frac{\frac{2k_0}{k_0+k_D}e^{jk_DL}e^{-jk_0L}}{1-(\frac{k_0-k_D}{k_0+k_D})^2e^{2jk_DL}}(e^{jk_Dy} - \frac{k_0-k_D}{k_0+k_D}e^{2jk_DL}e^{-jk_Dy}) \quad \text{, pour } 0 \leq y \leq L$$

$$E(y) = \frac{\frac{4k_0k_D}{(k_0+k_D)^2}e^{jk_DL}e^{-jk_0L}}{1-(\frac{k_0-k_D}{k_0+k_D})^2e^{2jk_DL}}e^{jk_0y} \qquad \text{, pour } y \geq L$$

La fonctionnelle J simplifiée devient alors (1 seul point source, 1 seul point de mesure):

$$J = \sum_{\omega}(E^D_{mes} - E^D_{cal}) = \sum_{\omega}(\frac{\frac{1-n}{1+n}(1-e^{2jnk_0L})}{1-(\frac{1-n}{1+n})^2e^{2jnk_0L}} - \frac{\frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}(1-e^{2jn(\omega)k_0L})}{1-(\frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)})^2e^{2jn(\omega)k_0L}})$$

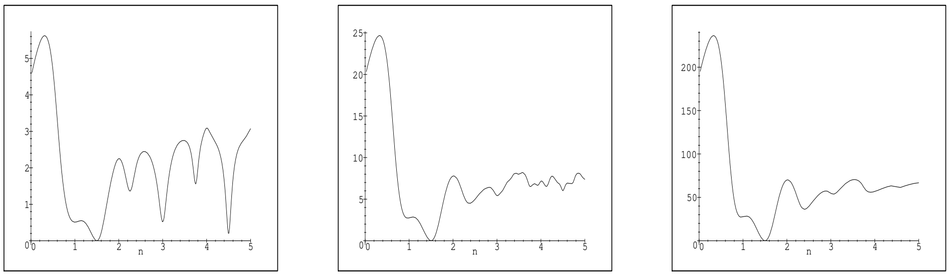
Du fait de la non linéarité du problème, la fonctionnelle s'annule pour $n(\omega) = n$ mais pas uniquement pour cette valeur.
Si on représente la fonctionnelle à une fréquence donnée ($f_M = 2$ GHz) simulée pour un contraste fixe ($n = 1{,}5$) en fonction du paramètre $n(\omega)$, on observe plusieurs minima de la solution pour des valeurs de $n(\omega)$ supérieurs ou inférieurs à n (Fig. 5.3(a) avec $L = 0{,}1\ m$). Ces minima sont difficilement séparables du minimum global. Cette propriété compromet l'étude monofréquentiel dans ce cas là: n'importe quel minimum peut être considéré numériquement comme une solution du problème. En diminuant la fréquence d'étude ($f = 500$ MHz), les minima locaux ont tous disparu (Fig. 5.3(a)). L'étude en monofréquence semble suffisante pour reconstruire une image de l'objet, si on se place à cette fréquence. Cette remarque contraint néanmoins de choisir parfaitement la fréquence d'étude. C'est dans cette optique que s'insère la diversité de fréquence.



(a) f=500 MHz (b) f=1 GHz (c) f=2GHz

FIG. 5.3 – *Représentation de la fonctionnelle à une fréquence (n=1,5)*

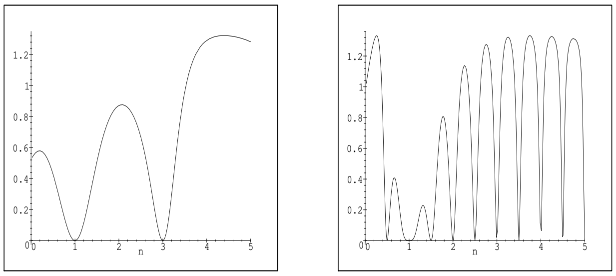
On se place désormais dans la bande de fréquence [1;2] GHz et on étudie l'influence sur le résultat du nombre de fréquences utilisées. Les résultats sont explicites: au fur et à mesure que le nombre de fréquences augmente, le minimum global apparaît comme le seul minimum apparent. Tous les minima locaux ont quasiment disparu (Fig. 5.4). La variation de fréquence, en augmentant le nombre de données accessibles, réduit le nombre de solutions envisageables. On peut alors espérer retrouver la bonne solution en utilisant la variation de fréquence dans l'algorithme de reconstruction.



(a) 3 fréquences (b) 11 fréquences (c) 101 fréquences

FIG. 5.4 – *Représentation de la fonctionnelle sur la bande [1;2] GHz (n=1,5)*

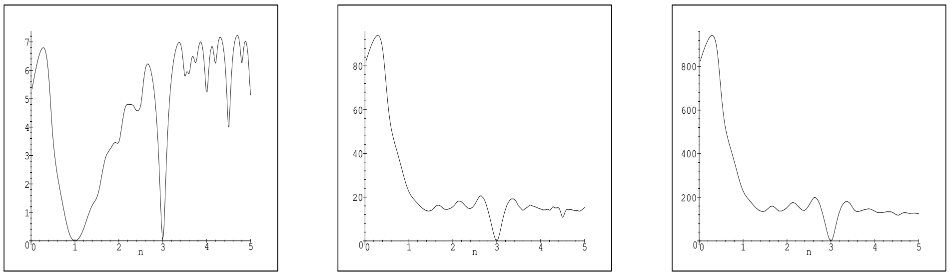
Si on remplit la plaque d'un matériau plus diffractant (n=3), le phénomène précédent est encore plus visible. De plus, si on utilise une seule fréquence, on remarque l'apparition de minima bien avant le minimum global (Fig. 5.5). Ces minima éloignés de la solution peuvent entraîner l'algorithme vers une solution complètement fausse, tout en garantissant la convergence de la méthode.



(a) f=500 MHz (b) f=3 GHz

FIG. 5.5 – *Représentation de la fonctionnelle à une fréquence (n=3)*

L'approche multifréquence permet alors de diminuer l'influence de ces minima en rehaussant la valeur de la fonctionnelle en ces points. Cette approche ne garantit pas la convergence du résultat. Mais lorsqu'on observe la convergence de l'algorithme, on est certain d'obtenir la bonne solution (Fig. 5.6).



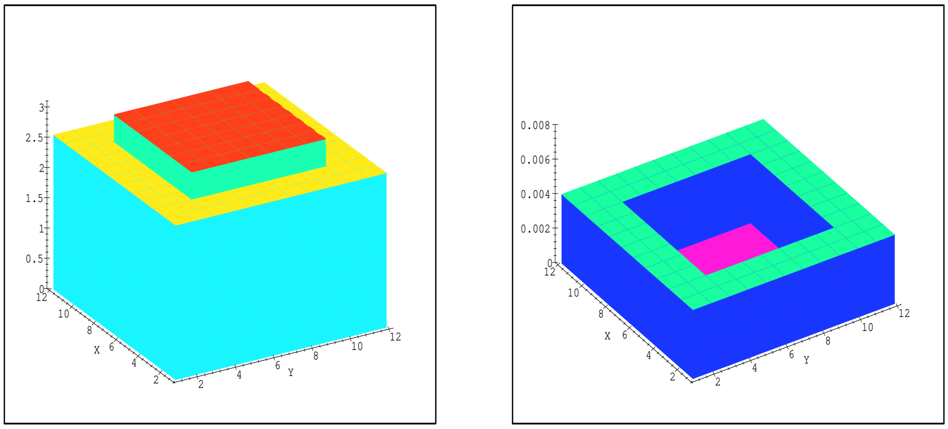
(a) 6 fréquences (b) 26 fréquences (c) 251 fréquences

FIG. 5.6 – *Représentation de la fonctionnelle sur la bande [0,5;3] GHz (n=3)*

L'apport du multifréquence apparaît donc clairement dans le cas 1D. Avec cette approche, la convergence de la méthode n'est en général pas assurée. Elle permet néanmoins de réduire l'espace des solutions envisageables et parfois même d'aboutir à l'unicité de la solution. D'après ces résultats, le calcul d'une estimée initiale proche de la solution du problème ne semble pas nécessaire ici. Dans l'étude en multifréquence, le premier minimum conduisant à une faible valeur de la fonctionnelle (critère variable) correspond à la solution du problème. Dans toute la suite, on utilise une estimée initiale nulle.

V.2 Reconstructions d'objets enterrés

Dans toute cette étude, l'objet à reconstruire est un cylindre carré de 13 cm de coté enterré à une profondeur de 13,5 cm dans un sable sec de caractéristiques diélectriques ($\varepsilon_{r_3} = 2{,}55$, $\sigma_3 = 4.10^{-3}\, S.m^{-1}$). L'objet est défini par sa permittivité relative $\varepsilon_{r_D} = 3$ et par sa conductivité $\sigma_D = 0\, S.m^{-1}$ (Fig. 5.7).



(a) Permittivité

(b) Conductivité $S.m^{-1}$

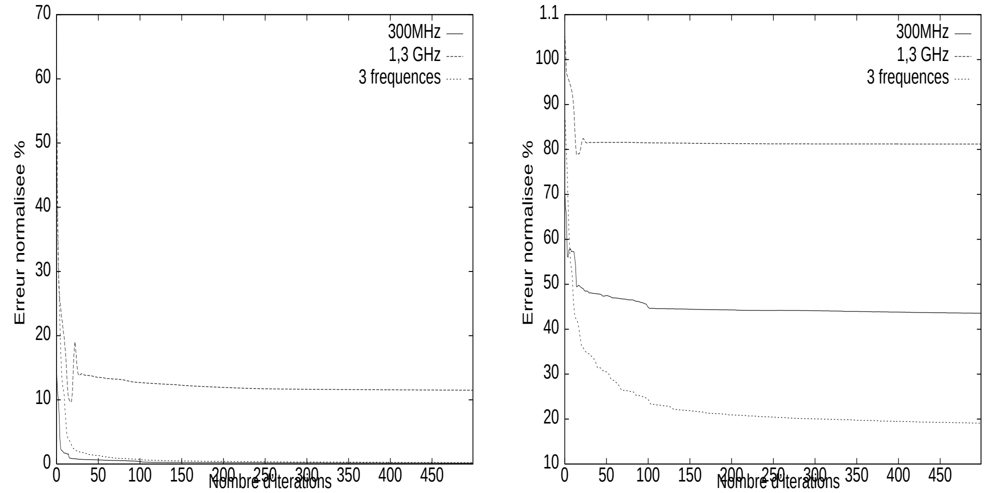
FIG. 5.7 – *Profil réel*

On teste l'efficacité de l'algorithme BiGC en reconstruisant des images de cet objet pour différentes configurations (fréquence fixe, nombre de fréquences variable, domaine de discrétisation variable...). Les profils obtenus sont comparés au profil réel. Des courbes de convergence (évolution de l'erreur sur le champ diffracté et sur le contraste diélectrique) sont aussi présentées afin d'étudier le comportement de l'algorithme en fonction des paramètres. Plusieurs critères d'arrêt sont implémentés dans l'algorithme (erreur sur le calcul du champ diffracté, sur le calcul de la permittivité, de la conductivité, stabilité des données calculées...). Si l'un ou l'autre des critères n'est pas atteint, on affiche le résultat lorsque le nombre d'itérations dépasse 500.
Dans toute la suite, on illumine l'objet avec une onde plane pour 11 angles d'incidence (en fait, cela revient à modéliser une source dont le champ est décomposé en un spectre d'ondes planes). Dans la plupart des simulations présentées, la ligne de mesure longue de 1,20 m est posée sur le sol. On utilise 11 points de mesure équirépartis. Le domaine contenant l'objet est discrétisé en 11×11 cellules carrées de 1,8 cm de côté.

Apport du multifréquence

D'après les premiers résultats 1D, l'utilisation de plusieurs fréquences devrait permettre une meilleure approximation de la solution réelle. Cette propriété est étudiée dans le cas 2D pour des images reconstruites avec la méthode BiGC.
On commence par reconstruire une image du diélectrique enterré successivement pour deux fréquences f=300 MHz et f=1,3 GHz. Ces deux reconstructions sont ensuite comparées à celle réalisée à l'aide de 3 fréquences équiréparties dans la bande [0,3;1,3] GHz (Fig. 5.9).
Comme pour l'approche 1D, la solution apparaît uniquement lorsqu'on utilise plusieurs fréquences. Lorsqu'on travaille avec une seule fréquence, on retrouve les deux cas envisagés précédement. Ainsi, pour la fréquence haute (f=1,3 GHz), l'algorithme ne diverge pas (erreur sur le champ diffracté stabilisée 10%) mais l'erreur sur le contraste n'est pas négligeable (de l'ordre de 80%) (Fig. 5.8). L'image reconstruite diffère complètement de

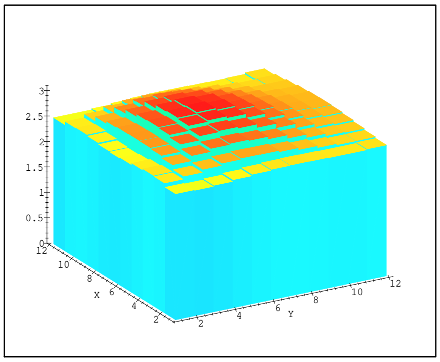
l'image réelle tant en permittivité (Fig. 5.9(a)) qu'en conductivité (Fig. 5.9(b)). L'algorithme est en fait piégé dans un minimum local pour lequel on calcule un champ diffracté assez éloigné du champ diffracté réel. Pour la fréquence basse (f=300 MHz), le minimum atteint assure la convergence de l'algorithme avec une erreur faible (Fig. 5.8) mais ne permet toujours pas de reconstruire les caractéristiques réelles de l'objet et du sol. Le profil général du domaine semble lissé (Figs. 5.9(c) & 5.9(d)). L'objet reconstruit admet donc le même champ diffracté que l'objet réel sans pourtant posséder les mêmes caractéristiques diélectriques (mise en vidence de la non unicité de la solution du problème pour une seule fréquence). Enfin, lorsqu'on reconstruit l'image du domaine en utilisant 3 fréquences, on montre bien la convergence du résultat calcul vers la solution du problème avec une erreur de reconstruction non ngligeable cependant (erreur sur le contraste de l'ordre de 20%). Le profil de permittivité reconstruit est proche du profil réel mais on note encore de petites imperfections dans l'image de la conductivité (fortes valeurs au bord du domaine) (Figs. 5.9(e) & 5.9(f)).
On peut espérer gommer une partie de ces problèmes en augmentant le nombre de donnes frquentielles contenues dans la bande tudie.



