THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ :

Mathématiques Appliquées

PAR

Frédéric BONNET

SUJET DE LA THÈSE :

MÉTHODES DE RÉSOLUTION EFFICACE POUR LE SYSTÈME DE MAXWELL INSTATIONNAIRE

Soutenue le 14 Novembre 1997 devant le jury composé de :

M.	Frédéric	**POUPAUD**	Président
Mlle.	Loula	**FEZOUI**	Directrice
Mme.	Laurence	**HALPERN**	Rapporteurs
M.	Bernard	**HANOUZET**	
MM.	Armel	**de La BOURDONNAYE**	Examinateurs
	Denis	**POGARIELOFF**	
	Hervé	**STEVE**	

Remerciements

Le travail qui a abouti à cette thèse a été effectué à l'Université de Nice et à l'INRIA-CERMICS Sophia-Antipolis. Je tiens d'ailleurs à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Armel de La Bourdonnaye qui m'a accueilli au sein de son projet de recherche. J'apprécie, de plus, l'honneur qu'il me fait en participant à ce jury.

J'exprime ma reconnaissance à Frédéric Poupaud qui a suivi et guidé de façon attentive mes travaux et qui a toujours su me prodiguer de judicieux conseils, tant sur le plan de la rigueur mathématique que de la rédaction. Je le remercie de l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.

J'adresse tous mes remerciements à Madame Laurence Halpern et à Monsieur Bernard Hanouzet pour leur présence dans ce jury et pour avoir accepté de porter un jugement sur mon travail.

Je n'oublierai jamais le soutien constant, les encouragements répétés et la très grande disponibilité de Madame Loula Fezoui qui sont une part essentielle dans l'aboutissement de ce travail. J'ai pu également apprécier au cours de ces nombreuses années passées à ses côtés qu'à ses qualités scientifiques s'ajoutaient des qualités humaines hors du commun. Pour tout cela, je la remercie très chaleureusement.

Messieurs Denis Pogarieloff et Hervé Steve me font l'honneur de participer à ce jury, je leur adresse tous mes remerciements.

Si cette thèse a pu aboutir, c'est aussi sans doute dû à l'excellente ambiance qui a régné et qui règne au CERMICS. Je tiens à remercier Nathalie Olivier et Robert Rivière qui se sont toujours montrés disponible et m'ont apporté leur soutien et leur expérience pendant ces années de thèse. Ma route a également croisé les "anciens" (Sophie, Christel, Jean-Pierre, Serge, François, Didier et Marco) et les "nouveaux" (Stéphanie, Malika, Cédric et Mihai). A tous je leur exprime ma sympathie et mon amitié.

Mes plus profonds et sincères remerciements vont à mes parents qui ont toujours su me guider sur le chemin de la vie.
Finalement, je voudrais associer à cette thèse ma fiancée Estelle sans l'aide et l'amour de laquelle je n'aurais pu mener à bien ce travail.

Table des matières

Introduction

Les travaux que nous présentons ici portent sur la résolution numérique du système de Maxwell en domaine temporel. Les aspects mathématiques généraux, telle l'existence et l'unicité des solutions, sont maintenant parfaitement connus et maîtrisés [1, 2]. En particulier, pour le régime transitoire étudié ici, la résolution du problème de Cauchy pour le système de Maxwell dans le vide rentre dans le cadre des systèmes de Friedrichs et on a l'unicité de la solution dans les classes des fonctions d'énergie finie. L'existence de solutions faibles et d'estimations à priori ont également été démontrées [1, 2].
Néanmoins, l'obtention de solutions exactes n'est obtenue que pour des configurations très simples (diffraction sur un cylindre à section circulaire par exemple). Le récent développement des super-ordinateurs permet, à l'aide de modélisations numériques adéquates, d'obtenir des solutions approchées pour des configurations complexes où les solutions exactes sont inconnues ou inaccessibles (forme implicite). Ces méthodes permettent ainsi d'élargir considérablement le champ d'application des phénomènes électromagnétiques qui touche alors des domaines aussi variés que la médecine, l'électronique, les antennes, les transports de particules, la compatibilité électromagnétique... Ainsi, la modélisation numérique devient un outil essentiel, et A. Taflove n'hésite pas à parler alors de redécouverte de l'électromagnétisme [3].
On comprend donc aisément l'intérêt croissant de la communauté scientifique à améliorer sans cesse les performances des méthodes de résolution numérique. Le but ainsi recherché est d'obtenir une excellente précision sur les résultats tout en étant capable de simuler des problèmes de plus en plus réalistes pour des coûts en temps de calcul raisonnables. C'est dans ce but qu'a été développé un grand nombre de méthodes numériques. Cependant, il semble qu'aucune méthode particulière ne soit prédominante sur une autre, le choix étant alors déterminé essentiellement par le type d'application considéré. Ainsi, dans le cas où le domaine de calcul est correctement approché par des grilles orthogonales, les schémas de type différences finis, appelés FDTD pour "Finite Difference Time Domain", d'ordre 2 (schéma de Yee [4]), ou d'ordre supérieur [5], semblent bien adaptés. Cepen-

dant l'utilisation de telles méthodes présente des inconvénients techniques, en particulier l'implémentation des conditions aux limites absorbantes et le traitement des géométries complexes (problème de l'approximation en marches d'escalier). L'utilisation des méthodes de type éléments finis permet, via la formulation variationnelle, d'éluder la plupart de ces problèmes. Cependant, cette méthode demande souvent une trop grande régularité de la solution pour les problèmes considérés. De plus, l'utilisation des éléments finis $H(rot)$, bien que parfaitement adapté à la résolution des équations de Maxwell, nécessite la prise en compte de la matrice de masse, et la condensation de cette matrice soulève des difficultés [6, 7, 8].
Nous avons donc choisi, afin de modéliser le système de Maxwell instationnaire, une méthode totalement explicite qui repose sur les caractères conservatif et hyperbolique du système de Maxwell. Il s'agit de schémas temporels de type volume fini, appelés par la suite FVTD pour "Finite Volume Time Domain", largement étudiés et utilisés pour des problèmes non linéaires en mécanique des fluides. Cependant, le caractère linéaire du système de Maxwell permet de simplifier considérablement ce schéma. De plus, les travaux de Shankar [9], et Cioni [10] montrent que l'utilisation d'une telle méthode semble bien adaptée à la résolution numérique de différents phénomènes électromagnétiques en régime transitoire.
L'objet de cette thèse est d'augmenter l'efficacité de la méthode numérique des volumes finis centrés aux noeuds développée par J.P. Cioni dans sa thèse [11].
En particulier, l'utilisation de la méthode FVTD, de la même façon que pour la FDTD, pour la simulation numérique de phénomènes électromagnétiques posés en domaine non borné soulève le problème des conditions aux limites absorbantes (noté CLA par la suite) à imposer sur la frontière artificielle qui borne le domaine de calcul. Le choix de ces CLA doit répondre essentiellement à deux critères :

- minimiser les réflexions parasites sur la frontière artificielle,
- diminuer le plus possible la taille de la "boite" de calcul afin de pouvoir obtenir un coût raisonnable en temps de calcul.

De nombreuses études tant théoriques que numériques ont été menées depuis de nombreuses années sur le sujet et on pourra trouver à la fin de ce mémoire une revue bibliographique non exhaustive sur le problème des CLA pour la propagation d'ondes.
L'utilisation de conditions absorbantes d'ordre un (décentrage à l'infini [11]) nous oblige à placer la frontière artifcielle à environ deux longueurs d'onde de l'objet étudié pour l'obtention de solutions approchées précises. Afin de réduire cette distance avec le schéma

FVTD, notre étude bibliographique nous a conduit à étudier la technique des matériaux fictifs parfaitement absorbants, appelé PML ("Perfectly Matched Layer"), développée par Bérenger [12, 13]. L'adaptation de cette technique PML construite initialement pour des schémas FDTD à des schémas FVTD est le point principal de la thèse présentée ici.
Toujours dans le double objectif coût-précision, nous avons également étudié un schéma hautement précis en temps et en espace. En effet, les schémas utilisés dans cette thèse, les β-γ schémas, ont été étudiés dans le cadre de la dynamique des gaz [14, 15]. On propose cependant de contribuer à cette étude en présentant un nouveau schéma précis à l'ordre 3 en temps et en espace, à dispersion nulle à l'ordre 3.
De plus, toujours dans la perspective coût-précision, un premier pas a été fait en direction des maillages hybrides (triangles-rectangles en 2-D, tétraèdres-cubes en 3-D). La construction de tels maillages ainsi que l'extension du schéma FVTD en deux dimensions d'espace ne posent aucun problème particulier, ce qui n'est plus le cas pour des applications tridimensionnelles.
La thèse est divisée en six chapitres .
Le chapitre 1 est une présentation des équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques. En particulier, nous y rappelons les propriétées mathématiques du système de Maxwell qui seront utilisées par la suite.
Le chapitre 2 est consacré à la description de l'approximation numérique utilisée. La méthode de volumes finis centrés aux noeuds pour la discrétisation spatiale est accompagné d'un schéma linéaire explicite multi-pas de type Runge-Kutta pour la discrétisation temporelle.
Le chapitre 3 contient une présentation de la méthode des matériaux fictifs parfaitement absorbant proposé par Bérenger [12, 13]. Une nouvelle écriture de ces équations y est présentée ainsi que l'adaptation de cette technique, initialement introduite pour des schémas de type Yee [4, 13], à des schémas de type volumes finis en maillage non structuré. Des expériences numériques en deux et en trois dimension d'espace y sont également données.
Dans le chapitre 4, nous étudions un schéma numérique, le β-γ schéma, afin d'en obtenir les valeurs optimales des paramètres β et γ pour l'obtention d'un schéma d'ordre élevé.
Le chapitre 5 est consacré au développement du schéma de type volumes finis sur des maillages hybrides (triangles et rectangles) conformes en deux dimensions d'espace. Des solutions obtenues avec ces maillages hybrides sont présentées et comparées en terme de précision et de coût CPU à celles calculées avec des maillages uniformes (triangles ou rectangles).

Finalement, le chapitre six est une étude bibliographique réalisée en 1995 portant sur les conditions aux limites pour la propagation d'ondes. Cette étude n'est pas exhaustive d'autant plus que de nombreux travaux ont été publiés sur le sujet depuis.

Chapitre 1

Équations de l'électromagnétisme

1.1 Équations de Maxwell

Une étude des phénomènes électromagnétiques consiste à déterminer, à l'instant t ($t \in I\!R^+$) et au point $\vec{x} \in I\!R^3$, les quatre champs de vecteurs $\vec{E}$ (en V/m), $\vec{D}$ (en C/m^2), $\vec{H}$ (en A/m) et $\vec{B}$ (en T) vérifiant :

① la loi de Faraday qui lie la force électromotrice à la variation de flux d'induction,

② le théorème d'Ampère qui permet de calculer le champ magnétique engendré par un courant,

③ la loi définissant la charge électrique,

④ la loi de Gauss postulant l'absence de charge magnétique.

Les champs $\vec{E}$,$\vec{D}$,$\vec{H}$ et $\vec{B}$ représentent respectivement le champ et l'induction électrique, le champ et l'induction magnétique.

En appliquant le théorème de la divergence de Gauss et le théorème de Stokes, on obtient les expressions locales de ces lois physiques appelées **équations de Maxwell** :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0 & & ①, \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\vec{\jmath} & & ②, \\[2ex] div(\vec{D}) = \rho & & ③, \\ div(\vec{B}) = 0 & & ④. \end{array}\right.$$

Les densités de charge ρ et de courant $\vec{\jmath}$ sont reliées par la loi de conservation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{\jmath}) = 0. \tag{1.1}$$

Remarque 1.1.1 *: Les champs $\vec{E}$,$\vec{B}$,$\vec{D}$ et $\vec{H}$ constituant le champ électromagnétique ainsi que la densité de courant $\vec{\jmath}$ sont des fonctions vectorielles de $I\!R^3$ définies sur $I\!R^3 \times I\!R$ et à valeurs dans $I\!R^3$.*

Le système des équations de Maxwell ne tient pas compte du milieu matériel où il y a propagation, et par conséquent il ne suffit pas à la détermination du champ électromagnétique. Il convient alors d'ajouter des relations qui préciseront les propriétés spécifiques du milieu étudié. Ces relations liant les champs et les inductions sont données par des lois dites de comportement, caractéristiques du milieu considéré. Nous considèrerons dans cette étude des matériaux linéaires isotropes dont les lois constitutives les plus simples sont données par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon(\vec{x})\, \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu(\vec{x})\, \vec{H}, \end{array} \right. \tag{1.2}$$

où $\varepsilon(x)$ et $\mu(x)$ représentent respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu.

A l'aide de la loi de comportement (1.2), on peut alors écrire les équations de Maxwell en variables $(\vec{E},\vec{H})$ de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(\vec{x})\, \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0, \\ \\ \varepsilon(\vec{x})\, \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\vec{\jmath}, \\ \\ div(\varepsilon(\vec{x})\, \vec{E}) = \rho\,, \\ div(\mu(\vec{x})\, \vec{H}) = 0. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Notons que les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} div(\varepsilon(\vec{x})\, \vec{E}) = div(\vec{D}) = \rho, \\ \\ div(\mu(\vec{x})\, \vec{H}) = div(\vec{B}) = 0, \end{array} \right.$$

sont redondantes dans le modèle continu (pour tout temps t positif) pour une condition initiale vérifiant ces contraintes (voir par exemple [1]).
On peut ainsi ne considérer que les deux premières équations de (1.3).

1.2 Adimensionnement

La permittivité diélectrique $\varepsilon(\vec{x})$ et la perméabilité magnétique $\mu(\vec{x})$ peuvent s'écrire en fonction des caractéristiques du vide ε_0 et μ_0 de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon(\vec{x}) = \varepsilon_0\, \varepsilon_r(\vec{x}) \\ \mu(\vec{x}) = \mu_0\, \mu_r(\vec{x}) \end{array}\right.$$

où ε_r et μ_r sont des valeurs adimensionnelles relatives au milieu de propagation de l'onde et ε_0 et μ_0 ont pour valeurs en unités S.I. :

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}.10^{-9} \;\; F/m \\ \\ \mu_0 = 4\pi.10^{-7} \;\; H/m \end{array}\right.$$

La vitesse de la lumière dans le vide est donnée par : $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3.10^8 \;\; m/s.$

Le système (1.3) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \dfrac{1}{\mu_0} rot\left(\dfrac{\vec{E}}{\mu_r}\right) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \dfrac{1}{\varepsilon_0} rot\left(\dfrac{\vec{H}}{\varepsilon_r}\right) = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{\vec{j}}{\varepsilon_r} \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Enfin, on note par $Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,\Omega$ l'impédance caractéristique du vide.
On a les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} Z_0 \varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \dfrac{1}{c_0} \\ \dfrac{Z_0}{\mu_0} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c_0 \end{array}\right. \tag{1.5}$$

On fait le changement de variables suivant :

$$\tilde{H} \;=\; Z_0\, H$$

En tenant compte des relations (1.5), en divisant par c_0 et en effectuant le changement de variable $\tau = c_0 t$, le système (1.4) s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} + rot\left(\frac{\vec{E}}{\mu_r}\right) = 0 \\ &\frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} - rot\left(\frac{\tilde{H}}{\varepsilon_r}\right) = -\,Z_0\,\frac{\vec{\jmath}}{\varepsilon_r} \end{aligned} \right.$$

Dans cette formulation, les quantités physiques s'expriment alors dans les unités suivantes :

- ✗ le nouveau temps τ est en mètre (m),
- ✗ $\vec{E}$, $\tilde{H}$ sont en V/m,
- ✗ $Z_0\,\vec{\jmath}$ s'exprime en V/m^2,
- ✗ ε_r et μ_r sont sans dimension.

On pose $\vec{H} = \tilde{H}$, $\vec{\jmath} = Z_0\,\vec{\jmath}$ et $t = \tau$.

On s'intéressera essentiellement par la suite à des propagations d'ondes dans le vide. On pose ainsi $\varepsilon_r = \mu_r = 1$. On obtient finalement le système :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) = 0 \\ &\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) = -\,\vec{\jmath} \end{aligned} \right. \tag{1.6}$$

1.3 Formulation conservative et hyperbolicité

En vue d'appliquer les méthodes basées sur des techniques de volumes finis pour la résolution du système de Maxwell, on considère en premier lieu la forme conservative du système (1.6) :

$$Q_t + F_1(Q)_x + F_2(Q)_y + F_3(Q)_z = -J(Q) \tag{1.7}$$

avec :

$$Q = {}^t(H_x,H_y,H_z,E_x,E_y,E_z)$$

$$F_1(Q) = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -E_z \\ E_y \\ 0 \\ H_z \\ H_y \end{array}\right\} \quad , \quad F_2(Q) = \left\{\begin{array}{c} E_z \\ 0 \\ -E_x \\ H_z \\ 0 \\ -H_x \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad F_3(Q) = \left\{\begin{array}{c} -E_y \\ E_x \\ 0 \\ H_y \\ -H_x \\ 0 \end{array}\right\}.$$

Enfin :

$$J(Q) = {}^t(0,0,0,j_x,j_y,j_z).$$

On écrit alors (1.7) sous la forme condensée suivante :

$$Q_t + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(Q) = -J(Q) \tag{1.8}$$

avec $\mathbb{F}(Q) = (F_1(Q),F_2(Q),F_3(Q))$.

Le système (1.8) est *hyperbolique*. En effet, considérons une combinaison linéaire de flux :

$$\mathcal{F}(Q,\eta) = \vec{\eta}\,.\,\mathbb{F}(Q)$$

où $\vec{\eta} = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ est un vecteur non nul quelconque de $\mathbb{R}^3$. La matrice jacobienne $\mathcal{A}$ du système est définie par :

$$\mathcal{A}(Q,\eta) = \vec{\eta}\,.\,\mathbb{F}'(Q) = \sum_{i=1}^{3} \eta_i \frac{\partial}{\partial Q} F_i(Q).$$

Du fait de la linéarité du système, $\mathcal{A}$ ne dépend pas de la variable Q. La jacobienne $\mathcal{A}$ a trois valeurs propres réelles de multiplicité double qui sont données par :

$$\lambda_1 = ||\,\vec{\eta}\,||, \quad \lambda_2 = -||\,\vec{\eta}\,|| \quad \text{et} \quad \lambda_3 = 0 \tag{1.9}$$

De plus, une base de $\mathbb{R}^6$ constituée de vecteurs propres de $\mathcal{A}$ peut être construite ; $\mathcal{A}$ est donc diagonalisable et le système de Maxwell est hyperbolique pour tout vecteur $\vec{\eta}$ non nul de $\mathbb{R}^3$.

1.4 Conditions aux limites et problème de diffraction

Conditions aux limites :

Nous assimilerons tout au long de cette étude les parois métalliques au modèle idéal et fictif du conducteur parfait. Ainsi, la conductivité est supposée infinie et les charges se portent instantanément à la surface du conducteur Γ_b. Nous considérons que le champ électromagnétique est nul à l'intérieur du métal. La condition aux limites sur Γ_b est obtenue à partir des relations de passage à travers cette surface [16]. On en déduit en particulier la condition aux limites suivante :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = 0.$$

Dans le cas où les ondes se propagent dans un domaine infini (cas de la diffraction par exemple), nous devons, numériquement, nous restreindre à un domaine de calcul borné. De nombreux auteurs ont cherché à définir des problèmes de conditions aux limites bien posés. On trouvera dans la partie 4 de plus amples informations sur le sujet. On se contentera de rappeler ici une condition aux limites possible à imposer sur la frontière fictive Γ_∞ du domaine de calcul : la condition absorbante d'ordre un de Silver-Müller :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) \ , \tag{1.10}$$

<u>**Problème de diffraction**</u>:

On considère un obstacle borné de $\mathbb{R}^p$ $(p = 2{,}3)$ de frontière Σ, parfaitement conducteur. Une onde électromagnétique incidente se propage dans un milieu extérieur Ω homogène non conducteur et arrive sur l'obstacle (fig. 1.1). Cette onde incidente (référencée par inc) est une donnée du problème. La présence de l'obstacle induit une perturbation de l'onde incidente qui se traduit par la formation d'une onde diffractée (référencée d).

On cherche alors à déterminer le champ diffracté ${}^t(\vec{E}^d,\vec{H}^d)$, sachant que les équations de Maxwell (1.7) sont vérifiées par le champ total défini par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{E} & = & \vec{E}^d + \vec{E}^{inc} \ , \\ \vec{H} & = & \vec{H}^d + \vec{H}^{inc} \ . \end{array} \right.$$

Par hypothèse, le champ incident ${}^t(\vec{E}^{inc},\vec{H}^{inc})$ est solution des équations de Maxwell. De plus, le système de Maxwell est linéaire. Ainsi le système (1.7) peut aussi bien s'écrire en champ diffracté qu'en champ total.
La condition aux limites sur un métal parfaitement conducteur s'écrit alors :

$$\vec{n} \wedge \vec{E}^d \ = \ -\vec{n} \wedge \vec{E}^{inc} \ .$$

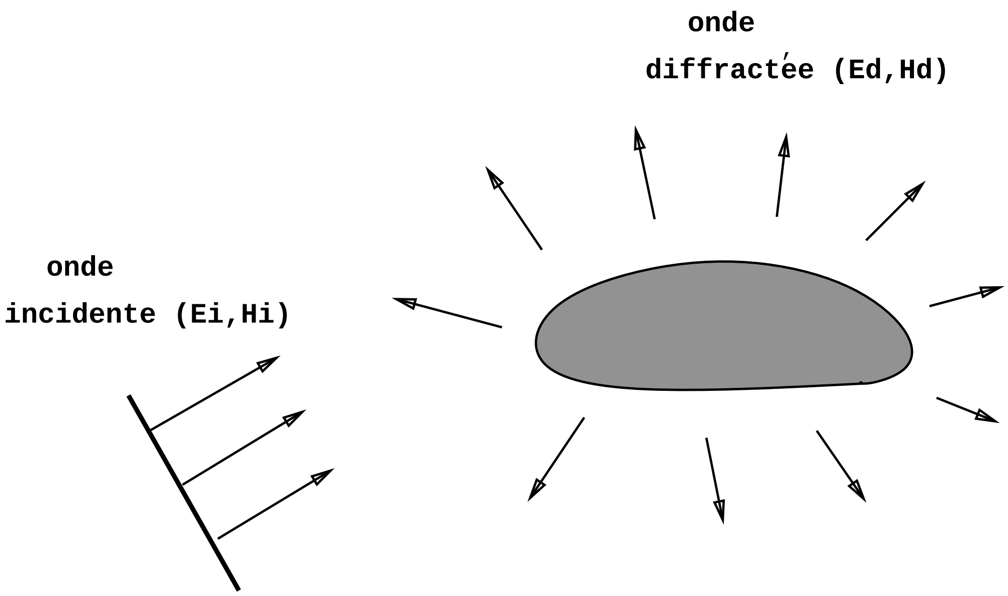

FIG. 1.1 – *Diffraction par un obstacle.*

1.5 Polarisation TE-TM

Dans le cas où le champ électromagnétique et le corps diffractant sont invariants par rapport à une direction donnée, par exemple $\vec{e}_z$, le système (1.7) de six équations à six inconnues se découple en deux systèmes indépendants de trois équations à trois inconnues. Ces deux sous systèmes disjoints, associés aux deux polarisations Transverse Electrique (TE) et Transverse Magnétique (TM), décrivent alors les phénomènes électromagnétiques dans un contexte bidimensionnel (2D).

Ces deux systèmes indépendants peuvent s'écrire sous la formulation bidimensionnelle conservative suivante :

$$Q_t + F(Q)_x + G(Q)_y = J \tag{1.11}$$

avec :

$$Q = \left\{ \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} H_x \\ H_y \\ E_z \end{array} \right\} \quad \text{(T.M.)} \\ \\ \left\{ \begin{array}{c} -E_x \\ -E_y \\ H_z \end{array} \right\} \quad \text{(T.E.)} \end{array} \right.$$

$$F(Q) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -Q_3 \\ -Q_2 \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad G(Q) = \left\{ \begin{array}{l} Q_3 \\ 0 \\ Q_1 \end{array} \right\}$$

Enfin :

$$J = \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -j_z \end{array} \right\} & \text{(T.M.)} \\ \\ \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ j_y \\ 0 \end{array} \right\} & \text{(T.E.)} \end{array} \right.$$

Le caractère hyperbolique de ces deux sytèmes de Maxwell en deux dimensions d'espace se montre de la même façon que pour le système écrit en trois dimensions. Les valeurs propres du jacobien $\mathcal{A}$, au nombre de trois et maintenant distinctes restent identiques à celles du système complet (cf §1.3).

Chapitre 2

Schémas en volumes finis

2.1 Introduction

Nous décrivons dans ce chapitre la méthode numérique de volumes finis basée sur des maillages de type éléments finis et appliquée à la résolution du système de Maxwell en milieu homogène. Du fait de l'hyperbolicité et du caractère conservatif des équations de Maxwell, l'utilisation de schémas numériques décentrés est bien adapté à la discrétisation de ce problème. En effet, une conséquence du caractère hyperbolique du système de Maxwell est que l'énergie se propage à vitesse finie suivant des directions particulières (les caractéristiques). Les schémas décentrés que nous proposons ont la faculté de reconnaitre automatiquement le sens de propagation des ondes, d'où leur intéret. De plus, de nombreux schémas décentrés basés sur des solveurs de Riemann approchés ont été développés et validés en mécanique des fluides pour la résolution de problèmes modélisés par des systèmes possédant les mêmes propriétés. Nous rappelons donc ici les caractéristiques principales de l'approximation utilisée et l'on pourra se référer par exemple à [17, 18] pour une description plus détaillée.
Nous présentons rapidement le problème type d'électromagnétisme que l'on a à résoudre numériquement. On considère le problème de Cauchy basé sur la formulation adimensionnée (1.3) du système de Maxwell, auquel on ajoute des conditions aux limites (voir

§1.4). On a :

$$\begin{cases} Q_t + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(Q) = -J(Q) & \text{dans } \ \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \\ Q(\vec{x},0) = Q_0(\vec{x}) & \forall\, \vec{x} \in \Omega \\ \\ \vec{n} \wedge \vec{E} = 0 & \text{sur } \ \Gamma_b \times \mathbb{R}^+ \\ \\ \vec{n} \wedge \vec{E} = -\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) & \text{sur } \ \Gamma_\infty \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{2.1}$$

On supposera que la condition initiale Q_0 vérifie les relations de divergence (voir §1.1). De plus, suivant la nature des phénomènes physiques modélisés, on pourra ne considérer qu'une seule condition aux limites.

2.2 Formulation volumes finis

Soit $\mathcal{T}_h$ une discrétisation classique par tétraèdres en trois dimensions d'espace (ou par triangles en 2-D) du domaine Ω_h, approximation du domaine de calcul Ω. A chaque noeud S_i est associée une cellule C_i (figures 2.1 et 2.2). La réunion des cellules forme une nouvelle partition de Ω_h.

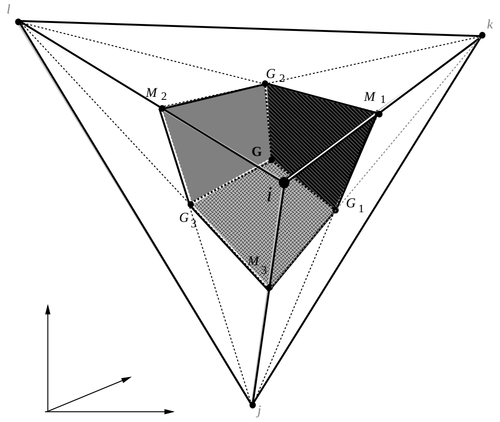

FIG. 2.1 – *Cellule d'intégration C_i en 3D*

On considère l'équation de conservation (1.7) sous forme condensée :

$$Q_t + \overrightarrow{\nabla}.\mathbb{F}(Q) = 0 \qquad (\vec{x},t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{2.2}$$

avec $\mathbb{F}(Q) = {}^t(F_1(Q),F_2(Q),F_3(Q))$.

On complète (2.2) par des conditions aux limites sur la frontière Γ de Ω constituée de

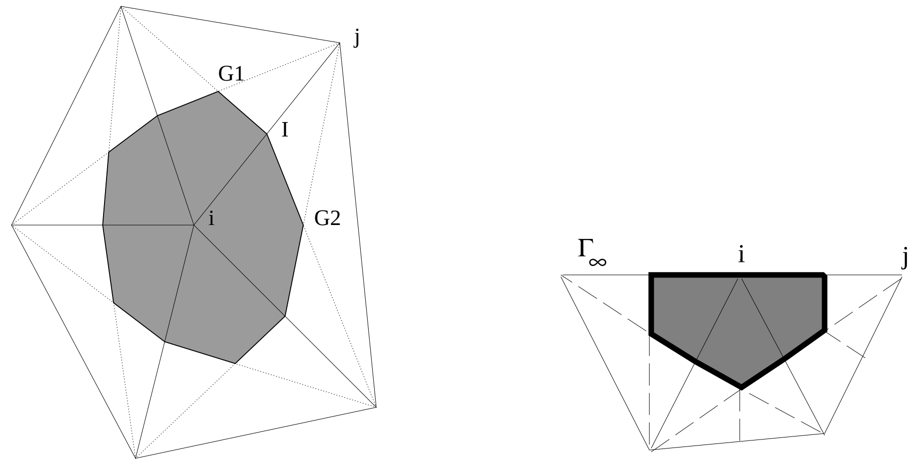

FIG 2.2.a: pour un noeud courant S_i FIG 2.2.b: pour un noeud S_i du bord

FIG. 2.2 – *Cellules d'intégration C_i en 2D*

Γ_b le bord de l'objet diffractant et de Γ_∞ la frontière artificielle qui borne le domaine de calcul ($\Gamma = \Gamma_b \bigcup \Gamma_\infty$). L'implémentation de ces conditions aux limites sera précisée au paragraphe 2.4.
Les méthodes de volumes finis sont basées sur l'intégration de (2.2) sur chaque cellule C_i. On note $(Q_t)_i$ la valeur moyenne de Q_t sur la cellule C_i. On obtient :

$$Volume(C_i)\,(Q_t)_i \; + \int_{C_i} \vec{\vec{\nabla}}.\mathbb{F}(Q)\,dx = \; 0. \tag{2.3}$$

En utilisant la formule de Green, l'équation (2.3) nous conduit à :

$$\begin{aligned} Volume(C_i)\,(Q_\tau)_i \;\; &= \;\; -\sum_{j\in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \mathbb{F}(Q).\vec{\nu}_{ij}\,d\sigma \\ & \quad - \int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \mathbb{F}(Q).\vec{n}_b\,d\sigma \\ & \quad - \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \mathbb{F}(Q).\vec{n}_\infty\,d\sigma \end{aligned} \tag{2.4}$$

où $\vec{\nu}_{ij}$ est la normale extérieure à l'interface ∂C_{ij} entre deux cellules C_i et C_j, et $K(i)$ l'ensemble des noeuds voisins d'un sommet i.