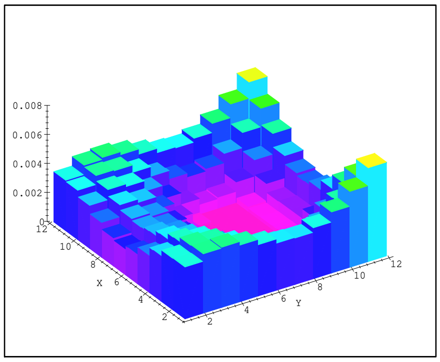
(a) Évolution de l'erreur sur le champ diffracté

(b) Évolution de l'erreur sur le contraste

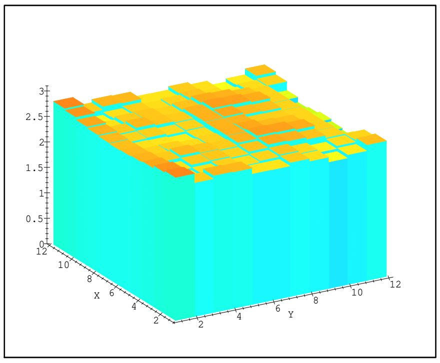
FIG. 5.8 – *Courbes de convergence I*



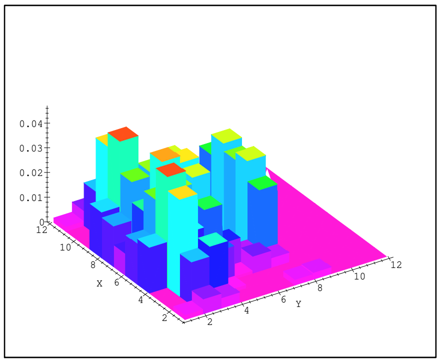
(a) Permittivité (f=300 MHz)



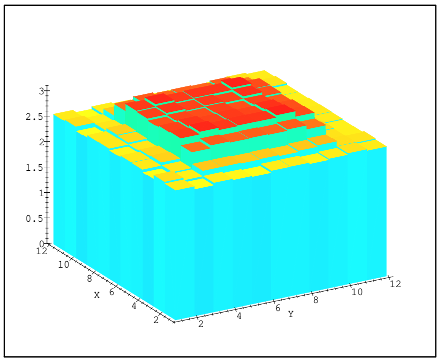
(b) Conductivité $S.m^{-1}$ (f=300 MHz)



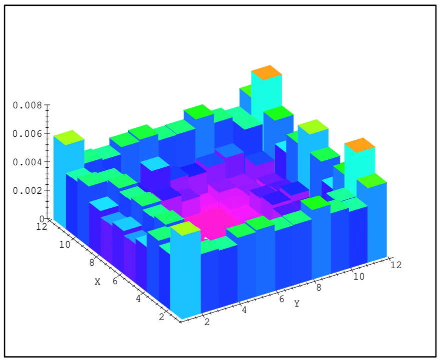
(c) Permittivité (f=1,3 GHz)



(d) Conductivité $S.m^{-1}$ (f=1,3 GHz)



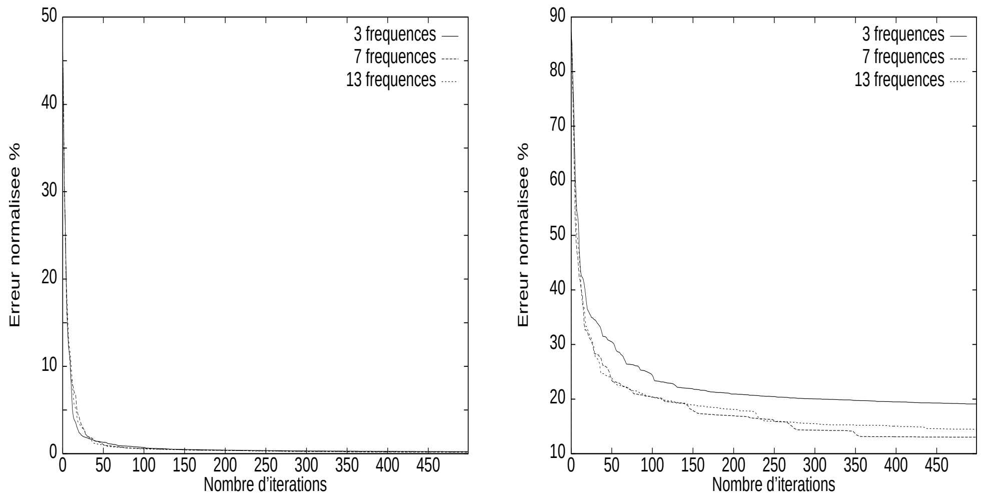
(e) Permittivité (3 fréquences)



(f) Conductivité $S.m^{-1}$ (3 fréquences)

FIG. 5.9 – *Profils reconstruits avec une ou plusieurs fréquences*

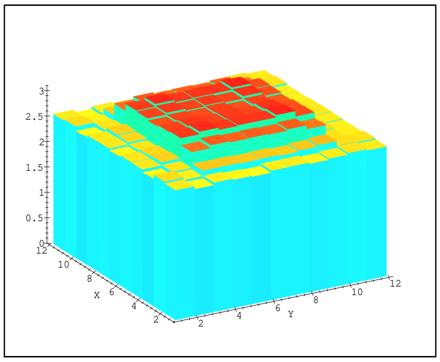
Dans un second temps, on reconstruit une image de l'objet enterré pour 3, 7 et 13 fréquences d'étude (Fig. 5.11).
Pour chacun des trois tests, l'erreur sur le champ diffracté reste très faible (proche de 2.10^{-3}), tandis que l'erreur sur le contraste se situe en dessous de 13% (Fig. 5.10). Comme on peut le constater, la qualité des reconstructions augmente avec le nombre de fréquences utilisées. L'augmentation du nombre de fréquences améliore donc sensiblement la qualit de l'image en diminuant le bruit prsent. Toutefois, les bords de l'objet sont encore mal définis (Figs. 5.11(e) & 5.11(f)) et l'image de la conductivité n'est toujours pas satisfaisante. De plus, on observe peu de diffrences entre l'image reconstruite avec 7 frquences et celle utilisant 13 frquences. L'utilisation d'un nombre plus important de frquences n'amliorent pas l'image rsultante.
On se propose donc de définir une nouvelle méthode d'imagerie base sur la mthode du bigradient conjugu en introduisant dans la fonctionnelle une information sur l'aspect géométrique de l'objet. Cette mthode devrait permettre une nette amlioration de la qualit des images comme dans le cas des objets non enterrs [78][77]. Mais avant d'expliciter cette nouvelle technique, montrons l'influence sur l'image d'une reconstruction préalable du domaine d'investigation à l'aide de l'algorithme qualitatif.



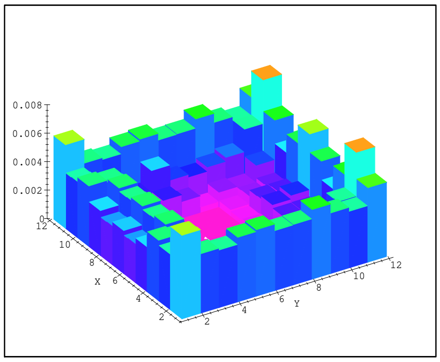
(a) Évolution de l'erreur sur le champ diffracté

(b) Évolution de l'erreur sur le contraste

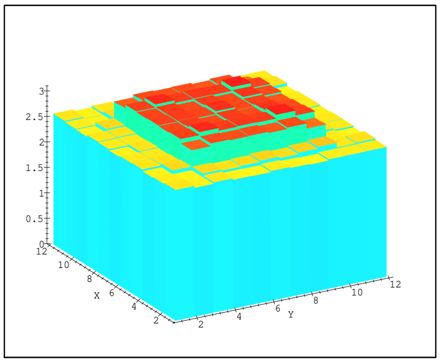
FIG. 5.10 – *Courbes de convergence II*



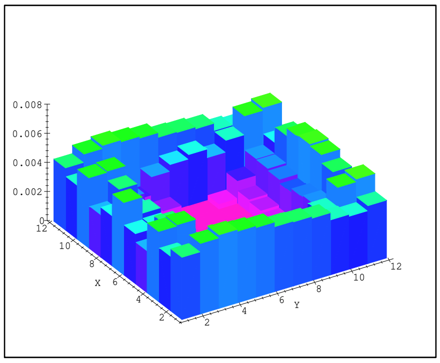
(a) Permittivité (3 fréquences)



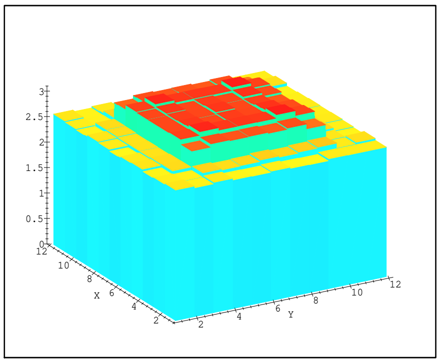
(b) Conductivité $S.m^{-1}$ (3 fréquences)



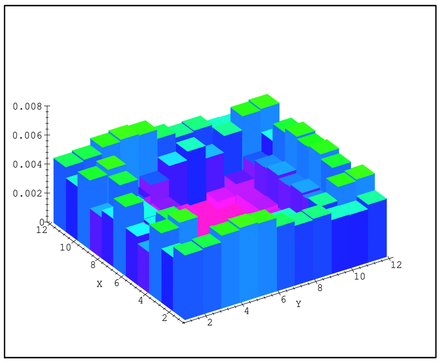
(c) Permittivité (7 fréquences)



(d) Conductivité $S.m^{-1}$ (7 fréquences)



(e) Permittivité (13 fréquences)

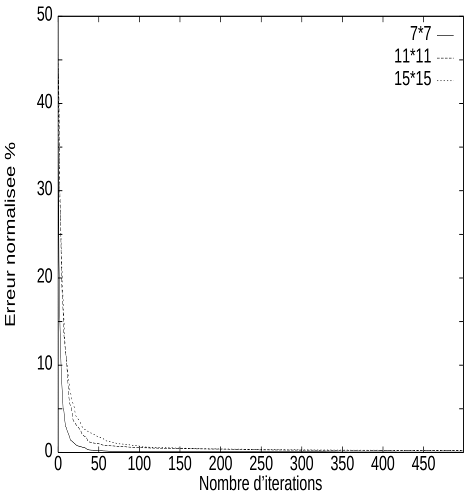


(f) Conductivité $S.m^{-1}$ (13 fréquences)

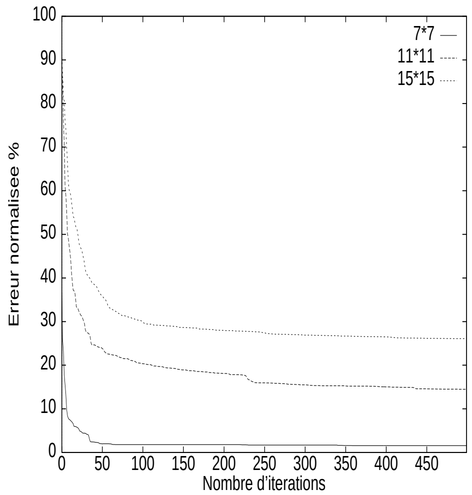
FIG. 5.11 – *Évolution de la reconstruction en fonction du nombre de fréquences*

Bénéfice d'un traitement qualitatif préalable

On désire étudier dans cette partie l'effet que peut avoir une connaissance à priori du domaine d'investigation dans le sol. En effet, afin de restreindre le temps de calul, il est utile de cibler la zone contenant l'objet recherché. Cette information peut être recueillie à l'aide d'une reconstruction préalable du sol en utilisant l'algorithme qualitatif très rapide. L'image résultante permet ainsi de mieux cerner les zones où doivent se trouver les objets enterrés.
Pour cette étude, les paramètres de la méthode (objet, sol, onde incidente,...) demeurent identiques à ceux utilisés précédemment. D'un point de vue numérique, le nombre de cellules discrétisant l'objet ne varie pas (7×7 cellules carrées). L'approche consiste à augmenter dans le domaine inconnu le nombre de cellules contenant du sable autour de l'objet. Pour le premier test, l'objet remplit complètement le domaine. Puis, on l'entoure d'une rangée de 2 cellules: il ne représente plus que 40% du domaine recherché discrétisé en 11×11 cellules. Enfin, on ajoute une rangée de 2 cellules pour que l'objet ne représente que 30% du domaine discrétisé en 15×15 cellules. Dans chaque cas, on respecte la règle $NOXI * NXS = N * N$ pour avoir un système bien déterminé.
Du point de vue de la convergence, l'erreur sur le champ diffracté devient très faible pour chacune des configurations (Fig. 5.12(a)). On note une convergence plus rapide quand l'objet remplit le domaine. Cette différence devient prépondérante dans la représentation de l'erreur sur le contraste (Fig. 5.12(b)). Pour le cas le plus favorable (l'objet représente 100% du domaine), l'algorithme converge rapidement vers la solution exacte (erreur de l'ordre de 2%). Dans les autres cas, la solution calculée converge vers un objet différent de l'objet réel. Cette différence s'acroit avec le nombre de cellules du domaine (15% d'erreur pour le cas 11×11, 25% pour le cas 15×15). Ces différences sont tout aussi bien visibles lorsqu'on reconstruit une image respective des trois domaines d'étude (Fig. 5.13).



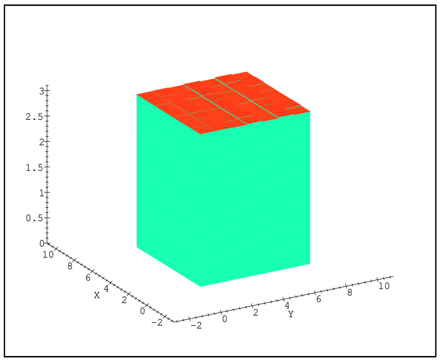
(a) Évolution de l'erreur sur le champ diffracté



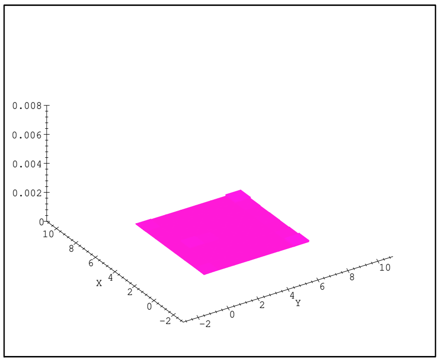
(b) Évolution de l'erreur sur le contraste

FIG. 5.12 – *Courbes de convergence III*

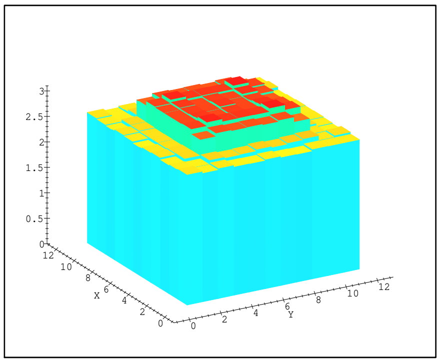
Les différentes images confirment qu'il est important, en vue d'obtenir une image de meilleure qualité, de connaître de manière précise l'emplacement de l'objet enterré. De plus, le temps de calcul d'une itération de l'algorithme est proportionnel au nombre de cellules du domaine à reconstruire. Il est donc primordial de procéder à une étape de reconstruction qualitative dans un but discriminatoire. Puis, une fois le domaine ainsi déterminé, on applique la méthode BiGC.



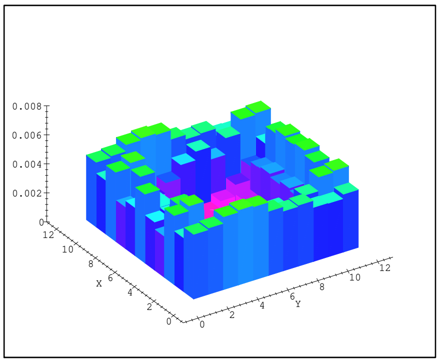
(a) Permittivité (7×7)



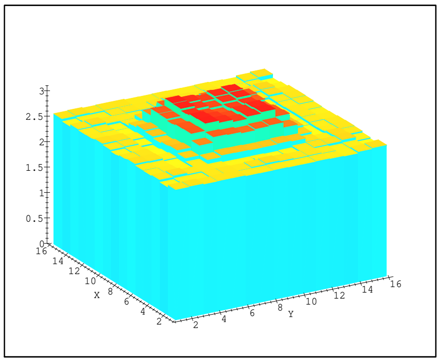
(b) Conductivité $S.m^{-1}$ (7×7)



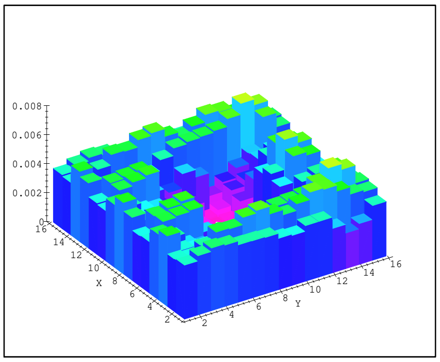
(c) Permittivité (11×11)



(d) Conductivité $S.m^{-1}$ (11×11)



(e) Permittivité (15×15)



(f) Conductivité $S.m^{-1}$ (15×15)

FIG. 5.13 – *Évolution de la reconstruction en fonction du domaine d'étude*

Chapitre 6

Régularisation

Sommaire

Les résultats présentés dans le dernier chapitre ont laissé entrevoir certaines limites de l'approche multifréquentielle appliquée au cas des objets enterrés. Malgré l'amélioration apportée par l'augmentation du nombre de fréquences, la méthode d'imagerie ne permet pas une complète description de l'objet enfoui (bords de l'objet mal définis...). On peut cependant rapprocher les reconstructions simulées dans notre configuration avec celles obtenues à partir de données bruitées dans le cadre de l'imagerie multivue pour des objets dans l'espace libre [60]. En effet, le volume de données utilisées pour reconstruire l'objet est limité dans les deux problèmes. Une amélioration notable peut être alors apportée en incorporant une approche régularisante dans le processus d'imagerie.
Après un bref descriptif des principes des techniques de régularisation, un nouvel algorithme d'imagerie est développé à partir de la méthode de bigradient conjugué en y appliquant une technique de régularisation avec préservation des discontinuités. Les dernières reconstructions issues de simulations sont enfin présentées.