2.3 Calcul des flux numériques internes

2.3.1 Schéma décentré d'ordre un

Le terme intégral $\displaystyle\int_{\partial C_{ij}} \mathbb{F}(Q).\vec{\nu}_{ij}\, d\sigma$ est évalué par une fonction de flux numérique $\boldsymbol{\Phi_{ij}}$ donnée par :

$$\boldsymbol{\Phi_{ij}} \;=\; \mathbb{F}_{ij}.\vec{\eta}_{ij},$$

où $\vec{\eta}_{ij} \;=\; {}^t(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \;=\; \displaystyle\int_{\partial C_{ij}} \vec{\nu}_{ij}\, d\sigma$ et $\mathbb{F}_{ij}$ est une approximation de $\mathbb{F}(Q)$ sur l'interface ∂C_{ij}.

La fonction de flux numérique $\boldsymbol{\Phi_{ij}}$ est choisie décentrée du premier ordre, et dépend des deux états Q_i et Q_j. Le système étant linéaire à coefficients constants, tous les flux décentrés d'ordre un sont identiques. Ce flux numérique $\boldsymbol{\Phi_{ij}}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\Phi_{ij}} = \boldsymbol{\Phi}(Q_i,Q_j,\vec{\eta}_{ij}) = \frac{\mathcal{F}(Q_i,\vec{\eta}_{ij}) + \mathcal{F}(Q_j,\vec{\eta}_{ij})}{2} - \frac{\gamma}{2} \mid \mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij}) \mid (Q_j - Q_i), \qquad (2.5)$$

où $\mathcal{F}(Q,\vec{\eta}_{ij}) = \eta_1 F_1(Q) + \eta_2 F_2(Q) + \eta_3 F_3(Q)$ est une combinaison linéaire de flux et $\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})$ la matrice jacobienne du système (voir §1.3). Le paramètre γ de la formule (2.5) est fixé à un dans le cas des schémas décentrés classiques. Néanmoins, on verra par la suite que cette valeur du paramètre γ n'est pas optimale pour l'obtention de solutions numériques d'une grande précision. En particulier, le paramètre γ nous permettra de contrôler la diffusion numérique. Ce sera l'objet du chapitre 4.

En remarquant que l'on a : $\mathcal{F}(Q,\vec{\eta}_{ij}) = \mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})Q$, on obtient le flux numérique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi_{ij}} &= \boldsymbol{\Phi}(Q_i,Q_j,\vec{\eta}_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\mathcal{A}^+(\vec{\eta}_{ij})[(1+\gamma)Q_i + (1-\gamma)Q_j] + \mathcal{A}^-(\vec{\eta}_{ij})[(1-\gamma)Q_i + (1+\gamma)Q_j]\right\}, \end{aligned} \qquad (2.6)$$

$\mathcal{A}^+(\vec{\eta}_{ij})$ (resp. $\mathcal{A}^-(\vec{\eta}_{ij})$) étant la partie positive (resp. négative) de la matrice symétrique $\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})$.

Remarque 2.3.1 *: Pour γ=1, on retrouve la décomposition de flux de Steger-Warming [19] :* $\boldsymbol{\Phi_{ij}} = \mathcal{A}^+Q_i + \mathcal{A}^-Q_j$

Il est intéressant de noter que l'invariance par rotation du système de Maxwell (1.6) nous permet, à l'aide d'une seule composante de $\mathbb{F}$, de définir la totalité du flux en trois dimensions d'espace. En effet, considérons la rotation $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ qui s'écrit :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Elle transforme $Q = {}^t(\vec{H},\vec{E})$ en $\hat{Q} = {}^t(\mathcal{R}\vec{H},\mathcal{R}\vec{E})$. On montre alors facilement que l'on a :

$$\mathcal{F}(Q,\vec{\eta}_{ij}) = ||\vec{\eta}_{ij}||(\mathcal{R}^{-1} o F_1)(\hat{Q})$$

Dans ce cas là, le flux numérique (2.6) peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\Phi_{ij}} = ||\vec{\eta}_{ij}||\mathcal{R}^{-1}(A_1^+(\gamma)\hat{Q}_i + A_1^-(\gamma)\hat{Q}_j)$$

où A_1^+ et A_1^- sont respectivement les parties positive et négative de $A_1 = \dfrac{\partial}{\partial Q}F_1(Q)$. On remarquera que les matrices A_1^+ et A_1^- dépendent du paramètre γ. On renvoie le lecteur à l'annexe A pour l'écriture détaillée de ces deux matrices.

2.3.2 Approximation d'ordre supérieur

La méthode MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) permet d'augmenter la précision des schémas en définissant de nouvelles valeurs Q_{ij} et Q_{ji} aux interfaces des cellules sans modifier la fonction de flux numérique Φ_{ij}, toujours définie par (2.5). Dans la méthode MUSCL [20], ces valeurs sont obtenues par une interpolation linéaire sur chaque cellule. Nous utilisons ici une formulation dite β-schéma pour définir les valeurs aux interfaces calculées à l'aide d'une combinaison linéaire convexe des gradients hermitiens et centrés :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\Phi_{ij}} \;=\; \boldsymbol{\Phi_{ij}}(Q_{ij},Q_{ji}), \\ Q_{ij} = Q_i + \dfrac{1}{2}\{\,(1-2\,\beta)(Q_j-Q_i) + 2\,\beta\vec{\nabla}Q_i^H.\vec{S_iS_j}\,\}, \\ Q_{ji} = Q_j - \dfrac{1}{2}\{\,(1-2\,\beta)(Q_j-Q_i) + 2\,\beta\vec{\nabla}Q_j^H.\vec{S_iS_j}\,\}, \end{array}\right. \tag{2.7}$$

où β est un paramètre de décentrage qui joue aussi un rôle déterminant dans la précision des schémas. En prenant $\beta = \dfrac{1}{3}$, on obtient un schéma du troisième ordre en espace pour des maillages structurés [21].
On définit les gradients discrets $\vec{\nabla}Q_i^H$ comme une moyenne des gradients de Galerkin autour d'un noeud S_i. Pour tout tétraèdre $T \in \mathcal{T}_h$, on pose :

$$(\vec{\nabla}Q)^T = \sum_{k=1}^{3} Q_{i^k}\vec{\nabla}\varphi_{i^k}(T),$$

où les S_{i^k} ($k = 1,...,4$) sont les quatre sommets du tétraèdre T et $\vec{\nabla}\varphi_{i^k}(T)$ le gradient constant sur T de la fonction de base φ_{i^k} P1 associée au noeud S_{i^k}. On pose alors :

$$\vec{\nabla} Q_i^H = \frac{1}{Volume(C_i)} \sum_{T \in \mathcal{T}_h, S_i \in T} \frac{Volume(T)}{3} (\vec{\nabla} Q)^T. \tag{2.8}$$

Il est également intéressant de remarquer qu'il existe un autre moyen pour mettre au point des schémas numériques d'ordre élevé. On peut effectivement remplacer la fonction de flux numérique décentrée (2.5) par une fonction de flux numérique centrée :

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{ij}} = \frac{\mathcal{F}(Q_i,\vec{\eta}_{ij}) + \mathcal{F}(Q_j,\vec{\eta}_{ij})}{2}.$$

On remarque aisément que pour obtenir ce flux centré il suffit de prendre $\gamma = 0$ dans (2.5). On décide, de plus, de conserver le β-schéma ($\beta = \frac{1}{3}$). Ce schéma a été étudié notamment dans [22, 14] pour l'équation d'advection linéaire bidimensionnelle en maillage homogène régulier. Cette étude a montré que l'on obtient des schémas volumes finis d'ordre 4 en espace et en temps avec une intégration de type Runge Kutta à quatre pas.

Cependant, ce schéma étant linéaire et d'ordre supérieur à un, il n'est pas **TVD** (à variation totale décroissante) [23], d'où l'apparition d'oscillations parasites que nous avons pu observer numériquement. Plutôt que de faire appel aux techniques dites des limiteurs qui rendent le schéma non linéaire, nous préférons introduire un petit taux de diffusion en affectant à γ la valeur 0.1 qui nous permet de surcroit d'utiliser un schéma de Runge Kutta à trois pas (au lieu de 4 pas pour $\gamma = 0$). Le schéma ainsi obtenu sera étudié en détail (précision et stabilité) au chapitre 4.

2.4 Traitement des conditions aux limites

Surface métallique parfaitement conductrice :

Sur la surface Γ_b, la condition aux limites est de type réflexion totale. Elle s'écrit en champ diffracté :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = -\vec{n} \wedge \vec{E}^{inc}, \tag{2.9}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface et $\vec{E}$ le champ électrique diffracté.

Cette condition (2.9) est appliquée sous une forme faible. On présente ici l'expression des flux de bord en deux dimensions d'espace suivant le type de polarisation considérée.

Le terme de bord s'écrit ainsi sous la forme :

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \mathbb{F}(Q).\vec{n}_b \, d\sigma = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \begin{pmatrix} -n_2 Q_3^{inc} \\ n_1 Q_3^{inc} \\ n_2 Q_1 - n_1 Q_2 \end{pmatrix} d\sigma \quad \text{(TM)} \\ \\ \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \begin{pmatrix} n_2 Q_3 \\ -n_1 Q_3 \\ -n_2 Q_1^{inc} + n_1 Q_2^{inc} \end{pmatrix} d\sigma \quad \text{(TE)} \end{cases}$$

où $Q_{k,k=1,2,3}$ sont les composantes du champ diffracté Q sur Γ_b, Q^{inc} est le champ incident supposé connu et $\vec{n} = {}^t(n_1,n_2)$ est la normale extérieure à Γ_b.
Le flux numérique correspondant s'écrit :

$$\mathbf{\Phi}_{ib} = \mathbb{F}_{ib} \vec{\eta}_{ib},$$

avec $\vec{\eta}_{ib} = \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \vec{n}_{ib} \, d\sigma$, $\vec{n}_{ib}$ étant la normale extérieure en $\partial C_i \cap \Gamma_b$ et $\mathbb{F}_{ib}$ donné par :

$$\begin{cases} \mathbb{F}_{ib} & = \mathbb{F}(Q_{ib}) \\ \text{avec} & \\ Q_{ib} & = {}^t(Q_{i,1},Q_{i,2},-Q_{inc,3}) \qquad (TM), \\ & = {}^t(-Q_{inc,1},-Q_{inc,2},Q_{i,3}) \qquad (TE). \end{cases}$$

Remarque 2.4.1 *: En trois dimensions d'espace, en remarquant que l'on a :* $\mathcal{F}(Q).\vec{\eta} = {}^t(-\vec{E} \wedge \vec{\eta}, \vec{H} \wedge \vec{\eta})$*, le flux prenant en compte la condition de conducteur parfait s'écrit en champ diffracté sur* Γ_b *:*

$$\mathbf{\Phi}_{ib} = {}^t(\vec{E}^{inc} \wedge \vec{\eta}_b, \vec{H}_i \wedge \vec{\eta}_b)$$

où $\vec{E}^{inc}$ *et* $\vec{H}_i$ *sont respectivement le champ électrique incident et le champ magnétique total au noeud i. Avec les mêmes notations, en champ total, le flux numérique sur* Γ_b *s'écrit :*

$$\mathbf{\Phi}_{ib} = {}^t(0, \vec{H}_i \wedge \vec{\eta}_b)$$

Condition absorbante :

Afin de pouvoir calculer le flux numérique sur la frontière artificielle Γ_∞ qui borne le domaine de calcul on utilise un décentrage à l'infini à l'aide de la décomposition des flux de Steger-Warming :

$$\mathbf{\Phi}_{i\infty} = \mathbf{\Phi}(Q_i,Q_\infty,\vec{\eta}_{i\infty}) = \mathcal{A}^+(\vec{\eta}_{i\infty})Q_i + \mathcal{A}^-(\vec{\eta}_{i\infty})Q_\infty,$$

où Q_i est la valeur du champ diffracté calculée sur Γ_∞ et Q_∞ le champ diffracté en dehors du domaine de calcul Ω. Comme aucune onde ne doit entrer dans Ω, on obtient :

$$\mathcal{A}^-(\vec{\eta}_{i\infty})Q_\infty = 0,$$

soit :

$$\mathbf{\Phi}_{i\infty} = \mathcal{A}^+(\vec{\eta}_{i\infty})Q_i.$$

On propose ici de donner à titre d'exemple l'écriture du flux numérique que l'on obtient ainsi en deux dimensions d'espace. Il s'écrit :

$$\mathbf{\Phi}_{i\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_2^{i\infty}}{\mid \eta_{i\infty} \mid} Q_{i,1} - \frac{\eta_1^{i\infty}}{\mid \eta_{i\infty} \mid} Q_{i,2} + Q_{i,3}\right)\begin{pmatrix} \eta_2^{i\infty} \\ -\eta_1^{i\infty} \\ \mid \eta_{i\infty} \mid \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

où $\vec{\eta}_{i\infty} = \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \vec{n}_{i\infty}\, d\sigma$, $\vec{n}_{i\infty}$ est la normale extérieure à $\partial C_i \cap \Gamma_\infty$.

Remarque 2.4.2 *: Il est intéressant de noter que le décentrage à l'infini que l'on vient d'introduire est équivalent à la condition absorbante de Silver-Müller d'ordre un prise en compte faiblement [11].*

Remarque 2.4.3 *: En pratique, si l'on utilise cette condition absorbante sur la frontière artificielle Γ_∞, nous sommes tenus de la placer approximativement à deux longueurs d'onde de l'objet diffractant. Cette distance constitue une limite sévère aux simulations en 3D. C'est pourquoi nous nous sommes attachés à appliquer de nouvelles conditions aux limites, le but étant de pouvoir réduire sensiblement le domaine de calcul. Ce sera l'objet du chapitre 3.*

2.5 Discrétisation temporelle

La physique des équations de Maxwell que nous cherchons à résoudre est celle des phénomènes de propagation d'ondes instationnaires. Pour cette raison, la résolution numérique de ce problème d'évolution par des schémas explicites nous parait nécessaire pour assurer une grande précision temporelle. Pour cela, nous utilisons la méthode explicite multi-pas de Runge-Kutta.

La discrétisation utilisée précédemment correspond au système semi-discret associé à chaque noeud S_i (l'indice S_i est omis) :

$$Q_t + \Psi(Q) = 0\,,$$

où $\Psi(Q)$ représente, sous une forme condensée, la discrétisation spatiale précédemment établie et pondérée par l'inverse du volume de contrôle.
Du fait de la linéarité du système de Maxwell, on obtient un schéma d'ordre trois en temps à l'aide de l'intégration à trois pas de Runge Kutta donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} Q^0 = Q^n \\ Q^l = Q^0 - \dfrac{\Delta\tau}{(4-l)}\Psi(Q^{l-1}) \quad l = 1,2,3 \\ Q^{n+1} = Q^3 \end{cases}$$

où $\Delta\tau$ représente le pas de temps tel que : $t^n = n\Delta\tau$.

Chapitre 3

Matériau fictif absorbant.

Ce chapitre est une version plus étendue du rapport Cermics (N^o 96-53) réalisé avec Frédéric Poupaud* et intitulé “Condition aux limites de Bérenger avec un schéma temporel de type volumes finis en maillage triangulaire“.
Une partie de ce chapitre a été acceptée pour publication dans la revue “Applied Numerical Mathematics”.

* Laboratoire J.A. Dieudonné, U.R.A. 168 du CNRS, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, BP 71, 06108 NICE Cedex 02

Introduction

L'étude de la diffraction électromagnétique par un objet donne lieu à un problème extérieur. Afin de pouvoir résoudre numériquement ce problème, on le remplace par un problème aux limites posé dans un domaine borné. Deux méthodes sont couramment utilisées afin d'absorber les ondes sortantes. La première consiste à établir sur la frontière fictive une condition aux limites absorbantes (CLA), approximation des conditions aux limites transparentes (réflexion parasites nulles) non locales. On pourra se référer notamment à [24, 25, 26, 27, 28]. La seconde, qui sera développée ici, consiste à limiter le domaine d'étude par une couche absorbante, les effets de la réflexion du champ électromagnétique dans cette couche étant atténués au moyen d'équations de couches limites artificielles [4]. Cette approche a été récemment proposé par Bérenger dans le cadre de l'électromagnétisme [12, 13]. De nombreux travaux [29, 30, 31] sont venus valider cette méthode.
Nous proposons ici d'étendre cette méthode, utilisée jusqu'alors essentiellement pour des schémas temporels en différences finies, à un schéma temporel de type volumes finis en maillage non structuré.
Ce chapitre est divisé en quatre parties. Dans la première partie nous présentons la méthode de Bérenger ainsi que les modifications apportées aux équations et à leurs propriétés dans la couche limite artificielle. Dans la seconde partie nous développons l'approximation numérique utilisée. Enfin dans les deux dernières parties nous présentons des résultats numériques obtenus avec ces conditions aux limites de type Bérenger en deux et trois dimensions d'espace.

3.1 Système de Maxwell modifié

3.1.1 Matériau fictif parfaitement absorbant

La méthode que l'on va utiliser ici afin d'absorber les ondes sortantes consiste à limiter le domaine de calcul par une couche limite artificielle, les effets de la réflexion du champ électromagnétique étant atténués, dans cette couche, au moyen d'un matériau absorbant fictif (voir la figure 3.1 pour le cas bidimensionnel).

Le domaine de calcul est donc divisé en deux zones distinctes. Dans l'une, que l'on suppose être le vide, on va résoudre les équations de Maxwell classique. Dans l'autre, supposée être le matériau absorbant fictif, les équations de Maxwell à résoudre seront alors celles

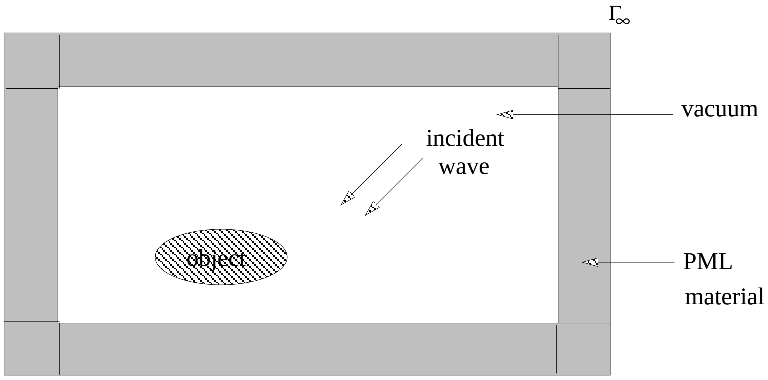

FIG. 3.1 – *Couche absorbante pour le cas 2-D*

écrites dans un milieu absorbant. L'approche classique consiste à résoudre dans le matériau absorbant le système suivant qui s'écrit en l'absence de charges et de courant :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) + \sigma^* \vec{H} = 0,\\[2ex] \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) + \sigma \vec{E} = 0,\end{array}\right. \tag{3.1}$$

avec une conductivité électrique σ et magnétique σ^*.

Remarque 3.1.1 *: Le système (3.1) est écrit sous sa forme adimensionné (voir paragraphe 1.2). Ainsi les quantités σ et σ^* de (3.1) vérifient : $\sigma = Z_0\tilde{\sigma}$ et $\sigma^* = \dfrac{\tilde{\sigma^*}}{Z_0}$ où $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\sigma^*}$ sont respectivement les conductivités électrique et magnétique du système de Maxwell non adimensionné. σ et σ^* s'expriment en m^{-1} tandis que $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\sigma^*}$ sont respectivement en S/m et en Ω/m.*

Ces matériaux absorbants fictifs utilisés jusqu'alors afin d'absorber les ondes sortantes et appliqués à des schémas aux différences finies (voir [4]) vérifient la condition d'adaptation d'impédance liant les conductivités électrique et magnétique du matériau et écrite à l'aide des variables adimensionnées :

$$\sigma = \sigma^*. \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.2 *: Avec les notations précédentes, l'adaptation d'impédance s'écrit :*

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{\tilde{\sigma^*}}{\mu_0}.$$

Cette condition assure que les ondes planes à incidence normale n'engendrent aucune réflexion à l'interface vide-milieu absorbant. Par contre, des réflexions parasites peuvent

apparaitre pour des incidences non normales.
Bérenger a proposé une technique dans le cas bidimensionnel (cf. [12]) permettant d'obtenir un coefficient théorique de réflexion nul pour une onde plane arrivant sur l'interface vide-milieu quelque soit la fréquence ou l'angle d'incidence. L'extension au cas tridimensionnel ne posant aucun problème (voir [13, 30]), on rappelle ici cette technique dans un cadre tridimensionnel.
Le milieu proposé par Bérenger, appelé *couche parfaitement absorbante* et noté milieu PML ("Perfectly Matched Layer", en anglais), est obtenu en introduisant de nouveaux degrés de liberté. On décompose ainsi chaque composante du champ électromagnétique $Q =^t (\vec{H},\vec{E})$ en deux sous-composantes (par exemple $H_x = H_{xy} + H_{xz}$). Le milieu PML ainsi déterminé est un milieu dans lequel le champ électromagnétique a non plus six mais douze composantes qui sont ${}^t(H_{xy},H_{xz},H_{yx},H_{yz},H_{zx},H_{zy},E_{xy},E_{xz},E_{yx},E_{yz},E_{zx},E_{zy})$. De la même façon, les conductivités se décomposent en $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\sigma_x^*,\sigma_y^*,\sigma_z^*$. En supposant que l'adaptation d'impédance est réalisée : $\sigma_i = \sigma_i^*$ pour $i = x,y$ ou z, le système de Maxwell dans le matériau fictif s'écrit alors sous la forme d'un système de 12 équations à 12 inconnues :

$$\begin{cases} \partial_t H_{xy} + \sigma_y H_{xy} = -\partial_y(E_{zx} + E_{zy}) \\ \partial_t H_{xz} + \sigma_z H_{xz} = \partial_z(E_{yx} + E_{yz}) \\ \partial_t H_{yz} + \sigma_z H_{yz} = -\partial_z(E_{xy} + E_{xz}) \\ \partial_t H_{yx} + \sigma_x H_{xy} = \partial_x(E_{zx} + E_{zy}) \\ \partial_t H_{zx} + \sigma_x H_{xy} = -\partial_x(E_{yx} + E_{yz}) \\ \partial_t H_{zy} + \sigma_y H_{zy} = \partial_y(E_{xy} + E_{xz}) \\ \partial_t E_{xy} + \sigma_y E_{xy} = \partial_y(H_{zx} + H_{zy}) \\ \partial_t E_{xz} + \sigma_z E_{xz} = -\partial_z(H_{yx} + H_{yz}) \\ \partial_t E_{yz} + \sigma_z E_{yz} = \partial_z(H_{xy} + H_{xz}) \\ \partial_t E_{yx} + \sigma_x E_{xy} = -\partial_x(H_{zx} + H_{zy}) \\ \partial_t E_{zx} + \sigma_x E_{xy} = \partial_x(H_{yx} + H_{yz}) \\ \partial_t E_{zy} + \sigma_y E_{zy} = -\partial_y(H_{xy} + H_{xz}) \end{cases} \tag{3.3}$$

On peut noter que dans le cas où $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$, on retrouve les équations de Maxwell dans un milieu absorbant classique. Par une analyse de type onde plane, Bérenger montre dans [12] que le choix des σ_i, pour $i = x,y$ ou z, est déterminant pour obtenir une interface vide-milieu parfaitement transparente aux ondes sortantes. La conductivité σ_x (resp. σ_y, σ_z) s'interprète comme le coefficient d'absorption dans la direction x (resp. y, z). Si l'interface entre le vide et le milieu PML a pour normale la direction e_x, le coefficient de réflexion d'une onde plane d'incidence et de fréquence quelconque est nul quand σ_y et σ_z sont nuls. On obtient le même résultat pour les autres directions par simple rotation.

Cas Bidimensionnel:

En deux dimensions d'espace, le système dans le matériau PML est obtenu en introduisant un seul degré de liberté. On décompose uniquement une composante du champ électromagnétique en deux sous-composantes (par exemple dans le cas TM, $E_z = E_{zx} + E_{zy}$). Le système dans le matériau PML est alors un système de quatre équations à quatre inconnues qui s'écrit dans le cas TM de la façon suivante :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} + \sigma_y \, H_x = 0, \\
&\frac{\partial H_y}{\partial t} - \frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} + \sigma_x \, H_y = 0, \\
&\frac{\partial E_{zx}}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \sigma_x \, E_{zx} = 0, \\
&\frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial y} + \sigma_y \, E_{zy} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{3.4}$$

Remarque 3.1.3 *: Le cas TE est obtenu de façon similaire en décomposant la composante H_z en H_{zx} et H_{zy}.*

3.1.2 Choix des conductivités

On montre dans [12, 13] par une analyse par onde plane que le choix des conductivités est primordial pour obtenir une interface, entre deux milieux PML, transparente aux ondes. Le domaine d'étude est supposé être le vide qui est lui même considéré comme un matériau PML. On entoure alors notre de domaine de calcul d'un matériau PML fictif et arbitraire. Les conditions à imposer sur la conductivité pour l'obtention de la propriété citée ci-dessus nécessitent un découpage du milieu PML en plusieurs zones (voir figure 3.2).

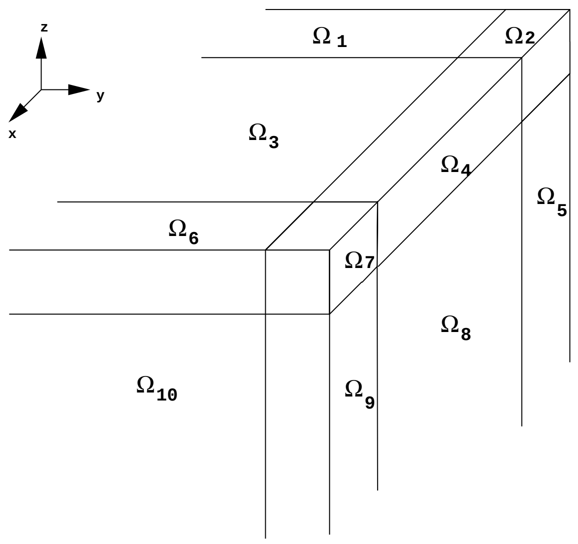

FIG. 3.2 – *Définition partielle de la couche limite artificielle*

On propose alors de décrire ici brièvement les conductivités choisies dans chacune des zones de la figure 3.2. On obtient aisément les conductivités des zones restantes par de simples symétries.
De façon générale, on pose :

$$\vec{\sigma} = \sigma_x \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z.$$

On définit σ_x (resp. σ_y et σ_z) de la façon suivante :

$$\sigma_x = \sigma_0 \left(\frac{x-a}{A-a} \right)^n \tag{3.5}$$

où A et a désignent respectivement l'abscisse d'un point de l'interface vide-PML et l'abscisse d'un point de Γ_∞.

Plus précisemment, nous avons pris :

$$\begin{cases} \vec{\sigma} = \tilde{\sigma}_x \vec{e}_x + \sigma_z \vec{e}_z \text{ dans } \Omega_1, \\ \vec{\sigma} = \tilde{\sigma}_x \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z \text{ dans } \Omega_2, \\ \vec{\sigma} = \sigma_z \vec{e}_z \text{ dans } \Omega_3, \\ \vec{\sigma} = \sigma_y \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z \text{ dans } \Omega_4, \\ \vec{\sigma} = \tilde{\sigma}_x \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y \text{ dans } \Omega_5, \\ \vec{\sigma} = \sigma_x \vec{e}_x + \sigma_z \vec{e}_z \text{ dans } \Omega_6, \\ \vec{\sigma} = \sigma_x \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z \text{ dans } \Omega_7, \\ \vec{\sigma} = \sigma_y \vec{e}_y \text{ dans } \Omega_8, \\ \vec{\sigma} = \sigma_x \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y \text{ dans } \Omega_9, \\ \vec{\sigma} = \sigma_x \vec{e}_x \text{ dans } \Omega_{10}. \end{cases}$$

Différents choix des paramètres σ_0 et n seront testés dans la partie 3.3.2.

3.1.3 Conditions aux limites sur Γ_∞

Dans l'article originel de Bérenger [12], celui ci a considéré Γ_∞ comme le bord d'un conducteur parfait. Les ondes réfléchies sur Γ_∞ sont alors absorbées à l'aller et au retour de leur propagation dans le milieu PML. La condition s'exprime en champ total comme :

$$\vec{E} \wedge \vec{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_\infty,$$

soit en deux dimensions d'espace :

$$\begin{cases} E_z = 0 \qquad \text{en} \quad \text{mode} \quad \text{TM}, \\ -E_x n_y + E_y n_x = 0 \qquad \text{en} \quad \text{mode} \quad \text{TE}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Cependant d'autres choix sont possibles. On peut en particulier prendre des conditions absorbantes sur Γ_∞ qui ne soit pas plus coûteuse en temps calcul qu'une condition de conducteur parfait. Nous avons donc testé une condition au limite absorbante qui consiste à annuler les flux numériques entrant en Γ_∞. C'est une discrétisation numérique directe de la condition au limite transparente (voir section 2.4).

3.1.4 Nouvelle formulation

Pour faciliter l'implémentation numérique, nous allons réécrire (3.3) sous une forme différente. Notre approche consite à conserver les composantes du champ électromagnétique dans le vide ($Q = {}^t(\vec{H},\vec{E})$) et à introduire uniquement six nouvelles variables $(H_{xz},H_{yz},H_{zy},E_{xz},E_{yz},E_{zy})$. On considère ainsi le nouveau système à résoudre dans le matériau PML :

$$\left\{\begin{array}{l}
\partial_t H_x + \partial_y E_z - \partial_z E_y + \sigma_y H_x + (\sigma_z - \sigma_y) H_{xz} = 0 \\
\partial_t H_y + \partial_z E_x - \partial_x E_z + \sigma_x H_y + (\sigma_z - \sigma_x) H_{yz} = 0 \\
\partial_t H_z + \partial_x E_y - \partial_y E_x + \sigma_x H_z + (\sigma_y - \sigma_x) H_{zy} = 0 \\
\partial_t E_x + \partial_z H_y - \partial_y H_z + \sigma_y E_x + (\sigma_z - \sigma_y) E_{xz} = 0 \\
\partial_t E_y + \partial_x H_z - \partial_z H_x + \sigma_x E_y + (\sigma_z - \sigma_x) E_{yz} = 0 \\
\partial_t E_z + \partial_x H_z - \partial_z H_x + \sigma_x E_z + (\sigma_y - \sigma_x) E_{zy} = 0 \\
\partial_t H_{xz} - \partial_z E_y + \sigma_z H_{xz} = 0 \\
\partial_t H_{yz} + \partial_z E_x + \sigma_z H_{yz} = 0 \\
\partial_t H_{zy} - \partial_y E_x + \sigma_y H_{zy} = 0 \\
\partial_t E_{xz} + \partial_z H_y + \sigma_z E_{xz} = 0 \\
\partial_t E_{yz} - \partial_z H_x + \sigma_z E_{yz} = 0 \\
\partial_t E_{zy} + \partial_y H_x + \sigma_y E_{zy} = 0
\end{array}\right. \tag{3.7}$$

Proposition 3.1.1 *: Les formulations (3.3) et (3.7) sont équivalentes.*

Preuve :
De manière évidente, on passe de (3.3) à (3.7) et réciproquement en utilisant les relations : $H_{ij} = H_i - H_{ik}$ (de même pour E) et i,j,k alternativement égaux à x,y et z, et en recombinant par deux les équations du système considéré ♦.

On notera que les six premières équations ne sont rien d'autres que les équations de Maxwell dans le vide avec un terme source prenant en compte les nouvelles variables introduites. Ainsi un schéma numérique classique pour la résolution du système de Maxwell s'applique aux six premières équations. Il ne reste plus qu'à trouver une discrétisation adéquate des six dernières équations.

Cas Bidimensionnel:

On présente le nouveau système dans le cas 2D (polarisation TM). Les composantes du champ électromagnétiques sont conservées, comme dans le cas 3D, et on introduit une seule nouvelle variable (E_{zy} par exemple). On obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial H_x}{\partial t} + \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + \sigma_y \; H_x = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial H_y}{\partial t} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} + \sigma_x \; H_y = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial E_z}{\partial t} + \dfrac{\partial H_x}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial x} + \sigma_x \; E_z + (\sigma_y - \sigma_x) \; E_{zy} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \dfrac{\partial H_x}{\partial y} + \sigma_y \; E_{zy} = 0. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

De la même façon qu'en dimension trois, les systèmes (3.4) et (3.8) sont équivalents en considérant $E_{zx} = E_z - E_{zy}$ et en recombinant les deux dernières équations.

Remarque 3.1.4 *: Le cas TE est obtenu de façon similaire en introduisant par exemple la variable H_{zy}.*

3.1.5 Conservativité et perte de l'hyperbolicité

De la même façon que pour les équations de Maxwell dans le vide (voir §1.3), le système dans le matériau fictif peut s'écrire sous forme conservative :

$$\tilde{Q}_t + \tilde{F}_1(\tilde{Q})_x + \tilde{F}_2(\tilde{Q})_y + \tilde{F}_3(\tilde{Q})_z + \Sigma(\tilde{Q}) = 0 \tag{3.9}$$

avec :

$$\tilde{Q} = {}^t(Q,P) = {}^t(Q,H_{xz},H_{yz},H_{zy},E_{xz},E_{yz},E_{zy})$$

où Q est le champ électromagnétique,

$$\tilde{F}_i(\tilde{Q}) = \tilde{A}_i.\tilde{Q} \quad \text{avec} \quad i = 1,2,3$$

avec

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{A_2} & 0 \\ \boxed{M_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} \boxed{A_3} & 0 \\ \boxed{M_3} & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices A_i ont été précédemment introduites au paragraphe 1.3.
Finalement, on a :

$$\Sigma(\tilde{Q}) = B.\tilde{Q}$$

avec :

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & \boxed{B_2} \\ 0 & \boxed{B_4} \end{pmatrix}$$

On renvoie le lecteur à l'Annexe pour l'écriture des matrices M_2, M_3, B_1, B_2 et B_4.

Proposition 3.1.2 *: Le nouveau système (3.9), écrit sous forme conservative avec ces variables, n'est pas hyperbolique.*

Preuve :
De façon analogue aux équations de Maxwell classique, pour tout vecteur non nul $\vec{\eta} = {}^t(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ de $I\!R^3$, le jacobien $\tilde{\mathcal{A}}$ défini par :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}(\vec{\eta}) &= \vec{\eta}.\tilde{\mathbb{F}}'(\tilde{Q}) \\ &= \eta_1 \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \tilde{Q}}(\tilde{Q}) + \eta_2 \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial \tilde{Q}}(\tilde{Q}) + \eta_3 \frac{\partial \tilde{F}_3}{\partial \tilde{Q}}(\tilde{Q}), \end{aligned}$$

a douze valeurs propres réelles. La valeur propre nulle est de multiplicité huit; le sous espace propre associé à cette valeur propre est de dimension six. Le système dans le matériau PML, écrit avec ces variables, n'est donc pas hyperbolique ♦.

Cependant, A. de la Bourdonnaye [32] a montré que le système de Bérenger recèle des équations de compatibilité cachées du même genre que les équations de divergence dans le cas du système de Maxwell.

Proposition 3.1.3 *[32]: Si on impose au système de Bérenger les relations d'ordre un, pour $\vec{E}$:*

$$\partial_x E_{xy} + \partial_y E_{yx} = 0, \quad \partial_x E_{xz} + \partial_z E_{zx} = 0, \quad \partial_y E_{yz} + \partial_z E_{zy} = 0$$

et pour $\vec{H}$:

$$\partial_x H_{xy} + \partial_y H_{yx} = 0, \quad \partial_x H_{xz} + \partial_z H_{zx} = 0, \quad \partial_y H_{yz} + \partial_z H_{zy} = 0$$

ainsi que les relations de compatibilité d'ordre deux, pour $\vec{E}$:

$$\partial_{z^2} E_{xy} - \partial_{y^2} E_{xz} + \partial_{xy} E_{yz} = 0.$$

et pour $\vec{H}$:

$$\partial_{z^2} H_{xy} - \partial_{y^2} H_{xz} + \partial_{xy} H_{yz} = 0.$$

alors l'opérateur qui en résulte est strictement hyperbolique.

On renvoie à [32] pour la preuve de cette proposition.

Cependant, il est intéressant de remarquer qu'il suffit que ces relations de compatibilité soient satisfaites à l'instant initial, ce qui sera le cas lors de nos approximations numériques (section 3.3) puisque pour $t = 0$ on impose la nullité à toutes les composantes. Il en résulte que le problème de Cauchy est bien posé. On peut donc envisager de résoudre un problème de Riemann associé au système de Bérenger puisque les équations de compatibilité permettent de lever les indéterminations liées aux valeurs propres nulles.

Cas Bidimensionnel:

De façon similaire au cas 3D, le système dans le matériau fictif peut s'écrire sous forme conservative :

$$\tilde{Q}_t + \tilde{F}(\tilde{Q})_x + \tilde{G}(\tilde{Q})_y + \Sigma(\tilde{Q}) = 0, \tag{3.10}$$

avec :

$$\tilde{Q} = {}^t(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4) = \begin{cases} {}^t(H_x,H_y,E_z,E_{zy}) \quad \text{pour le mode TM}, \\ \\ {}^t(-E_x,-E_y,H_z,H_{zy}) \quad \text{pour le mode TE}, \end{cases}$$

$$\tilde{F}(\tilde{Q}) = {}^t(0,-Q_3,-Q_2,0) \quad \text{et} \quad \tilde{G}(\tilde{Q}) = {}^t(Q_3,0,Q_1,Q_1),$$

$$\Sigma(\tilde{Q}) = {}^t(\sigma_y\, Q_1,\, \sigma_x\, Q_2,\, \sigma_x\, Q_3 + (\sigma_y - \sigma_x)\, Q_4,\, \sigma_y\, Q_4),$$

ou sous forme condensée :

$$\tilde{Q}_t + \vec{\nabla}.\tilde{\mathbb{F}}(\tilde{Q}) + \Sigma(\tilde{Q}) = 0, \tag{3.11}$$

avec $\tilde{\mathbb{F}}(\tilde{Q}) = {}^t(\tilde{F}(\tilde{Q}); \tilde{G}(\tilde{Q}))$.

Le système n'est pas hyperbolique, la valeur propre nulle est de multiplicité deux tandis que le sous espace propre qui lui est associé est de dimension un. De façon similaire au cas tridimensionnel, l'ajout d'une relation de compatibilité et de la relation de divergence aux quatre équations dans le milieu PML, rend l'opérateur qui en résulte hyperbolique [32].

3.2 Approximation Numérique

Nous venons de voir que le système obtenu en ajoutant des relations de compatibilité aux équations dans le milieu PML est un système strictement hyperbolique. Il convient alors de remarquer que par un choix judicieux de conditions initiales ces relations supplémentaires introduites sont alors vérifiées pour tout temps t. On peut donc envisager de résoudre un problème de Riemann associé au système de Bérenger puisque les équations de compatibilité permettent de lever les indéterminations. De plus, résoudre le système avec les équations de compatibilité (i.e. le système hyperbolique) consisterait à effectuer un changement de variables voire à introduire de nouvelles équations ce qui entrainerait obligatoirement un surcoût en temps de calcul. On présente donc ici une adaptation du calcul des flux numériques dans le matériau fictif PML basée sur la résolution d'un problème de Riemann. Finalement, dans le vide on propose de résoudre les équations de Maxwell, comme précédemment, à l'aide de schémas décentrés.

3.2.1 Calcul des flux numériques internes

Dans le vide les conductivités σ_x, σ_y et σ_z sont nulles. Le calcul des composantes de Q se ramène à un calcul d'électromagnétisme classique, les composantes de P n'intervenant pas. D'autre part, le calcul des composantes supplémentaires P à l'interface entre le vide et le matériau PML fait intervenir des flux qui ne dépendent que de Q. Il n'est donc pas utile d'effectuer le calcul de P dans le vide et les flux numériques sont alors évalués comme dans le chapitre 1.5.

3.2.2 Calcul des flux numériques dans le matériau fictif

On rappelle que dans cette partie du domaine, le système avec les douze variables considérées n'est pas hyperbolique, on ne peut donc pas appliquer des calculs de flux numériques décentrés pour les douze équations.

En revanche, au vu des remarques du § 3.1.4 sur le système (3.8), les flux numériques $\boldsymbol{\Phi_{ij}}$ des six premières équations sont les mêmes que ceux des équations de Maxwell dans le vide et par conséquent seront calculés de façon similaire (voir § 1.5).
Il nous reste à déterminer les flux ϕ_7,...,ϕ_{12} des six dernières équations du système (3.9).

Proposition 3.2.1 *: Les flux numériques ϕ_7,...,ϕ_{12} du système (3.9) s'écrivent :*

$$\begin{cases}
\phi_7 = -\dfrac{\eta_3}{2}\left\{(Q_5^j + Q_5^k) - \cos\theta\cos\phi\,(Q_3^k - Q_3^j) + \sin\phi\,(Q_1^k - Q_1^j)\right\} \\[2ex]
\phi_8 = \dfrac{\eta_3}{2}\left\{(Q_4^j + Q_4^k) + \sin\theta\cos\phi\,(Q_3^k - Q_3^j) - \sin\phi\,(Q_2^k - Q_2^j)\right\} \\[2ex]
\phi_9 = -\dfrac{\eta_2}{2}\left\{(Q_4^j + Q_4^k) + \sin\theta\cos\phi\,(Q_3^k - Q_3^j) - \sin\phi\,(Q_2^k - Q_2^j)\right\} \\[2ex]
\phi_{10} = \dfrac{\eta_3}{2}\left\{(Q_2^j + Q_2^k) + \cos\theta\cos\phi\,(Q_6^k - Q_6^j) - \sin\phi\,(Q_4^k - Q_4^j)\right\} \\[2ex]
\phi_{11} = -\dfrac{\eta_3}{2}\left\{(Q_1^j + Q_1^k) - \sin\theta\cos\phi\,(Q_6^k - Q_6^j) + \sin\phi\,(Q_5^k - Q_5^j)\right\} \\[2ex]
\phi_{12} = \dfrac{\eta_2}{2}\left\{(Q_1^j + Q_1^k) - \sin\theta\cos\phi\,(Q_6^k - Q_6^j) + \sin\phi\,(Q_5^k - Q_5^j)\right\}
\end{cases}$$

où $Q^{j,k}$ est la valeur du champ électromagnétique dans la cellule C_j (resp. C_k) et $\vec{\eta}$ la normale extérieure à l'interface entre C_j et C_k.

Preuve :

On écrit l'approximation numérique des flux manquant du système sous la forme :

$$\begin{cases}
\phi_7 = -\eta_3 Q_5^{II} \\
\phi_8 = \eta_3 Q_4^{II} \\
\phi_9 = -\eta_2 Q_4^{II} \\
\phi_{10} = \eta_3 Q_2^{II} \\
\phi_{11} = -\eta_3 Q_1^{II} \\
\phi_{12} = \eta_2 Q_1^{II}
\end{cases}$$

Ces flux numériques sont donc entièrement déterminés par la seule connaissance des quantités scalaires Q_i^{II} pour $i = 1,2,4,5$. Du fait de l'indépendance des flux des six premières équations, nous proposons de calculer ces valeurs Q_i^{II} via la résolution d'un problème de Riemann à l'interface entre deux cellules voisines, où seules les six premières équations de

(3.9) et donc les seules composantes du champ électromagnétique sont considérées.

Résolution du problème de Riemann:

Pour calculer Q_i^{II} on résout pour le système de Maxwell dans le vide un problème de Riemann monodimensionnel entre deux cellules voisines dans la direction de la normale. On a :

$$Q_t + F_1(Q)_x + F_2(Q)_y + F_3(Q)_z = 0 \quad \text{pour } (x,y,z) \in I\!R^3,\ t \geq t^n$$

avec la donnée initiale :

$$Q(x,y,z,t^n) = \begin{cases} Q^{j,n} & \text{si } \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z < \eta_1 \tilde{x} + \eta_2 \tilde{y} + \eta_3 \tilde{z}, \\ Q^{k,n} & \text{si } \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 z > \eta_1 \tilde{x} + \eta_2 \tilde{y} + \eta_3 \tilde{z}, \end{cases}$$

où $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ désignent les coordonnées d'un point de l'interface entre deux cellules (voir la figure 3.3 pour le cas bidimensionnel), $\vec{\eta} = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ la normale extérieure à l'interface et où les quantités Q, $F_l(Q)$, pour $l = 1,3$, ont été définies au paragraphe 1.3.

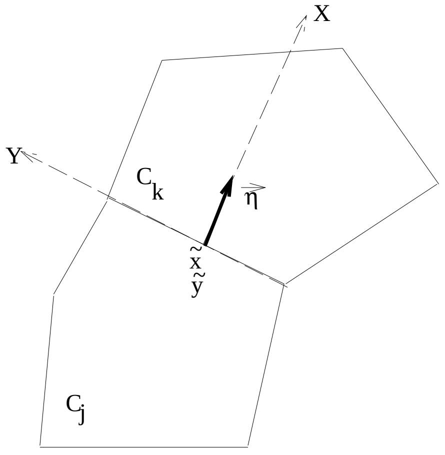

FIG. 3.3 – *Notation à l'interface de deux cellules (2-D).*

En se plaçant dans les coordonnées (ξ,ψ_1,ψ_2) liées respectivement aux directions normales et tangentielles à l'interface des cellules, on obtient, du fait de l'invariance par rotation des équations de Maxwell, et de l'indépendance de la condition initiale par rapport aux variables ψ_1 et ψ_2, le problème de Riemann unidimensionnel dans la direction normale :

$$\hat{Q}_t + F_1(\hat{Q})_\xi = 0, \tag{3.12}$$

avec la donnée initiale :

$$\hat{Q}(\xi,t^n) = \begin{cases} \hat{Q}^I & \text{si } \xi < 0, \\ \hat{Q}^{IV} & \text{si } \xi > 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

où $\hat{Q} = {}^t(H_\xi,H_{\psi_1},H_{\psi_2},E_\xi,E_{\psi_1},E_{\psi_2})$ est le champ électromagnétique dans le nouveau repère et $F_1(\hat{Q}) = {}^t(0,-E_{\psi_2},E_{\psi_1},0,-H_{\psi_2},H_{\psi_1})$.
On considère deux cellules d'intégration voisines C_j et C_k. Soit le système (3.12) avec la donnée initiale (3.13). On considère alors le problème de Cauchy de part et d'autre de la frontière $\xi = \xi_{\frac{1}{2}}$, et pour commencer à gauche. Dans ce domaine, la solution du problème de Riemann est constante de part et d'autre de la courbe caractéristique (Γ_j) d'équation :

$$\frac{\xi - \xi_{\frac{1}{2}}}{t - t_n} = -1.$$

Ceci définit donc deux zones du demi-espace temps $(\xi < \xi_{\frac{1}{2}}\,;\, t > 0)$, notées I et II, respectivement en dessous et au dessus de (Γ_j). De façon similaire, l'autre demi-espace temps $(\xi > \xi_{\frac{1}{2}}\,;\, t > 0)$ est subdivisé en deux zones, notées III et IV, respectivement situées au dessus et en dessous de (Γ_k) d'équation :

$$\frac{\xi - \xi_{\frac{1}{2}}}{t - t_n} = 1.$$

Le problème de Riemann associé à ce problème est schématisé sur la figure 3.4.

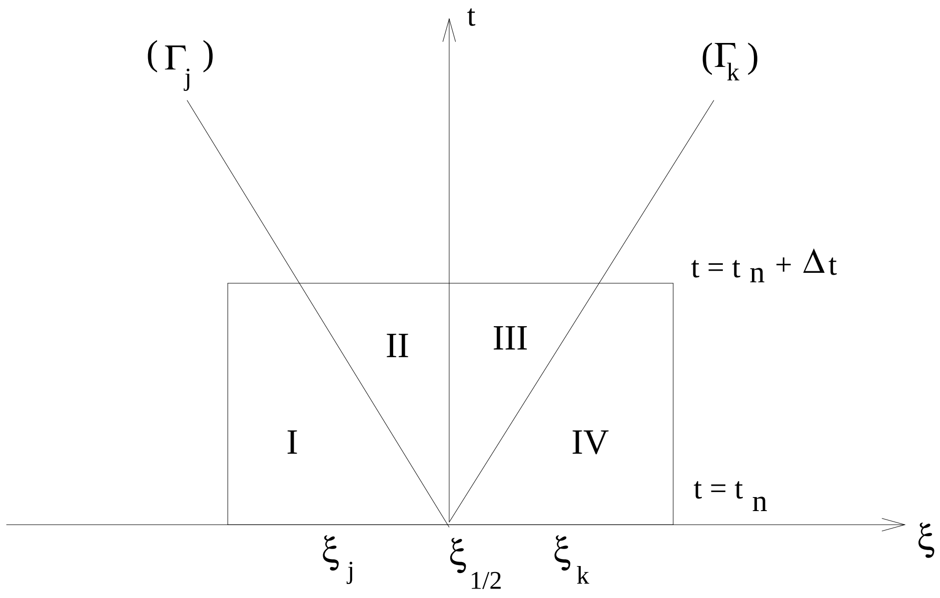

FIG. 3.4 – *Problème de Riemann local*

Sa solution ne dépend que des états initiaux $\hat{Q}^I = \hat{Q}^{i,n}$ et $\hat{Q}^{IV} = \hat{Q}^{j,n}$ de part et d'autre de l'interface et est constituée de quatre états constants $\hat{Q}^I$,$\hat{Q}^{II}$,$\hat{Q}^{III}$ et $\hat{Q}^{IV}$. La résolution de ce problème à l'aide des relations de saut de Rankine Hugoniot (terme habituellement employé en mécanique des fluides pour désigner les relations entre deux états séparés par une surface de discontinuité), nous donne :

$$\begin{cases} \tilde{A}_1(\hat{Q}^{II} - \hat{Q}^{I}) = -(\hat{Q}^{II} - \hat{Q}^{I}) \\ \tilde{A}_1(\hat{Q}^{IV} - \hat{Q}^{III}) = (\hat{Q}^{IV} - \hat{Q}^{III}) \\ \tilde{A}_1(\hat{Q}^{III} - \hat{Q}^{II}) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Les états $\hat{Q}^{II}$ et $\hat{Q}^{III}$ sont déterminés de façon unique. On résout alors explicitement le système (3.14).

On obtient les expressions suivantes, solutions du problème de Riemann :

$$\hat{Q}^{II} = \hat{Q}^{I} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ (\hat{Q}_6^{IV} - \hat{Q}_6^{I}) + (\hat{Q}_2^{IV} - \hat{Q}_2^{I}) \\ (\hat{Q}_5^{I} - \hat{Q}_5^{IV}) + (\hat{Q}_3^{IV} - \hat{Q}_3^{I}) \\ 0 \\ (\hat{Q}_5^{IV} - \hat{Q}_5^{I}) - (\hat{Q}_3^{IV} - \hat{Q}_3^{I}) \\ (\hat{Q}_6^{IV} - \hat{Q}_6^{I}) + (\hat{Q}_2^{IV} - \hat{Q}_2^{I}) \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q}^{III} = \hat{Q}^{IV} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ (\hat{Q}_6^{IV} - \hat{Q}_6^{I}) - (\hat{Q}_2^{IV} - \hat{Q}_2^{I}) \\ (\hat{Q}_5^{I} - \hat{Q}_5^{IV}) - (\hat{Q}_3^{IV} - \hat{Q}_3^{I}) \\ 0 \\ (\hat{Q}_5^{I} - \hat{Q}_5^{IV}) - (\hat{Q}_3^{IV} - \hat{Q}_3^{I}) \\ (\hat{Q}_6^{I} - \hat{Q}_6^{IV}) + (\hat{Q}_2^{IV} - \hat{Q}_2^{I}) \end{pmatrix}$$

La résolution nous donne :

$$\begin{cases} \hat{Q}_1^{II} = \hat{Q}_1^{I} \\ \hat{Q}_1^{III} = \hat{Q}_1^{IV} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \hat{Q}_4^{II} = \hat{Q}_4^{I} \\ \hat{Q}_4^{III} = \hat{Q}_4^{IV} \end{cases}$$

Pour des raisons de symétrie, on choisit alors de poser :

$$\hat{Q}_1^{II} = \frac{1}{2}(\hat{Q}_1^{I} + \hat{Q}_1^{IV}) \text{ et } \hat{Q}_4^{II} = \frac{1}{2}(\hat{Q}_4^{I} + \hat{Q}_4^{IV})$$

Ceci achève la résolution du problème de Riemann aux interfaces des cellules.

Calcul explicite des flux :

On obtient les expressions recherchées (Q_i^{II} pour $i = 1,4,5$) en appliquant la rotation $\mathcal{R}^{-1}$, explicitée ci-dessous, aux quantités $\hat{Q}_i^{II}$ établies lors de la résolution du problème de Riemann.

On pose :

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta & -\cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi & \cos\theta & -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1^{II} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{Q}_1^{II} - \sin\theta\,\hat{Q}_2^{II} - \cos\theta\sin\phi\,\hat{Q}_3^{II} \\ \\ Q_2^{II} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{Q}_1^{II} + \cos\theta\,\hat{Q}_2^{II} - \sin\theta\sin\phi\,\hat{Q}_3^{II} \\ \\ Q_4^{II} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{Q}_4^{II} - \sin\theta\,\hat{Q}_5^{II} - \cos\theta\sin\phi\,\hat{Q}_6^{II} \\ \\ Q_5^{II} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{Q}_4^{II} + \cos\theta\,\hat{Q}_5^{II} - \sin\theta\sin\phi\,\hat{Q}_6^{II} \end{array}\right.$$

Soit, à l'aide des solutions du problème de Riemann :

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1^{II} = \frac{1}{2}(Q_1^I + Q_1^{IV}) - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi\,(Q_6^{IV} - Q_6^I) + \frac{1}{2}\sin\phi\,(Q_5^{IV} - Q_5^I) \\ \\ Q_2^{II} = \frac{1}{2}(Q_2^I + Q_2^{IV}) + \frac{1}{2}\cos\theta\cos\phi\,(Q_6^{IV} - Q_6^I) - \frac{1}{2}\sin\phi\,(Q_4^{IV} - Q_4^I) \\ \\ Q_4^{II} = \frac{1}{2}(Q_4^I + Q_4^{IV}) + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\phi\,(Q_3^{IV} - Q_3^I) - \frac{1}{2}\sin\phi\,(Q_2^{IV} - Q_2^I) \\ \\ Q_5^{II} = \frac{1}{2}(Q_5^I + Q_5^{IV}) - \frac{1}{2}\cos\theta\cos\phi\,(Q_3^{IV} - Q_3^I) + \frac{1}{2}\sin\phi\,(Q_1^{IV} - Q_1^I) \end{array}\right.$$

Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\theta\cos\phi = \dfrac{\eta_1}{||\,\vec{\eta}\,||}, \\ \\ \sin\theta\cos\phi = \dfrac{\eta_2}{||\,\vec{\eta}\,||}, \\ \\ \sin\phi = \dfrac{\eta_3}{||\,\vec{\eta}\,||}, \end{array}\right.$$

on obtient les expressions des flux de la proposition 3.2.1 ♦.

<u>Cas Bidimensionnel</u>:

En deux dimensions d'espace, nous avons vu que le système dans le milieu PML n'est plus qu'un système de 4 équations à 4 inconnues dont les 3 premières ne sont autres que les équations de Maxwell. Il reste donc à déterminer le flux numérique de la dernière équation. On se contente ici de donner l'expression du flux numérique auquel on aboutit, la démonstration étant parfaitement analogue au cas 3-D mais appliquée maintenant au cas bidimensionnel.

Soit ϕ, l'approximation numérique du flux de la quatrième équation du système (3.10) :

$$\phi = Q_1^{II}\,\eta_2.$$

Par résolution d'un problème de Riemann, à l'interface entre deux cellules C_j et C_k, on obtient l'expression de ϕ :

$$\phi = Q_1^{II}\eta_2 = \frac{1}{2}(Q_1^I + Q_1^{IV})\eta_2 - \frac{1}{2}(Q_3^{IV} - Q_3^I)\eta_2^2, \tag{3.15}$$

avec $Q^I = Q^{j,n}$, $Q^{IV} = Q^{k,n}$ et $\vec{\eta} = {}^t(\eta_1,\eta_2)$ la normale extérieure à l'interface $\partial C_j \cap \partial C_k$.
Par exemple, pour le mode TM, on obtient pour le flux numérique, l'expression suivante :

$$\phi = \frac{1}{2}(H_x^j + H_x^{k,})\eta_2 - \frac{1}{2}(E_z^k - E_z^j)\eta_2^2\,.$$

3.2.3 Traitement des conditions aux limites

Condition métallique sur l'objet diffractant :

Pour une surface métallique, la condition aux limites est de type réflexion totale (1.4). Elle s'écrit en champ diffracté :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = -\vec{n} \wedge \vec{E}^{inc}, \tag{3.16}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface et $\vec{E}$ le champ diffracté.
On supposera que l'objet est entouré de vide, le milieu PML n'étant utilisé que dans le but de simuler l'infini. Par conséquent, l'implémentation de la condition métallique sur l'objet est semblable à celle développée dans la section 2.4.

Condition pour borner le domaine de calcul:

Dans l'article originel de Bérenger [12], il proposait pour borner le domaine de calcul d'imposer sur la frontière artificielle Γ_∞ une condition de type métallique (1.4) pour les ondes sortantes. On obtient alors la condition suivante :

$$\vec{n} \wedge \vec{E}^d \,|_{\Gamma_\infty} = 0,$$

On propose de donner ici le flux de bord sur Γ_∞ dans le cas bidimensionnel. Il s'écrit sous la forme :

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \mathbb{F}(Q).\vec{n}\, d\sigma = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_2 Q_1 - n_1 Q_2 \\ n_2 Q_1 \end{pmatrix} d\sigma \quad \text{(TM)} \\ \\ \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \begin{pmatrix} n_2 Q_3 \\ -n_1 Q_3 \\ 0 \\ n_2 Q_1 \end{pmatrix} d\sigma \quad \text{(TE)} \end{cases}$$

où $\vec{n} =^t (n_1,n_2)$ est la normale extérieure à Γ_∞.
Le flux approché correspondant est :

$$\mathbf{\Phi}_{i\infty} = \mathbb{F}_{i\infty}\vec{\eta}_{i\infty},$$

avec $\vec{\eta}_{i\infty} = {}^t(\eta_1^{i\infty},\eta_2^{i\infty}) = \displaystyle\int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \vec{n}_{i\infty}\, d\sigma$, $\vec{n}_{i\infty}$ étant la normale extérieure en $\partial C_i \cap \Gamma_\infty$ et $\mathbb{F}_{i\infty}$ donné par :

$$\begin{cases} \mathbb{F}_{i\infty} & = \mathbb{F}(Q_{i\infty}) \\ \text{avec} & \\ Q_{i\infty} & = {}^t(Q_{i,1},Q_{i,2},0) \quad (TM), \\ & = {}^t(Q_{i,1},Q_{i,1},Q_{i,3}) \quad (TE). \end{cases}$$

<u>Décentrage à l'infini avec un matériau PML</u> :

Au lieu de considérer le bord Γ_∞ comme un conducteur parfait, il nous a semblé intéressant d'appliquer sur Γ_∞ une conditon aux limites absorbante.
Dans le cas où Γ_∞ borne le milieu PML, de la même façon que dans le paragraphe 3.2.2 pour le cas bidimensionnel, il suffit d'établir le flux correspondant à la quatrième équation, les trois premiers étant parfaitement semblables à ceux des équations de Maxwell dans le vide (2.10). On rappelle le flux numérique 2-D obtenu pour les trois premières équations. Le flux approché s'écrit alors :

$$\mathbf{\Phi}^*_{i\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_2^{i\infty}}{|| \vec{\eta}_{i\infty} ||} Q_{i,1} - \frac{\eta_1^{i\infty}}{|| \vec{\eta}_{i\infty} ||} Q_{i,2} + Q_{i,3}\right) \begin{pmatrix} \eta_2^{i\infty} \\ -\eta_1^{i\infty} \\ || \vec{\eta}_{i\infty} || \end{pmatrix} \qquad (3.17)$$

Comme précédemment, il reste à évaluer le quatrième flux numérique.

Proposition 3.2.2 *: Le quatrième flux numérique pour le décentrage à l'infini s'écrit de la façon suivante :*

$$\phi_{i\infty} = \frac{1}{2} Q_1^I \eta_2 + \frac{1}{2} Q_3^I \eta_2^2 \,.$$

Preuve :
On suppose le flux entrant à l'intérieur du domaine de calcul nul et on utilise, avec cette condition, le flux donné par la formule (3.15) ♦.