I Principes de la régularisation

Le principe de la régularisation ne peut être abordé sans étudier le caractère mal-posé du problème inverse.
Si on définit l'ensemble P des paramètres qui décrivent l'objet (ses dimensions, sa hauteur d'enfouissement, sa constitution...) et l'ensemble D des données collectées (champ diffracté sur la ligne de mesure), le problème direct consiste à trouver la relation A entre les éléments de P et les éléments de D, tandis que le problème inverse se résuit à relier les deux ensembles dans le sens inverse (A^{-1}).
En pratique, on se heurte à de nombreux problèmes. Tout d'abord, il est difficile de décrire parfaitement l'objet. De plus, les mesures sont effectuées en un nombre fini de points. Ces deux constatations toujours vérifiées impliquent une mauvaise représentation du champ diffracté (à la fois dans le problème direct et dans le problème inverse).
De plus, la transformation A représentant l'opérateur des ondes est linéaire par rapport au champ alors que la relation définissant le problème inverse est non linéaire dans l'approche quantitative. Cette non-linéarité du problème engendre souvent de multiples solutions ayant toutes le même champ diffracté.
Enfin, lorsqu'on mesure réellement les données, un bruit de mesure souvent non négligeable apparaît. Ce paramètre nécessite un traitement avant son passage dans le processus d'imagerie (moyennage, calibration, ...). Une certaine stabilité de l'algorithme d'imagerie est aussi attendue (une petite erreur sur les données doit engendrer une petite erreur sur l'image reconstruite). Mais, lorsque le bruit est trop fort, on peut ne pas trouver de solution au problème, alors que le problème physique en admet une et une seule. Toutes ces propriétés inhérentes à l'étude du problème inverse définissent son caractère mal-posé. Le problème bien-posé est donc défini comme un problème possédant une unique solution qui de plus doit être stable (existence, unicit et stabilit de la solution). Si l'une des conditions n'est pas satisfaite, le problme est dit mal-pos.
Une solution permettant la transformation du problème inverse mal-posé en un problème bien-posé consiste à introduire des contraintes avec un sens physique. Cette "connaissance à priori" de l'objet doit être indépendante des données.

Ainsi, lors d'études des problèmes inverses linéarisés, on peut introduire des approximations (Born, Rytov..) permettant de considérer l'objet comme faiblement diffringent. L'utilisation d'une méthode d'imagerie qualitative avant l'étude du contraste conduit à la réduction du domaine ausculté et donc de l'ensemble des solutions envisageables. On peut montrer que la diversité en fréquence augmente les chances d'obtenir une unique solution.
Les méthodes les plus développées à l'heure actuelle agissent sur l'objet enterré (sa forme, ses dimensions...). Ainsi, la régularisation au sens de Tikhonov conduit à un lissage de la zone auscultée, en introduisant une structure très lisse pour l'objet, sans grandes variations diélectriques à l'intérieur de celui-ci. Cette technique n'est pas généralisable à tout type d'objet.
Dans ce mémoire, on s'intéresse à une technique de régularisation qui préserve les discontinuités de l'objet (*Edge preserving*) [16][61]. Cette régularisation a été appliquée avec succès à l'étude des objets dans l'espace libre (étude sur le contraste de permittivité complexe [60][61][78][77][76]). Ici, on étend la méthode au cas des objets enterrés en étudiant le procédé de régularisation séparément sur les contrastes réels de permittivité et de conductivité. Pour cela, on considère l'objet comme constitué de zones homogènes séparées par des discontinuités. Le terme de régularisation est alors introduit dans la fonctionnelle à minimiser par l'intermédiaire d'une fonction φ agissant respectivement sur le gradient de la permittivité relative et sur le gradient de la conductivité. L'expression du terme de régularisation est alors complété par un réel λ qui définit l'importance que l'on accorde au terme de régularisation par rapport au terme d'attache aux données:

$$\lambda_{\varepsilon_r} \int_{\mathcal{D}_D} \varphi(\|\nabla \varepsilon_r(\vec{X})\|) d\vec{X} + \lambda_\sigma \int_{\mathcal{D}_D} \varphi(\|\nabla \sigma(\vec{X})\|) d\vec{X} \tag{6.1}$$

Plusieurs fonctions ont été définies et étudiées afin de lisser les zones homogènes tout en préservant les discontinuités de l'objet [60]. Chacune d'elles vérifie trois principales conditions imposées sur sa dérivée:

- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi'(t)}{t} = \mathcal{M} < \infty$ pour obtenir un lissage isotropique des zones homogènes
- $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\varphi'(t)}{t} = 0$ pour assurer la préservation des discontinuités
- $\dfrac{\varphi'(t)}{t}$ strictement décroissante pour avoir la stabilité du terme de régularisation

Dans la thèse, seules sont utilisées les fonctions de Geman & Mac Clure ($\dfrac{t^2}{1+t^2}$), et de Hebert & Leahy ($log(1+t^2)$). Ces fonctions non convexes permettent un rehaussement des contours présents dans l'objet [9].
Avant de mettre en œuvre numériquement cette procédure de régularisation, on introduit une variable auxiliaire b ou variable de pondération telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = \min\limits_{b\in]0,\mathcal{M}]} (bt^2 + \psi(b)) \\ \\ b_{min} = \dfrac{\varphi'(t)}{2t} \end{array} \right. \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{6.2}$$

L'introduction de la variable auxiliaire rend quadratique le terme de rgularisation. De plus, au cours du processus de recostruction, la variable b dcrit les contours reconstruits de l'objet

ce qui permet de contrler le droulement de l'algorithme au cours des itrations.
L'existence des fonctions b et ψ (fonctions convexes) a été démontrée pour le cas des fonctions préservant les discontinuités [16].
A l'aide de la fonction de pondération, on va définir un algorithme de minimisation alternée sur la fonctionnelle globale:

- première étape: minimisation de la fonctionnelle en fixant la permittivité et la conductivité. Résolution analytique donnée par l'expression de b_{min} dans (6.2)
- deuxième étape: minimisation de la fonctionnelle en fixant la fonction de pondération. Méthode de bigradient conjugué sur la fonctionnelle avec régularisation.

II Méthode BiGC avec régularisation

On reprend les notations définies dans le cas de la méthode BiGC en ajoutant un nouveau terme à la fonctionnelle étudiée. On cherche alors les paramètres ε_r et σ qui minimisent la fonctionnelle J:

$$\begin{aligned} J(\varepsilon_r,\sigma) &= \sum_{F=1}^{NTF}\sum_{S=1}^{NXS}\|\rho_{S,F}(\varepsilon_r,\sigma)\|^2_{L_1} + \min_{b_{\varepsilon_r}} J_{R_{\varepsilon_r}}(\varepsilon_r,b_{\varepsilon_r}) + \min_{b_\sigma} J_{R_\sigma}(\sigma,b_\sigma) \\ &= J_{BiGC}(\varepsilon_r,\sigma) + J_{REG}(\varepsilon_r,\sigma) \end{aligned} \tag{6.3}$$

avec

$$J_{R_{\varepsilon_r}}(\varepsilon_r,b_{\varepsilon_r}) = \frac{\zeta^2_{\varepsilon_r}}{\delta^2_{\varepsilon_r}}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[(b_{\varepsilon_r})_{p,q}\|(\nabla\varepsilon_r)_{p,q}\|^2 + \psi((b_{\varepsilon_r})_{p,q})] \tag{6.4}$$

$$J_{R_\sigma}(\sigma,b_\sigma) = \frac{\zeta^2_{\sigma}}{\delta^2_{\sigma}}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[(b_{\sigma})_{p,q}\|(\nabla\sigma)_{p,q}\|^2 + \psi((b_{\sigma})_{p,q})] \tag{6.5}$$

Les gradients matriciels $\|\nabla\varepsilon_r\|$ et $\|\nabla\sigma\|$ sont définis en annexe (F.1).
Les variables ζ_{ε_r} et ζ_σ sont les paramètres de régularisation qui agissent respectivement sur ε_r et σ, alors que δ_{ε_r} et δ_σ fixent les seuils de discontinuité des deux variables étudiés (valeurs à partir desquelles l'algorithme détecte une discontinuité).
Les variables b_{ε_r} et b_σ sont quant à elles calculées en vue de minimiser le terme de régularisation dans (6.3), en fixant respectivement ε_r et σ. Leur expression est donnée à partir des φ fonctions, pour tous les points du domaine à reconstruire:

$$(b_{\varepsilon_r})_{p,q} = \frac{\varphi'(\frac{1}{\delta_{\varepsilon_r}}\|(\nabla\varepsilon_r)_{p,q}\|)}{\frac{2}{\delta_{\varepsilon_r}}\|(\nabla\varepsilon_r)_{p,q}\|} \text{ et } (b_\sigma)_{p,q} = \frac{\varphi'(\frac{1}{\delta_\sigma}\|(\nabla\sigma)_{p,q}\|)}{\frac{2}{\delta_\sigma}\|(\nabla\sigma)_{p,q}\|} \tag{6.6}$$

Une méthode itérative de type bigradient conjugué est alors appliquée pour calculer les valeurs de ε_r et σ recherchées.

II.1 Calcul du bigradient

Afin de calculer le bigradient du nouveau critère, on utilise le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonctionnelle à l'itération $k+1$ (5.24). D'après la définition de J, on montre que le nouveau gradient est composé de la somme des bigradients respectifs de J_{BiGC} et J_{REG}.

$$\nabla_{\varepsilon_r} J({\varepsilon_r}^k,\sigma^k) = \nabla_{\varepsilon_r} J_{BiGC}({\varepsilon_r}^k,\sigma^k) + \nabla_{\varepsilon_r} J_{REG}({\varepsilon_r}^k,\sigma^k) \tag{6.7}$$
$$\nabla_{\sigma} J({\varepsilon_r}^k,\sigma^k) = \nabla_{\sigma} J_{BiGC}({\varepsilon_r}^k,\sigma^k) + \nabla_{\sigma} J_{REG}({\varepsilon_r}^k,\sigma^k) \tag{6.8}$$

Or, on montre (F.8):

$$\begin{aligned} J_{REG}({\varepsilon_r}^{k+1},\sigma^{k+1}) = J_{REG}({\varepsilon_r}^k,\sigma^k) & \\ - 2\alpha^k_{\varepsilon_r} < \frac{\zeta^2_{\varepsilon_r}}{\delta^2_{\varepsilon_r}} \Delta_{b_{\varepsilon_r}} {\varepsilon_r}^k, \eta^k_{\varepsilon_r} >_{\mathcal{D}_D} & \\ - 2\alpha^k_{\sigma} < \frac{\zeta^2_{\sigma}}{\delta^2_{\sigma}} \Delta_{b_{\sigma}} \sigma^k, \eta^k_{\sigma} >_{\mathcal{D}_D} & \end{aligned} \tag{6.9}$$

D'où l'expression du nouveau bigradient:

$$\boxed{g^k_{\varepsilon_r} = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e\left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I})\overline{\mathbf{A}^k}\mathbf{G}^{\mathbf{R}^*} \rho_{S,F}({\varepsilon_r}^k,\sigma^k)\right) - 2\frac{\zeta^2_{\varepsilon_r}}{\delta^2_{\varepsilon_r}} \Delta_{b_{{\varepsilon_r}^k}} {\varepsilon_r}^k} \tag{6.10}$$

$$\boxed{g^k_{\sigma} = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \frac{1}{\omega\varepsilon_0} \mathcal{I}m\left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I})\overline{\mathbf{A}^k}\mathbf{G}^{\mathbf{R}^*} \rho_{S,F}({\varepsilon_r}^k,\sigma^k)\right) - 2\frac{\zeta^2_{\sigma}}{\delta^2_{\sigma}} \Delta_{b_{\sigma^k}} \sigma^k} \tag{6.11}$$

Les directions de descente $\eta^k_{\varepsilon_r}$ et η^k_σ sont ensuite calculées d'une façon analogue à celle définie précédemment.

II.2 Calcul des facteurs d'échelle optimaux associés

En reprenant les mêmes notations que pour la méthode BiGC sans régularisation, on montre d'après (F.8) que $\alpha^k_{\varepsilon_r}$ et α^k_σ satisfont le système suivant:

$$\begin{aligned} A_{R1}\alpha^k_{\varepsilon_r} + B_{R1}\alpha^k_\sigma = C_{R1} \\ B_{R1}\alpha^k_{\varepsilon_r} + B_{R2}\alpha^k_\sigma = C_{R2} \end{aligned} \tag{6.12}$$

soit

$$\boxed{\alpha^k_{\varepsilon_r} = \frac{B_{R1}C_{R2} - B_{R2}C_{R1}}{B^2_{R1} - B_{R2}A_{R1}} \text{ et } \alpha^k_\sigma = \frac{B_{R1}C_{R1} - A_{R1}C_{R2}}{B^2_{R1} - B_{R2}A_{R1}}} \tag{6.13}$$

avec les notations

$$A_{R1} = A_1 + \frac{\zeta^2_{\varepsilon_r}}{\delta^2_{\varepsilon_r}} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} (b_{\varepsilon_r})_{p,q} \|(\nabla \eta^k_{\varepsilon_r})_{p,q}\|^2 \tag{6.14}$$

$$B_{R1} = B_1 \tag{6.15}$$

$$B_{R2} = B_2 + \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} (b_\sigma)_{p,q} \|(\nabla \eta_\sigma^k)_{p,q}\|^2 \tag{6.16}$$

$$C_{R1} = C_1 + < \frac{\zeta_{\varepsilon_r}^2}{\delta_{\varepsilon_r}^2} \Delta_{b_{\varepsilon_r}{}^k} \varepsilon_r{}^k, \eta_{\varepsilon_r}^k >_{\mathcal{D}_D} \tag{6.17}$$

$$C_{R2} = C_2 + < \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \Delta_{b_\sigma{}^k} \sigma^k, \eta_\sigma^k >_{\mathcal{D}_D} \tag{6.18}$$

III Résultats numériques

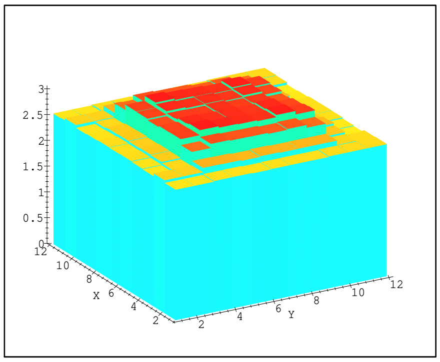
Nous ne présentons pas ici une étude qui se voudrait exhautive mais plutôt une illustration de la technique de régularisation au travers de deux exemples numériques. Cependant, les images reconstruites en appliquant la méthode précédente, attestent de l'efficacité de la procédure de régularisation décrite dans la dernière partie. Chacune des simulations est comparée à l'image obtenue avec la méthode BiGC (sans régularisation). On utilise dans toute la suite 3 fréquences d'illumination équiréparties dans la bande [0,3;1,3] GHz.

III.1 Reconstruction du cylindre carré

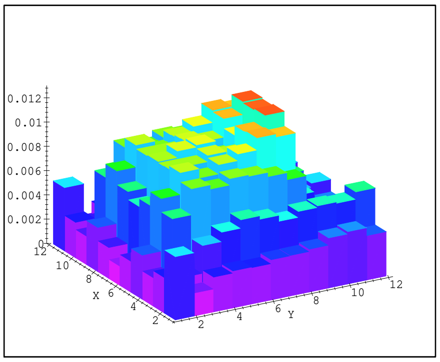
On reprend l'exemple du cylindre de section carrée étudié dans le chapitre précédent. Seule sa conductivité a changé ($\sigma = 10^{-2}\, S.m^{-1}$). Les autres caractéristiques restent les mêmes.
L'amélioration générale sur l'image apportée par l'introduction des paramètres régularisant ($\zeta_{\varepsilon_r} = 6.10^{-3}$; $\delta_{\varepsilon_r} = 1{,}2.10^{-3}$; $\zeta_\sigma = 4.10^{-1}$; $\delta_\sigma = 5.10^{-3}$) n'est pas négligeable (Fig. 6.1). Toutes les imperfections contenues dans l'image reconstruite à l'aide de la méthode BiGC (Figs. 6.1(a) et 6.1(b)) ont à présent disparu (Figs. 6.1(c) et 6.1(d)). Seules quelques cellules diffèrent de l'image exacte. En effet, la symétrie des objets n'est pas totalement respectée. Cette erreur s'explique par l'utilisation d'une formule décentrée à droite dans l'étape de discrétisation du gradient matriciel (F.1). Néanmoins, on peut convenir de l'exactitude des résultats obtenus: les caractéristiques de l'objet sont reconstruites de manière très précise (erreur sur le contraste proche de 1%). D'un point de vue géométrique, les bords de l'objet sont parfaitement reconstruits tant pour la permittivité que pour la conductivité. La forme de l'objet a été lissée tout aussi parfaitement. L'image obtenue est en tout point comparable à l'image réelle (Figs. 6.1(e) et 6.1(f)).