3.3 Expériences numériques 2-D avec milieu PML

3.3.1 Un calcul de surface équivalente radar

Un des problèmes types de diffraction d'onde sur un obstacle est le calcul de la surface équivalente radar (SER). Il consiste à évaluer la puissance rayonnée dans une certaine direction par un objet lorsqu'il est illuminé par une onde incidente émise par un radar. La méthode présentée permet d'obtenir le champ diffracté dépendant du temps lorsqu'un objet est illuminé par une onde plane incidente. Cette solution n'est que le champ proche alors que l'évaluation de la SER requiert le calcul de l'intensité du champ diffracté à l'infini dans le domaine fréquentiel. La SER est définie en deux dimensions de la façon suivante :

$$S(\theta) = \lim_{r \to \infty} 2\pi r^2 \frac{\mid \widehat{Q}_3^s(rcos\theta, rsin\theta) \mid^2}{\mid \widehat{Q}_3^{inc}(rcos\theta, rsin\theta) \mid^2},$$

où $\mid \widehat{Q}_3^{inc} \mid$ est l'amplitude de l'onde incidente et $\widehat{Q}_3^s$ le coefficient de Fourier (associé à la fréquence de l'onde incidente) obtenu à partir de la solution temporelle.
Pour obtenir une solution harmonique à partir d'une onde incidente harmonique monochromatique, les calculs sont poursuivis jusqu'à ce que les champs atteignent un état stationnaire sinusoidal dépendant de la fréquence de l'onde incidente. Le champ complexe dans le domaine fréquentiel est calculé d'après l'évolution en temps de la solution, en effectuant une transformation de Fourier sur une période en temps après convergence de la solution. Le champ lointain est alors calculé via une formule de rayonnement (voir [33]). Nous rappelons brièvement ici le critère de convergence utilisé, le lecteur intéressé par une étude plus détaillée pourra se référer par exemple à [11]. Le critère proposé ici est basé

sur un calcul d'énergie comme test de convergence. Dans le cadre de notre étude bidimensionnelle, ce test est appliqué sur la troisième composante du champ électromagnétique diffracté ($Q_3^{TM} = E_z$, $Q_3^{TE} = H_z$) en utilisant la norme L_2.

$$e^n = \frac{\|Q_3(.,t = n\lambda) - Q_3(.,t = (n-1)\lambda)\|_{L^2(\Omega_{test})}}{\|Q_3(.,t = \lambda) - Q_3(.,t = 0)\|_{L^2(\Omega_{test})}} \quad , \quad n \geq 1 \,. \tag{3.18}$$

Le résidu e^n est évalué dans un domaine convexe ($\Omega_{test} \subset \Omega$) incluant l'objet illuminé. Ceci est licite puisque le calcul de la SER ne fait intervenir que les valeurs des champs sur une courbe Γ entourant l'objet ($\Gamma \subset \Omega_{test}$, voir fig.3.5). Les calculs sont poursuivis jusqu'à ce que le résidu e^n atteigne une valeur fixée (10^{-3} ici).

3.3.2 Résultats

Des résultats de SER bistatique sont maintenant présentés pour un cylindre infini métallique de section circulaire. On propose de comparer avec les solutions exactes [33] les SER obtenues par différentes méthodes. Le cylindre est illuminé par une onde incidente harmonique. Le critère d'arrêt est celui présenté dans la section précédente. Nous ne calculons numériquement que la partie réelle de la solution et le champ complexe est obtenu via une transformée de Fourier. Les SER représentées ici sont exprimées en db, en fonction de θ, l'angle de regard :

$$f(\theta) = 10 * \log_{10}\left(\frac{S(\theta)}{\lambda}\right).$$

Définition 3.3.1 *: On note ka le nombre sans dimension qui estime le rapport entre les variations spatiales de la solution et une longueur caractéristique du problème :*

- ✗ *a est la longueur caractéristique du problème. Dans le cas d'un problème de diffraction, a est la longueur caractétistique de l'obstacle.*

- ✗ *k est le nombre d'onde. On a : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, avec λ la longueur d'onde.*

Le cylindre métallique, placé dans le vide, est tel que $ka = 5$. Le maillage considéré correspond à 20 points par longueur d'onde au voisinage de l'obstacle. La frontière artificielle est placée, dans le cadre de cette étude, à deux longueurs d'onde du cercle métallique (fig.3.5). Enfin, la fréquence de l'onde incidente est prise égale à 0.96 GHz.

On présente dans un premier temps des SER calculées avec la nouvelle formulation pour le matériau fictif, en imposant une condition métallique sur la frontière artificielle. On

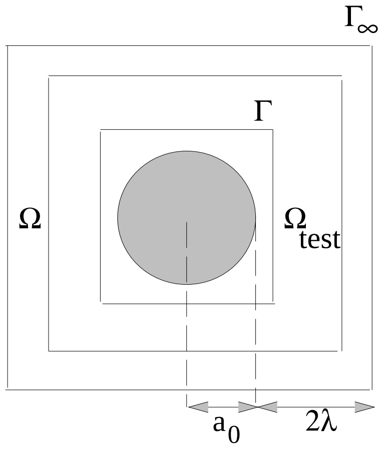

Fig. 3.5 – *Géométrie du maillage*

s'intéresse en particulier à l'influence des différents paramètres du matériau fictif, à savoir le nombre de mailles , que l'on notera NBC, entre la frontière Γ_∞ et l'interface vide-milieu PML (définissant ainsi la largeur du milieu PML), l'amplitude σ_0 et l'exposant n de la conductivité (voir section 3.1.2) sur le pouvoir absorbant du milieu PML.
Sur la figure 3.6 on compare avec la SER exacte, les SER obtenues lorsque, pour un nombre fixé de couches (NBC=8), on fait varier l'amplitude et l'exposant de la conductivité. Les SER obtenues sont tracées en fonction de θ où θ varie de 0^o à 180^o, les SER étant parfaitement symétriques par rapport à $\theta = 180^o$. Il apparait nettement que la valeur des différents paramètres (σ_0 et n) joue un rôle très important pour l'obtention d'une SER satisfaisante. On remarquera en particulier l'importance de la valeur σ_0 (l'amplitude maximale) pour l'obtention d'une SER approchée d'une bonne précision par rapport à la solution exacte. En effet, il est intéressant de noter que pour un même exposant ($n = 2$), autant la SER obtenue avec une conductivité $\sigma_0 = 50$ est d'une très bonne précision par rapport à la SER exacte, autant celle obtenue avec $\sigma_0 = 20$ est très mauvaise. Néanmoins, le choix de cette conductivité σ_0 n'est pas suffisant pour assurer une bonne précision à la SER ainsi calculée ; il suffit en effet de comparer les SER obtenues dans le cas où l'exposant est différent ($n = 0$ et $n = 2$) mais où la conductivité σ_0 reste égale dans les deux cas à 50, pour s'apercevoir que dans le cas où la conductivité est constante ($n = 0$), la précision de la SER obtenue n'est pas optimale. Dans la suite des expériences numériques, on retiendra comme valeur des paramètres : $\sigma_0 = 50$ et $n = 2$.

La figure 3.7 montre les SER obtenues pour une conductivité fixée ($\sigma_0 = 50$ et n=2) en fonction du nombre de mailles du matériau fictif (4 ou 8). Afin que les ondes sortantes

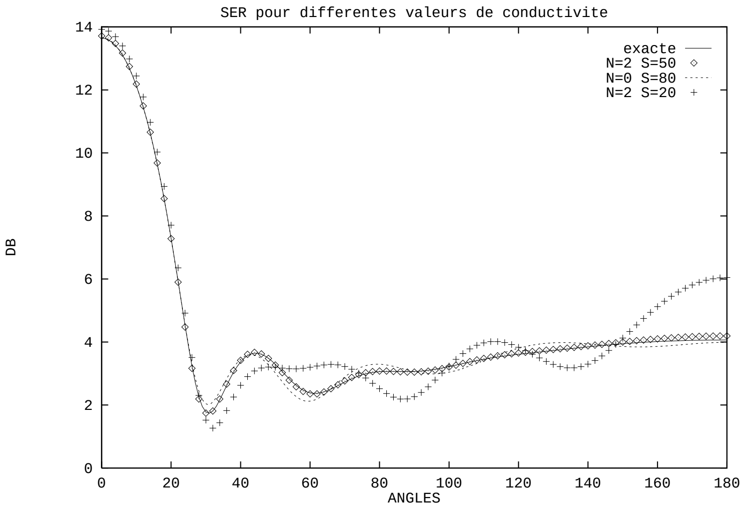

FIG. 3.6 – *SER pour NBC fixé*

soient absorbées de façon efficace, la figure 3.7 montre la nécessité d'imposer un nombre suffisant de couches (8 ici) de matériau PML devant le bord métallique.

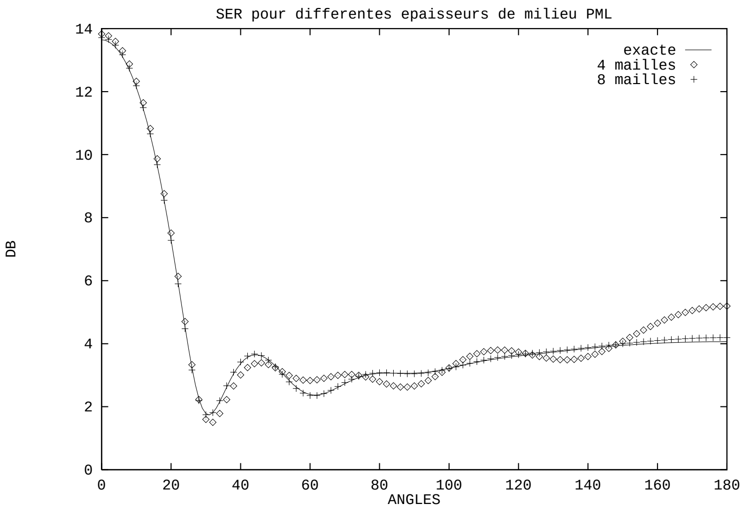

FIG. 3.7 – *SER pour une conductivité fixée*

On propose maintenant de comparer les SER obtenues lorsque la frontière Γ_∞ qui borne le domaine est soit de type métallique, soit de type absorbante. De la même façon, la frontière Γ_∞ est placée à deux longueurs d'onde du cercle éclairé par l'onde incidente définie précédemment. Le matériau PML retenu , d'amplitude maximale $\sigma_0 = 50$ et d'exposant $n = 2$, est pris d'une largeur de quatre mailles. Comme on l'a vu prédemment (fig.3.7), la SER obtenue dans ce cas là avec le bord métallique n'est pas satisfaisante. On peut ainsi remarquer sur la figure 3.8 le gain significatif obtenu sur la précision de la SER lorsque que l'on applique sur Γ_∞ non pas une condition métallique mais une condition absorbante. De plus, le nombre d'itérations requis pour obtenir la convergence est là aussi sensiblement diminué dans le cas où Γ_∞ est un bord absorbant : 276 itérations au lieu de 368 dans le cas où Γ_∞ est un bord métallique.

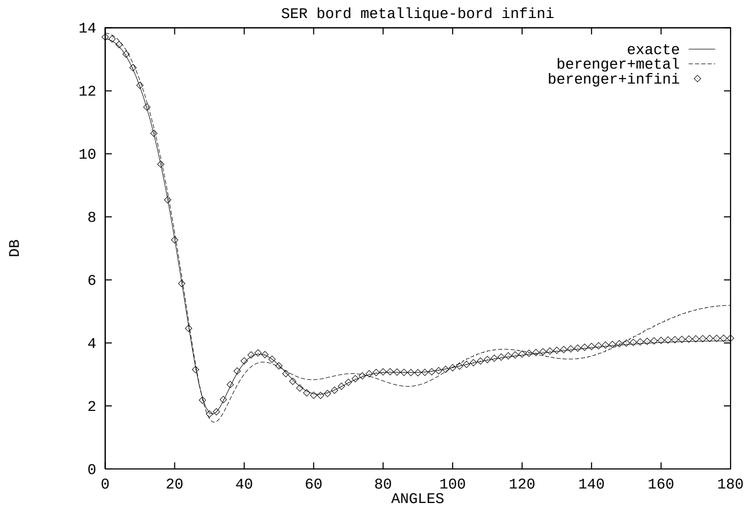

FIG. 3.8 – *SER frontière métallique - frontière absorbante*

On va maintenant chercher à comparer deux types de condition aux limites lorsque l'on rapproche la frontière Γ_∞ de l'objet diffractant. On utilise dans un premier temps uniquement le décentrage à l'infini défini au paragraphe 2.4, technique équivalente à une condition absorbante d'ordre un prise en compte faiblement [10]. Dans ce cas là, on résout les équations de Maxwell classiques dans tout le domaine et le test de convergence est calculé dans le domaine convexe Ω_{test} défini précédemment (voir paragraphe 3.3.1).
Au vue de l'étude préliminaire précédente sur les conditions de type Bérenger, on choisit de comparer cette méthode de décentrage à celle d'un matériau absorbant fictif PML borné par une condition absorbante. Le domaine convexe Ω_{test} utilisé pour le test de la convergence est semblable à celui considéré dans le cas précédent ; il correspond à la partie du domaine de calcul où seules les équations classiques de Maxwell sont calculées. Le matériau fictif PML considéré, d'amplitude maximale $\sigma_0 = 50$ et d'exposant n= 2, est pris d'une largeur variable suivant la distance séparant le cercle illuminé du bord du domaine de calcul Γ_∞. Les maillages utilisés sont emboités : le maillage de base est celui

où la frontière Γ_∞ est placée à une demie-longueur d'onde de l'objet diffractant. Afin d'obtenir une frontière Γ_∞ distante d'une longueur d'onde de l'objet illuminé, on ajoute au maillage de base le nombre de points nécessaires dans chaque direction. Enfin, de la même façon, on obtient les maillages dont la frontière Γ_∞ est placée respectivement à une longueur d'onde et demie et à deux longueurs d'onde du cercle en complétant pour chacun le maillage précédent. De ce fait, les milieux absorbants sont alors pris d'une largeur de 4, 7, 12 et 20 mailles respectivement.

La comparaison entre les deux méthodes se fera à l'aide de l'erreur relative en norme L^2 de la SER :

$$EL2 = \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{N} \mid S_{app}(\theta_k) - S_{ex}(\theta_k) \mid^2}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N} \mid S_{ex}(\theta_k) \mid^2}},$$

avec $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{N}$, S_{ex} la SER exacte et S_{app} la SER calculée avec les différentes conditions aux limites.

TAB. 3.1 – *: Erreur relative en norme L^2 de la SER*

	2λ (6600pts)	$\frac{3\lambda}{2}$ (4600pts)	λ (3000pts)	$\frac{\lambda}{2}$ (1500pts)
PML avec décentrage ($\times 10^{-3}$)	8.4	8.4	8.5	10.3
Décentrage ($\times 10^{-3}$)	8.4	23.3	30	47.5

Le tableau 3.1 montre l'évolution de cette erreur pour les deux types de condition aux limites utilisés lorsque les frontières Γ_∞ varient de deux longueurs à une longueur d'onde du cercle illuminé. Les géométries utilisées sont similaires à celle de la figure 3.5, et correspondent à environ 20 points par longueur d'onde autour de l'objet. On peut donc constater que pour une distance objet-bord du domaine de calcul de l'ordre de deux longueurs d'onde, l'erreur relative L^2 obtenue dans les deux cas est faible et du même ordre de grandeur. Néanmoins, il est intéressant de noter le très bon comportement de cette erreur lorsque l'on rapproche le bord du domaine de calcul de l'objet illuminé dans le cas de la condition de type Bérenger avec condition absorbante par rapport à la condition de type décentrage. On remarquera notamment le gain important obtenu sur la norme L^2 de l'erreur relative pour des distances inférieures à deux longueurs d'onde. En effet, dans le cas où l'on applique la condition aux limites de type Bérenger avec décentrage à l'infini, l'erreur relative $EL2$ reste du même ordre de grandeur (8.5E-3) pour les frontières Γ_∞ placées à une longueur d'onde et demie et une longueur d'onde, que pour celle placée à deux longueurs d'onde ; ceci n'est pas vérifié avec la condition de type décentrage sans matériau absorbant. Il est également intéressant de remarquer que pour une frontière placée à une demie-longueur d'onde, l'erreur relative pour la condition de Bérenger avec décentrage est acceptable. On représente sur la figure 3.9 les SER obtenues par les deux méthodes lorsque le bord du domaine de calcul est placé à une longueur d'onde du cercle illuminé. On peut noter la bonne précision de la solution obtenue avec la condition de Bérenger.

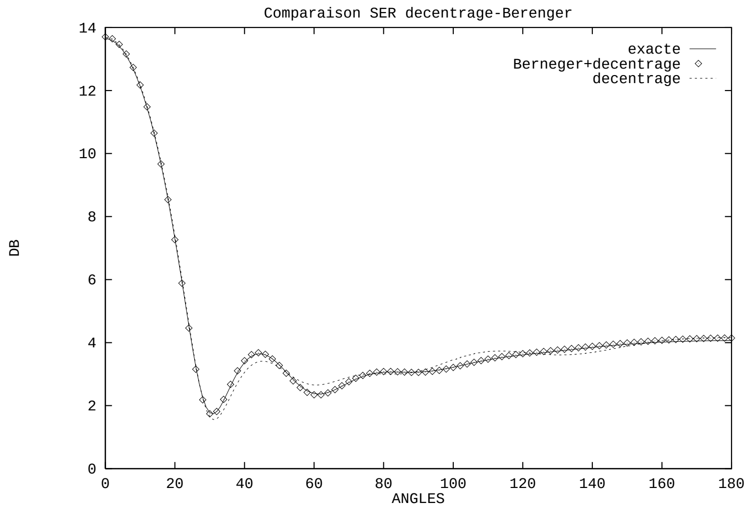

FIG. 3.9 – *Condition de type décentrage vs Bérenger pour frontière à λ*

Nous présentons maintenant des résultats et des comparaisons de performance pour les deux types de condition aux limites précédemment cités. On choisit de prendre pour ces deux conditions la même erreur relative EL^2 que l'on fixe à 8.510^{-3}. On compare alors l'efficacité des deux méthodes en terme de cout CPU et de place mémoire (voir tableau 3.2).

TAB. 3.2 – : *Performances pour une erreur EL^2 sur la SER*

	PML + décentrage	Décentrage
Erreur EL^2	$8.5\ 10^{-3}$	$8.5\ 10^{-3}$
Position de Γ_∞	λ	2λ
Temps CPU par itération	1	2.5

Il en résulte que pour une même précision de la solution, notre méthode PML avec une condition de décentrage à l'infini permet de placer la frontière fictive à une distance λ de l'objet diffractant au lieu de 2λ avec une simple condition de décentrage. De plus, malgré l'équation supplémentaire à résoudre dans le milieu PML, le gain en temps CPU est là aussi significatif (gain d'un facteur 2.5).

3.3.3 Propagation d'une impulsion

Afin d'évaluer les performances numériques de cette nouvelle condition aux limites pour un cas instationnaire, nous proposons ici d'étudier l'absorption d'un pulse qui se propage dans un milieu homogène et qui vient frapper le bord du domaine de calcul. On s'intéresse en particulier à trois types de conditions aux limites. La première consiste à utiliser un décentrage à l'infini (condition d'absorption), méthode vue précédemment pour le calcul de SER. La seconde utilise la conditon de Bérenger. Enfin, la dernière est une combinaison des deux premières. On utilise en effet le matériau PML de la condition de Bérenger mais on remplace la condition métallique par une condition absorbante pour borner le domaine de calcul. La technique employée pour comparer les différentes conditions aux limites est la suivante : on considère deux grilles de tailles différentes Ω_{ref} et Ω_{test} (voir fig.3.10).

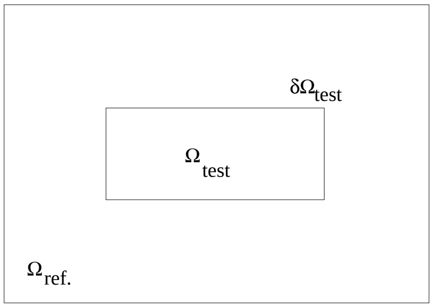

FIG. 3.10 – *Domaines tests pour les conditions aux limites*

Les réflexions parasites du calcul sur Ω_{ref} n'apparaitront pas dans $\Omega_{test} \subset \Omega_{ref}$ pour un temps $t < T^*$ car le schéma et les équations ont une vitesse de propagation finie. Le résultat de ce calcul permettra donc de mesurer l'effet des réflexions parasites sur $\partial\Omega_{test}$ quand le calcul a lieu uniquement sur Ω_{test}.
Nous allons envisager la propagation d'une impulsion de pulsation $\omega = 2\pi f$ ($f = 0.96GHz$) émise à l'instant $t = 0$ dans le vide. En mode TM, ce pulse est un signal sinusoidal tronqué de la manière suivante :

$$\begin{cases} E_z(x,y,t=0) = \cos(\omega x)\chi_{[\frac{\lambda}{4},\frac{\lambda}{2}]}(x)\chi_{[-\frac{\lambda}{4},\frac{\lambda}{4}]}(y) \\ H_x = 0 \\ H_y = -E_z \end{cases} \tag{3.19}$$

où $\chi_{[a,b]}$ est la fonction caractéristique du segment $[a,b]$. Dans tous les cas tests présentés par la suite, le pas du maillage correspond à une dizaine de points par longueur d'onde. On choisit alors un point de Ω_{test} pour lequel on regarde l'erreur $\mid E_{z\,test} - E_{z\,ref} \mid$ en fonction du temps t, $t \in [0,T^*]$.
Sur la figure 3.11, on compare la condition de décentrage à l'infini avec une condition de type Bérenger, le milieu PML étant choisi avec une conductivité optimale afin de conserver la stabilité pour un CFL égal à un. La condition de Bérenger permet d'obtenir un gain de facteur quatre pour l'erreur sur le champ E_z par rapport à l'autre condition.
Sur la figure 3.12, on utilise le milieu PML dans les deux cas mais on borne le domaine, dans un cas avec une condition métallique (réflexion totale), et dans l'autre par une

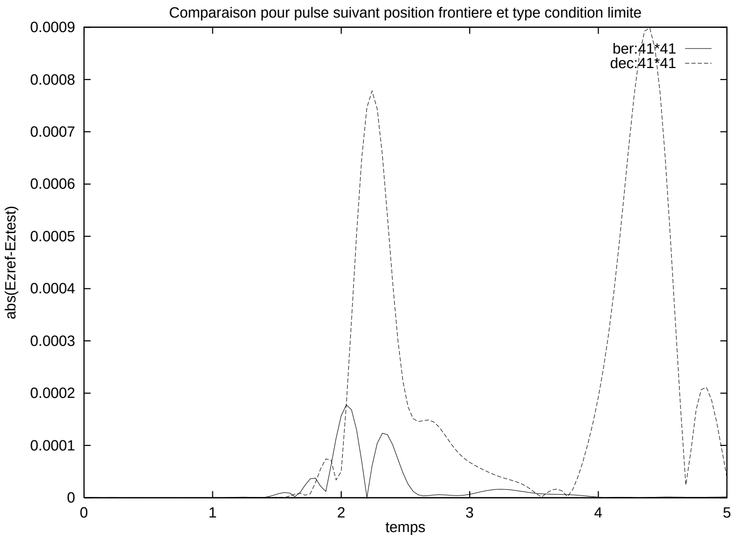

FIG. 3.11 – $\mid E_{ztest} - E_{zref} \mid$ *Décentrage VS PML + métal*

condition absorbante (décentrage à l'infini). Comme il fallait s'y attendre, cette seconde méthode apporte un gain considérable au niveau de l'erreur. En effet, on gagne en moyenne un facteur de dix par rapport au milieu PML avec condition métallique, soit un facteur de l'ordre de quarante par rapport à une simple condition absorbante.

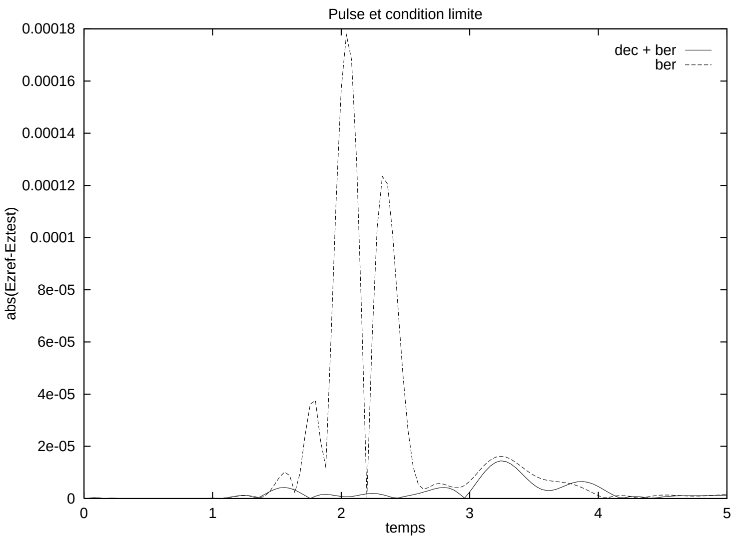

FIG. 3.12 – $\mid E_{ztest} - E_{zref} \mid$ *PML + Décentrage VS PML + métal*

3.3.4 Profil d'aile

Un profil d'aile NACA0012 supposé parfaitement métallique est éclairé par une onde plane incidente (polarisation TM) avec une incidence $\phi = -90^o$. La longueur du profil d'aile est de quatre longueurs d'onde. La fréquence de l'onde incidente est de 1.2 Ghz ; cela correspond à un ka_o de 12.57. Le nombre de points par longueur d'onde est de l'ordre de 15 dans le voisinage de l'objet. Comme précédemment dans le cas du cylindre infini, les maillages que nous avos utilisés sont emboités. La frontière fictive Γ_∞ est placée successivement à 2, $\frac{3}{2}$, 1 et $\frac{1}{2}$ longueur d'onde du profil d'aile (voir figure 3.13).

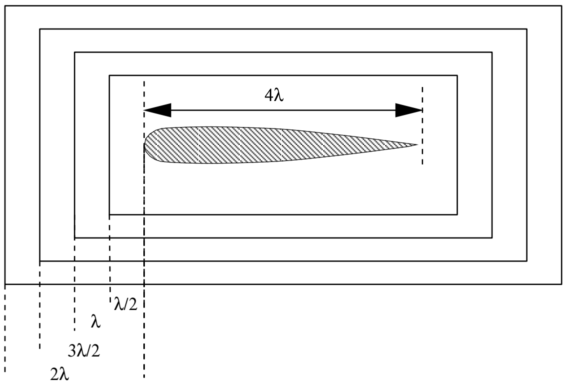

FIG. 3.13 – *Domaines de calcul pour un Naca0012*

Pour chaque domaine, nous évaluons la SER en considérant successivement chacune des deux conditions aux limites. On choisit pour le milieu PML les valeurs optimales des paramètres de la conductivité (σ_0, n, NBC) obtenues dans les études précédentes.
La solution exacte n'étant pas connue explicitement, nous proposons, afin de pouvoir comparer ces conditions, d'évaluer les normes suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{2\lambda} &= \frac{\|S_{2\lambda} - S^B_{2\lambda}\|_{L^2(\omega)}}{\frac{1}{2}\left(\|S_{2\lambda}\|_{L^2(\omega)} + \|S^B_{2\lambda}\|_{L^2(\omega)}\right)} \quad , \\
\mathrm{e}^B_d &= \frac{\|S^B_{2\lambda} - s^B_d\|_{L^2(\omega)}}{\|S^B_{2\lambda}\|_{L^2(\omega)}} \quad , \qquad (3.20) \\
\mathrm{e}_d &= \frac{\|S_{2\lambda} - s_d\|_{L^2(\omega)}}{\|S_{2\lambda}\|_{L^2(\omega)}} \quad ,
\end{aligned}$$

où d est la distance entre le profil d'aile et la frontière artificielle ; d est successivement égal à $\frac{3}{2}$, 1 and $\frac{1}{2}$ longueurs d'onde. On note s_d et s^B_d les SER obtenues respectivement avec la condition de décentrage à l'infini et avec la méthode PML, pour Γ_∞ située à d

longueur d'onde du profil. Le tableau 3.3 montre les valeurs obtenues pour pour ces erreurs en fonction de la position de Γ_∞.

TAB. 3.3 – : *Erreur relative avec une norme L^2 discrète pour la SER*

	2λ	$\frac{3\lambda}{2}$	λ	$\frac{\lambda}{2}$
$e_d^B(\times 10^{-3})$	0.36	0.99	2.5	9.
$e_d(\times 10^{-3})$	0.36	28.	28.	46.

On peut noter que pour une frontière Γ_∞ placée à deux longueurs d'onde de l'objet, les deux types de condition aux limites donnent une erreur du même ordre (3.610^{-4}). On considèrera alors ces SER calculées comme des SER de références. Si maintenant on rapproche la frontière fictive, la méthode utilisant le matériau PML avec décentrage à l'infini donne de meilleurs résultats que la simple condition absorbante. En effet, pour Γ_∞ située à 1.5λ du profil, le rapport entre $e^B_{\frac{3}{2}\lambda}$ et $e_{\frac{3}{2}\lambda}$ est de l'ordre de 28. Ce rapport a tendance à dimininuer lorsque l'on rapproche la frontière infinie du profil d'aile. Néanmoins, il est de l'ordre de 10 pour $d = \lambda$ et pour une valeur de e^B_λ inférieure à 10%.
Comme dans le cas du cylindre métallique infini, la technique matériau fictif PML associée à un décentrage à l'infini permet de réduire de façon significative le domaine de calcul.

3.4 Application à un problème de diffraction sur un cylindre

Nous nous intéressons maintenant à la diffraction d'une onde électromagnétique sur une cavité cylindrique circulaire semi-fermée, supposée parfaitement conductrice. Ce cas test est un de ceux présentés lors du Workshop d'Oxford en 1995 [34]. Les solutions analytiques n'étant pas explicites dans ce cas là, nous pourrons ainsi nous comparer à d'autres résultats numériques. L'interet de ce cas présent est double. Il va nous permettre, dans un premier temps, de tester le schéma d'ordre 3 modifié et de le comparer aux autres schémas proposés dans [34]. De plus, nous allons pouvoir valider la méthode des couches absorbantes PML en trois dimensions d'espace.

3.4.1 Présentation du problème

La cavité cylindrique

La géométrie considérée ici est celle d'un cylindre creux et droit, de hauteur a, d'axe de révolution Oy, de rayon externe $0.3a$ et de rayon interne $0.25a$ (épaisseur radiale de $0.05a$). Le haut de ce cylindre est de plus fermé par un cylindre plein de hauteur $0.05a$ et de rayon $0.3a$. On présente sur la figure 3.4.1 la géométrie du présent cylindre (le maillage montré sur cette figure n'est là qu'à titre indicatif).

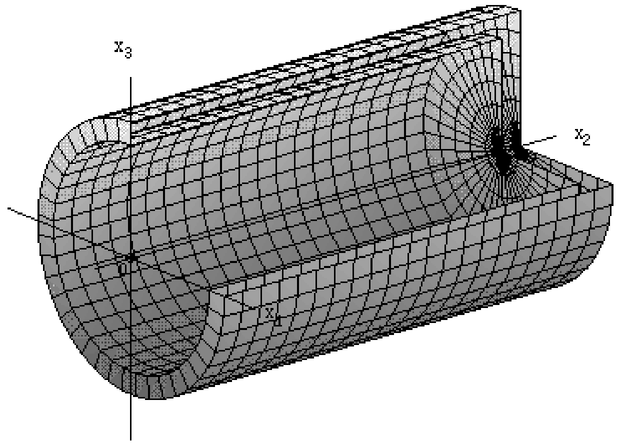

FIG. 3.14 – *Cavité cylindrique 3-D*

La simulation numérique qui nous occupe ici est la diffraction sur le cylindre métallique d'une onde incidente qui se propage le long de l'axe de révolution Oy. Afin de pouvoir étudier ce problème de diffraction, nous devons placer devant la cavité un cube d'arête a, ceci dans le but de simuler le vide (voir la figure 3.4.1). Le maillage que nous considérons est formé de tétraèdres et correspond à une dizaine de points par longueur d'onde (33 000 noeuds). Le cube précédemment cité permet de placer la frontière artificielle absorbante à deux longueurs d'onde du cylindre.

Remarque 3.4.1 *Le maillage de la cavité cylindrique a été aimablement fourni par*

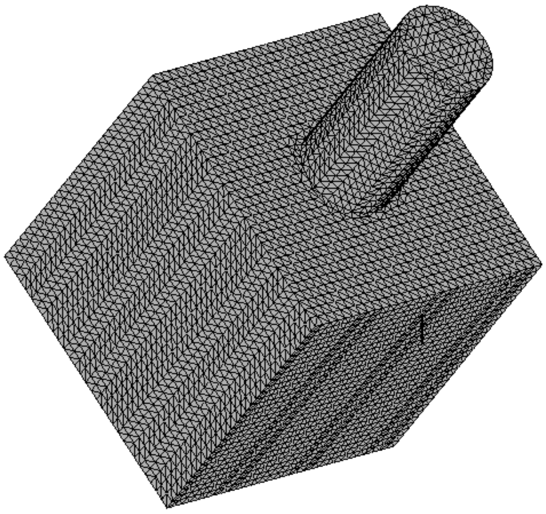

FIG. 3.15 – *Maillage de la cavité*

DASSAULT-AVIATION.

L'onde incidente

L'étude numérique que l'on propose consiste en la recherche de solutions instationnaires relatives au front d'onde incident donné par une impulsion définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} (\theta,\phi) = (270,0)^o, \lambda = \dfrac{a}{2}, \\ \vec{E}^{inc}(\vec{x},t) = \left\{\begin{array}{ll} \cos^2(\omega t - \vec{k}.(\vec{x}-\vec{X}_0)) & \forall z \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \\ 0 & \text{sinon}, \end{array}\right. \\ \vec{E}^{inc}(.,t) = {}^t(0,0,E_z^{inc}(.,t)) \forall t, \\ \vec{E}^{inc}(\vec{X}_0,t) \mid_{t=0} = {}^t(0,0,E_z^{inc}(\vec{X}_0,t)) \mid_{t=0} = {}^t(0,0,1). \end{array}\right.$$

où $a = 1m$.

Le point $\vec{X}_0$ est l'origine des phases définie par $(\frac{3}{4}a\cos\theta,\frac{3}{4}a\sin\theta,0)$. Les angles (θ,ϕ) sont ici relatifs aux coordonnées sphériques. On représente sur la figure 3.16 la géométrie considérée.

3.4.2 Étude comparative des schémas

On cherche à étudier le comportement des solutions à l'origine du repère $O = (0,0,0)$ (cf. fig. 3.16). Nous présentons ici les résultats obtenus avec la méthode de volumes finis pour différentes valeurs du paramètre β (on supposera dans un premier temps que l'on a $\gamma = 1$). Ces résultats ont été présentés au workshop d'Oxford [34].

On affecte donc deux valeurs au paramètre β : $\frac{1}{3}$ et 0,02. La première valeur permet

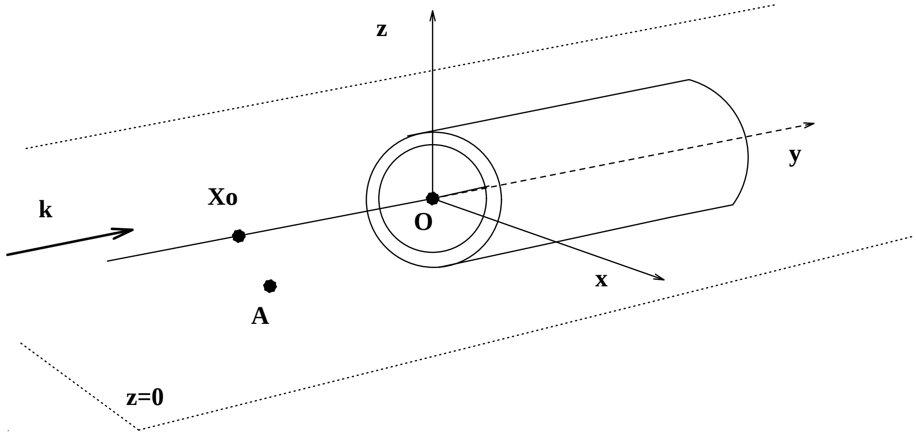

FIG. 3.16 – *Points d'observation.*

d'obtenir le schéma d'ordre 3 classique. Néanmoins nous verrons au chapitre 4 que ce schéma est diffusif. La seconde valeur de β a donc été choisie dans le but de transformer le schéma en un schéma de type centré avec un petit taux de diffusion afin d'assurer la stabilité. Nous présentons sur la figure 3.17 le comportement de la composante E_z du champ électromagnétique au cours du temps au point O pour les deux valeurs du paramètre β.

On observe une série de pics correspondant aux passages des ondes incidentes et diffractées. Plus précisément, une analyse au point O peut être menée afin d'expliquer les différences obtenues entre les deux schémas. Le premier pic correspond au passage de l'onde incidente, au temps $t = 625$. Les deux courbes sont alors assez proches. Le deuxième pic correspond au retour de l'onde diffractée au coin du cylindre (naturellement de signe opposé). Il commence à apparaitre une certaine diffusion numérique pour le schéma avec $\beta = \frac{1}{3}$. Ce caractère diffusif se retrouve de façon plus ou moins marquée sur tous les autres pics. Les ondes diffractées se croisent alors que l'onde incidente continue dans la cavité. L'onde diffractée se diffracte une nouvelle fois sur la paroi ($375+500 = 875$) : c'est le quatrième pic. Le septième pic correspond à la diffraction du fond de la cavité. Au delà du huitième pic on observe les résonances de la cavité qui s'amortissent au cours du temps. On note clairement le déphasage qui apparait pour le schéma quasi-centré ($\beta = 0.02$).
On constate donc que les deux schémas donnent des résultats proches. On a pu cependant noter quelques différences. Pour synthétiser on peut dire que le schéma avec $\beta = \frac{1}{3}$ donne la meilleure phase mais à tendance à diffuser tandis que le schéma avec $\beta = 0.02$ semble moins diffuser mais perturbe la phase.
Nous proposons maintenant d'appliquer sur ce cas test le β-γ schéma établi et analysé au chapitre 4. Ce schéma d'ordre 3 modifié est tel que $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 0.1$. On compare sur

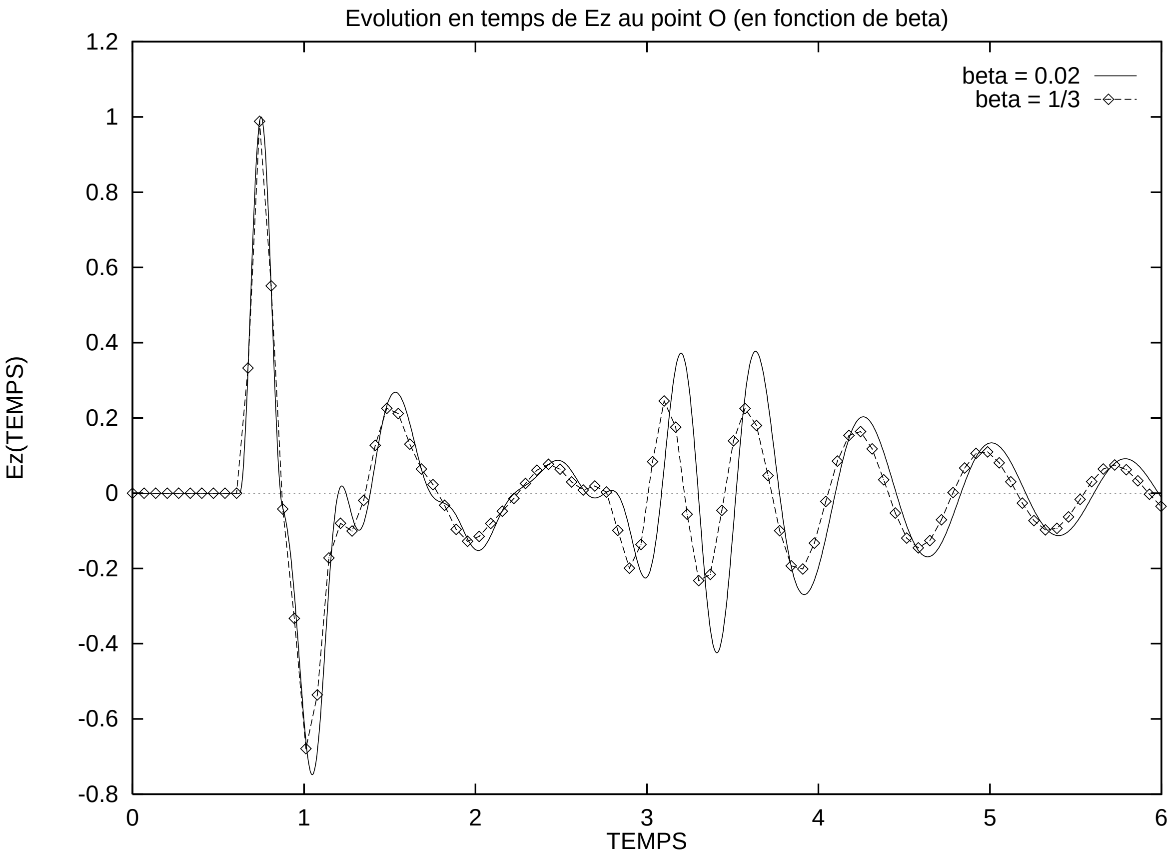

FIG. 3.17 – *Ez(temps) en fonction de β.*

la figure 3.18 la composante E_z au point O en fonction du temps obtenue respectivement avec les schémas d'ordre trois et d'ordre trois modifié ($\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 0.1$).

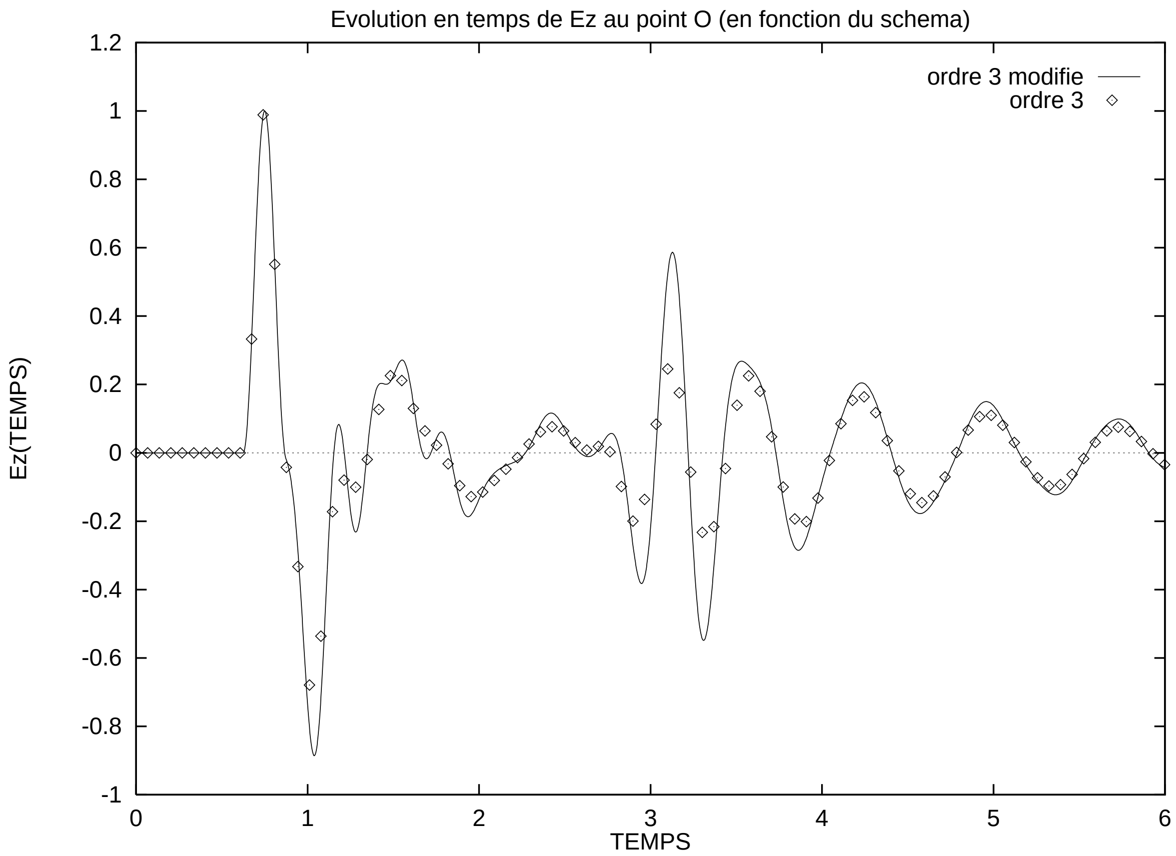

FIG. 3.18 – *Ez(temps) en fonction du schéma.*

On constate que les phases sont identiques. Le gain apporté par le schéma d'ordre 3 modifié concerne la diffusion. En particulier, le second pic correspondant à la diffraction directe est bien mieux représentée. De même, les pics correspondant à la résonance (à partir du huitième pic) sont moins diffusés.

On propose ensuite de comparer le schéma d'ordre 3 modifié avec le schéma quasi-centré ($\beta = 0.02$ et $\gamma = 1$). La figure 3.19 montre l'évolution en temps de E_z au point O.

On constate que les amplitudes des pics sont du même ordre de grandeur. Le gain obtenu avec le schéma d'ordre 3 modifié est au niveau du déphasage ; les phases sont mieux captées.

Par conséquent, il apparait clairement que le schéma d'ordre 3 modifié est le plus précis. Il permet de corriger le déphasage provenant du schéma quasi-centré et évite la diffusion numérique du schéma décentré d'ordre 3.

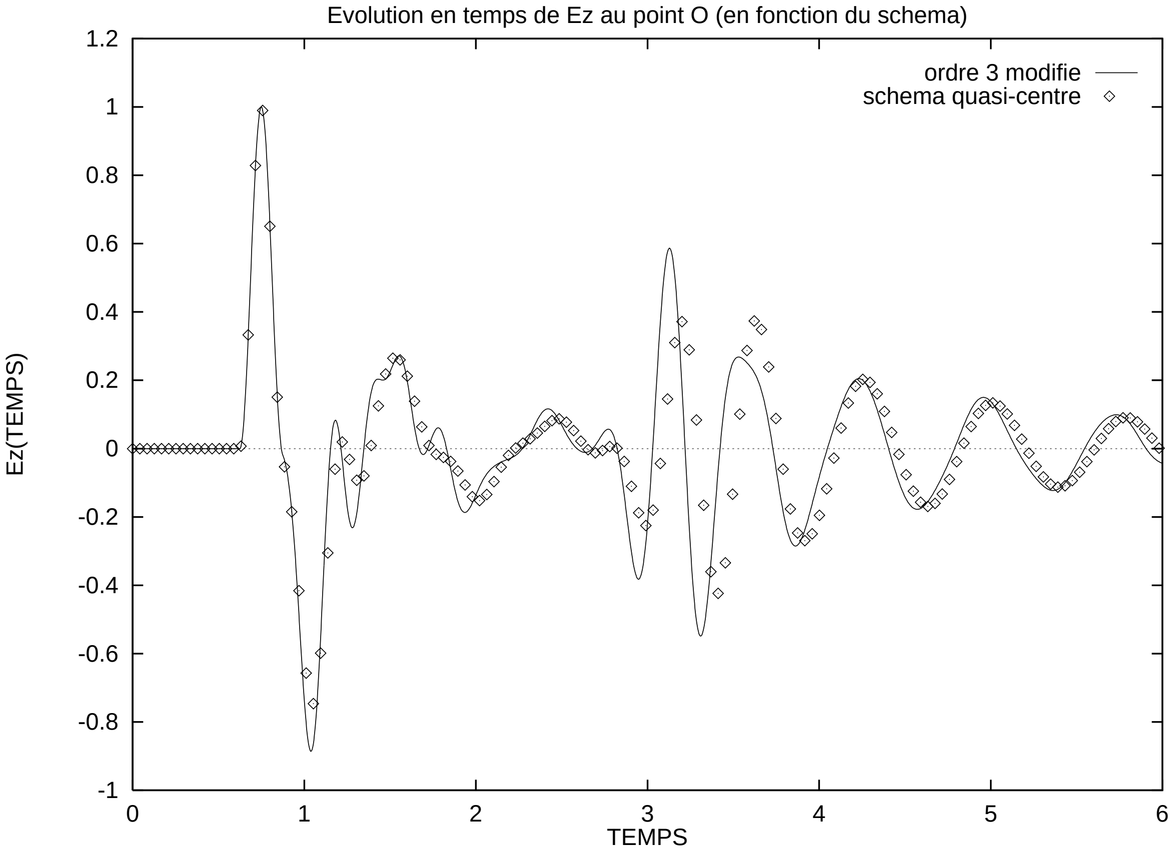

FIG. 3.19 – *Ez(temps) en fonction du schéma.*

3.4.3 Utilisation du matériau PML

Définition du milieu PML

Nous cherchons maintenant à valider la méthode PML pour l'absorption des ondes sortantes. Pour ce faire nous devons, dans un premier temps, définir et construire les couches absorbantes déterminant le milieu PML. Numériquement, ces couches doivent être repérées. Ce marquage d'une partie du domaine de calcul est effectué à l'aide d'un découpage de type "pelures d'oignons". Cet algorithme permet le découpage de n'importe quel type de maillage (structuré ou non structuré) en au moins deux maillages concentriques. Plus précisément, il permet d'enlever N couches successives d'éléments à partir d'une frontière établie. Ces N couches sont au fur et à mesure coloriées ce qui les rend facilement repérables par rapport au reste du domaine de calcul. Dans le cas de matériau PML, on peut ainsi marquer, depuis Γ_∞ le bord du domaine de calcul, les N "pelures" ou couches qui constitueront le milieu PML.
Du fait de la géométrie du problème posé, cinq des six faces du cube sont considérées comme infinies (voir fig.3.4.1). La sixième face (celle où le cylindre est raccordé) est constituée de faces sur lesquelles on imopse la condition métallique (partie rattachée au cylindre) et des faces avec une condition absorbante. Nous présentons sur la figure 3.4.3 les couches caractérisant le milieu PML situées devant la frontière artificielle Γ_∞ obtenu dans notre cas.

Cet algorithme a l'avantage de pouvoir contrôler le nombre de couches concentriques à enlever, c'est à dire pouvoir garder un contrôle total sur l'emplacement délimitant deux domaines (couches marquées et ce qui reste du domaine de calcul). En particulier, de tels algorithmes n'est pas inclus dans les logiciels de maillage ou de découpage à notre disposition.

La géométrie des couches absorbantes étant établie, il nous reste à définir les lois des conductivités utilisés dans ce milieu PML. Pour celà, on renvoie le lecteur au paragraphe 3.1.2 où ces lois ont été spécifiées. Néanmoins on précise ici que l'on fixe le nombre de couches absorbantes à 5, que l'amplitude σ_0 de (3.5) est fixée à 200 et enfin, que la puissance est prise égale à 2. Les valeurs de ces paramètres sont empiriques et nous ont semblées être les valeurs optimales quant à la qualité des solutions obtenues.

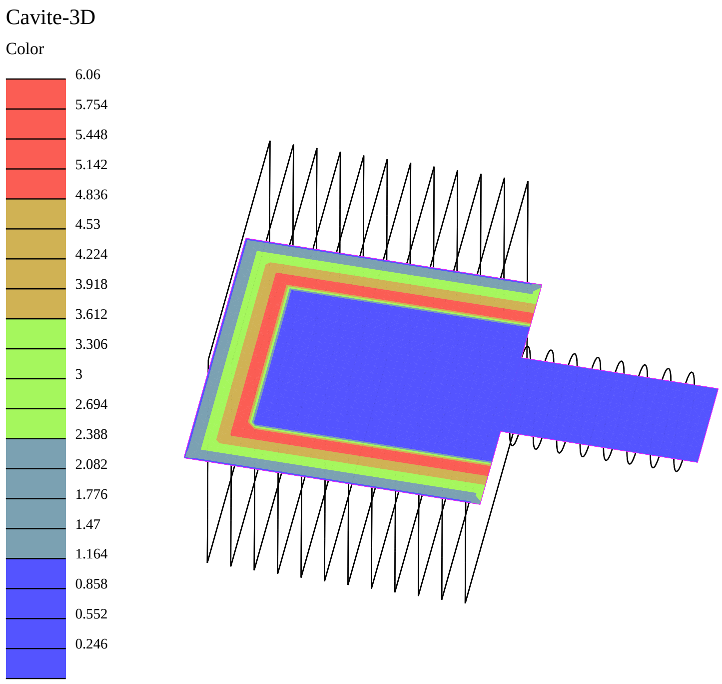

FIG. 3.20 – *Définition des couches PML (Coupe z=0)*

Résultats avec PML

Afin de pouvoir visualiser l'effet absorbant du milieu PML, on propose, dans un premier temps, de présenter les isovaleurs du champ E_z dans le plan $z = 0$ au temps $t = 6m$.
On montre sur la figure 3.4.3 les isovaleurs de E_z obtenues avec le schéma classique avec une simple condition de décentrage à l'infini.

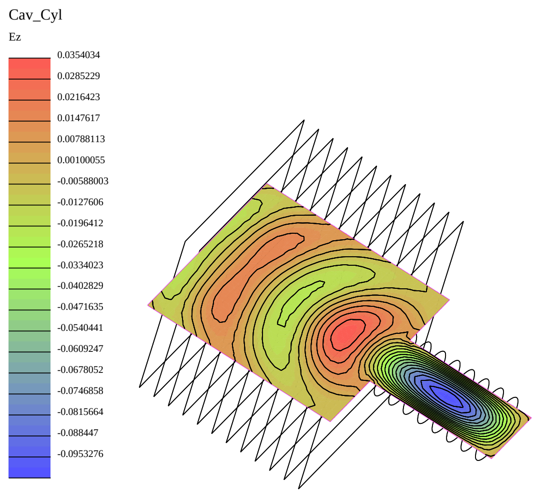

FIG. 3.21 – *Isovaleurs de E_z à t=6 : schéma classique*

Les isovaleurs de E_z obtenues avec le matériau PML sont présentées sur la figure 3.4.3. On distingue nettement l'effet absorbant du milieu fictif.

Finalement, on présente comme précédemment, l'évolution en temps de la composante E_z du champ électromagnétique au point O. Les solutions présentées sur la figure 3.23 sont celles obtenues avec le schéma classique en utilisant ou non le milieu PML.

On note sur la figure 3.23 la parfaite correspondance des deux courbes.

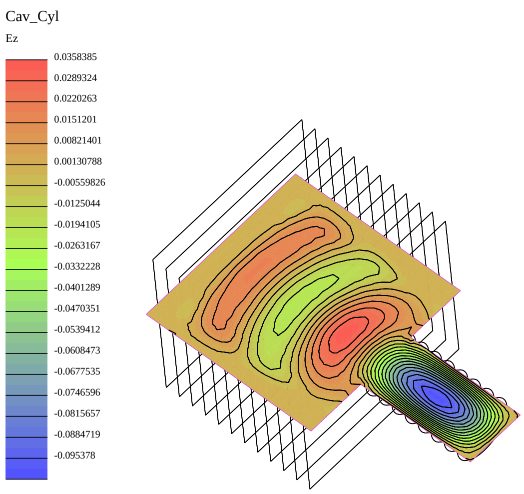

FIG. 3.22 – *Isovaleurs de* E_z *à t=6 : PML*

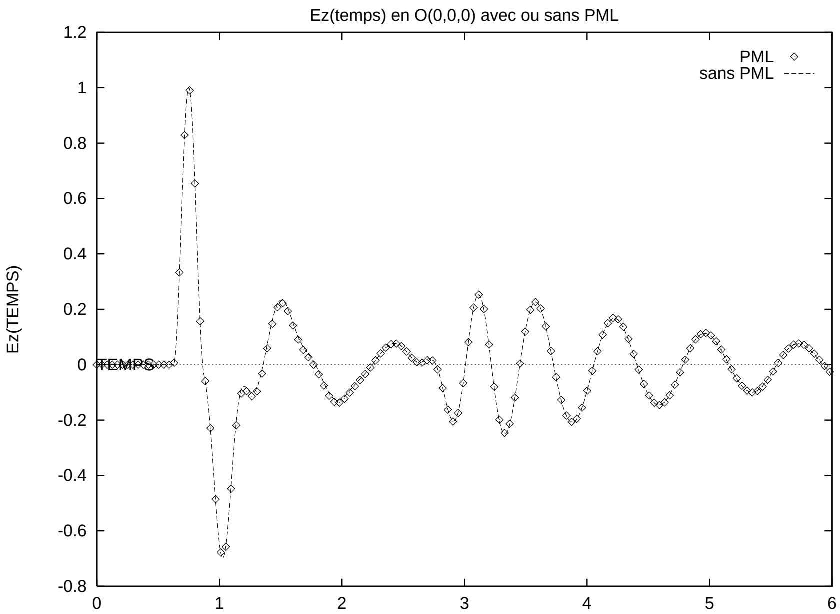

FIG. 3.23 – E_z*(temps) avec ou sans PML.*

Conclusion

Nous avons adapté la condition aux limites de type Bérenger à un schéma temporel de type volumes finis en maillage non structuré. Nous avons présenté une méthode basée sur la résolution d'un problème de Riemann permettant de calculer les flux numériques dans le domaine absorbant bien que le système écrit dans ces variables ne soit pas hyperbolique. Dans les résultats numériques étudiés, onde harmonique ou propagation de pulse, la condition de type Bérenger conduit à une bien meilleure absorption des ondes sortantes (réflexions parasites sensiblement diminuées) que la condition aux limites infini basée sur le décentrage. Ainsi, dans le calcul de SER, en deux dimensions d'espace, cette nouvelle approche permet de ramener la frontière de deux longueurs d'onde (dans le cas de l'ancienne condition infinie) à une longueur d'onde de l'objet illuminé, ce qui entraine un gain non négligeable en place mémoire et en temps de calcul.

Chapitre 4

Étude des β-γ schémas

Ce chapitre est une version plus étendue du rapport INRIA (N^o 3288) réalisé avec Mihai Bostan et Loula Fézoui* et intitulé “Étude d'une classe de β-γ schémas en formulation volumes finis pour des problèmes hyperboliques.“

* CERMICS-INRIA, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex

Introduction

Dans la perspective de construire des schémas numériques précis en temps et en espace pour la résolution de systèmes hyperboliques en plusieurs dimensions (telles que les équations de Maxwell), on propose ici l'étude d'un schéma numérique opérant sur des maillages plans, triangulaires ou rectangulaires. La discrétisation spatiale repose sur la méthode des volumes finis. L'intégration en temps sera prise en compte via un schéma explicite multi-pas (Runge-Kutta). De tels schémas ont été étudiés notamment dans [14, 15] pour l'équation d'advection linéaire en deux dimensions d'espace. Bien que les schémas qui ressortent de ces études soient d'ordre élevé (ordre 3 ou 4), ils présentent un certain nombre d'inconvénients. En effet, le schéma d'ordre trois, obtenu à l'aide d'une approximation de type MUSCL et d'un β schéma [21] (avec $\beta = \frac{1}{3}$) pour la discrétisation spatiale et d'une méthode de Runge-Kutta à 3 pas pour l'intégration temporelle, présente une diffusion résiduelle qui est jugée encore trop importante pour les applications considérées. En particulier, ce caractère diffusif du schéma entraine une détérioration des solutions sur de longs temps de calcul (quelques dizaines de périodes). Une alternative à ce schéma est l'utilisation d'un schéma d'ordre 4 basé sur le même type d'approximation (MUSCL) mais où l'ordre de diffusion résiduel a été atténué. Cependant, le schéma ainsi construit est un schéma centré. Il est connu que de tels schémas sont susceptibles d'engendrer des oscillations parasites sur la solution. L'utilisation des techniques dites de limiteurs permet de réduire ces oscillations [35]. Cependant, ces méthodes réintroduisent de la diffusion numérique difficile à analyser et à contrôler. De plus, ce schéma nécessite l'utilisation d'un schéma explicite de Runge-Kutta à 4 pas qui se révèle trop coûteux en temps de calcul.
Nous proposons donc dans ce rapport un schéma intermédiaire entre le schéma d'ordre trois jugé trop diffusif pour nos applications et le schéma d'ordre quatre centré et coûteux. Ce nouveau schéma sera appelé *nouveau schéma d'ordre trois*.
Dans un premier temps on propose ce schéma dans le cadre de l'équation d'advection linéaire bidimensionnelle pour des maillages rectangulaires et triangulaires. Pour chacun des schémas obtenus on proposera une étude de l'équation équivalente associée ainsi qu'une étude détaillée de la stabilité du schéma considéré. Après quelques illustrations numériques sur l'équation d'advection 2D, nous dégageons les valeurs optimales des paramètres β et γ. Enfin, on présentera une application de ces schémas à la résolution des équations de Maxwell en trois dimensions. Les résultats obtenus avec le nouveau schéma d'ordre 3 en maillage tétraédrique ou cubique sont comparés en terme de précision avec ceux obtenus avec le schéma d'ordre 3 classique.

4.1 Étude d'un cas modèle

Nous proposons ici d'étudier l'équation d'advection linéaire en deux dimensions d'espace. La discrétisation spatiale reposera sur deux types de maillage : triangles et rectangles. On explicitera alors dans chacun des cas considérés le schéma numérique auquel on aboutit. Pour chacun de ces schémas on présentera l'équation équivalente que l'on obtient ainsi qu'une étude de la stabilité.

4.1.1 Discrétisation

On considère l'équation d'advection linéaire bidimensionnelle :

$$\left\{\begin{array}{ll} U_t + c_1\, U_x + c_2\, U_y = 0 & \text{pour} \quad (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0;\infty[\\ \\ U(x,y,t=0) = U_0(x,y) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \end{array}\right. \tag{4.1}$$

La solution initiale $U_0(x,y)$ est supposée périodique, de période 1 en x et en y, ce qui permet de restreindre le domaine d'étude à $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On notera θ l'angle d'advection. On a :

$$c_1 = c\cos\theta, \;\; c_2 = c\sin\theta \;\; \text{avec} \;\; c > 0.$$

Décrivons brièvement la méthode de volumes finis utilisée indépendamment du type de maillage (triangulaire ou rectangulaire) considéré. Autour de chaque noeud I du maillage, on construit une cellule, notée C_I, en joignant le milieu des arêtes issues de I au centre de gravité des éléments considérés (voir figures 4.1).