III.2 Reconstruction d'un anneau carré

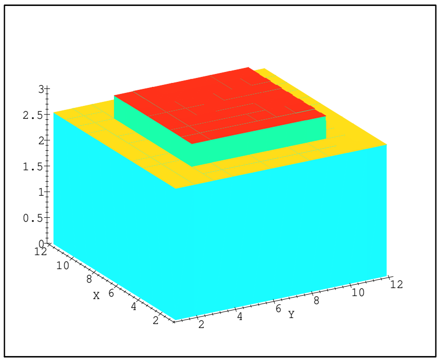
L'objet à reconstruire garde les mêmes caractéristiques que celui étudié dans l'exemple précédent. Seule la forme de la section du cylindre a été transformée en un anneau carré.



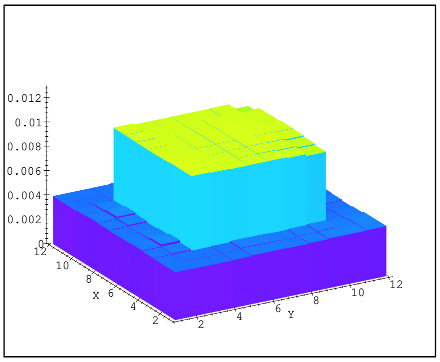
(a) Profil ε_r reconstruit BiGC



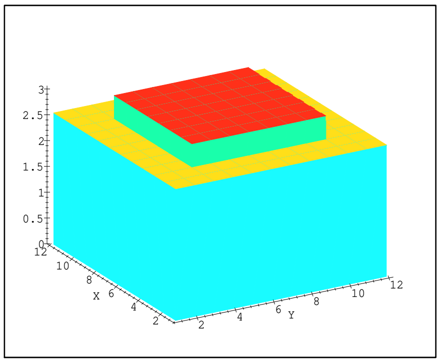
(b) Profil σ reconstruit BiGC



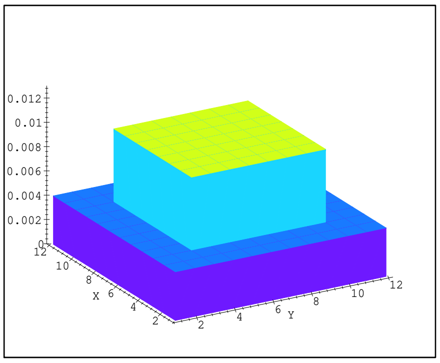
(c) Profil ε_r reconstruit régularisé



(d) Profil σ reconstruit régularisé



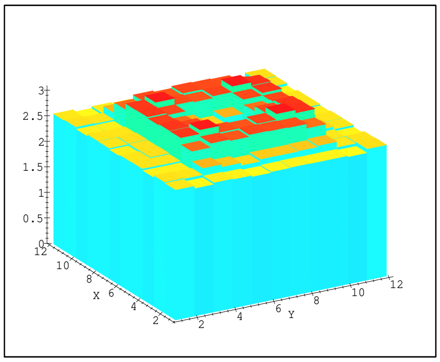
(e) Profil ε_r réel



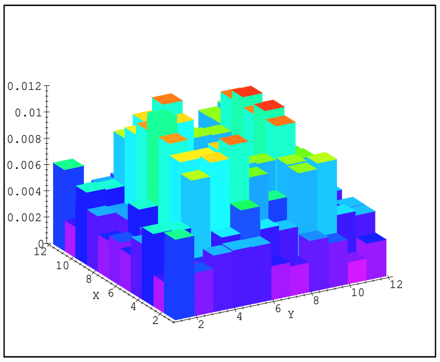
(f) Profil σ réel

FIG. 6.1 – *Comparaison des différentes reconstructions du cylindre carré*

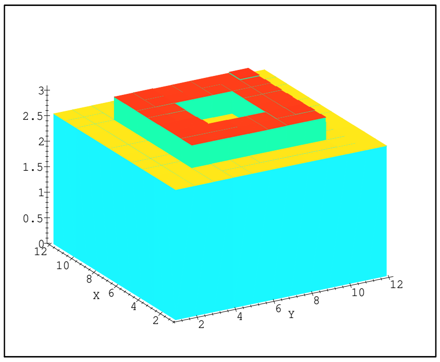
La comparaison des images obtenues soit par la méthode BiGC (Figs. 6.1(a) et 6.1(b)) soit en introduisant dans celle-ci une part de régularisation (Figs. 6.1(c) et 6.1(d) pour $\zeta_{\varepsilon_r} = 6.10^{-3}$; $\delta_{\varepsilon_r} = 1{,}2.10^{-3}$; $\zeta_\sigma = 4.10^{-1}$; $\delta_\sigma = 6.10^{-3}$) conduit à la même analyse que précédemment. La technique régularisante permet de reconstruire avec précision la forme et les caractéristiques de l'objet enterré. Les résultats sont très satisfaisants si on les compare avec l'image réelle (Figs. 6.1(e) et 6.1(f)), même si on note une moins bonne reconstruction de la conductivité pour la partie inférieure de l'objet. Cette différence peut être expliquée en comparant dans un premier temps la valeur respective des deux contrastes à reconstruire. On étudie de la même façon un contraste proche de l'unité pour la permittivité ($C_{\varepsilon_r} = 0{,}45$) et un contraste très faible de conductivité ($C_\sigma = 6.10^{-4}\ S.m^{-1}$). Si l'erreur commise sur la conductivité est relativement forte (en comparant avec la donnée réelle), elle peut néanmoins être considérée comme faible si on compare les valeurs trouvées avec les valeurs cherchées pour la permittivité. De plus, d'un point de vue physique, la conductivité, qui est à l'origine du facteur d'atténuation des ondes, est toujours plus difficile à obtenir que la permittivité. Une augmentation du nombre de fréquences couplée à une analyse plus fine des paramètres de régularisation (étude de deux procédures de régularisation, par exemple) pourrait sensiblement améliorer l'image obtenue.



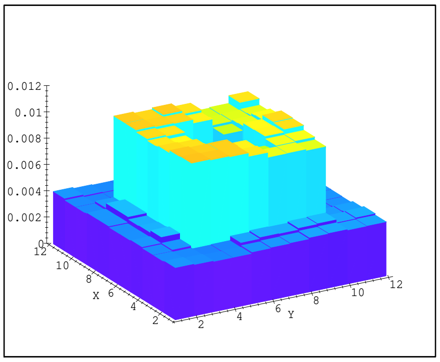
(a) Profil ε_r reconstruit BiGC



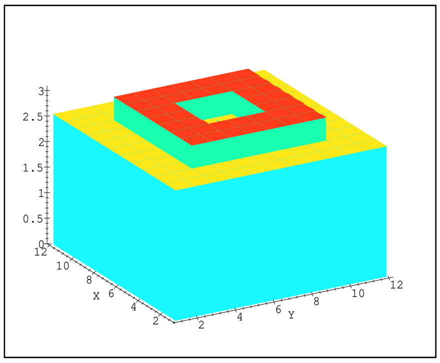
(b) Profil σ reconstruit BiGC



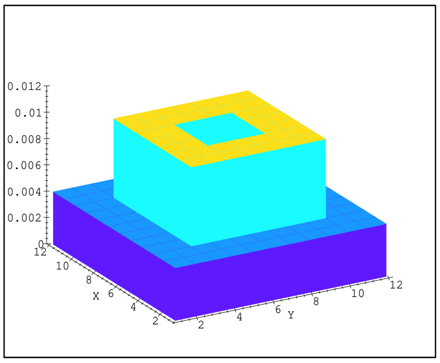
(c) Profil ε_r reconstruit régularisé



(d) Profil σ reconstruit régularisé



(e) Profil ε_r réel



(f) Profil σ réel

FIG. 6.2 – *Comparaison des différentes reconstructions de l'anneau carré*

Conclusion

Cette deuxième partie est donc consacrée au développement de techniques d'imagerie quantitative. Basées essentiellement sur des techniques de minimisation de fonctionnelles à valeurs réelles utilisant des algorithmes de type gradient conjugué, les méthodes développées ici ont amélioré les résultats obtenus avec la méthode spectrale du point de vue de la détection et de la localisation d'objets enterrés. De plus, cette deuxième génération d'algorithmes d'imagerie a permis de résoudre le problème inverse lectromagntique, toujours posé dans le cas fondamental 2D-TM, de manière quantitative en reconstruisant à la fois le profil de permittivité relative et de conductivité d'objets enfouis dans le sol.
Bénéficiant essentiellement de l'illumination multiposition et de l'approche multifréquence, les images produites par la méthode BiGC ont su démontrer le pouvoir de super résolution de cette méthode. Cette propriété différencie ainsi ces nouveaux algorithmes des techniques de type qualitative limitées au critère de Rayleigh ($\frac{\lambda}{2}$), ou des techniques quantitatives de type Newton Kantorovich qui nécessitent dans tous les cas l'utilisation d'une procédure de régularisation.
En complément, l'introduction d'une procédure de régularisation, de type préservation des discontinuités, à l'intérieur même du processus de minimisation a confirmé cette tendance pour aboutir, dans les exemples présentés, à des résolutions spatiales de l'ordre de $\frac{\lambda}{10}$ pour les fréquences hautes jusqu'à $\frac{\lambda}{30}$ pour les plus basses fréquences. Cette nouvelle technique a conduit aux meilleurs résultats tant en précision des reconstructions qu'en vitesse de convergence. La méthode n'est toutefois pas encore optimale. On note, en effet, des différences entre la permittivité et la conductivité reconstruite. Cependant, il est toujours plus difficile de reconstruire la conductivité, mais des progrès peuvent encore être apportés afin d'améliorer les résultats.
Les méthodes proposées restent aussi très coûteuses en temps de calcul et en volume de données. Du point de vue des mesures, si le champ diffracté est toujours mesuré sur une ligne de mesure près ou sur le sol, la résolution du problème inverse nécessite la connaissance du champ électrique à l'intérieur d'une portion surfacique du sol. De plus, l'algorithme que nous proposons ncessite chaque itration l'inversion d'un problme direct. Or, le temps de calcul li cette inversion, effectue pour chaque frquence l'aide d'une mthode de rsolution directe, ne permet pas l'utilisation de cette technique d'imagerie pour des applications en temps rel ou quasi rel. On peut nanmoins l'utiliser pour affiner des images reconstruites avec une méthode beaucoup plus rapide. Il est aussi possible d'optimiser le temps de calcul en résolvant le problème direct de manière itérative. Le cas 2D-TE doit aussi être envisagé. Le cas 3D, s'il reste à l'étude, ne pourra être utilisé actuellement que pour de petits cas tests avec peu de fréquences.
Il reste également à étendre de façon systématique les propriétés mises à jour en reconstrui-

sant des images d'objets plus conducteurs (objets métaliiques) pour des sols plus humides. Une étude de stabilité des algorithmes vis à vis du bruit de mesure devrait permettre de mieux définir les capacités de ces méthodes. Enfin, comme dans le cas de l'imagerie qualitative, il serait intéressant d'effectuer une phase de validation expérimentale des algorithmes de reconstruction. D'un point de vue pratique, il serait souhaitable dans un premier temps d'optimiser le nombre et la position des points de mesure afin de rduire les temps de calcul.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'augmentation continue du nombre d'applications en génie civil mais aussi dans les domaines industriel, militaire ou humanitaire (détection des mines) pour la reconstruction d'objets enterrés ou d'inclusions enfouies dans un semi espace, nous a conduit à développer, au cours de cette thèse, deux types d'algorithmes d'imagerie microonde.
Dans une première partie, nous avons modélisé puis simulé l'interaction entre un champ électromagnétique de dépendance spatio-temporelle quelconque et un milieu inhomogène dans le cas fondamental 2D-TM pour une configuration particulière. Cette étape de résolution du problème électromagnétique direct, en utilisant essentiellement la méthode des moments généralisés, a permis de calculer le champ diffracté par l'objet enterré sur une ligne de mesure dans l'air ou sur le sol.
Puis, dans une seconde partie, nous avons abordé le problème inverse sous une forme qualitative en étendant au cas d'une onde quelconque la technique de tomographie par diffraction définie pour un formalisme de type onde plane. Sa résolution, effectuée à l'aide d'une approche spectrale, a conduit à la reconstruction d'images liées aux courants induits dans ou à la surface de l'objet. La prise en compte du champ d'antenne au sein du processus de reconstruction, la fréquence d'illumination, le nombre de positions de source et la loi de dispersion dans les sols sont autant de facteurs qui influent sur l'efficacité de l'algorithme. Rapide grâce à l'utilisation de FFT et portable étant donné le peu de volume de données nécessaires à son utilisation, ce type d'algorithme est parfaitement adapté à la détection et la localisation d'objets enterrés en temps quasi-réel. Une étape de validation expérimentale a d'ailleurs été réalisée avec succès au cours de ce travail. Ce type d'algorithme offre malheureusement une résolution spatiale limitée de l'ordre du critère de Rayleigh ($\frac{\lambda}{2}$).
C'est pourquoi, dans une dernière partie, nous avons cherché à reconstruire les caractéristiques diélectriques des objets en développant des algorithmes d'imagerie quantitative. Les méthodes basées sur des techniques itératives de minimisation de type gradient conjugué, ont utilisé l'approche multifréquence et multicapteurs pour conduire à des reconstructions satisfaisantes. Nous avons ensuite amélioré les techniques précédentes en introduisant une procédure de régularisation de type préservation des discontinuités. Les résultats numériques obtenus ont permis ainsi d'accroître le pouvoir de résolution des algorithmes pour aboutir à une imagerie super résolution (de l'ordre de $\frac{\lambda}{30}$ pour certains objets). Le principal défaut de ce type d'algorithme réside dans son coût en temps de calcul et dans son important volume de données à traiter à chaque itération.
Les résultats obtenus à l'aide des ces deux types d'algorithmes d'imagerie semble de nature contradictoire. Rapides mais peu précis pour le cas qualitatif, ils sont plus longs à obtenir pour une précision plus fine dans l'étude quantitative. Cependant, le développement d'ordinateurs toujours plus performants peut favoriser l'implémentation des algorithmes quantitatifs dans un futur proche. De plus, si la méthode spectrale conduit à des résultats peu précis, elle permet néanmoins d'obtenir très rapidement des informations sur la présence ou

non d'objet dans une partie du sol non négligeable. Cette propriété peut être utilisée pour initialiser le problème inverse quantitatif.
Néanmoins, les objectif fixés ont tous été atteints (modélisation d'un système radar complet, amélioration des techniques d'imagerie, développement de méthode d'imagerie super résolution). Parmi les objectifs désormais à atteindre, l'extension de ces méthodes au cas 2D-TE et surtout au cas 3D paraît primordiale. Parallèlement, ces deux types d'algorithmes bénéficiant essentiellement de l'illumination multifréquence et multicapteurs, il faut étudier avec précision des antennes en vue d'une application à l'imagerie microonde. Enfin, il semble intéressant d'appliquer toutes ces méthodes à d'autres domaines que ceux étudiés dans ce mémoire.