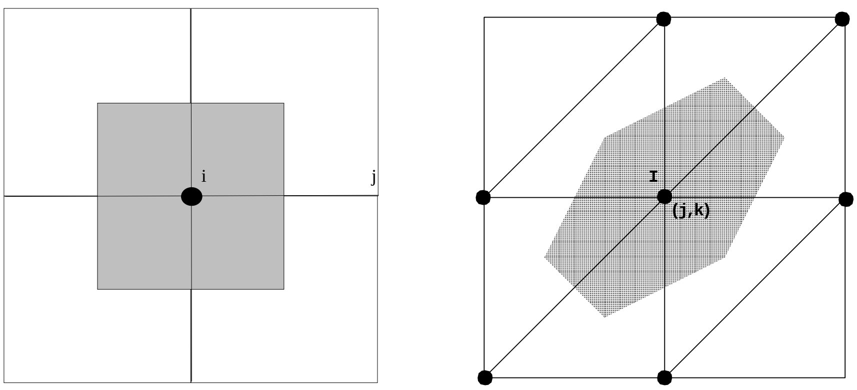

FIG. 4.1 – *Cellules C_I*

Les méthodes de volumes finis sont basées sur l'intégration de (4.1) sur chaque cellule C_I. On note $(U_I)_t$ la valeur moyenne de U_t sur C_I. On obtient ainsi, en utilisant la formule de Green :

$$aire(C_I)(U_I)_t + \int_{\partial C_I} (c_1 U n_x + c_2 U n_y) d\sigma = 0$$

où $\vec{n} = (n_x, n_y)$ est la normale unitaire extérieure sur ∂C_I.
On a :

$$\int_{\partial C_I} (c_1 U n_x + c_2 U n_y) d\sigma = \sum_{J \in K(I)} \int_{\partial C_{IJ}} (c_1 U n_x + c_2 U n_y) d\sigma \tag{4.2}$$

où $K(I)$ est l'ensemble des noeuds voisins de I et $\partial C_{IJ} = \partial C_I \cap \partial C_J$.
Le terme de flux (4.2) est approché par un flux numérique Φ_{IJ} à l'aide de l'approximation suivante :

$$\Phi_{IJ} = (c_1 \nu_{IJ}^x + c_2 \nu_{IJ}^y) \frac{U_I + U_J}{2} - \gamma \mid c_1 \nu_{IJ}^x + c_2 \nu_{IJ}^y \mid \frac{U_J - U_I}{2} \tag{4.3}$$

avec $\vec{\nu}_{IJ} = \displaystyle\int_{\partial C_{IJ}} \vec{n} d\sigma$ et $\gamma \in [0{,}1]$. Le paramètre γ est introduit afin de pouvoir contrôler la diffusion numérique.
On obtient alors l'expression du flux spatial total Φ_I pour chaque cellule C_I :

$$\Phi_I = \sum_{J \in K(I)} \Phi_{IJ}.$$

L'extension du schéma aux ordres supérieurs s'effectue en conservant la même fonction de flux numérique Φ_{IJ} mais en modifiant les arguments de cette fonction. En effet, on considère maintenant :

$$\Phi_{IJ} = \Phi(U_{IJ}, U_{JI}, \vec{\nu}_{IJ})$$

où U_{IJ} et U_{JI} sont les états interpolés à l'interface $\partial C_I \cap \partial C_J$. Ces valeurs seront évaluées à l'aide d'une formulation dite β-schéma [21] :

$$U_{IJ} = U_I + \frac{1}{2}[(1 - 2\beta)(U_J - U_I) + 2\beta \vec{\nabla} U_I . \vec{IJ}]$$

où β est un paramètre appartenant à $[0{,}1]$ et $\vec{\nabla} U_I$ désigne une approximation centrée du gradient de U dans C_I. On choisit de calculer les gradients de la façon suivante :

$$\vec{\nabla} U_I = \frac{1}{aire(C_I)} \sum_{J \in K(I)} \frac{U_I + U_J}{2} \vec{\nu}_{IJ}.$$

Définition 4.1.1 *: On appelle β-γ schéma, le schéma numérique ainsi construit.*

Remarque 4.1.1 *: Pour la résolution en temps, on utilise un schéma explicite de Runge-Kutta à trois pas (voir Annexe C).*

On va maintenant préciser nos schémas suivant le type de maillage considéré.

Maillage en rectangles

On considère donc un maillage régulier de pas d'espace Δx et Δy (voir figure 4.1). Le β-γ schéma que l'on obtient dans ce cas là est un schéma numérique à 9 points (voir Annexe D).

Maillage en triangles

Nous pouvons également établir un schéma numérique basé sur un maillage en triangles structuré ou non structuré. Cependant pour pouvoir utiliser la méthode des équations équivalentes nous allons étudier ici le cas d'une triangulation structurée et régulière obtenue à partir d'un maillage rectangulaire en divisant chaque maille en deux triangles. On aboutit ainsi à un β-γ schéma à 19 points (voir Annexe E).

Maillage en 1-D

Dans le cas 1-D, l'expression du flux discrétisé Φ_I du β-γ schéma est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi_I = \; & \frac{1}{4}\{\beta[c+\gamma|c|]U_{i-2} - [2c(\beta+1)+4\beta\gamma|c|]U_{i-1} \\ & +6\beta\gamma|c|U_i + [2c(\beta+1)-4\beta\gamma|c|]U_{i+1} - \beta[c-\gamma|c|]U_{i+2}\}\end{aligned} \tag{4.4}$$

Remarque 4.1.2 *: Les schémas numériques proposés peuvent s'écrire de la façon suivante :*

$$\frac{dU_I}{dt} = -\Psi_I,$$

avec $\Psi_I = \dfrac{1}{\mathrm{Aire\ C_i}}\Phi_I.$

4.1.2 Équations Équivalentes

Les équations équivalentes, introduites par Warming and Hyett [36], permettent une analyse détaillée et précise des termes d'erreur de troncature, notamment des erreurs de dispersion et de dissipation. Elles donnent également des critères de stabilité des schémas.

Pour obtenir ces équations, nous allons appliquer la méthode décrite dans [37, 38]. Cette technique de calcul permet de simplifier considérablement les calculs dans le cas linéaire. En effet, cette méthode reste la même quelque soit le schéma considéré, et en particulier les schémas à plusieurs niveaux comme ceux de Runge-Kutta sont traités sans difficulté. On se propose de rappeler brièvement cette méthode dans le cadre de notre étude sur l'équation linéaire d'advection 2-D afin de déterminer la précision des schémas précédemment établis. On renvoie le lecteur intéressé par cette méthode à [37, 14].
Dans la recherche des équations équivalentes, nous ne nous intéressons qu'à un ordre infinitésimal tant spatial que temporel. On note Δ cet ordre, et on le définit à partir des pas d'espace comme suit :

$$\Delta = min(\Delta x, \Delta y).$$

Le pas de temps Δt sera lui aussi mis en relation avec Δ par le biais d'une relation de stabilité du schéma.
Considérons l'équation linéaire d'advection en deux dimensions d'espace:

$$U_t = -c_1 \partial_x U - c_2 \partial_y U.$$

On suppose que cette équation est approchée sur un maillage uniforme (triangles ou rectangles) par le β-γ schéma précédemment introduit. On peut alors écrire le schéma au noeud $(j\Delta x, l\Delta y)$ sous la forme condensée suivante:

$$(U_{jl})_t = \sum_{k,m} A_{k,m}(\Delta x, \Delta y) U^n_{j+k,l+m},$$

où $U^n_{j+k,l+m}$ est l'approximation de $U((j+k)\Delta x, (l+m)\Delta y, n\Delta t)$. La somme du membre de droite est par conséquent finie et l'approximation du terme temporel $(U_{jl})_t$ reste à définir. On renvoie le lecteur aux annexes B et C pour les expressions des coefficients $A_{k,m}$ suivant le maillage considéré.
On introduit alors la fonction :

$$g_\Delta(X,Y) = g_{\Delta x, \Delta y}(X,Y) = \sum_{k,m} A_{k,m}(\Delta x, \Delta y) e^{k\Delta x X} e^{m \Delta y Y} \qquad (4.5)$$

On montre dans [37] que l'équation équivalente pour ce schéma, avec une intégration temporelle multipas de Runge-Kutta (RKN), s'écrit sous la forme suivante :

$$U_t = \sum_{k,m \geq 0} \alpha_{k,m}(\Delta t, \Delta x, \Delta y) \frac{\partial^{k+m} U}{\partial x^k \partial y^m},$$

où $\sum_{k,m\geq 0} \alpha_{k,m}(\Delta t,\Delta x,\Delta y) X^k Y^m$ est le développement en série entière de la fonction :

$$\mathcal{F}(X,Y) = \frac{\log\left(1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{[\Delta t \; g_\Delta(X,Y)]^p}{p!}\right)}{\Delta t},$$

avec $g_\Delta(X,Y)$ définie par (4.5).
De plus, pour un schéma spatial donné, en supposant le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ constant, on développe la fonction $g_\Delta(X,Y)$ sous la forme :

$$g_\Delta(X,Y) = g_0(X,Y) + \sum_{q\geq 1} \Delta^q \; g_q(X,Y),$$

où les $g_q(X,Y)$ sont des polynômes à deux variables.
On s'intéresse plus particulièrement ici à l'intégration temporelle de Runge-Kutta à trois pas. On obtient alors pour ce schéma :

$$\mathcal{F}_{(N=3)} = g_0 + \Delta g_1 + \Delta^2 g_2 + \Delta^3 g_3 - \frac{\Delta t^3}{24} g_0^4 + O(\Delta t,\Delta)^4. \tag{4.6}$$

Nous allons maintenant détailler les expressions des fonctions g_i pour $i = 0,4$, qui dépendent du schéma considéré. On présente également les équations équivalentes obtenues pour les β-γ schémas 2-D (rectangles et triangles), ainsi que pour le cas monodimensionnel.

Hypothèse de calcul :

Pour l'étude des équations équivalentes, on va supposer, afin de simplifier les calculs, que $c_1 = c_2$ et que $\Delta x = \Delta y = h$.

On suppose que U est suffisamment régulière. A partir de l'équation aux différences calquée sur le flux discrétisé, on applique à U des développements de Taylor jusqu'à l'ordre 4, au point (x,y,t).

- β-γ schéma pour maillage rectangulaire :

Le développement de Taylor de la variable U que l'on injecte dans le flux numérique nous donne :

$$\begin{aligned} g_\Delta(X,Y) &= -c_1(X+Y) - \frac{c_1}{6}(1-3\beta)\Delta^2(X^3+Y^3) \\ &- \frac{\beta\gamma}{4}|c_1|\Delta^3(X^4+Y^4) + O(\Delta^4) \end{aligned}$$

On considère alors (4.6) avec l'expression g_Δ ci-dessus ; on revient ensuite à l'équation différentielle et l'on obtient ainsi l'équation équivalente :

$$\begin{aligned} U_t + c_1\,(U_x+U_y) = &-\tfrac{c_1}{6}\,(1-3\beta)\,h^2\,(U_{3x}+U_{3y}) \\ &-(\tfrac{\Delta t^3}{24}c_1^4 + \tfrac{\beta\gamma}{4}|c_1|h^3)(U_{4x}+U_{4y}) \\ &-\tfrac{\Delta t^3}{24}c_1^4(4U_{3xy}+6U_{2x2y}+4U_{x3y}) + O(\Delta t,h)^4 \end{aligned}$$

- β-γ schéma pour maillage triangulaire :

De façon similaire, on obtient :

$$\begin{aligned} g_\Delta(X,Y) &= -c_1(X+Y) - \frac{c_1}{6}(1-3\beta)\Delta^2(X^3+Y^3+2X^2Y+2XY^2) \\ &- \frac{\beta\gamma}{4}|c_1|\Delta^3(X^4+Y^4) \\ &- \frac{11}{18}\beta\gamma|c_1|\Delta^3(X^3Y+Y^3X) \\ &- \frac{8}{9}\beta\gamma|c_1|\Delta^3X^2Y^2 + O(\Delta^4) \end{aligned}$$

Finalement, l'équation équivalente s'écrit :

$$\begin{aligned} U_t + c_1\,(U_x+U_y) = &-\tfrac{c_1}{6}\,(1-3\beta)\,h^2\,(U_{3x}+U_{3y}+2U_{xxy}+2U_{xyy}) \\ &-(\tfrac{\Delta t^3}{24}c_1^4 + \tfrac{\beta\gamma}{4}|c_1|h^3)(U_{4x}+U_{4y}) \\ &-(\tfrac{\Delta t^3}{6}c_1^4 + \tfrac{11\beta}{18}\gamma|c_1|h^3)(U_{3xy}+U_{x3y}) \\ &-(\tfrac{\Delta t^3}{4}c_1^4 + \tfrac{8\beta}{9}\gamma|c_1|h^3)U_{2x2y} + O(\Delta t,h)^4 \end{aligned}$$

Seuls les termes d'erreur “non croisés” (portant sur les directions x ou y) sont identiques pour les deux formulations. Naturellement, l'utilisation du schéma temporel explicite RK3 introduit des termes d'erreur d'ordre 3 en temps. Il est cependant intéressant de remarquer que les erreurs en temps et en espace sont parfaitement découplées. De plus, le schéma sur un maillage triangulaire présente des termes d'erreur "croisés" (U_{xxy} et U_{xyy}) qui n'apparaissent pas avec le schéma écrit sur une grille rectangulaire. Nous étudierons plus loin l'influence des valeurs des paramètres β et γ sur les termes d'erreur en espace.

- β-γ schéma en 1-D:

  Le flux de la variable U à laquelle on a appliqué un développement de Taylor à l'ordre 4 s'écrit :

$$\Psi(U) = -c_1\, U_x + \frac{c_1}{6}\,(3\beta-1)\Delta x^2\, U_{3x} - \frac{\beta\gamma}{4} \mid c_1 \mid \Delta x^3\, U_{4x} + O(4). \tag{4.7}$$

  De (4.7), on établit le développement en série de g_Δ :

$$\begin{aligned} g_\Delta(X) &= -c_1\, X + \frac{c_1}{6}\,(3\beta-1)\Delta x^2\, X^3 - \frac{\beta\gamma}{4} \mid c_1 \mid \Delta x^3\, X^4 \\ &= g_0 + \Delta x^2 g_2 + \Delta x^3 g_3 \end{aligned} \tag{4.8}$$

  En injectant (4.8) dans (4.6), on obtient, en revenant à l'équation différentielle :

$$U_t + c_1\, U_x = \frac{3\beta-1}{6}\; c_1\; \Delta x^2\, U_{3x} - \left(\frac{\beta\gamma}{4} \mid c_1 \mid \Delta x^3 + \frac{\Delta t^3}{24} c_1^4\right) U_{4x} + O(4). \tag{4.9}$$

  Là encore, les termes d'erreur en temps et en espace sont découplés.

Dans tous les schémas numériques considérés ici on retrouve que la valeur $\frac{1}{3}$ affectée au paramètre β permet d'annuler les termes d'ordre deux et on obtient ainsi un schéma spatial d'ordre trois pour des maillages structurés [21]. On supposera donc $\beta = \frac{1}{3}$ afin de préserver cet ordre. On retrouve également que la valeur 0 pour le paramètre γ permet d'annihiler les termes d'ordre trois et ce indépendamment de la valeur du paramètre β [14]. Les schémas ainsi obtenus sont d'ordre quatre en espace. Cependant, cela revient à considérer des schémas numériques centrés. On va alors s'attacher à déterminer la valeur optimale à affecter au paramètre γ afin d'obtenir un schéma numérique stable pour le plus grand pas de temps possible. De plus, dans le but de restreindre le coût en temps de calcul, on utilisera un schéma explicite d'ordre 3 en temps (RK3).

Définition 4.1.2 *On appelle schémas d'ordre trois, les schémas numériques définis avec les paramètres $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma \in [0,1]$ et une intégration temporelle RK3.*

4.1.3 Analyse de stabilité

Nous sommes intéressés par l'influence de la valeur du paramètre γ sur la stabilité de chacun de ces schémas d'ordre trois (maillage en triangles ou en rectangles).
Considérons un schéma linéaire, qui s'écrit au point $x = j\Delta x$, $y = l\Delta y$ et au temps $t = n\Delta t$, dans sa version explicite, avec une intégration RK1 :

$$U_{jl}^{n+1} - U_{jl}^{n} = \Delta t \sum_{k,m} A_{k,m}(\Delta x,\Delta y) U_{j+k,l+m}^{n}. \tag{4.10}$$

Nous allons procéder à l'analyse de stabilité de Von Neumann. Classiquement, par l'analyse de Fourier, en posant $U_{j,l}^{n} = G(i\xi_x,i\xi_y)\cdot e^{(i(j\Delta x\xi_x + l\Delta_y \xi_y))}$ et en injectant dans (4.10), on obtient le facteur d'amplification G:

$$G(i\xi_x,i\xi_y) = 1 + \Delta t \sum_{k,m} A_{k,m}(\Delta x,\Delta y) e^{i(k\Delta x\xi_x + m\Delta y\xi_y)}.$$

Le schéma sera stable au sens de Von Neumann, si et seulement si le critère suivant est vérifié :

$$\forall \xi_x,\xi_y \in I\!R \quad |G(i\xi_x,i\xi_y)| \leq 1. \tag{4.11}$$

Du formalisme [37] de la section précédente, on déduit que l'on a pour une intégration multi-pas de type Runge-Kutta d'ordre 3 :

$$G(i\xi_x,i\xi_y) = 1 + \sum_{p=1}^{3} \frac{[\Delta t \; g_\Delta(i\xi_x,i\xi_y)]^p}{p!}.$$

On réécrit alors $g_\Delta(i\xi_x,i\xi_y)$ en introduisant le nombre de Courant $\nu = c\dfrac{\Delta t}{\Delta}$, où c est le module de la vitesse d'advection:

$$\Delta t \; g_\Delta(i\xi_x,i\xi_y) = \nu(g_r(i\xi_x,i\xi_y) + i g_i(i\xi_x.i\xi_y)). \tag{4.12}$$

Finalement, en décomposant le facteur d'amplification G en sa partie réelle G_r et sa partie imaginaire G_i, nous obtenons pour Runge-Kutta 3 :

$$\begin{cases} G_r = 1 + \nu g_r + \dfrac{\nu^2}{2}(g_r^2 - g_i^2) + \dfrac{\nu^3}{6} g_r (g_r^2 - 3g_i^2), \\ G_i = \nu g_i[(1+\nu g_r) + \dfrac{\nu^2}{6}(3g_r^2 - g_i^2)]. \end{cases} \tag{4.13}$$

La condition de stabilité de Von Neumann (4.11) peut alors s'écrire :

$$\forall \xi_x,\xi_y \in I\!R \quad G_r^2(i\xi_x,i\xi_y) + G_i^2(i\xi_x,i\xi_y) \leq 1 \tag{4.14}$$

Remarque 4.1.3 : *On observe que pour $\nu = 0$ (onde stationnaire pour le système de Maxwell), le schéma reste stable puisque dans ce cas là la condition de stabilité (4.14) est vérifiée.*

On décrit ici les deux fonctions, g_r et g_i, nécessaires à la détermination du facteur d'amplification G, pour chacun des deux maillages considérés, ainsi que pour le cas monodimensionel :

- β-γ schéma pour un maillage rectangulaire :

$$\begin{aligned} g_r(i\xi_x,i\xi_y) = & -\frac{\beta\gamma}{2}|\cos\theta|(\cos(2\Delta x\xi_x) - 4\cos(\Delta x\xi_x) + 3) \\ & -\frac{\beta\gamma}{2}|\sin\theta|(\cos(2\Delta y\xi_y) - 4\cos(\Delta y\xi_y) + 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_i(i\xi_x,i\xi y) & = \frac{1}{2}\cos\theta(\beta\sin(2\Delta x\xi_x) - 2(1+\beta)\sin(\Delta x\xi_x)) \\ & + \frac{1}{2}\sin\theta(\beta\sin(2\Delta y\xi_y) - 2(1+\beta)\sin(\Delta_y\xi_y)). \end{aligned}$$

- β-γ schéma pour un maillage triangulaire

$$\begin{aligned} & g_r(i\xi_x,i\xi_y) = -\frac{1}{\Delta x\Delta y}\{A_{0,0} + (A_{2,1} + A_{-2,-1})\cos(2\Delta x\xi_x + \Delta y\xi_y) \\ & + (A_{1,0} + A_{-1,0})\cos(\Delta x\xi_x) + (A_{0,1} + A_{0,-1})\cos(\Delta y\xi_y) \\ & +(A_{1,1} + A_{-1,-1})\cos(\Delta x\xi_x + \Delta y\xi_y) + (A_{2,2} + A_{-2,-2})\cos(2\Delta x\xi_x + 2\Delta y\xi_y) \\ & + (A_{2,0} + A_{-2,0})\cos(2\Delta x\xi_x) + (A_{0,2} + A_{0,-2})\cos(2\Delta y\xi_y) \\ & + (A_{1,-1} + A_{-1,1})\cos(\Delta x\xi_x - \Delta y\xi_y) + (A_{1,2} + A_{-1,-2})\cos(-\Delta x\xi_x - 2\Delta y\xi_y)\ \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g_i(i\xi_x,i\Delta y\xi_y) = -\frac{1}{\Delta x\Delta y}\{(A_{2,1} - A_{-2,-1})\sin(2\Delta x\xi_x + \Delta y\xi_y) \\ & + (A_{1,0} - A_{-1,0})\sin(\Delta x\xi_x) + (A_{0,1} - A_{0,-1})\sin(\Delta y\xi_y) \\ & +(A_{1,1} - A_{-1,-1})\sin(\Delta x\xi_x + \Delta y\xi_y) + (A_{2,2} - A_{-2,-2})\sin(2\Delta x\xi_x + 2\Delta y\xi_y) \\ & + (A_{2,0} - A_{-2,0})\sin(2\Delta x\xi_x) + (A_{0,2} - A_{0,-2})\sin(2\Delta y\xi_y) \\ & + (A_{1,-1} - A_{-1,1})\sin(\Delta x\xi_x - \Delta y\xi_y) + (A_{1,2} - A_{-1,-2})\sin(-\Delta x\xi_x - 2\Delta y\xi_y)\ \} \end{aligned}$$

où les $A_{k,l}$, avec $-2 \leq k,l \leq 2$, sont donnés dans l'Annexe E.

- β-γ schéma en 1-D

$$g_r(i\xi) = -\frac{\beta\gamma}{2}\left(\cos(2\Delta x\xi) - 4\cos(\Delta x\xi) + 3\right)$$

$$g_i(i\xi) = -\frac{1}{2}\left(-\beta\sin(2\Delta x\xi) + 2(1+\beta)\sin(\Delta x\xi)\right)$$

On pose alors : $X = \cos(\Delta x\xi)$, $X \in [-1{,}1]$. La condition de Von Neumann (4.14), utilisant l'expression (4.13), ne fait intervenir que les fonctions g_r et g_i^2. On a alors :

$$g_r(X) = -\beta\gamma(1-X)^2,$$

$$g_i^2(X) = (1+\beta-\beta X)^2(1-X^2).$$

Remarque 4.1.4 *: On supposera pour l'étude suivante que la valeur du module c de la vitesse d'advection est fixée à 1.*

Analyse des schémas dans le cas 1-D:

Pour $\beta = \frac{1}{3}$, nous cherchons à déterminer la valeur maximale du nombre de Courant ν (ou encore CFL) en fonction de γ ($\gamma \in [0{,}1]$), de telle sorte que la condition de stabilité (4.14) soit vérifiée. Elle s'écrit :

$$\begin{gathered} G_r^2(X) + G_i^2(X) \leq 1 \\ \forall X \in [-1{,}1] \ \text{ avec } \ \nu \in I\!R^{*+}, \ \beta = \tfrac{1}{3} \ \text{ et } \ \gamma \in [0{,}1]. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Définition 4.1.3 *: On appelle nombre de Courant critique, et l'on note $\nu^c(\gamma)$, le nombre de Courant tel que :*
pour γ fixé, quelque soit ξ, nous ayons $|G|^2 \leq 1$ pour tout $\nu \leq \nu^c$.

Définition 4.1.4 *: On appelle γ* **optimal***, la valeur du paramètre γ pour laquelle le nombre de Courant critique (ou CFL) est le plus grand.*

Le coefficient d'amplification étant de degré 6 en X, nous allons rechercher numériquement le paramètre γ optimal qui permettra ainsi d'établir le plus grand pas de temps laissant le schéma stable.
Sur la figure 4.2 nous représentons le nombre de Courant critique en fonction de γ.

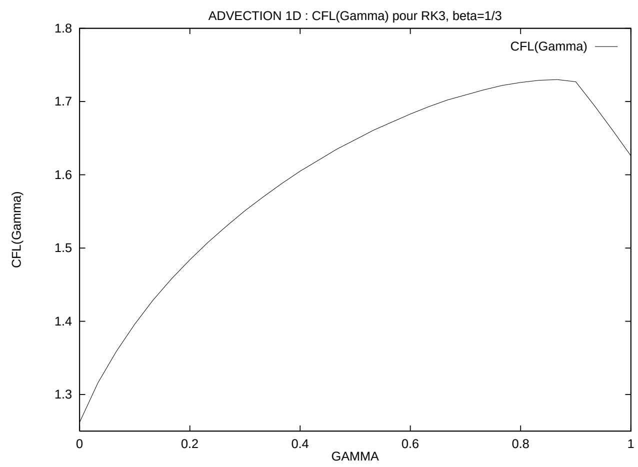

FIG. 4.2 – *Advection 1-D: CFL(γ)*

On obtient ainsi la valeur numérique du γ optimal : 0,86. Le CFL critique ν^c correspondant au γ optimal est alors de 1,72. Il est également intéressant de remarquer que le CFL le plus petit (CFL=1,25) est obtenue pour $\gamma = 0$.

Analyse des schémas dans le cas 2-D:

Définition 4.1.5 *: On appelle nombre de Courant critique minimal, et l'on note $\nu^c_{min}(\gamma)$, le nombre de Courant défini par :*

$$\nu^c_{min}(\gamma) = \min_{\theta \in [0,2\pi]} \nu^c(\gamma,\theta)$$

où pour γ donné, le nombre de Courant (ou CFL) critique satisfait la condition de stabilité de Von Neumann, pour toutes les directions d'advection.

On considère uniquement des maillages tels que : $\Delta x = \Delta y = h$.

Sur la figure 4.3 nous représentons le nombre de courant critique minimal $\nu^c_{min}(\gamma)$ en fonction de γ pour le schéma en maillage rectangulaire.

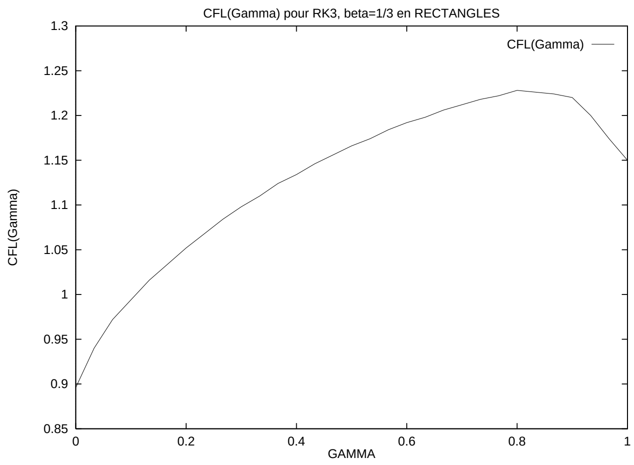

FIG. 4.3 – *Advection 2-D (rectangle) : CFL(γ)*

On constate sur cette figure que le plus grand pas de temps, i.e. le CFL le plus grand, est obtenue pour $\gamma = 0{,}8$. Pour cette valeur de γ nous obtenons un CFL d'environ 1,22. De plus, le CFL le plus petit (0,89) est obtenu pour $\gamma = 0$. Il est intéressant de remarquer que cette courbe a globalement le même comportement que celle obtenue dans le cas mododimensionel.

De même, sur la figure 4.4 nous rendons compte numériquement de $\nu^c_{min}(\gamma)$ pour le schéma en maillage triangulaire.

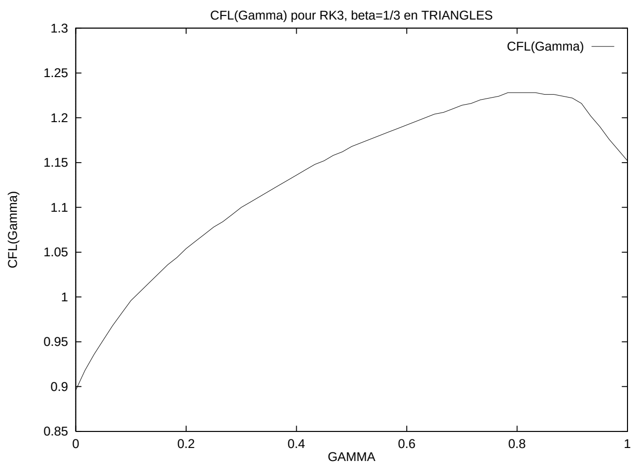

FIG. 4.4 – *Advection 2-D (triangle) : CFL(γ)*

Nous pouvons constater que la courbe obtenue pour un maillage triangulaire est identique à celle obtenue pour un maillage rectangulaire (cf. fig. 4.3). Ceci s'explique par le fait que l'on trace en fonction de γ le minimum suivant les angles d'advection θ du nombre de Courant Critique ν^c. Or, quelque soit γ, il existe un angle θ^*, tel que :

$$\nu^c(\gamma,\theta^*) = \min_\theta \nu^c_{triangle}(\gamma,\theta) = \min_\theta \nu^c_{rectangle}(\gamma,\theta).$$

On représente ainsi sur la figure (4.5), à titre d'exemple, le domaine de stabilité (i.e. le CFL en fonction de θ) obtenu dans le cas où γ est fixé à 1.

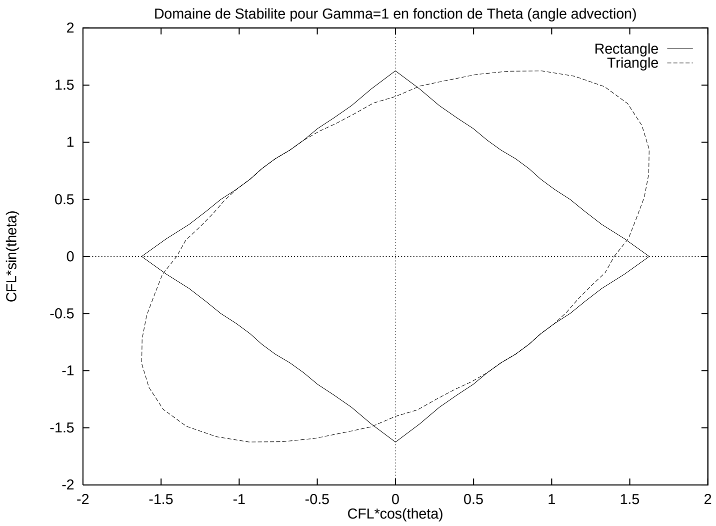

FIG. 4.5 – *Advection 2-D: CFL(θ) pour $\gamma = 1$*

Pour les deux types de maillage on trouve ainsi que les limites de stabilité sont égales et minimales (CFL=1,15) pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$. De plus, pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, la limite de stabilité du schéma en maillage triangulaire est nettement supérieure à celle obtenue pour le schéma écrit pour des maillages rectangulaires. Enfin, pour une vitesse d'advection parallèle aux axes, le schéma en rectangle permet d'utiliser un pas de temps plus grand (i.e. des CFL plus grands et égaux à ceux de l'advection 1D). Ces caractéristiques des domaines de stabilité liés au type de maillage utilisé et détaillées ici pour le cas $\gamma = 1$ se retrouvent pour toute valeur de $\gamma \in [0,1]$.