Troisième partie

ANNEXES

Annexe A

Calcul des fonctions de Green 2D associées aux milieux stratifiés

La transformée de Fourier spatiale suivant x de la fonction de Green, solution élémentaire de l'équation de propagation (1.11), vérifie:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\nu,y,x',y',\omega) + \tilde{\gamma_i}^2 g(\nu,y,x',y',\omega) = -e^{-2j\pi\nu x'}\delta(y-y') \tag{A.1}$$

A partir de cette équation différentielle au sens des distributions, on en déduit:

Continuité de g:

g continue en y=0, y=h, y=y'

$\frac{\partial g}{\partial y}$ continue en y=0, y=h

$\frac{\partial g}{\partial y}$ discontinue en y=y'

(saut de g: $\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{y\to y'_+} - \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{y\to y'_-} = -e^{-2j\pi\nu x'}$)

Afin d'avoir l'unicité de la solution, on ajoute une condition de rayonnement:

Condition d'onde sortante pour g:

$$\lim_{y\to\infty} \sqrt{y}[\frac{\partial g(\nu,y,x',y',\omega)}{\partial y} - j\tilde{\gamma_i} g(\nu,y,x',y',\omega)] = 0 \ .$$

avec $\tilde{\gamma_i}^2 = \tilde{\gamma_i}^2(\omega,\nu) = k_i^2(\omega) - 4\pi^2\nu^2$, $i = 1,2,3$.

• Cas d'une ligne source infinie parallèle à $\vec{z}$ dans $\mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_D$ au point $\vec{X'}$

La fonction de Green $G(\vec{X},\vec{X'},\omega)$, qui peut être interprétée comme le champ rayonné par cette source et mesuré au point $\vec{X}$, vérifie le système:

$$\left\{\begin{array}{lll} \Delta G(\vec{X},\vec{X'},\omega) + {k_1}^2 G(\vec{X},\vec{X'},\omega) = 0 & ,\forall\, \vec{X} \in \mathcal{D}_1 & \\ \Delta G(\vec{X},\vec{X'},\omega) + {k_2}^2 G(\vec{X},\vec{X'},\omega) = 0 & ,\forall\, \vec{X} \in \mathcal{D}_2 & \forall\omega \\ \Delta G(\vec{X},\vec{X'},\omega) + {k_3}^2 G(\vec{X},\vec{X'},\omega) = -\delta(\vec{X}-\vec{X'}) & ,\forall\, \vec{X} \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_D & , \end{array}\right. \tag{A.2}$$

avec les conditions aux interfaces et la condition de rayonnement appropriées.
Soit $g(\nu,y,x',y',\omega)$ sa transformée de Fourier spatiale suivant x définie par (1.15). D'après (A.1), elle vérifie:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\nu,y,x',y',\omega) + \widetilde{\gamma_1}^2 g(\nu,y,x',y',\omega) = 0 && ,\forall\, y \leq 0 \\
&\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\nu,y,x',y',\omega) + \widetilde{\gamma_2}^2 g(\nu,y,x',y',\omega) = 0 && ,\forall\, 0 \leq y \leq h \\
&\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\nu,y,x',y',\omega) + \widetilde{\gamma_3}^2 g(\nu,y,x',y',\omega) = -e^{-2j\pi\nu x'}\delta(y-y') && ,\forall\, y \geq h
\end{aligned} \tag{A.3}$$

avec les conditions de continuité et de rayonnement de (A.1).
Les solutions du système différentiel sont de la forme $g = A_l e^{j\widetilde{\gamma_l} y} + B_l e^{-j\widetilde{\gamma_l} y}$, $l = 1,4$. Cependant, seules les ondes sortantes sont prises en compte $(A_1 = B_4 = 0)$. D'où,

$$\begin{cases}
g = B_1 e^{-j\widetilde{\gamma_1} y}, & \forall\, y \leq 0 \\
g = A_2 e^{j\widetilde{\gamma_2} y} + B_2 e^{-j\widetilde{\gamma_2} y}, & \forall\, 0 \leq y \leq h \\
g = A_3 e^{j\widetilde{\gamma_3} y} + B_3 e^{-j\widetilde{\gamma_3} y}, & \forall\, h \leq y \leq y' \\
g = A_4 e^{j\widetilde{\gamma_3} y}, & \forall\, y \geq y' \\
\text{avec } A_l, B_l \text{ constantes complexes.}
\end{cases} \tag{A.4}$$

Les constantes sont déterminées par les conditions aux interfaces de (A.1). Soit le système de 6 équations à 6 inconnues à résoudre:

$$\left\{\begin{array}{llllll}
 & & B_1 & = A_2 & + & B_2 \\
 & & -\widetilde{\gamma_1} B_1 & = \widetilde{\gamma_2} A_2 & - & \widetilde{\gamma_2} B_2 \\
A_2 e^{j\widetilde{\gamma_2} h} & + & B_2 e^{-j\widetilde{\gamma_2} h} & = A_3 e^{j\widetilde{\gamma_3} h} & + & B_3 e^{-j\widetilde{\gamma_3} h} \\
\widetilde{\gamma_2} A_2 e^{j\widetilde{\gamma_2} h} & - & \widetilde{\gamma_2} B_2 e^{-j\widetilde{\gamma_2} h} & = \widetilde{\gamma_3} A_3 e^{j\widetilde{\gamma_3} h} & - & \widetilde{\gamma_3} B_3 e^{-j\widetilde{\gamma_3} h} \\
A_3 e^{j\widetilde{\gamma_3} y'} & + & B_3 e^{-j\widetilde{\gamma_3} y'} & = A_4 e^{j\widetilde{\gamma_3} y'} & & \\
\widetilde{\gamma_3} A_3 e^{j\widetilde{\gamma_3} y'} & - & \widetilde{\gamma_3} B_3 e^{-j\widetilde{\gamma_3} y'} & = \widetilde{\gamma_3} A_4 e^{j\widetilde{\gamma_3} y'} & - & ie^{-2j\pi\nu x'}.
\end{array}\right. \tag{A.5}$$

Par substitution, on obtient:

$$\begin{aligned}
&A_1 = 0 && B_1 = \frac{jL_{21} e^{j(\widetilde{\gamma_2}-\widetilde{\gamma_3})h} e^{j\widetilde{\gamma_3} y'} e^{-2j\pi\nu x'}}{(\widetilde{\gamma_2}+\widetilde{\gamma_3})(1+K_{21}K_{32}e^{2j\widetilde{\gamma_2} h})} \\
&A_2 = \frac{jK_{21} e^{j(\widetilde{\gamma_2}-\widetilde{\gamma_3})h} e^{j\widetilde{\gamma_3} y'} e^{-2j\pi\nu x'}}{(\widetilde{\gamma_2}+\widetilde{\gamma_3})(1+K_{21}K_{32}e^{2j\widetilde{\gamma_2} h})} && B_2 = \frac{je^{j(\widetilde{\gamma_2}-\widetilde{\gamma_3})h} e^{j\widetilde{\gamma_3} y'} e^{-2j\pi\nu x'}}{(\widetilde{\gamma_2}+\widetilde{\gamma_3})(1+K_{21}K_{32}e^{2j\widetilde{\gamma_2} h})} \\
&A_3 = \frac{j(K_{21}e^{2j\widetilde{\gamma_2} h} + K_{32}) e^{-2j\widetilde{\gamma_3} h} e^{j\widetilde{\gamma_3} y'} e^{-2j\pi\nu x'}}{2\widetilde{\gamma_3}(1+K_{21}K_{32}e^{2j\widetilde{\gamma_2} h})} && B_3 = \frac{je^{j\widetilde{\gamma_3} y'} e^{-2j\pi\nu x'}}{2\widetilde{\gamma_3}} \\
&A_4 = \frac{je^{-2j\pi\nu x'}}{2\widetilde{\gamma_3}} \left[e^{-j\widetilde{\gamma_3} y'} + \frac{(K_{32}+K_{21}e^{2j\widetilde{\gamma_2} h}) e^{j\widetilde{\gamma_3} y'}}{(1+K_{21}K_{32}e^{2j\widetilde{\gamma_2} h})} \right] && B_4 = 0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

avec les notations:

$K_{21} = K_{21}(\omega,\nu) = \dfrac{\widetilde{\gamma_2} - \widetilde{\gamma_1}}{\widetilde{\gamma_2} + \widetilde{\gamma_1}}$, $K_{32} = K_{32}(\omega,\nu) = \dfrac{\widetilde{\gamma_3} - \widetilde{\gamma_2}}{\widetilde{\gamma_3} + \widetilde{\gamma_2}}$,

$L_{21} = L_{21}(\omega,\nu) = \dfrac{2\widetilde{\gamma_2}}{\widetilde{\gamma_1} + \widetilde{\gamma_2}}$ et $\widetilde{\gamma_i}^2 = \widetilde{\gamma_i}^2(\omega,\nu) = k_i^2(\omega) - 4\pi^2\nu^2$, $i = 1,2,3$.

Enfin, par transformée de Fourier inverse, on calcule la fonction de Green pour un point source $\vec{X'}$ situé dans le milieu $\mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_D$:

pour $\vec{X} \in \mathcal{D}_1, \forall\omega$: $G(\vec{X},\vec{X'},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{jL_{21}e^{j(\widetilde{\gamma_2}-\widetilde{\gamma_3})h}e^{-j\widetilde{\gamma_1}y}e^{j\widetilde{\gamma_3}y'}e^{2j\pi\nu(x-x')}}{(\widetilde{\gamma_2}+\widetilde{\gamma_3})(1+K_{21}K_{32}e^{2j\widetilde{\gamma_2}h})}d\nu$
pour $\vec{X} \in \mathcal{D}_2, \forall\omega$: $G(\vec{X},\vec{X'},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j(e^{-j\widetilde{\gamma_2}y} + K_{21}e^{j\widetilde{\gamma_2}y})e^{j(\widetilde{\gamma_2}-\widetilde{\gamma_3})h}e^{j\widetilde{\gamma_3}y'}e^{2j\pi\nu(x-x')}}{(\widetilde{\gamma_2}+\widetilde{\gamma_3})(1+K_{21}K_{32}e^{2j\widetilde{\gamma_2}h})}d\nu$
pour $\vec{X} \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_D, \forall\omega$: $G(\vec{X},\vec{X'},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j}{2\widetilde{\gamma_3}}\left[e^{j\widetilde{\gamma_3}\lvert y-y'\rvert} + \frac{(K_{32}+K_{21}e^{2j\widetilde{\gamma_2}h})e^{-2j\widetilde{\gamma_3}h}e^{j\widetilde{\gamma_3}(y+y')}}{(1+K_{21}K_{32}e^{2j\widetilde{\gamma_2}h})}\right]e^{2j\pi\nu(x-x')}d\nu$

Annexe B

Calcul du spectre d'ondes planes associé au champ incident

La transformée de Fourier temporelle du champ incident (champ total en l'absence d'objet) est solution de l'équation de Helmholtz homogène pour les milieux stratifiés (1.11). Elle vérifie donc:

$$\Delta\widetilde{E_z^I}(\vec{X},\omega) + {k_H}^2\widetilde{E_z^I}(\vec{X},\omega) = 0 \ , \ \forall\vec{X},\ \forall\omega \tag{B.1}$$

avec les conditions aux interfaces et la condition de rayonnement appropriées,

et $k_H = k_H(\omega) = \begin{cases} k_i(\omega), & pour\ \vec{X} \in \mathcal{D}_l,\ i = 1,2,3 \\ k_3(\omega), & pour\ \vec{X} \in \mathcal{D}_D \end{cases}$

Soit $\widehat{\widetilde{E_z^I}}(\eta,y,\omega)$ la transformée de Fourier spatiale suivant x de $\widetilde{E_z^I}$, alors elle satisfait le système:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\widehat{\widetilde{E_z^I}}}{\partial y^2}(\eta,y,\omega) + \widetilde{\xi_i}^2\,\widehat{\widetilde{E_z^I}}(\eta,y,\omega) = 0\ ,\forall\, y \in \mathbb{R} \\ (\text{avec } \widetilde{\xi_i}^2 = \widetilde{\xi_i}^2(\omega,\eta) = k_i^2 - 4\pi^2\eta^2,\ i = 1,2,3) \\ \underline{\text{Conditions de continuité pour } \widehat{\widetilde{E_z^I}}} : \\ \begin{cases} \widehat{\widetilde{E_z^I}} \text{ continue en } y = 0, y = h, y = y', \\ \dfrac{\partial\widehat{\widetilde{E_z^I}}}{\partial y} \text{ continue en } y = 0\ ,\ y = h, \end{cases} \\ \underline{\text{Condition d'onde sortante pour } \widehat{\widetilde{E_z^I}}} : \\ \lim\limits_{y\to\infty} \sqrt{y}[\dfrac{\partial\widehat{\widetilde{E_z^I}}(\eta,y,\omega)}{\partial y} - j\widetilde{\xi_m}\widehat{\widetilde{E_z^I}}(\eta,y,\omega)] = 0 \end{array} \tag{B.2}$$

Les solutions de (B.2) sont de la forme $\widehat{\widetilde{E_z^I}} = A_l e^{j\widetilde{\xi_l} y} + B_l e^{-j\widetilde{\xi_l} y}$, $l = 1,3$. Cependant, seules les ondes sortantes sont prises en compte $(B_3 = 0)$. D'où,

$$\left\{\begin{array}{ll} \widehat{\widetilde{E_z^I}}(\eta,y,\omega) = A_1 e^{j\widetilde{\xi_1} y} + B_1 e^{-j\widetilde{\xi_1} y}, & \forall\, y \leq 0 \\ \widehat{\widetilde{E_z^I}}(\eta,y,\omega) = A_2 e^{j\widetilde{\xi_2} y} + B_2 e^{-j\widetilde{\xi_2} y}, & \forall\, 0 \leq y \leq h \\ \widehat{\widetilde{E_z^I}}(\eta,y,\omega) = A_3 e^{j\widetilde{\xi_3} y}, & \forall\, y \geq h \\ \text{avec } A_l,B_l \text{ constantes complexes} & \end{array}\right. \tag{B.3}$$

Les constantes sont déterminées par les conditions aux interfaces de (B.2). Soit le système de 4 équations à 5 inconnues à résoudre:

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} A_1 & + & B_1 & = & A_2 & + & B_2 \\ \widetilde{\xi_1} A_1 & - & \widetilde{\xi_1} B_1 & = & \widetilde{\xi_2} A_2 & - & \widetilde{\xi_2} B_2 \\ A_2 e^{j\widetilde{\xi_2} h} & + & B_2 e^{-j\widetilde{\xi_2} h} & = & A_3 e^{j\widetilde{\xi_3} h} & & \\ \widetilde{\xi_2} A_2 e^{j\widetilde{\xi_2} h} & - & \widetilde{\xi_2} B_2 e^{-j\widetilde{\xi_2} h} & = & \widetilde{\xi_3} A_3 e^{j\widetilde{\xi_3} h}. & & \end{array}\right. \tag{B.4}$$

On choisit d'exprimer les constantes en fonction de A1. Par substitution, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A_1 & ; & B_1 = \dfrac{\widetilde{K_{12}} + \widetilde{K_{23}} e^{2j\widetilde{\xi_2} h}}{1 + \widetilde{K_{12}}\widetilde{K_{23}} e^{2j\widetilde{\xi_2} h}}.A_1 \\[2ex] A_2 = \dfrac{\widetilde{L_{12}}}{1 + \widetilde{K_{12}}\widetilde{K_{23}} e^{2j\widetilde{\xi_2} h}}.A_1 & ; & B_2 = \dfrac{\widetilde{L_{12}}\widetilde{K_{23}} e^{2j\widetilde{\xi_2} h}}{1 + \widetilde{K_{12}}\widetilde{K_{23}} e^{2j\widetilde{\xi_2} h}}.A_1 \\[2ex] A_3 = \dfrac{\widetilde{L_{12}}\widetilde{L_{23}} e^{j\widetilde{\xi_2} h} e^{-j\widetilde{\xi_3} h}}{1 + \widetilde{K_{12}}\widetilde{K_{23}} e^{2j\widetilde{\xi_2} h}}.A_1 & ; & B_3 = 0 \end{array}\right. \tag{B.5}$$

avec les notations:

$$\widetilde{K_{12}} = \widetilde{K_{12}}(\omega,\eta) = \frac{\widetilde{\xi_1} - \widetilde{\xi_2}}{\widetilde{\xi_1} + \widetilde{\xi_2}}\ ,\ \widetilde{K_{23}} = \widetilde{K_{23}}(\omega,\eta) = \frac{\widetilde{\xi_2} - \widetilde{\xi_3}}{\widetilde{\xi_2} + \widetilde{\xi_3}}$$

$$\widetilde{L_{12}} = \widetilde{L_{12}}(\omega,\eta) = \frac{2\widetilde{\xi_1}}{\widetilde{\xi_1} + \widetilde{\xi_2}}\ ,\ \widetilde{L_{23}} = \widetilde{L_{23}}(\omega,\eta) = \frac{2\widetilde{\xi_2}}{\widetilde{\xi_2} + \widetilde{\xi_3}}.$$