A partir de la figure (4.4), on choisit quelques valeurs significatives de γ (0, 8/10, 1) et on décide de tracer sur la figure (4.6) le domaine de stabilité (i.e. CFL(θ)) pour ces différentes valeurs de γ.

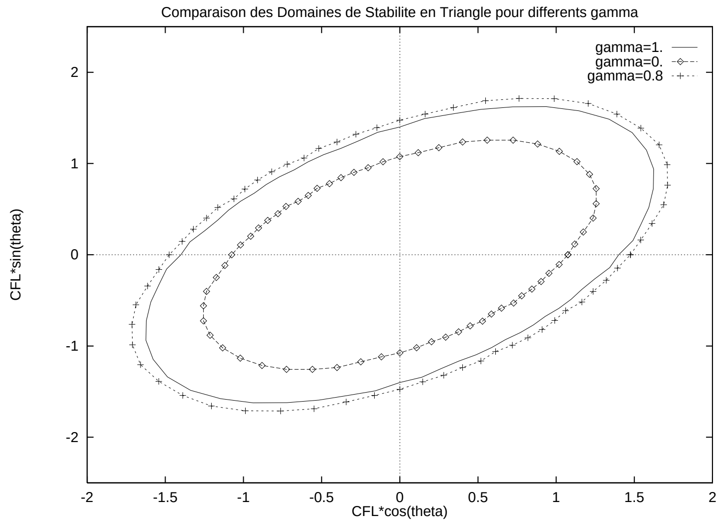

FIG. 4.6 – *Triangle : CFL(θ) pour différents γ*

On observe de nouveau que le domaine de stabilité le plus grand est obtenu pour $\gamma = 0{,}8$ alors que le plus petit est obtenu pour $\gamma = 0$.

4.1.4 Expériences numériques

On propose dans cette partie d'effectuer quelques expériences numériques pour illustrer la précision des schémas suivant la valeur du paramètre γ en maillage triangulaire. Considérons dans un premier temps le problème d'advection d'une "vague sinusoidale" avec la donnée initiale :

$$u(x,y,0) = \sin(2\pi(x+y)) \text{ pour } (x,y) \in [0,1]^2.$$

On utilise des conditions aux limites périodiques et le domaine de calcul est discrétisé en N=50 mailles dans chaque direction ($\Delta x = \Delta y = 2.10^{-2}$). Dans le but de mieux évaluer le rôle du paramètre γ dans la diffusion numérique, nous avons calculé le carré de la norme L^2 à chaque pas de temps :

$$\| u(.,n\Delta t) \|^2_{L^2} = \sum_I aire(C_I) \mid ua(I) \mid^2$$

où I, $aire(C_I)$ et $ua(I)$ représentent respectivement le noeud du maillage, l'aire du volume de contrôle et la solution calculée. L'angle d'advection θ est égal à $\frac{\pi}{4}$. Afin d'avoir un schéma stable quelque soit le paramètre γ considéré, on choisit un CFL de 0,75.

La figure (4.7) permet de comparer les résultats obtenus pour différentes valeurs de γ au temps T=16, soit environ un peu plus de vingt périodes.

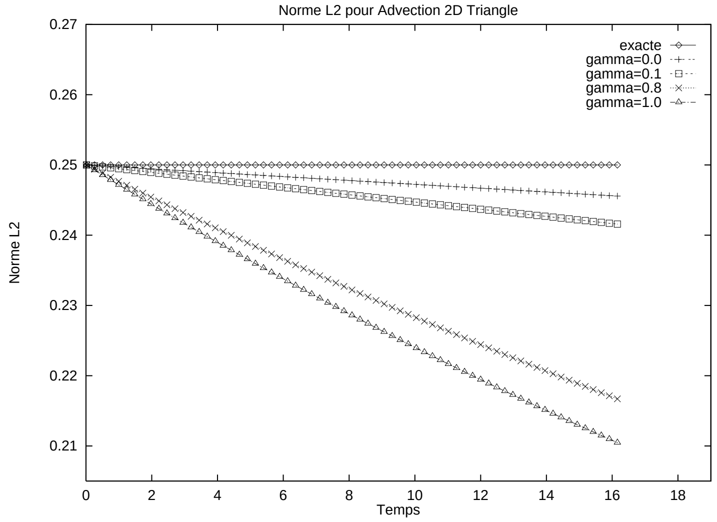

FIG. 4.7 – *Triangle : Norme L2 de la solution en fonction de* γ

Comme nous l'avait montré l'étude des équations équivalentes du paragraphe 4.1.2, la diffusion numérique est maximale lorsque $\gamma = 1$ (schéma d'ordre 3 "classique") tandis que la diffusion est minimale lorsque γ est nul. On notera une différence sur la diffusion de l'ordre de 14% entre ces deux schémas. De plus, il est intéressant de remarquer que pour des valeurs de γ qui tendent vers 0, la diffusion numérique tend vers la diffusion minimale. En particulier, la différence entre la diffusion minimale (obtenue pour $\gamma = 0$) et la diffusion pour $\gamma = 0{,}1$ n'est plus que de l'ordre de 1%.
Nous nous proposons d'étudier le comportement des schémas, suivant la valeur du paramètre γ, pour une condition initiale de type C^0 :

$$u_0(x,y) = 1 + x(1-x)y(1-y) \quad \text{avec} \quad (x,y) \in [0,1]^2 \tag{4.16}$$

Nous présentons sur la figure (4.8) les solutions obtenues pour $x = y$ et à $T^* = 6$ pour trois valeurs du paramètre γ (0, 1/10 et 1). Afin de s'affranchir des problèmes de stabilité, nous fixons le CFL à 0,6.

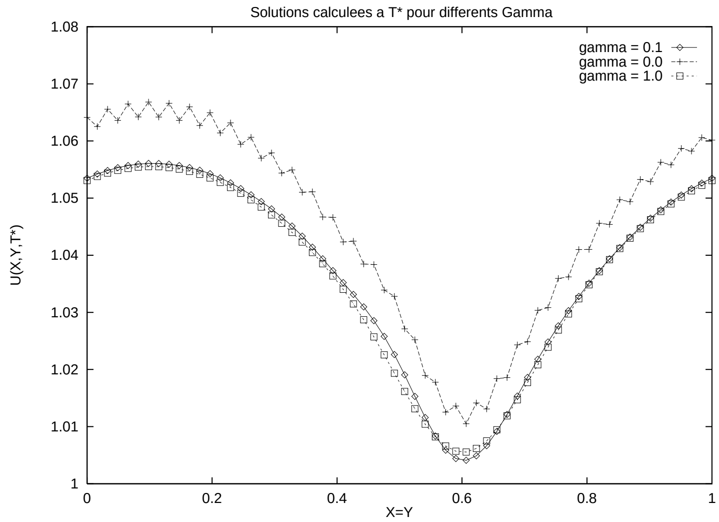

FIG. 4.8 – *Solutions suivant γ pour une condition initiale C^0*

La figure (4.8) montre que pour $\gamma = 0$ la solution obtenue à partir de la condition initiale (4.16) présente un certain nombre d'oscillations parasites. En effet, pour $\gamma = 0$, le flux numérique correspond à un schéma centré (le terme de diffusion numérique est supprimé) qui est connu pour être mal adapté à ce type de problème.
Pour conclure cette partie il nous a semblé intéressant de reporter sur le tableau (4.1) les valeurs caractéristiques du paramètre γ avec pour chacune d'elle les répercussions sur la qualité du schéma numérique pour des maillages en triangles. Les pourcentages présentés dans la colonne diffusion correspondent à la différence de diffusion obtenue entre le schéma avec $\gamma = 0$ (pris comme référence) et les autres schémas.

TAB. 4.1 – *: Qualité du schéma suivant γ*

	Stabilité (CFL) $\min_\theta \nu^c(\theta)$	Diffusion
$\gamma = 1$	1.15	+14% (maximale)
$\gamma = 0.8$	1.22 (maximum)	+11%
$\gamma = 0.1$	1.	+1%
$\gamma = 0.$	0.89 (minimum)	référence (minimale)

Au vu des différents résultats présentés ci-dessus, le schéma avec $\gamma = 0$ ne semble pas bien adapté à nos calculs. En effet, même s'il présente une diffusion minimale, le CFL

assurant la stabilité est jugé trop petit. De plus, le schéma crée des oscillations parasites pour des conditions initiales peu régulières (de type C^0 par exemple).
Même si les CFL les plus grands sont obtenus pour γ=8/10 (CFL maximal) et γ=1, la diffusion numérique de ces schémas en temps long est jugée trop importante et par conséquent on ne retiendra pas ces valeurs pour γ. Finalement, le schéma qui semble le plus adapté à nos problèmes est le schéma établi avec $\gamma = 0{,}1$. En effet, il se presente comme le bon schéma intermédiaire : la diffusion numérique est faible, son CFL reste acceptable et il semble robuste pour convecter des ondes peu régulières. Notons que d'autres “petites” valeurs du paramètre γ pourraient tout aussi bien convenir. Il faudrait alors étudier la capacité de ces β-γ_ε schémas à convecter des ondes irrégulières ou présentant de fortes variations.

Définition 4.1.6 *: On appelle* **nouveau** *schéma d'ordre trois, le schéma numérique défini avec les paramètres $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 0{,}1$ et une intégration temporelle RK3.*

4.2 Application aux équations de Maxwell

4.2.1 Présentation des équations et du schéma

On s'intéresse maintenant à l'application de ces schémas d'ordre trois pour la résolution de phénomènes électromagnétiques. Ils sont régis par les équations de Maxwell qui s'écrivent dans le vide en l'absence de charges et de courant sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + rot(\vec{E}) &= 0, \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - rot(\vec{H}) &= 0, \end{aligned} \right. \tag{4.17}$$

où $\vec{E} = \vec{E}(t,\vec{x})$ et $\vec{H} = \vec{H}(t,\vec{x})$ sont respectivement les champs électrique et magnétique, μ_0 et ε_0 la perméabilité magnétique et la permittivité électrique du vide. Du fait de la redondance des équations de Gauss dans le modèle continu pour des conditions initiales vérifiant ces contraintes, elles n'apparaissent pas explicitement dans le système écrit ci-dessus. Le système de Maxwell est un sytème conservatif et hyperbolique. L'approximation numérique utilisée reste donc la même que celle décrite précédemment pour l'équation d'avection linéaire 2-D. On se contente donc ici de rappeler brièvement les grandes lignes de l'approximation utilisée (voir section 1.5).

En dimension trois d'espace, une présentation des équations de Maxwell sous la forme adimensionnée conservative donne :

$$Q_t + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(Q) = 0, \tag{4.18}$$

avec :

$$Q = {}^t(H_x,H_y,H_z,E_x,E_y,E_z)$$

On note :

$$\mathbb{F}(Q) = {}^t(F_1(Q),F_2(Q),F_3(Q))$$

avec :

$$\begin{cases} F_1(Q) = {}^t(0,-E_z,E_y,0,H_z,-H_y), \\ F_2(Q) = {}^t(E_z,0,-E_x,-H_z,0,H_x), \\ F_3(Q) = {}^t(-E_y,E_x,0,H_y,-H_x). \end{cases}$$

On complète (4.18) par des conditions aux limites sur la frontière Γ de Ω ainsi que des conditions initiales.
De la même façon que pour l'équation d'advection linéaire en deux dimensions, on établit la formulation faible de (4.18), après discrétisation du domaine de calcul. On obtient :

$$Volume\,(C_i)\,(Q_t)_i + \sum_{j\in K(i)} \boldsymbol{\Phi_{ij}} + \text{ termes de bord} = 0 \tag{4.19}$$

où $K(i)$ est l'ensemble des voisins du noeud i. Les termes de bord (condition aux limites de type métallique et condition absorbante) sont développées dans [10] par exemple.
La construction du β-γ schéma est alors identique à celle de la section précédente mais maintenant appliquée à un système. On donne ci-dessous à titre d'indication l'expression du flux numérqiue que l'on obtient.
On a :

$$\boldsymbol{\Phi_{ij}} = \boldsymbol{\Phi}(Q_i,Q_j,\vec{\eta}_{ij}) = \frac{\mathcal{F}(Q_i,\vec{\eta}_{ij}) + \mathcal{F}(Q_j,\vec{\eta}_{ij})}{2} - \frac{\gamma}{2} \mid \mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij}) \mid (Q_j - Q_i),$$

où $\mathcal{F}(Q,\vec{\eta}_{ij}) = \eta_1 F_1(Q) + \eta_2 F_2(Q) + \eta_3 F_3(Q)$ est une combinaison linéaire de flux et $\mathcal{A}(\vec{\eta}_{ij})$ la matrice jacobienne associée à $\mathcal{F}(Q,\vec{\eta}_{ij})$.

4.2.2 Illustration numérique

Nous souhaitons maintenant comparer le nouveau schéma d'ordre trois précédemment étudié ($\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 0{,}1$ et RK3) à la fois avec le schéma décentré classique d'ordre trois ($\gamma = 1$) et avec le schéma d'ordre un.

On s'intéresse dans un premier temps à la propagation d'un mode de résonance électromagnétique dans une cavité cubique unitaire. Nous allons comparer les solutions lorsque que l'on discrétise le domaine de calcul $\Omega =]0,1[^3$ à l'aide de cubes ou de tétraèdres structurés, comportant une quinzaine de points par longueur d'onde. Nous prenons pour tous ces schémas le même nombre de Courant : $CFL = 1$ qui assure la stabilité des différents schémas.
La solution exacte du mode (1,1,1) s'écrit [33] :

$$\begin{cases} H_x = -\dfrac{\pi}{\omega}\sin(\pi x)\cos(\pi y)\cos(\pi z)\sin(\omega t), \\[2ex] H_y = \dfrac{2\pi}{\omega}\cos(\pi x)\sin(\pi y)\cos(\pi z)\sin(\omega t), \\[2ex] H_z = -\dfrac{\pi}{\omega}\cos(\pi x)\cos(\pi y)\sin(\pi z)\sin(\omega t), \\[2ex] E_x = -\cos(\pi x)\sin(\pi y)\sin(\pi z)\cos(\omega t), \\[2ex] E_y = 0, \\[2ex] E_z = \sin(\pi x)\sin(\pi y)\cos(\pi z)\cos(\omega t). \end{cases} \tag{4.20}$$

Calcul de l'énergie électromagnétique :

On présente tout d'abord l'énergie électromagnétique obtenue avec les différents schémas que l'on comparera à l'énergie exacte.
La figure 4.9 permet de comparer, pour la cavité cubique maillée en **tétraèdres**, l'énergie électromagnétique en fonction du temps obtenue avec les schémas d'ordre 1, d'ordre 3 et le nouveau schéma d'ordre 3. Outre le caractère extrêmement diffusif du schéma d'ordre un, il apparait clairement sur la figure 4.9 le gain certain apporté par le nouveau schéma d'ordre 3 en terme de diffusion numérique.

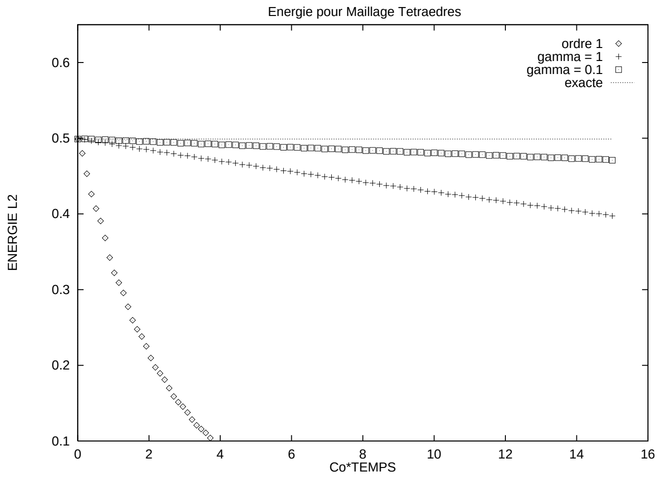

FIG. 4.9 – *Energie pour un maillage tétraédrique*

L'étude portée sur la figure 4.10 est semblable à la précédente mais maintenant la cavité est maillée à l'aide de **cubes**. Le comportement des schémas dans ce cas là est similaire au cas des tétraèdres avec néanmoins un caractère moins diffusif.

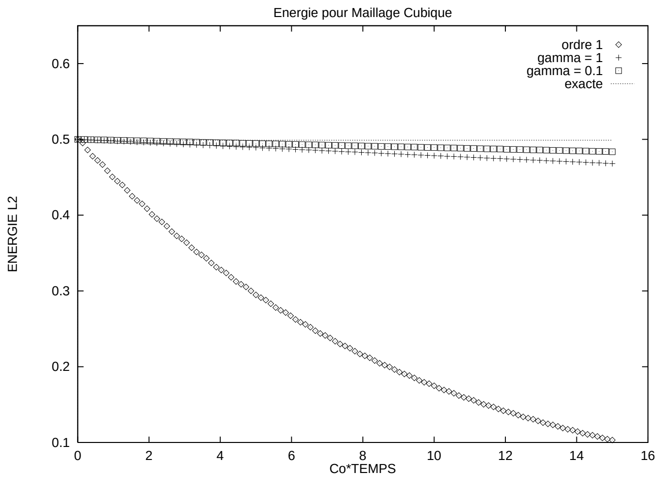

FIG. 4.10 – *Energie pour un maillage cubique*

Au vu des deux études présentées ci-dessus il nous a semblé intéressant de reporter sur une même figure (fig. 4.11) les énergies obtenues suivant le maillage utilisé pour les deux schémas d'ordre 3. On constate ainsi que dans ce cas là le nouveau schéma d'ordre 3 en tétraèdres est à peu près équivalent au schéma d'ordre 3 (non modifié) en cubes.

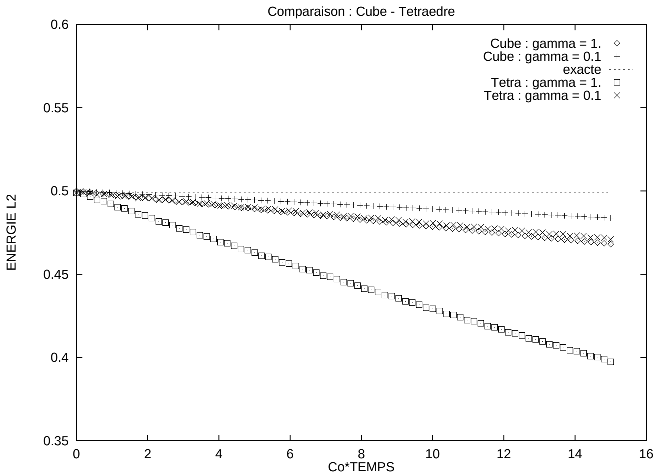

FIG. 4.11 – *Schémas d'ordre 3 en fonction du maillage*

Suivi du mode (1,1,1) dans la cavité :

On décide maintenant de suivre l'évolution en temps du mode propre (1,1,1) de la cavité cubique résonante en un point du domaine. On initialise alors le champ électromagnétique avec la solution analytique (4.20) à l'instant initial en tous les noeuds du maillage. Le nombre de Courant (CFL) est toujours pris égal à 1.

On présente sur les deux figures ci-dessous la composante E_x du champ électromagnétique en fonction du temps. On compare sur la figure 4.12 la solution obtenue avec le schéma d'ordre 3 avec la solution analytique pour environ 45 périodes en temps. On constate le caractère diffusif du schéma pour de longs temps de calcul.

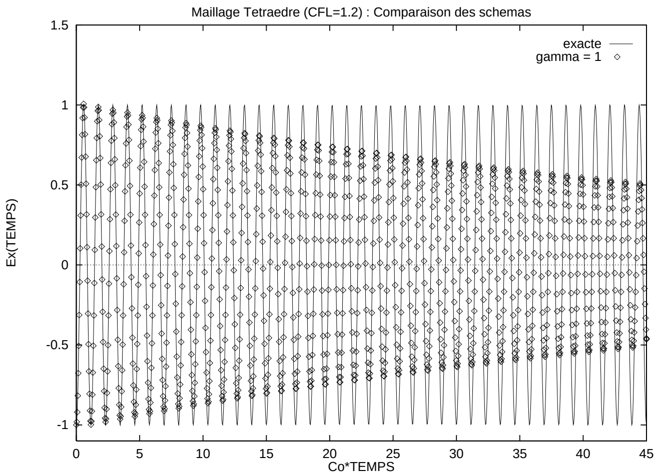

FIG. 4.12 – $E_x(t)$ *avec le schéma d'ordre 3 (tétraèdres)*

De même, la figure 4.13 montre l'évolution temporelle de la composante E_x en un point du maillage tétraédrique mais maintenant pour le nouveau schéma d'ordre 3. Ici, le caractère diffusif du précédent schéma a été nettement corrigé.

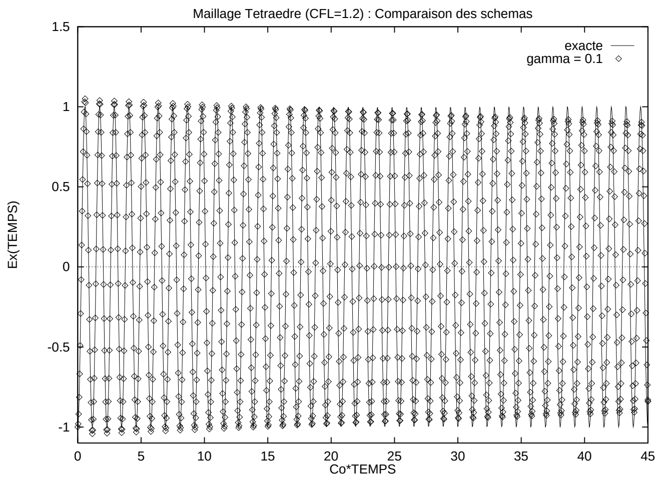

FIG. 4.13 – $E_x(t)$ *avec le nouveau schéma d'ordre 3*

Des résultats similaires sont obtenus pour les schémas basés sur des maillages cubiques.

4.2.3 Propagation d'un mode dans une cavité sphérique

Equation de Helmholtz en coordonnées sphériques

Pour étudier la résonance dans une cavité sphérique, il est plus aisé de résoudre l'équation de Helmholtz dans un système de coordonnées adaptées [33]. En coordonnées sphériques, cette équation s'écrit :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}+k^2\Psi=0 \tag{4.21}$$

Les fonctions d'ondes élémentaires de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques s'écrivent:

$$\Psi_{mn}(r,\theta,\phi)=b_n(kr)L_n^m(\cos\theta)h(m\phi) \tag{4.22}$$

où les fonctions $b_n(kr)$ et $L_n^m(\cos\theta)$ sont respectivement les fonctions de Bessel sphériques et de Legendre. On note $h(m\phi)$ les solutions harmoniques.
De plus, comme une combinaison linéaire de fonctions d'ondes élémentaires est une fonction d'onde élémentaire alors :

$$\Psi(r,\theta,\phi)=\sum_m\sum_n C_{nm}b_n(kr)L_n^m(\cos\theta)h(m\phi) \tag{4.23}$$

où les C_{nm} sont des coefficients constants déterminés par les conditions initiales.

Remarque 4.2.1 *$L_n^m(\cos\theta)$ présente des singularités pour $\theta=0$ et $\theta=\pi$. Des fonctions de Legendre dites du premier ordre notées $P_n^M(\cos\theta)$ n'ont pas cette particularité.*

En supposant que le champ est une superposition d'un champ de type TE et d'un champ de type TM, on obtient l'expression du champ électromagnétique dans la cavité sphérique :

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{c}{i\omega}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right) A_r \\[2ex] E_\theta = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial F_r}{\partial \phi} - \dfrac{c}{i\omega r}\dfrac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \\[2ex] E_\phi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_r}{\partial \phi} - \dfrac{c}{i\omega r \sin\theta}\dfrac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \\[2ex] H_r = \dfrac{c}{i\omega}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right) F_r \\[2ex] H_\theta = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial \phi} + \dfrac{c}{i\omega r}\dfrac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta} \\[2ex] H_\phi = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_r}{\partial \phi} + \dfrac{c}{i\omega r \sin\theta}\dfrac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \phi} \end{cases} \tag{4.24}$$

où A_r et F_r sont les potentiels vecteurs de $\vec{H}$ et $\vec{E}$ respectivement [33].

Solution analytique en coordonnées cartésiennes

FIG. 4.14 – *Cavité sphérique.*

On considère la condition aux limites de type métal parfait sur l'enveloppe de la sphère de rayon a :

$$\vec{E}_{r=a} \wedge \vec{n} = \vec{0}$$

On admet dans ce cas là que le champ électromagnétique s'écrit à partir de l'écriture du système d'équation (4.24). On introduit alors les vecteurs potentiels suivant :

$$\begin{cases} Fr = \hat{J}_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} \\ Ar = \hat{J}'_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{Bmatrix} \end{cases} \tag{4.25}$$

où $\hat{J}_n(kr)$ et $\hat{J}'_n(kr)$ sont respectivement la fonction de Bessel sphérique et sa dérivée.

Remarque 4.2.2 *: On choisit les fonctions $\hat{J}_n$ car en $r = 0$ le champ électromagnétique doit être fini. De même, les fonctions P_n^m sont utilisées afin que le champ soit fini pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.*

On choisit d'axer notre étude numérique sur le suivi d'un mode TE_r^{mnp}. Ce mode correspond à une valeur nulle du vecteur potentiel A_r, et où F_r est donné ci-dessus. On remarque que la condition aux limites de type métal parfait impose : $E_\theta = E_\phi = 0$ pour $r = a$. Cette condition est vérifiée si :

$$\hat{J}_n(ka) = 0.$$

Ainsi, ka est un zéro de la fonction de Bessel sphérique. Soit u_{np} les zéros de $\hat{J}_n(u)$. On a : $k = \dfrac{u_{np}}{a}$.

On choisit maintenant un mode particulier : le mode TE_r^{011}. Pour ce mode on donne l'expression du champ électromagnétique en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} E_r = E_\theta = H_\phi = 0 \\ E_\phi = -\dfrac{\tan(\theta)}{r}(F_r)_{011} \\ H_r = \dfrac{1}{r^2 j\omega\mu_0}(F_r)_{011} \\ H_\theta = \dfrac{1}{j\omega\mu_0}\left(\dfrac{\tan(\theta)}{r^2}(F_r)_{011} - \dfrac{k}{r}\sin(\theta)\sin(kr)\right) \end{cases}$$

avec $k = \dfrac{u_{11}}{a} = \dfrac{4.493}{a}$ et $(F_r)_{011} = \cos(\theta)\left(\dfrac{1}{kr}\sin(kr) - \cos(kr)\right)$.

On s'intéresse uniquement à la partie réelle de cette solution. Finalement, si on exprime ce champ électromagnétique en coordonnées cartésiennes, on obtient à l'aide de l'adimensionnement de la partie 1.2 :

$$\vec{E} = \frac{1}{r^2}\cos(\omega t)\left(\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr)\right) \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega r^4} & xz\left(\sin(kr)\left(\dfrac{3}{kr} - kr\right) - 3\cos(kr)\right) \\ \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega r^4} & yz\left(\sin(kr)\left(\dfrac{3}{kr} - kr\right) - 3\cos(kr)\right) \\ \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega r^2} & \left[\dfrac{z^2}{r^2}\left(\sin(kr)\left(\dfrac{3}{kr} - kr\right) - 3\cos(kr)\right)\right. \\ & \left. - \left(\sin(kr)\left(\dfrac{1}{kr} - kr\right) - \cos(kr)\right)\right] \end{pmatrix}$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

On obtient ainsi l'expression analytique de la solution dans ce type de cavité sphérique.

Solutions numériques et comparaisons

La figure 4.2.3 représente la peau du maillage du maillage de la boule. La discrétisation correspond à une douzaine de points par longueur d'onde.

Nous proposons de suivre l'évolution en temps du mode propre (0,1,1) de cette cavité sphérique que l'on supposera unitaire ($a = 1$). On initialise alors le champ électromagnétique avec la solution analytique précédemment calculée en tous les noeuds du maillage. On compare à la solution analytique, la solution obtenue à l'aide du schéma numérique d'ordre 3 modifié.

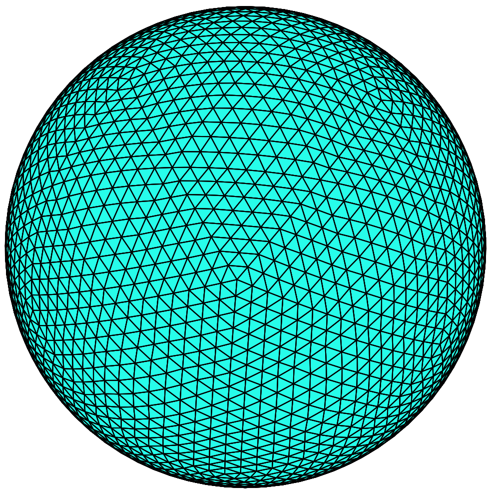

FIG. 4.15 – *Maillage de la peau de la cavité sphérique.*

Les figures 4.16 montrent le champ électromagnétique pour $y = 0$ après une centaine de pas de calcul. Sur les figures de gauche sont représentées les solutions approchées tandis que sur les figures de droite, nous avons les solutions exactes. De haut en bas, nous représentons successivement les composantes H_x, H_z et E_y du champ électromagnétique. On peut ainsi vérifier sur ces figures que le champ électromagnétique est bien approché dans la cavité sphérique par notre schéma numérique.