Finalement, après avoir calculé la transformée de Fourier spatiale inverse de $\widehat{\widetilde{E_z^I}}$, on obtient:

pour $\vec{X} \in \mathcal{D}_1,\forall\omega$, $\widetilde{E_z^I}(x-x_s,y,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\eta,\omega)[e^{j\widetilde{\xi_1}y} + R_\perp(\eta,\omega)e^{-j\widetilde{\xi_1}y}]e^{2j\pi\eta(x-x_s)}d\eta;$
pour $\vec{X} \in \mathcal{D}_2,\forall\omega$, $\widetilde{E_z^I}(x-x_s,y,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\eta,\omega)[S_\perp^1(\eta,\omega)e^{j\widetilde{\xi_2}y} + S_\perp^2(\eta,\omega)e^{-j\widetilde{\xi_2}y}]e^{2j\pi\eta(x-x_s)}d\eta;$
pour $\vec{X} \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_D,\forall\omega$, $\widetilde{E_z^I}(x-x_s,y,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\eta,\omega)T_\perp(\eta,\omega)e^{j\widetilde{\xi_3}y}e^{2j\pi\eta(x-x_s)}d\eta;$

avec les notations:

$$R_\perp(\eta,\omega) = \frac{\widetilde{K_{12}} + \widetilde{K_{23}}e^{2j\widetilde{\xi_2}h}}{1+\widetilde{K_{12}}\widetilde{K_{23}}e^{2j\widetilde{\xi_2}h}}, \quad S_\perp^1(\eta,\omega) = \frac{\widetilde{L_{12}}}{1+\widetilde{K_{12}}\widetilde{K_{23}}e^{2j\widetilde{\xi_2}h}},$$

$$S_\perp^2(\eta,\omega) = \frac{\widetilde{L_{12}}\widetilde{K_{23}}e^{2j\widetilde{\xi_2}h}}{1+\widetilde{K_{12}}\widetilde{K_{23}}e^{2j\widetilde{\xi_2}h}}, \quad T_\perp(\eta,\omega) = \frac{\widetilde{L_{12}}\widetilde{L_{23}}e^{j\widetilde{\xi_2}h}e^{-j\widetilde{\xi_3}h}}{1+\widetilde{K_{12}}\widetilde{K_{23}}e^{2j\widetilde{\xi_2}h}}.$$

La constante $A_1(\eta,\omega)$ est définie comme la transformée de Fourier du champ électrique en l'absence d'objet dans l'air ($\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_D$) pour y=0. On a donc: $A_1(\eta,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{E_z^{I_0}}(x-x_s,0,\omega)e^{-2j\pi\eta(x-x_s)}dx$.

Remarque:

dans (B.2) et (B.3), η est la variable de Fourier (ou fréquence spatiale) associée non pas à x mais à $x-x_s$, avec x_s position du point source dans $\mathcal{D}_1$. La transformée de Fourier associée est donc définie par la formule: $\widehat{f(\eta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi\eta(x-x_s)}f(x-x_s)dx$.

Annexe C

Calculs matriciels annexes

I Calcul de $[\mathrm{A}^{-1} - \mathrm{B}]^{-1}$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} &= \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} - \mathbf{A} \\
&= \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1}\{\mathbf{I} - [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]\mathbf{A}\} \\
&= \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1}\{\mathbf{A}^{-1} - [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]\}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Finalement, on obtient:

$$\boxed{[\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}} \tag{C.2}$$

II Calcul de $[\mathbf{I} - \mathrm{AB}]^{-1}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B} \\
&= \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}][\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} \\
&= \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B} + [\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}][\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} \\
&= \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B} + [\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}]\mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} \\
&= [\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}][\mathbf{I} + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Finalement, on obtient:

$$\boxed{[\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}[\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}} \tag{C.4}$$

Annexe D

Paramètres de la méthode GC

I Calcul de $\rho_{S,F}(\chi^{k+1})$

Soit $\chi^{k+1} = \chi^k + \alpha^k \eta^k$ la variable caractéristique à l'itération $k+1$.
On peut alors écrire la fonction coût à l'itération $k+1$ pour chaque fréquence ω, pour toutes les positions de source $\vec{X_S}$:

$$\rho_{S,F}(\chi^{k+1}) = e^D - \mathbf{G^R C}(\chi^{k+1})[\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}(\chi^{k+1})]^{-1} e^I \tag{D.1}$$

Or

$$\mathbf{C}(\chi^{k+1}) = \mathbf{C}(\chi^k) + \alpha^k \mathbf{C}(\eta^k)$$

Soit la matrice diagonale complexe $\mathbf{D}^k = \mathbf{C}(\eta^k)$ de dimension $N * N$. Alors, si on note $\mathbf{C}^k = \mathbf{C}(\chi^k)$ et $\mathbf{A}^k = [\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}^k]^{-1}$, on obtient:

$$\begin{aligned}\rho_{S,F}(\chi^{k+1}) &= e^D - \mathbf{G^R}(\mathbf{C}^k + \alpha^k \mathbf{D}^k)[\mathbf{I} - \mathbf{G^O}(\mathbf{C}^k + \alpha^k \mathbf{D}^k)]^{-1} e^I \\ &= e^D - [\mathbf{G^R C}^k + \alpha^k \mathbf{G^R D}^k][\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}^k - \alpha^k \mathbf{G^O D}^k]^{-1} e^I \\ &= e^D - [\mathbf{G^R C}^k + \alpha^k \mathbf{G^R D}^k][\mathbf{A^k}^{-1} - \alpha^k \mathbf{G^O D}^k]^{-1} e^I\end{aligned} \tag{D.2}$$

D'après (C.2), on montre que:

$$\begin{aligned}[\mathbf{A^k}^{-1} - \alpha^k \mathbf{G^O D}^k]^{-1} &= \left[\mathbf{I} + [\mathbf{A^k}^{-1} - \alpha^k \mathbf{G^O D}^k]^{-1} \alpha^k \mathbf{G^O D}^k\right] \mathbf{A}^k \\ &= \left[\mathbf{I} + \alpha^k [\mathbf{I} - \alpha^k \mathbf{A}^k \mathbf{G^O D}^k]^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{G^O D}^k\right] \mathbf{A}^k\end{aligned} \tag{D.3}$$

En utilisant le développement de Taylor de $[\mathbf{I} - \alpha^k \mathbf{A}^k \mathbf{G^O D}^k]^{-1}$ et en simplifiant les calculs au premier ordre en $\alpha^k \mathbf{D}^k$, on obtient:

$$[\mathbf{A^k}^{-1} - \alpha^k \mathbf{G^O D}^k]^{-1} = [\mathbf{I} + \alpha^k \mathbf{A}^k \mathbf{G^O D}^k] \mathbf{A}^k \tag{D.4}$$

En introduisant ce résultat dans l'équation (D.2) et en simplifiant les calculs au premier ordre en $\alpha^k \mathbf{D}^k$, on obtient pour la fonction coût:

$$\begin{aligned}\rho_{S,F}(\chi^{k+1}) &= e^D - \mathbf{G^R}(\mathbf{C}^k + \alpha^k \mathbf{D}^k)[\mathbf{I} + \alpha^k \mathbf{A}^k \mathbf{G^O D}^k] \mathbf{A}^k e^I \\ &= \left\{e^D - \mathbf{G^R C}^k \mathbf{A}^k e^I\right\} \\ &\qquad - [\alpha^k \mathbf{G^R C}^k \mathbf{A}^k \mathbf{G^O D}^k + \alpha^k \mathbf{G^R D}^k] \mathbf{A}^k e^I \\ &= \rho_{S,F}(\chi^k) - \alpha^k \mathbf{G^R}[\mathbf{I} + \mathbf{C}^k \mathbf{A}^k \mathbf{G^O}] \mathbf{D}^k \mathbf{A}^k e^I\end{aligned} \tag{D.5}$$

D'après (C.4), on peut écrire:

$$\mathbf{I} + \mathbf{C}^k\mathbf{A}^k\mathbf{G}^{\mathbf{O}} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}^k\mathbf{G}^{\mathbf{O}}]^{-1} \tag{D.6}$$

Comme la matrice $\mathbf{C}^k$ est diagonale, alors que la matrice $\mathbf{G}^{\mathbf{O}}$ est symétrique, on a:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{C}^k\mathbf{G}^{\mathbf{O}}] = [\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}}\mathbf{C}^k]^t = [\mathbf{A}^{\mathbf{k}^t}]^{-1} \tag{D.7}$$

Finalement, on obtient:

$$\boxed{\rho_{S,F}(\chi^{k+1}) = \rho_{S,F}(\chi^k) - \alpha^k\mathbf{G}^{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\mathbf{k}^t}\mathbf{D}^k\mathbf{A}^k e^I} \tag{D.8}$$

II Calcul de $\|\rho_{S,F}(\chi^{k+1})\|^2_{L_1}$

Par définition de la norme $\|.\|_{L_1}$, on a:

$$\begin{aligned}\|\rho_{S,F}(\chi^{k+1})\|^2_{L_1} = \Big(\rho_{S,F}(\chi^k) - \alpha^k\mathbf{G}^{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\mathbf{k}^t}\mathbf{D}^k\mathbf{A}^k e^I,\\ \rho_{S,F}(\chi^k) - \alpha^k\mathbf{G}^{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\mathbf{k}^t}\mathbf{D}^k\mathbf{A}^k e^I\Big)_{L_1}\end{aligned} \tag{D.9}$$

Alors:

$$\begin{aligned}\|\rho_{S,F}(\chi^{k+1})\|^2_{L_1} = \|\rho_{S,F}(\chi^k)\|^2_{L_1} - 2\alpha^k\mathcal{R}e\left(\rho_{S,F}(\chi^k), \mathbf{G}^{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\mathbf{k}^t}\mathbf{D}^k\mathbf{A}^k e^I\right)_{L_1}\\ + (\alpha^k)^2\|\mathbf{G}^{\mathbf{R}}\mathbf{A}^{\mathbf{k}^t}\mathbf{D}^k\mathbf{A}^k e^I\|^2_{L_1}\end{aligned} \tag{D.10}$$

Annexe E

Paramètres de la méthode BiGC

I Calcul de $\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})$

Soit $\begin{cases} \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \alpha_\varepsilon^k \eta_\varepsilon^k \\ \sigma^{k+1} = \sigma^k + \alpha_\sigma^k \eta_\sigma^k \end{cases}$ la variable caractéristique à l'itération $k+1$.

On peut alors écrire la fonction coût à l'itération $k+1$ pour chaque fréquence ω, pour toutes les positions de source $\vec{X_S}$:

$$\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1}) = e^D - \mathbf{G^R C}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})[\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})]^{-1} e^I \tag{E.1}$$

Or

$$\mathbf{C}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1}) = \mathbf{C}(\varepsilon^k,\sigma^k) + \mathbf{C}(\alpha_\varepsilon^k \eta_\varepsilon^k,\alpha_\sigma^k \eta_\sigma^k)$$

Soit la matrice diagonale complexe $\breve{\mathbf{D}}^k = \mathbf{C}(\alpha_\varepsilon^k \eta_\varepsilon^k,\alpha_\sigma^k \eta_\sigma^k)$ de dimension $N*N$. Alors, si on note $\mathbf{C}^k = \mathbf{C}(\varepsilon^k,\sigma^k)$ et $\mathbf{A}^k = [\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}^k]^{-1}$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1}) &= e^D - \mathbf{G^R}(\mathbf{C}^k + \breve{\mathbf{D}}^k)[\mathbf{I} - \mathbf{G^O}(\mathbf{C}^k + \breve{\mathbf{D}}^k)]^{-1} e^I \\
&= e^D - [\mathbf{G^R C}^k + \mathbf{G^R}\breve{\mathbf{D}}^k][\mathbf{I} - \mathbf{G^O C}^k - \mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k]^{-1} e^I \\
&= e^D - [\mathbf{G^R C}^k + \mathbf{G^R}\breve{\mathbf{D}}^k][\mathbf{A^k}^{-1} - \mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k]^{-1} e^I
\end{aligned} \tag{E.2}$$

D'après (C.2), on montre que:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A^k}^{-1} - \mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k]^{-1} &= \left[\mathbf{I} + [\mathbf{A^k}^{-1} - \mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k]^{-1}\mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k\right]\mathbf{A}^k \\
&= \left[\mathbf{I} + [\mathbf{I} - \mathbf{A}^k\mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k]^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k\right]\mathbf{A}^k
\end{aligned} \tag{E.3}$$

En utilisant le développement de Taylor de $[\mathbf{I} - \mathbf{A}^k\mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k]^{-1}$ et en simplifiant les calculs au premier ordre en $\breve{\mathbf{D}}^k$, on obtient:

$$[\mathbf{A^k}^{-1} - \mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k]^{-1} = [\mathbf{I} + \mathbf{A}^k\mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k]\mathbf{A}^k \tag{E.4}$$

En introduisant ce résultat dans l'équation (E.2) et en simplifiant les calculs au premier ordre en $\breve{\mathbf{D}}^k$, on obtient pour la fonction coût:

$$\begin{aligned}\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1}) &= e^D - \mathbf{G^R}(\mathbf{C}^k + \breve{\mathbf{D}}^k)[\mathbf{I} + \mathbf{A}^k\mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k]\mathbf{A}^k e^I \\ &= \left\{e^D - \mathbf{G^R}\mathbf{C}^k\mathbf{A}^k e^I\right\} \\ &\qquad\qquad - [\mathbf{G^R}\mathbf{C}^k\mathbf{A}^k\mathbf{G^O}\breve{\mathbf{D}}^k + \mathbf{G^R}\breve{\mathbf{D}}^k]\mathbf{A}^k e^I \\ &= \rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k) - \mathbf{G^R}[\mathbf{I} + \mathbf{C}^k\mathbf{A}^k\mathbf{G^O}]\breve{\mathbf{D}}^k\mathbf{A}^k e^I\end{aligned} \tag{E.5}$$

D'après (C.4), on peut écrire:

$$\mathbf{I} + \mathbf{C}^k\mathbf{A}^k\mathbf{G^O} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}^k\mathbf{G^O}]^{-1} \tag{E.6}$$

Comme la matrice $\mathbf{C}^k$ est diagonale, alors que la matrice $\mathbf{G^O}$ est symétrique, on a:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{C}^k\mathbf{G^O}] = [\mathbf{I} - \mathbf{G^O}\mathbf{C}^k]^t = [\mathbf{A^k}^t]^{-1} \tag{E.7}$$

Finalement, on obtient:

$$\boxed{\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1}) = \rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k) - \mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\breve{\mathbf{D}}^k\mathbf{A}^k e^I} \tag{E.8}$$

II Calcul de $\|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})\|^2_{L_1}$

Par définition de la norme, on a:

$$\begin{aligned}\|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})\|^2_{L_1} = \Big(&\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k) - \mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\breve{\mathbf{D}}^k\mathbf{A}^k e^I, \\ &\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k) - \mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\breve{\mathbf{D}}^k\mathbf{A}^k e^I\Big)_{L_1}\end{aligned} \tag{E.9}$$

Alors:

$$\begin{aligned}\|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})\|^2_{L_1} &= \|\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k)\|^2_{L_1} \\ &\quad - 2\mathcal{R}e\left(\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k),\mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\breve{\mathbf{D}}^k\mathbf{A}^k e^I\right)_{L_1} \\ &\quad + \|\mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\breve{\mathbf{D}}^k\mathbf{A}^k e^I\|^2_{L_1}\end{aligned} \tag{E.10}$$

Comme $\breve{\mathbf{D}}^k$ est diagonale et $\mathbf{A}^k e^I$ est un vecteur, on peut les commuter en utilisant le vecteur complexe $\breve{d}^k$ composé des éléments de la diagonale de $\breve{\mathbf{D}}^k$, ainsi que la matrice diagonale complexe $\mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)$ dont la diagonale est formée par les éléments du vecteur complexe $\mathbf{A}^k e^I$.
On peut donc écrire (E.10) sous la forme:

$$\begin{aligned}\|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})\|^2_{L_1} &= \|\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k)\|^2_{L_1} \\ &\quad - 2\mathcal{R}e\left(\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k),\mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)\breve{d}^k\right)_{L_1} \\ &\quad + \|\mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)\breve{d}^k\|^2_{L_1}\end{aligned} \tag{E.11}$$

Soit $\mathbf{M}^k = \mathbf{G^R}\mathbf{A^k}^t\mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)$ la matrice complexe de dimension $NOXI * N$. (E.11) devient:

$$\|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})\|^2_{L_1} = \|\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k)\|^2_{L_1} - 2\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}^*\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k),\breve{d}^k\right)_{\mathcal{D}_D} + \|\mathbf{M}^k\breve{d}^k\|^2_{L_1} \quad \text{(E.12)}$$

Or

$$\|\mathbf{M}^k\breve{d}^k\|^2_{L_1} = <\mathcal{R}e\left(\mathbf{M}^k\breve{d}^k\right),\mathcal{R}e\left(\mathbf{M}^k\breve{d}^k\right)>_{L_1} + <\mathcal{I}m\left(\mathbf{M}^k\breve{d}^k\right),\mathcal{I}m\left(\mathbf{M}^k\breve{d}^k\right)>_{L_1} \quad \text{(E.13)}$$

De plus,

$$\mathcal{R}e\left(\mathbf{M}^k\breve{d}^k\right) = \alpha^k_\varepsilon\mathcal{R}e(\mathbf{M}^k)\eta^k_\varepsilon - \frac{\alpha^k_\sigma}{\omega\varepsilon_0}\mathcal{I}m(\mathbf{M}^k)\eta^k_\sigma \quad \text{(E.14)}$$

$$\mathcal{I}m\left(\mathbf{M}^k\breve{d}^k\right) = \alpha^k_\varepsilon\mathcal{I}m(\mathbf{M}^k)\eta^k_\varepsilon + \frac{\alpha^k_\sigma}{\omega\varepsilon_0}\mathcal{R}e(\mathbf{M}^k)\eta^k_\sigma \quad \text{(E.15)}$$

En développant les produits hermitiens et les produits scalaires, on obtient finalement:

$$\begin{aligned}
\|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})\|^2_{L_1} = {} & \|\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k)\|^2_{L_1} \\
& - 2\alpha^k_\varepsilon <\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}^*\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k)\right),\eta^k_\varepsilon>_{\mathcal{D}_D} \\
& - 2\frac{\alpha^k_\sigma}{\omega\varepsilon_0} <\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}^*\rho_{S,F}(\varepsilon^k,\sigma^k)\right),\eta^k_\sigma>_{\mathcal{D}_D} \\
& + (\alpha^k_\varepsilon)^2\left\{|\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right)\eta^k_\varepsilon|^2_{L_1} + |\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right)\eta^k_\varepsilon|^2_{L_1}\right\} \\
& + (\frac{\alpha^k_\sigma}{\omega\varepsilon_0})^2\left\{|\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right)\eta^k_\sigma|^2_{L_1} + |\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right)\eta^k_\sigma|^2_{L_1}\right\} \qquad \text{(E.16)} \\
& + 2\frac{\alpha^k_\varepsilon\alpha^k_\sigma}{\omega\varepsilon_0} <\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right)\eta^k_\sigma,\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right)\eta^k_\varepsilon>_{L_1} \\
& - 2\frac{\alpha^k_\varepsilon\alpha^k_\sigma}{\omega\varepsilon_0} <\mathcal{R}e\left(\mathbf{M^k}\right)\eta^k_\varepsilon,\mathcal{I}m\left(\mathbf{M^k}\right)\eta^k_\sigma>_{L_1}
\end{aligned}$$

Annexe F

Paramètres de la méthode BiGC avec régularisation

I Définition de $\|\nabla \mathbf{A}\|$

Soient $\left| \begin{array}{ll} \mathbf{A} = A_{p,q} & \text{une matrice réelle de dimension } NL \times NC \\ A_p = A_{p_q} & \text{le vecteur de dimension } NC \text{ formé par la p-ème ligne de } \mathbf{A} \\ A_q = A_{q_p} & \text{le vecteur de dimension } NL \text{ formé par la p-ème colonne de } \mathbf{A} \end{array} \right.$

On définit la matrice de la norme du gradient $\|\nabla \mathbf{A}\|$ par:

$$\|(\nabla A)_{p,q}\| = [(\nabla_X A_p)_q^2 + (\nabla_Y A_q)_p^2]^{\frac{1}{2}}, \forall p = 1..NL, \forall q = 1.NC \tag{F.1}$$

où $(\nabla_X A_p)_q$ et $(\nabla_Y A_q)_p$ représentent respectivement le gradient selon X de $\mathbf{A}$ et le gradient selon Y de $\mathbf{A}$ tels que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla_X A_p)_q = 0 & \text{si } q = NC \\ (\nabla_X A_p)_q = A_{p_{q+1}} - A_{p_q} & \forall q = 1..NC{-}1 \end{array} \right. \tag{F.2}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla_Y A_q)_p = 0 & \text{si } p = NL \\ (\nabla_y A_q)_p = A_{q_{p+1}} - A_{q_p} & \forall p = 1..NL{-}1 \end{array} \right. \tag{F.3}$$

II Définition de $\triangle_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$

Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ trois matrices réelles de dimension $NL \times NC$.
On construit les vecteurs A, B et C de dimension $NL \times NC$ contenant respectivement les éléments des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$.
On définit le laplacien de $\mathbf{A}$ de poids $\mathbf{B}$ comme la matrice $\Delta_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ de dimension $NL \times NC$ telle que:

$$< -\Delta_B A, C >_{\mathcal{D}_D} = \sum_{p=1}^{NL} \sum_{q=1}^{NC} (B)_{p,q} (\nabla A)_{p,q} (\nabla C)_{p,q} \tag{F.4}$$

où $\Delta_B A$ est le vecteur de dimension $NL \times NC$ contenant les éléments de $\Delta_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$.
En développant suivant la définition du gradient matriciel, on obtient:

$$\begin{aligned}(-\Delta_{\mathbf{B}}\mathbf{A})_{p,q} = (B_{p,q-1} + 2B_{p,q} + B_{p-1,q})A_{p,q} \\ - B_{p,q-1}A_{p,q-1} - B_{p.q}A_{p,q+1} \\ - B_{p-1,q}A_{p-1,q} - B_{p,q}A_{p+1,q}\end{aligned} \tag{F.5}$$

III Calcul de $J_{REG}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1})$

Soit $\begin{cases} \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \alpha_\varepsilon^k \eta_\varepsilon^k \\ \sigma^{k+1} = \sigma^k + \alpha_\sigma^k \eta_\sigma^k \end{cases}$ la variable caractéristique à l'itération $k+1$.

D'après la définition de J_{REG}, on peut écrire:

$$\begin{aligned}J_{REG}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1}) &= \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[(b_\varepsilon)_{p,q}\|(\nabla\varepsilon^{k+1})_{p,q}\|^2 + \psi((b_\varepsilon)_{p,q})] \\ &+ \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[(b_\sigma)_{p,q}\|(\nabla\sigma^{k+1})_{p,q}\|^2 + \psi((b_\sigma)_{p,q})]\end{aligned} \tag{F.6}$$

Or,

$$\|(\nabla(A+B))_{p,q}\|^2 = \|(\nabla A)_{p,q}\|^2 + \|(\nabla B)_{p,q}\|^2 + 2(\nabla A)_{p,q}(\nabla B)_{p,q}$$

D'où:

$$\begin{aligned}J_{REG}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1}) &= \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[(b_\varepsilon)_{p,q}\|(\nabla\varepsilon^{k})_{p,q}\|^2 + \psi((b_\varepsilon)_{p,q})] \\ &+ \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[(b_\sigma)_{p,q}\|(\nabla\sigma^{k})_{p,q}\|^2 + \psi((b_\sigma)_{p,q})] \\ &+ \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[(b_\varepsilon)_{p,q}{\alpha_\epsilon^k}^2\|(\nabla\eta_\varepsilon^k)_{p,q}\|^2] \\ &+ 2\frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[{\alpha_\varepsilon}^k(b_\varepsilon)_{p,q}(\nabla\varepsilon^k)_{p,q}(\nabla\eta^k)_{p,q}] \\ &+ \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[(b_\sigma)_{p,q}{\alpha_\sigma^k}^2\|(\nabla\eta_\sigma^k)_{p,q}\|^2] \\ &+ 2\frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}[(\alpha_\sigma^k(b_\sigma)_{p,q}(\nabla\sigma^k)_{p,q}\nabla\eta_\sigma^k)_{p,q}]\end{aligned} \tag{F.7}$$

D'après (F.4) et (F.5), on peut écrire:

$$
\begin{aligned}
J_{REG}(\varepsilon^{k+1},\sigma^{k+1}) = {} & J_{REG}(\varepsilon^{k},\sigma^{k}) \\
& - 2\alpha_\varepsilon^k < \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}\Delta_{b_\varepsilon}\varepsilon^k,\eta_\varepsilon^k >_{\mathcal{D}_D} -2\alpha_\sigma^k < \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2}\Delta_{b_\sigma}\sigma^k,\eta_\sigma^k >_{\mathcal{D}_D} \\
& + (\alpha_\epsilon^k)^2\frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}(b_\varepsilon)_{p,q}\|(\nabla\eta_\varepsilon^k)_{p,q}\|^2 \\
& + (\alpha_\sigma^k)^2\frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2}\sum_{p=1}^{NX}\sum_{q=1}^{NY}(b_\sigma)_{p,q}\|(\nabla\eta_\sigma^k)_{p,q}\|^2 \qquad \text{(F.8)}
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[1] I. AKDUMAN and A. ALKUMRU. A generalized art algorithm for inverse scattering problems related to buried cylindrical bodies. *Inverse problems*, 1(11):1125–1135, 1995.

[2] C. AXELSSON. *Direct Fourier methods in 3D-reconstruction from cone-beam data*. Linköping Studies in Science and Technology, Thesis No. 413, Department of Electrical Engineering, Linköping University (Suède), 1994.

[3] S.G. AZEVEDO, D.T. GAVEL, J.E MAST, and J.P. WARHUS. Landmine detection and imaging micropower impulse radar. In *Proceedings of WAPM'95, Workshop on Anti-Personnel Mine detection and removal*, pages 48–51, Lausanne, Switzerland, July 1995.

[4] P. BACH, P. LE TOURNEUR, and B. POMMARÈDE. Neutron activation and analysis. In *Proceedings of The detection of abandoned land mines, EUREL International Conference*, pages 58–61, Edinburgh, Scotland, 1996.

[5] M. BANO. Constant dielectric losses of ground-penetrating radar waves. *Geophysics Journal International*, (124):279–288, 1996.

[6] K. BELKEBIR. *Imagerie microonde multifréquentielle d'objets enfouis dans un milieu homogène. Application au génie civil*. Thèse de doctorat en Sciences Physiques, Université de Paris-XI, 1994.

[7] K. BELKEBIR, J.-M. ELISSALT, J.-M. GEFFRIN, and Ch. PICHOT. Newton-kantorovich and modified gradient inversion algorithms applied to ipswich data. *IEEE antennas and propagation magazine*, 38(3):41–44, June 1996.

[8] M. BERTERO. Linear inverse and ill-posed problems. Technical Report INFN/TC-88/2, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, June 1988.

[9] L. BLANC-FERAUD, P. CHARBONNIER, G. AUBERT, and M. BARLAUD. Nonlinear image processing: Modeling and fast algorithm for regularization with edge detection. In *Proceedings of IEEE-ICIP*, pages 474–477, Washington, USA, October 1995.

[10] J.-Ch. BOLOMEY and Ch. PICHOT. Microwave tomography: from theory to practical imaging systems. *Int. J. Imag. Syst. Techn.*, 2:144–156, 1990.

[11] P. BRACHAT, C. DEDEBAN, P. RATAJCZAK, and T. BOUSQUET. Analyse de structures tridimensionnelles inhomogènes quelconques. In *Actes des Journées internationales de Nice sur les antennes*, pages 425–437, Nice, France, November 1996.

[12] S.-A. BRINK. Bofors schnauzer. a biosensor for detection of explosives. In *Proceedings of The detection of abandoned land mines, EUREL International Conference*, pages 33–36, Edinburgh, Scotland, 1996.

[13] H. CARFANTAN and A. MOHAMMAD-DJAFARI. Approche bayésienne et algorithme multirésolution pour un problème inverse non-linéaire en tomographie de diffraction. In *Actes du Quinzième colloque GRETSI*, Juan-les-Pins, France, September 1995.

[14] J. CEA. *Optimisation. Théorie et algorithmes*. 1971.

[15] I.J. CHANT and A.R. RYE. Overview of current radar land mine detection research at the defence science and technology organisation, salisbury, south australia. In *Proceedings of The detection of abandoned land mines, EUREL International Conference*, pages 138–142, Edinburgh, Scotland, 1996.

[16] P. CHARBONNIER, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT, and M. BARLAUD. Deterministic Edge-Preserving Regularization in Computed Imaging. *IEEE Trans. Image Processing*, IP-6(2):298–311, February 1997.

[17] P. CHATURVEDI and R.G. PLUMB. Imaging subsurface contaminants using inverse scattering techniques. In *Proceedings of GPR '94, the fifth international conference on Ground Penetrating Radar*, pages 1229–1239, Kitchener, Ontario, Canada, June 1994.

[18] L. CHOMMELOUX. *Application de l'imagerie microonde active à la détection d'objets enfouis dans un milieu homogène ou stratifié*. Thèse de doctorat en Sciences Physiques, Université de Paris-Sud, February 1987.

[19] L. CHOMMELOUX, Ch. PICHOT, and J.-Ch. BOLOMEY. Electromagnetic modeling for microwave imaging of cylindrical buried inhomogeneities. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technology*, MTT-34(10):1064–1076, 1986.

[20] S.K. CHUN and K.K. MEI. Electromagnetic scattering by a buried dielectric finite cylinder. In *Proceedings of the International U.R.S.I. Symposium*, pages 242/C1–243/C3, 1981.

[21] D. DANIELS and J. DITTMER. Design challenges for ultra-wideband radar for ap mine detection. In *Proceedings of WAPM'95, Workshop on Anti-Personnel Mine detection and removal*, pages 62–70, Lausanne, Switzerland, July 1995.

[22] D.J. DANIELS, D.J. GUNTON, and H.E. SCOTT. Introduction to subsurface radar. *IEE Proceedings-F, Special issue on Subsurface radar*, 135(4):278–321, 1988.

[23] G.P. DE LOOR. The dielectric properties of wet materials. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-21(3):364–369, July 1983.

[24] R. DE OLIVEIRA BOHBOT, D. LESSELIER, and B. DUCHÊNE. A diffraction tomographic algorithm for eddy current imaging from anormalous fields at fictitious imaginary frequencies. *Inverse Problems*, (10):109–127, 1994.

[25] G.P. DEIDDA, G. RANIERI, and R. BALIA. An application of a combined refraction-reflection seismic method to a landslide study. In *Proceedings of the 2nd Meeting Environmental and Engineering Geophysics, EEGS International Conference, European Section*, pages 117–120, Nantes, France, 1996.

[26] A.J. DEVANEY. Geophysical diffraction tomography. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-22(1):3–13, January 1984.

[27] M.C. DOBSON, F.T. ULABY, M.T. HALLIKAINEN, and M.A. EL-RAYES. Microwave dielectric behavior of wet soil- part 2: dielectric mixing models. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-23(1):35–46, January 1985.

[28] C. DOURTHE and Ch. PICHOT. Application de l'imagerie microonde à la tomographie radar du sous-sol. Contrat LCPC/CNRS 95/211, 1995.

[29] C. DOURTHE and Ch. PICHOT. Microwave imaging algorithms for arbitrary space and time incident waveforms using ultrawide bandwidth gpr technique. In *Proceedings of The detection of abandoned land mines, EUREL International Conference*, pages 124–127, Edinburgh, Scotland, 1996.

[30] C. DOURTHE, Ch. PICHOT, X. DEROBERT, and Ph. COTE. Microwave tomography imaging for geophysical applications. In *Proceedings of GPR'96, 6th International conference on ground penetrating radar*, pages 253–256, Sendai, Japan, 1996.

[31] M.A. EL KHALIFA. *Amélioration de la qualité des images en tomographie microonde. Contribution à une imagerie quantitative*. Thèse de doctorat en Sciences Physiques, Université de Paris-Sud, 1989.

[32] J.-M. ELISSALT. *Imagerie microonde: reconstruction quantitative bidimensionnelle - Applications au domaine biomédical*. Thèse de doctorat en Sciences Physiques, Université de Paris-XI, 1995.

[33] Th. FECHNWER, J. WHITTAKER, and P. DIETRICH. Seismic tomography for characterization of a hydrogeological test-site. In *Proceedings of the 2nd Meeting Environmental and Engineering Geophysics, EEGS International Conference, European Section*, pages 58–61, Nantes, France, 1996.

[34] A. FRANCHOIS. *Contribution à la tomographie microonde. Algorithmes de reconstruction quantitative et vérifications expérimentales*. Thèse de doctorat en Sciences Physiques, Université de Paris-XI, 1993.

[35] T.M. HABASHI, R.W. GROOM, and B.R. SPIES. Beyond the born and rytov approximations: a nonlinear approach to electromagnetic scattering. *Journal of Geophysical Research*, 98(B2):1759–1775, February 1993.

[36] T.M. HABASHI, M.L. ORISTAGLIO, and A.T. DE HOOP. Simultaneous reconstruction of two-dimensional permittivity and conductivity districutions employing a nonlinear inversion approach. *Radio Science*, (29):1101–1118, 1994.

[37] M.J. HAGMANN, O.P. GANDHI, and C.H. DURNEY. Upper bound on cell size for moment method solutions. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, MTT-25(10):831–832, 1977.

[38] M.T. HALLIKAINEN, F.T. ULABY, M.C. DOBSON, M.A. EL-RAYES, and L.-K. Wu. Microwave dielectric behavior of wet soil- part 1: empirical models and experimental observations. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-23(1):25–34, January 1985.

[39] H. HARADA, D.J.N. WALL, T. TAKENAKA, and M. TANAKA. Conjugate gradient method applied to inverse scattering problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(8):784–792, August 1995.

[40] R.F. HARINGTON. *Field Computation by moment methods*. Mac Graw-Hill, 1968.

[41] D.A. HILL. Near-field detection of buried dielectric objects. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 27(4):364–368, July 1989.

[42] J. E. HIPP. Soil electromagnetic parameters as functions of frequency, soil density, and soil moisture. *IEEE Proceedings*, 62(1):98–103, January 1974.

[43] P. HOEKSTRA and A. DELANEY. Dielectric properties of soils at uhf and microwave frequencies. *Journal of Geophysical Research*, 79(11):1799–1708, April 1974.

[44] G.W. HOHMANN. Electromagnetic scattering by conductors in the earth near a line source of current. *Geophysics*, 36(1):101–131, 1971.

[45] K.I. HOPCRAFT and P.R. SMITH. *An introduction to electromagnetic inverse scattering*. Kluwer Academic Publishers, 1992.

[46] P. HUBRAL and M. TYGEL. Analysis of the rayleigh pulse. *Geophysics*, 54(5):654–658, May 1989.

[47] K. IIZUKA and A.P. FREUNDOFER. Detection of nonmetallic buried objects by a step frequency radar. *Proceedings IEEE*, 71:276–279, 1983.

[48] H. JASIK. *Antenna engineering handbook*. Mc Graw Hill, 1961.

[49] M. JAUREGUY. *Etude de la diffraction par impulsions électromagnétiques très courtes d'objets en espace libre ou enfouis: modélisation numérique et extraction des paramètres caractéristiques*. Thèse de doctorat en Electronique, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1995.

[50] N. JOACHIMOWICZ, Ch. PICHOT, and J.-P. HUGONIN. Inverse scattering: an iterative numerical method for electromagnetic imaging. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39:1742–1752, December 1991.

[51] A. KIRSCH. Numerical algorithms for the inverse scattering problem. In *Support de cours, École des ondes, Problèmes inverses en propagation d'ondes*, INRIA Rocquencourt, France, November 1996.

[52] R.E. KLEINMAN and P.M. van den BERG. A modified gradient method for two-dimensional problems in tomography. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 42:17–35, 1992.

[53] R. LAGABRIELLE and D. YARDIN. Application de la magnétotellurique artificielle à l'étude de gisements rocheux. In *Proceedings of the III International Congress I.A.E.G.*, pages 165–172, September 1978.

[54] K.J. LANGENBERG, M. BRANDFAB, K. MAYER, T. KREUTER, A. BRULL, FELLINGER P., and D. HUO. Principles of microwave imaging and inverse scattering. Technical report, 1993.

[55] K.J. LANGENBERG, M. BRANDFAS, S. KLAHOLZ, R. MARLEIN, K. MEYER, A. PITSCH, and R. SCHNEIDER. *Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing*, chapter Applied inversion in nondestructive testing. Springer-Verlag, Wien, 1997.

[56] P. LASCAUX and R. THEODOR. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur- Tome 1*. Masson, 1986.

[57] D. LESSELIER, B. DUCHÊNE, L. SOURIAU, A. LITMAN, C. ROZIER, and V. MONEBHURRUN. Inversion d'objets enfouis dans des milieux stratifiés à partir de données d'aspect limité et à l'aide d'un formalisme d'ondes. de schémas de rétropropagation à des solutions non-linéarisées. In *Support de cours, École des ondes, Problèmes inverses en propagation d'ondes*, INRIA Rocquencourt, France, November 1996.

[58] R.M. LEWITT. Reconstruction algorithms: transform methods. *Proceedings of the IEEE*, 71(3):390–408, March 1983.

[59] H.-T. LIN and Y.-W. KIANG. Microwave imaging for a dielectric cylinder. *IEEE Transactions on Microwave theory and techniques*, 42(8):1572–1579, August 1994.

[60] P. LOBEL. *Problèmes de diffraction inverse: reconstruction d'image et optimisation avec régularisation par préservation des discontinuités- Application à l'imagerie microonde*. Thèse de doctorat en Sciences de l'ingénieur, Université de Nice-Sophia Antipolis, September 1996.

[61] P. LOBEL, L. BLANC-FÉRAUD, Ch. PICHOT, and M. BARLAUD. A new regularization scheme for inverse scattering. *Inverse problems*, 13:403–410, 1997.

[62] P. LOBEL, R. KLEINMAN, Ch. PICHOT, L. BLANC-FÉRAUD, and M. BARLAUD. Conjugate gradient method for solving inverse scattering with experimental data. *IEEE antennas and propagation magazine*, 38(3):48–51, June 1996.

[63] S.F MAHMOUD, S.M ALI, and J.R. WAIT. Electromagnetic scattering from a buried cylindrical inhomogeneity inside a lossy earth. *Radio Science*, 16(6):1285–1298, 1981.

[64] D. MOREAUX, B. PIWAKOWSKI, and I. SHAHROUR. Finite element modelling of cavity localization by means of high resolution seismic reflection. In *Proceedings of the 2nd Meeting Environmental and Engineering Geophysics, EEGS International Conference, European Section*, pages 142–145, Nantes, France, 1996.

[65] J.R. MOSIG. La méthode des gradients conjugués: applications en électromagnétisme. *Annales Télécommunications*, 42(9-10):527–538, 1987.

[66] W. MURRAY, C.J. WILLIAMS, and J.T.A. POLLOCK. A high resolution differential radar for mine detection. In *Proceedings of The detection of abandoned land mines, EUREL International Conference*, pages 143–147, Edinburgh, Scotland, 1996.

[67] A.F. NIKIFOROV and V.B. UVAROV. *Special functions of mathematical physics*. Birkaüser, Basel-Boston, 1988.

[68] D.A. NOON and D. LONGSTAFF. Advances in the development of step frequency ground penetrating radar. In *Proceedings of GPR '94, proceedings of the fifth international conference on ground penetrating radar*, pages 117–131, Kitchener, Ontario, Canada, June 1994.

[69] G.R. OLHOEFT and D.E. CAPRON. Petrophysical causes of electromagnetic dispersion. In *Proceedings of GPR '94, the fifth international conference on Ground Penetrating Radar*, pages 145–152, Kitchener,Ontario,Canada, June 1994.

[70] A.D. OLVER and L.G. CUTHBERT. Fmcw radar for hidden object detection. *IEE Proceedings-F, Special issue on Subsurface radar*, 135(4):354–361, 1988.

[71] C. PAFUMI and D. CHAPPELIER. A critical approach of electrical imaging. In *Proceedings of the 2nd Meeting Environmental and Engineering Geophysics, EEGS International Conference, European Section*, pages 105–108, Nantes, France, 1996.

[72] Ch. PICHOT. Electromagnétisme. *Edition des Techniques de l'Ingénieur, Série Electronique*, (E-1200 et E-1201), 1986.

[73] Ch. PICHOT. Méthodes numériques en électromagnétisme. Technical report, DEA Propagation, Télécommunications et Télédétection, Université de Nice-Sophia-Antipolis, 1994.

[74] Ch. PICHOT and C. DOURTHE. Microwave diffraction tomography of buried objects. In *Proceedings of WAPM'95, Workshop on Anti-personnel Mine Detection and Removal*, pages 72–74, Lausanne, Switzerland, JULY 1995.

[75] Ch. PICHOT and C. DOURTHE. Microwave imaging method for tomographic reconstructions of buried inhomogeneities. In *Proceedings of the 2nd Meeting Environmental and Engineering Geophysics, EEGS International Conference, European Section*, pages 268–271, Nantes, France, 1996.

[76] Ch. PICHOT, P. LOBEL, L. BLANC-FERAUD, M. BARLAUD, K. BELKEBIR, J.M. ELISSALT, and J.M. GEFFRIN. *Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing*, chapter Gradient and Newton-Kantorovich methods for microwave tomography, pages 168–187. Springer-Verlag, Wien, 1997.

[77] Ch. PICHOT, P. LOBEL, C. DOURTHE, L. BLANC-FERAUD, and M. BARLAUD. *1st EMSL Workshop*, chapter Inversion algorithms for microwave imaging using different modalities and for various applications. European Commission, Joint Research Center, Report EUR 17326 EN, 1997.

[78] Ch. PICHOT, P. LOBEL, C. DOURTHE, L. BLANC-FERAUD, and M. BARLAUD. Microwave inverse scattering: quantitative reconstruction of complex permittivity for different applications. *IEICE Transactions on Electronics*, à paraître en automne 1997.

[79] M.H. POWERS and G.R. OLHOEFT. Modeling dispersive ground penetrating radar data. In *Proceedings of GPR '94, the fifth international conference on ground penetrating radar*, pages 173–183, Kitchener, Ontario, Canada, June 1994.

[80] P. RATAJCZAK, P. BRACHAT, and J.-L. GUIRAUD. Rigorous analysis of three dimensional structures incorporating dielectrics. *IEEE Antennas and Propagation*, 42:1077–1088, August 1994.

[81] J.H. RICHMOND. Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross section shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-13:334–341, 1965.

[82] T.K. SARKAR, K. SIARKIEWICZ, and R. STRATTON. Survey of numerical methods for solution of large systems of linear equations for electromagnetic field problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-29:847–856, 1981.

[83] K.G. SPOUSE. The detection of buried plastic landmines by electro-magnetic induction. In *Proceedings of The detection of abandoned land mines, EUREL International Conference*, pages 72–74, Edinburgh, Scotland, 1996.

[84] J.A. STRATTON. *Electromagnetic theory*. Mac Graw-Hill, 1941.

[85] W. TABBARA, B. DUCHÊNE, Ch. PICHOT, D. LESSELIER, L. CHOMMELOUX, and N. JOACHIMOWICZ. Diffraction tomography: contribution to the analysis of applications in microwaves and ultrasonics. *Inverse Problems*, 4:305–331, 1988.

[86] C. TO TAI and S.A. LONG. *Dipoles and Monopoles, Antenna Engineering Handbook*. Mc Graw Hill, third edition, 1993.

[87] F.T. ULABY and R.P. JEDLICKA. Microwave dielectric properties of plant materials. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-22(4):406–415, July 1984.

[88] P. ULRIKSEN and C. STOLTE. Computerized scanner system sara. In *Proceedings of GPR '94, the fifth international conference on Ground Penetrating Radar*, pages 1041–1056, Kitchener,Ontario,Canada, June 1994.

[89] K.R. UMASHANKAR, S. NIMMAGADDA, and A. TAFLOVE. Numerical analysis of electromagnetic scattering by electrically large objects using spatial decomposition technique. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40(8):867–877, August 1992.

[90] W.P. WAITE, A.M. SADEGHI, and H. DON SCOTT. Microwave bistatic reflectivity dependence on the moisture content and matric potential of bare soil. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-22(4):394–403, July 1984.

[91] J.R. WANG and T.J. SCHMUGGE. An empirical model for the complex dielectric permittivity of soils as a function of water content. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-18(4):288–295, October 1980.

[92] Y.M. WANG and W.C. CHEW. Limited-angle inverse scattering problems and their applications for geophysical explorations. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 2:96–111, 1991.

[93] A. WIRGIN. *Théorie électromagnétique de la diffraction d'une onde plane par une surface quasiment plane*. Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques, Université de Paris (Orsay), 1967.

[94] Q. YE and L. SHAFAI. Large electromagnetic scattering computation using iterative progressive numerical method. In *Proceedings of IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, pages 938–941, Baltimore, Maryland, USA, July 1996.

Tomographie microonde d'objets enterrés.
Application à l'auscultation radar

Résumé: Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire sont consacrés à l'étude et au développement de méthodes et d'algorithmes de reconstructions tomographiques du sous-sol soumis à un rayonnement électromagnétique dans la bande microonde. Après l'étude théorique et la modélisation du problème de diffraction résultant de l'interaction physique entre une onde électromagnétique de dépendance spatio-temporelle quelconque et une structure hétérogène enterrée, le problème inverse est résolu qualitativement et quantitativement.
Un algorithme de reconstruction qualitative du sous-sol par analyse multifréquence ou en régime impulsionnel est d'abord mis au point pour une antenne d'émission de répartition spatiale arbitraire rayonnant un champ proche. Cette méthode d'imagerie est une extension de la technique de tomographie par diffraction. Elle permet la détection et la localisation spatiale de l'hétérogénéité enterrée à partir des courants de polarisation induits par le champ d'antenne pris en compte dans l'inversion. Des comparaisons modèles/expériences sont envisagées.
Un algorithme de reconstruction d'hétérogénéités enterrées par analyse multifréquence est ensuite mis au point et étudié. La méthode utilisée est basée sur la théorie de l'optimisation non linéaire. Elle permet la reconstruction du profil de permittivité et de conductivité de l'objet enfoui à partir des données du champ diffracté et du champ incident. Afin d'améliorer les images résultantes, une technique de régularisation permettant de préserver les discontinuités de l'objet est alors introduite dans le processus d'inversion.

Mots-clés : Electromagnétisme, Diffraction, Problème inverse, Reconstruction d'image, Objets enterrés, Imagerie qualitative, Tomographie par diffraction microonde, Imagerie quantitative, Optimisation non-linéaire, Régularisation avec préservation des discontinuités

Microwave tomography for buried objects.
Application to radar probing

Abstract: This thesis has been devoted to the study and the development of methods and algorithms for tomographic reconstructions using an electromagnetic illumination in the microwave domain. After the theoretical study and the modelization of diffraction problem which occurs when an electomagnetical wave of arbitrary spatial and time dependence interacts with a buried heterogeneous structure, inverse problem has been solved qualitatively and quantitatively.
A ground qualitative reconstruction algorithm using either multifrequency analysis or impulse mode has been first developed for a near field transmitting antenna with an arbitrary spatial distribution. This imaging method is an extension of the so called diffraction tomography technique. It allows to detect and to locate spatially the buried heterogeneity from the polarized currents induced by the near field pattern of the antenna taken into account in inversion process. Comparisons between synthetic and experimental data have been considered.
A buried heterogeneity reconstruction algorithm using multifrequency analysis has been then developed and studied. The method used is based on non-linear optimization theory. It allows to reconstruct the permittivity and conductivity profiles of the buried object from scattered and incident field data. In order to enhance the resulting images, a regularization technique which preserves the edges of the object has been introduced into the inversion process.

Keywords : Electromagnetism, Diffraction, Inverse problem, Image reconstruction, Buried objects, Qualitative imaging, Microwave diffraction tomography, Quantitative imaging, Non-linear optimization, Regularization with edge preserving