Spectre de résonance dans une boule

On veut maintenant obtenir le spectre modal complet d'une onde électromagnétique en résonance dans une cavité sphérique de rayon a.
Les fréquences f_r de résonance pour les modes TE et TM sont données par [33] :

$$\begin{aligned} (f_r)^{TE}_{mnp} &= \frac{u_{np}}{2\pi a\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad \text{avec n=1,2,... \& p=1,2,...} \\ (f_r)^{TM}_{mnp} &= \frac{u'_{np}}{2\pi a\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad \text{avec n=1,2,... \& p=1,2,...} \end{aligned} \tag{4.26}$$

où u_{np} et u'_{np} sont respectivement les zéros de $\hat{J}_n(kr)$ et de $\hat{J}'_n(kr)$.
En utilisant les tables existantes pour trouver les zéros des fonctions de Bessel, on calcule

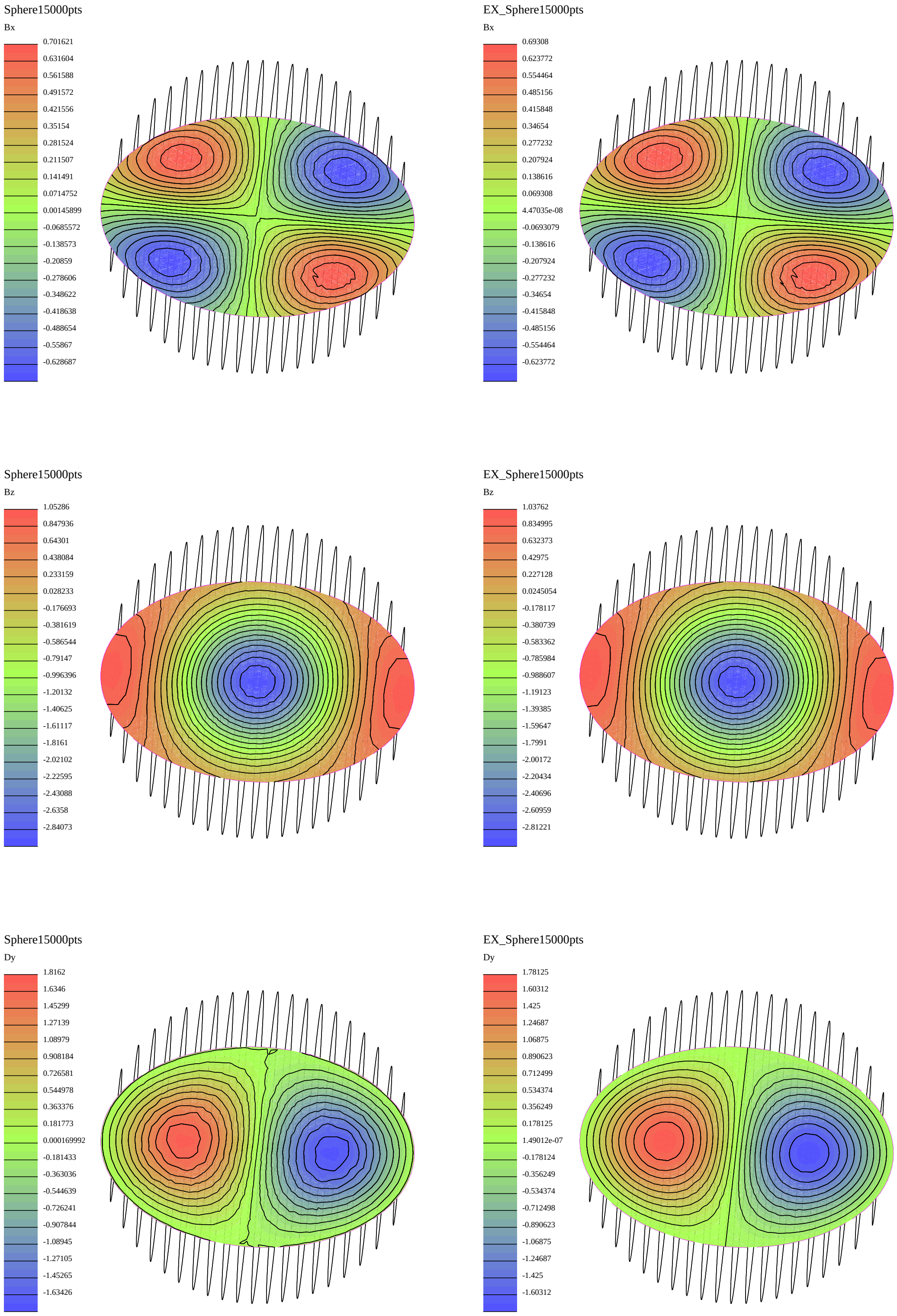

FIG. 4.16 – *Composantes du champ électromagnétique en $y = 0$ (gauche : approchée - droite : exacte)*

alors la fréquence fondamentale de résonance (avec $a = 1$m). On trouve dans le cas TM :

$$(f_r)^{TM}_{011} = 0{,}13 \text{ GHz} \tag{4.27}$$

On présente dans les tableaux 4.2 et 4.3 les premières fréquences de résonance (en Ghz) suivant la polarisation TM ou TE considérée.

(n,p)	$(1{,}1)_{TM}$	$(1{,}2)_{TM}$	$(1{,}1)_{TE}$	$(1{,}3)_{TM}$	$(1{,}2)_{TE}$	$(1{,}4)_{TM}$	$(2{,}1)_{TM}$
f (en Ghz)	0.131	0.185	0.214	0.237	0.275	0.289	0.292

Tab. 4.2 – *Sept premières fréquences de résonance de la sphère unité.*

(n,p)	$(1{,}3)_{TE}$	$(1{,}5)_{TM}$	$(2{,}2)_{TM}$	$(2{,}1)_{TE}$	$(1{,}4)_{TE}$	$(1{,}6)_{TM}$	$(2{,}3)_{TM}$
f (en Ghz)	0.333	0.341	0.355	0.368	0.391	0.392	0.416

Tab. 4.3 – *Premières fréquences de résonance (TM).*

4.2.4 Spectre en fréquences pour la boule métallique

Pour obtenir le spectre en fréquence dans la cavité, on initialise le champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité par une Gaussienne centrée en un point arbitraire ($P = (0.26, -0.70, 0.25)$). Une transformation de Fourier est réalisée sur environ 2500 pas de temps pour obtenir le spectre B_z en un point de la boule. Le mode fondamental est discrétisé avec environ une quinzaine de points par longueur d'onde. Les calculs ont été réalisés avec un nombre de Courant (CFL) égal à 1. Le schéma utilisé est le même que précédemment ($\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 0.1$ et RK3).
Nous avons reporté sur la figure 4.17 le spectre de B_z en fontion de la fréquence, les flèches représentant les fréquences propres exactes de la cavité. Les onze premiers modes sont particulièrement bien représentés.

On peut cependant noter que deux fréquences n'ont pas été captées : $f = 0.275$ et $f = 0.392$. Ceci provient du fait que pour chacune de ces valeurs il existe une autre fréquence de résonance très proche ($f = 0.289$ et $f = 0.39$). De plus, pour ces fréquences, la discétisation spatiale n'est pas suffisante car elle correspond respectivement à sept et cinq points par longueur d'onde.

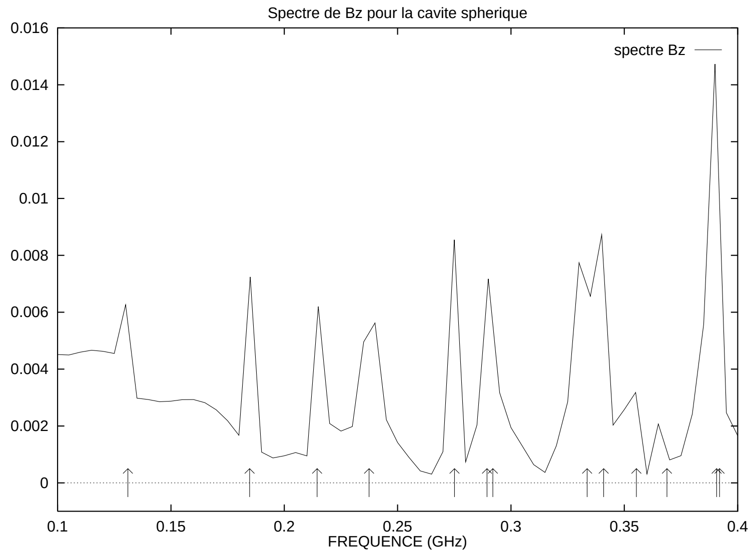

FIG. 4.17 – *Premiers modes propres de la sphère unité.*

On présente sur la figure 4.18 le spectre complet obtenu à l'aide de notre méthode. Outre les onze premiers modes particulièrement bien représentés, il est intéressant de remarquer qu'un certain nombre d'autres fréquences sont également captées en dépit d'un léger décalage. De plus, comme précédemment, les modes dont les valeurs sont très proches et qui correpondent à un faible nombre de points par longueur d'onde ne sont pas tous représentés.

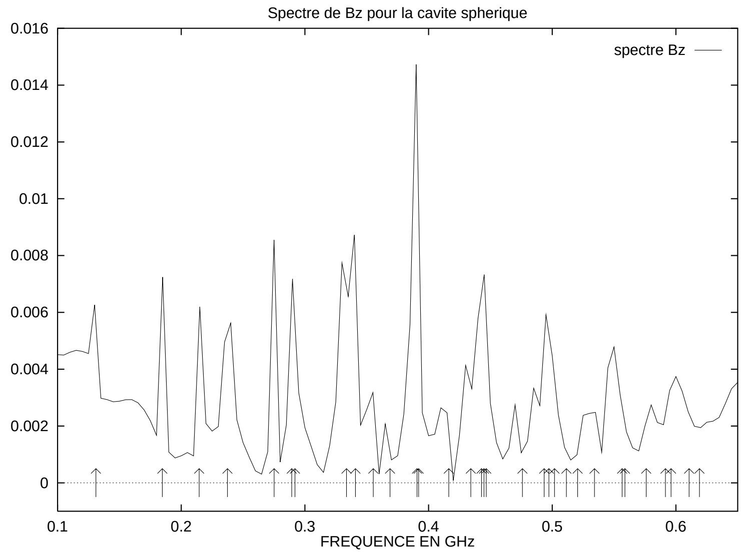

FIG. 4.18 – *Modes propres de la sphère unité.*

Conclusion

Nous avons présenté un schéma numérique basé sur une formulation volumes finis et appliqué à des maillages triangulaires ou rectangulaires pour la résolution de problèmes hyperboliques. Le but de notre étude était d'obtenir un schéma numérique d'ordre élevé en minimisant si possible la diffusion numérique tout en conservant un pas de temps optimal et un coût en temps CPU raisonnable. Pour cela nous avons choisi une approximation spatiale qui utilise un flux décentré caractérisé par deux paramètres β et γ. La valeur du paramètre β a été fixée à $\frac{1}{3}$ afin d'assurer l'ordre 3 pour des maillages structurés. Le paramètre γ a été introduit afin de contrôler la diffusion numérique par pondération du terme de décentrage. L'analyse de stabilité nous a fourni la valeur optimale de γ dans le but d'obtenir le plus grand pas de temps possible. Finalement, nous avons proposé un schéma de Runge Kutta à trois pas pour l'intégration temporelle.
Bien sûr notre étude théorique s'est limitée au cadre de l'équation d'advection linéaire en deux dimensions d'espace. Néanmoins, les résultats numériques obtenus à l'aide de ce schéma pour des simulations en électromagnétisme en 3-D prouvent l'efficacité du schéma proposé au niveau de la précision des solutions calculées.

Chapitre 5

Approximation en maillages multi-éléments

L'essentiel de ce chapitre est tiré du rapport Cermics (N^o 97-92) réalisé avec Loula Fézoui* et intitulé "Méthode PML en volumes finis pour la résolution des équations de Maxwell en maillage hybride 2-D".
Les travaux présentés dans ce chapitre ont également fait l'objet d'une communication au congrès ACES97, Monterey, Californie.

* CERMICS-INRIA, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex

Introduction

Nous venons de voir qu'après quelques modifications, la méthode **PML** s'adaptait bien au cas des volumes finis en maillages non structurés et qu'ainsi, on pouvait réduire, en deux dimensions d'espace, la distance à la frontière artificielle d'une longueur d'onde par rapport à un décentrage classique [39].
Dans le but d'augmenter encore l'efficacité, une solution, en deux dimensions d'espace, est de revenir aux maillages de type différences finies (grilles rectangulaires) dès que l'on rentre dans le milieu absorbant. C'est l'objet du présent travail: construire un maillage hybride de type triangulaire près de l'objet diffractant et rectangulaire dans le milieu absorbant. De plus, les schémas utilisés sur chaque grille peuvent être différents. Ici, on résout dans la zone triangulaire les équations de Maxwell en domaine temporel par un schéma volumes finis d'ordre élevé en espace. Dans le milieu absorbant maillé en rectangles, on résout les équations de Maxwell modifiées par un schéma centré. L'évolution en temps dans tout le domaine de calcul est réalisée par un schéma de type Runge-Kutta à trois pas. Des expériences numériques en régime fréquentiel et temporel sont présentées. Les résultats obtenus en maillage hybride sont comparés, en termes d'erreur et de temps de calcul, avec ceux obtenus avec des grilles triangulaires.

5.1 Approximation Numérique

L'approximation numérique développée ici repose sur des maillages en deux dimensions d'espace constitués de deux types d'élément : triangle et rectangle.
Nous proposons de décrire dans cette section les changements qui interviennent par rapport au chapitre 1.5, du fait de l'utilisation de ce type de maillages hybrides conformes.

5.1.1 Formulation variationnelle

Soit $\mathcal{T}_h$ une discrétisation classique du domaine Ω_h, approximation du domaine de calcul Ω, par des polygones (triangles *et* rectangles). A chaque noeud S_i est associée une cellule C_i. Pour les maillages hybrides conformes considérés dans notre étude, le domaine de calcul est divisé en deux zones : la zone correspondant au maillage triangulaire ($\mathcal{D}_T$) et celle correspondant au maillage rectangulaire ($\mathcal{D}_R$). De plus, un traitement particulier sera apporté au niveau de l'interface ($\mathcal{D}_I$) entre ces deux zones.
Néanmoins, quelque soit le noeud du maillage considéré, les cellules de contrôle sont

construites classiquement de la façon suivante :

– cellule centrée sur un noeud de $\mathcal{D}_T$: on relie les centres de gravité des triangles contenant le noeud au milieu des arêtes aboutissant au noeud (figure 5.1),

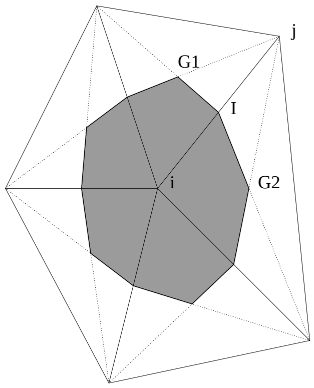

FIG. 5.1 – *Cellule pour la zone triangle* $\mathcal{D}_T$

– cellule centrée sur un noeud de $\mathcal{D}_R$: on relie les centres de gravité des rectangles contenant le noeud au milieu des cotés aboutissant au noeud (figure 5.2),

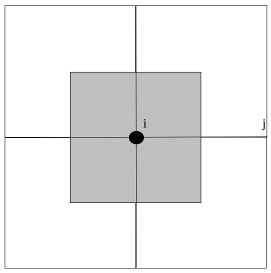

FIG. 5.2 – *Cellule pour la zone rectangle* $\mathcal{D}_R$

– cellule centrée sur un noeud de l'interface $\mathcal{D}_I$: on combine alors les deux constructions précédentes (figure 5.3).

Ainsi, la réunion de toutes les cellules forme une nouvelle partition de Ω_h,

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{ns} C_i$$

où ns représente le nombre de noeuds du maillage.

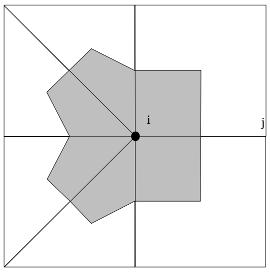

FIG. 5.3 – *Cellule pour l'interface $\mathcal{D}_I$*

On considère toujours l'équation de conservation (1.7) sous forme condensée :

$$Q_\tau + \vec{\nabla}.\mathbb{F}(Q) = 0 \qquad (\vec{x},t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{5.1}$$

avec $\mathbb{F}(Q) = {}^t(F(Q),G(Q))$.
Les méthodes de volumes finis sont basées sur l'intégration de (5.1) sur chaque cellule C_i quelque soit la forme de la cellule. Par conséquent, l'approximation numérique développée au chapitre 1.5 reste sensiblement la même. On note $(Q_\tau)_i$ la valeur moyenne de Q_τ sur la cellule C_i. On obtient :

$$Aire(C_i)\,(Q_\tau)_i + \int_{C_i} \vec{\nabla}.\mathbb{F}(Q)\,dx = 0. \tag{5.2}$$

5.1.2 Calcul des flux numériques

A l'ordre un, le calcul des flux numériques est rigoureusement identique à celui développé au paragraphe 2.3.1.

Approximations d'ordre supérieur :

Nous utilisons ici une formulation dite β-schéma pour définir les nouvelles valeurs aux interfaces calculées à l'aide d'une combinaison convexe des pentes (voir §2.3.2).
Les gradients $(\vec{\nabla} Q)_{i,j}$ sont définis de plusieurs façons suivant le type d'élément auquel appartient le noeud considéré.
Dans le cas où S_i appartient à $\mathcal{D}_T$, on définit des gradients discrets en ces points comme une moyenne des gradients de Galerkin autour du noeud S_i. On écrit alors pour chaque composante k (k=1,2,3) du vecteur Q :

$$\vec{\nabla} Q_i^k = \frac{1}{Aire(C_i)} \sum_{T\in\mathcal{T}_h, S_i\in\mathcal{D}_T} \frac{Aire(T)}{3} (\vec{\nabla} Q^k)^T. \tag{5.3}$$

Dans le cas où S_i appartient à $\mathcal{D}_I$, le calcul des gradients n'est pas immédiat. On propose ici une technique qui permet d'évaluer ces gradients. Le noeud S_i de l'interface est entouré d'éléments triangulaires et rectangulaires (voir figure 5.3). On décide alors de couper les rectangles mitoyens de l'interface en deux triangles fictifs. Ainsi, S_i n'est plus entouré que d'éléments triangulaires et le calcul du gradient en ce noeud est alors similaire à celui précédemment établi pour un noeud S_i appartenant à $\mathcal{D}_T$.
Dans le cas où le noeud S_i appartient à $\mathcal{D}_R$, on définit le gradient (pour chaque composante k du vecteur Q) de la façon suivante :

$$\vec{\nabla} Q_i^k \approx \frac{1}{Aire(C_i)} \int_{C_i} \vec{\nabla} Q^k \; dx \, dy.$$

En appliquant la formule de Green, nous obtenons :

$$\int_{C_i} \vec{\nabla} Q^k \; dx \, dy = \int_{\partial C_i} Q^k \vec{\nu}_{ij} \; ds.$$

D'où l'expression du gradient :

$$\vec{\nabla} Q_i^k = \frac{1}{Aire(C_i)} \sum_{j \in K(i)} \left(\frac{Q_i^k + Q_j^k}{2} \right) \vec{\eta}_{ij}, \tag{5.4}$$

avec $\vec{\eta}_{ij}$ et $K(i)$ définis précédemment.

5.2 Résultats Numériques

Nous présentons dans cette partie une série d'expériences numériques afin de tester la méthode de volumes finis en maillages hybrides (rectangles-triangles). Une comparaison numérique portant sur différents schémas d'ordre élevé est également proposée. Enfin, une attention particulière est donnée à l'utilisation de ces maillages hybrides lorsqu'ils sont associés au matériau PML pour le calcul de Surface Equivalente Radar (SER).

5.2.1 Problèmes instationnaires

On rappelle que le milieu de propagation considéré est le vide . Dans cette partie, les calculs numériques ont été effectués en champ total. De par la nature des tests considérés (calculs de résonnance), seule intervient dans ce paragraphe la condition de type métal parfait qui borne le domaine de calcul. Le nombre de Courant est pris égal à un.

Propagation d'un mode de résonance dans une cavité

Nous considérons une cavité rectangulaire définie de la façon suivante :
CR $= \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq x_0,\, 0 \leq y \leq y_0\}$, avec $x_0 = 80$m et $y_0 = 40$m.
L'intéret de ce cas académique est la connaissance des solutions analytiques (voir [16] par exemple). On se propose de suivre l'évolution en temps du mode propre (8,4) de cette cavité. On initialise alors le champ électromagnétique (mode TM) avec la solution analytique à l'instant $\tau = 0$ en tous les points du maillage :

$$\begin{cases} H_x(\vec{x},0) = H_y(\vec{x},0) = 0 \\ E_z(\vec{x},0) = \sin(k_1 x)\sin(k_2 y) \end{cases}$$

avec $k_1 = k_2 = \dfrac{\pi}{10}$.
Afin de pouvoir comparer les différents schémas définis précédemment on se propose de déterminer le nombre de points par longueur d'onde λ nécessaire à l'obtention d'une erreur $\bar{E}_{rel}$ fixée. $\bar{E}_{rel}$ est l'erreur sur l'énergie. Elle est définie de la façon suivante :

$$E_{rel}(\tau) = \frac{\left(\displaystyle\int_{\Omega_h} \mid E^{ex}(\tau) - E^{app}(\tau) \mid^2 \, d\Omega_h\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\displaystyle\int_{\Omega_h} \mid E^{ex}(\tau) \mid^2 \, d\Omega_h\right)^{\frac{1}{2}}}$$

où $E^{app}(\tau)$ et $E^{ex}(\tau)$ sont les énergies approchées et exactes respectivement. Finalement, on obtient :

$$\bar{E}_{rel} = \sum_{\tau} \Delta\tau \mid E_{rel}(\tau) \mid$$

Le tableau 5.1 met en évidence le manque de précision du schéma à l'ordre un : 41 points par longueur d'onde sont nécessaires pour obtenir une erreur de l'ordre de 17%. D'autre part, il est intéressant de noter que pour un schéma donné et une erreur donnée, le maillage en triangles (drapeau anglais) conduit à une augmentation relativement sensible du nombre de points par longueur d'onde par rapport à une grille en rectangles. Par exemple, pour une erreur fixée à moins de 3% avec le schéma RK3, $\gamma = 1$ et $\beta = \dfrac{1}{3}$, le maillage en triangles nécessite 22 points alors que pour la grille rectangulaire 16 points suffisent. Ceci s'explique aisément par le caractère diffusif du schéma en triangles [15]. D'un autre coté la valeur du paramètre γ du schéma joue également un rôle important quant aux nombres de points par longueur d'onde nécessaire à l'obtention d'une certaine erreur. En effet, si l'on choisit, par exemple, une grille rectangulaire et que l'on désire une erreur de moins de 3%, le schéma avec $\gamma = 1$ nécessite 16 points tandis que pour $\gamma = 0.1$, 14 points sont suffisants. Ceci se traduit par un gain sur le nombre de points du maillage total de l'ordre de 25%.

TAB. 5.1 – *: Nombre de points par longueur d'onde pour une erreur donnée*

	moins de 3 %	**entre 3 et 5 %**	**entre 5 et 10 %**	**plus de 10 %**
RK1 rectangle	...	...	...	**41 (17%)**
RK3 rectangle $\gamma = 1.$	**16 (2.7%)**	14 (3%)	12 (6%)	9 (12%)
RK3 triangle $\gamma = 1.$	**22 (2.3%)**	17 (4.8%)	14 (8%)	12 (11%)
RK3 rectangle $\gamma = 0.1$	**14 (1.7%)**	12 (3.1%)	9 (6.8%)	7 (14%)
RK3 triangle $\gamma = 0.1$	16 (2%)	14 (3%)	12 (6.8%)	9 (11%)

On peut donc en déduire que dans ce cas particulier, le schéma qui semble le mieux adapté à l'obtention de résultats précis pour le champ électromagnétique, est un schéma évalué sur une grille à mailles rectangulaires avec un paramètre γ de l'ordre de 0.1.
Avec ce schéma (RK3, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 0.1$), on propose maintenant de valider la méthode sur une grille hybride (triangles-rectangles). Le tableau 5.2 donne les erreurs $\bar{E}_{rel}$ obtenues avec ce schéma pour des maillages (triangles, rectangles et hybride) correspondant à 14 points par longueur d'onde. Comme on pouvait s'y attendre, l'erreur obtenue avec le maillage hybride (2.4%) se situe entre les deux erreurs obtenues avec les grilles en triangles (3.%) et en rectangles (1.7%).

TAB. 5.2 – *: $\bar{E}_{rel}$ suivant le type de maillage*

	grille rectangulaire	grille hybride	grille triangulaire
$\bar{E}_{rel}$	1.7%	2.4%	3.%

Fréquences de résonance pour une cavité

Nous considérons maintenant une cavité carrée de longueur 1m. Le champ électromagnétique (mode TM) est alors initialisé par une gaussienne centrée en un point de la cavité. Le nombre de Courant (CFL) est pris égal à 0.75. Une transformation de Fourier est réalisée sur environ 1500 pas de temps pour obtenir le spectre de E_z en un point de la cavité.
Dans un premier temps, nous proposons de comparer le schéma classique d'ordre 3 ($\gamma = 1.$) avec celui proposé et déja étudié dans les sections précédentes ($\gamma = 0.1$). Le maillage utilisé est une grille rectangulaire. Le mode fondamental est alors discrétisé avec une trentaine de points par longueur d'onde. Nous avons reporté sur la figure 5.4 le spectre de E_z en fonction de la fréquence en GHz pour ces deux schémas. Les flèches verticales représentent les fréquences de résonance exactes [16]. Nous observons que dans les deux cas les 4 premières fréquences sont bien capturées. Comme dans l'étude précédente on peut noter la meilleure précision obtenue lorsque le paramètre γ est égal à 0.1. En effet, avec cette valeur du paramètre γ, on constate (fig.5.4) que plusieurs autres fréquences sont capturées, en particulier la cinquième fréquence.
En conséquence, nous décidons d'utiliser ce schéma (avec $\gamma = 0.1$) pour tester la méthode

en maillage hybride. On décide de comparer les spectres obtenus suivant les deux types de maillage considérés : grille rectangulaire et maillage hybride. Néanmoins on conserve la même discrétisation pour le mode fondamental (environ 30 points par longueur d'onde). Nous avons reporté sur la figure (5.5) le spectre de E_z en fonction de la fréquence en GHz pour ces deux maillages et on observe une bonne concordance des résultats.

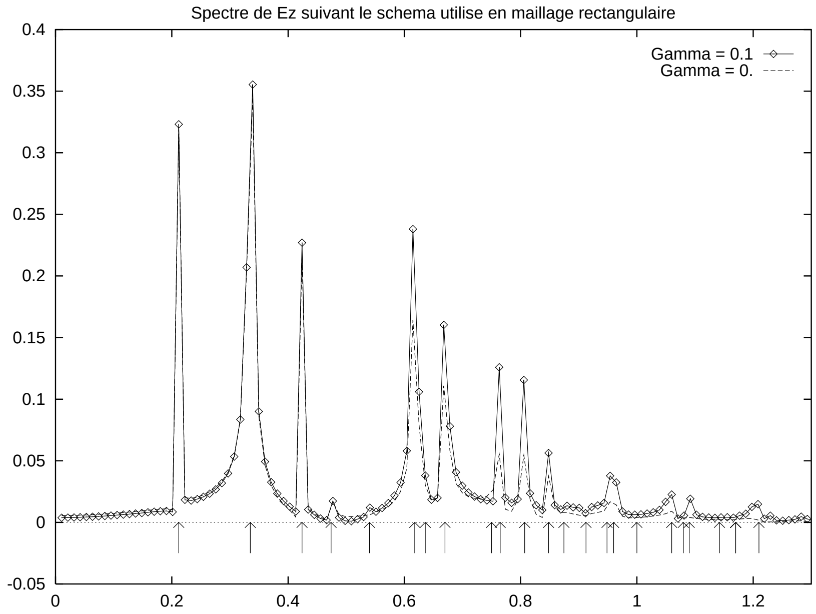

FIG. 5.4 – *Spectre de E_z en fonction du schéma utilisé*

Diffraction d'un pulse sur un cylindre infini

Nous simulons ici la diffraction d'une impulsion (onde à support compact) sur un cylindre métallique de section circulaire. La géométrie du problème rend plus naturel l'utilisation d'un maillage hybride que pour les calculs précédents dans des cavités carrées. Ainsi, dans un proche voisinage du cercle, le maillage utilisé sera constitué de triangles ; loin de l'objet on utilisera un maillage en rectangles (voir figure 5.6).

L'onde incidente est représentée par la donnée d'un champ électrique égal à une onde harmonique TM sur une demi-longueur d'onde et nul ailleurs :

$$E_z^{inc} = \cos\{|\ k\ |\ (x\cos\theta + y\sin\theta - \tau)\}\ \chi_{[a,b]},$$

où $[a,b]$ est le support de l'impulsion, θ l'angle d'incidence et k le nombre d'onde. Les expressions des autres composantes du champ électromagnétique se déduisent des équations

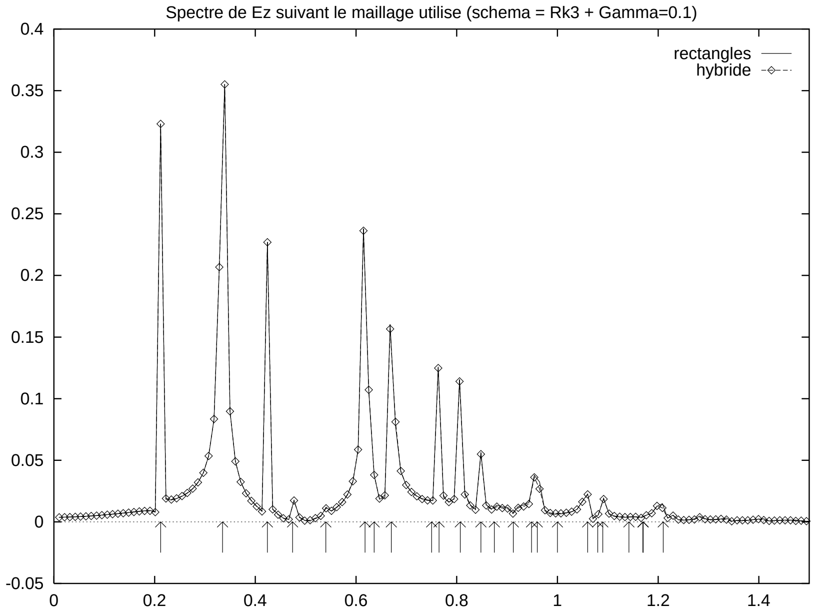

FIG. 5.5 – *Spectre de E_z en fonction du maillage utilisé*

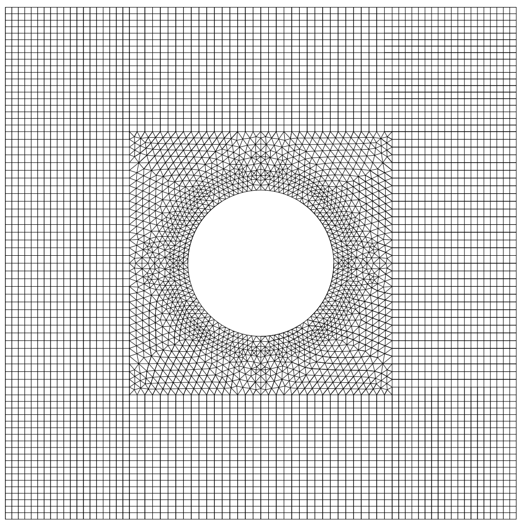

FIG. 5.6 – *Maillage hybride pour le cylindre*

de Maxwell. L'onde incidente illumine le coté droit du cercle. Les figures (5.7) représentent l'évolution temporelle du champ électrique total E_z en deux temps différents, suivant le type de maillage utilisé : à gauche, un maillage en triangles et à droite, un maillage hybride. On remarquera les bons comportements des solutions en champ total ainsi que la bonne correspondance des solutions obtenues avec le maillage hybride et celui en triangles. Le pas de discrétisation correspond ici à une quinzaine de points par longueur d'onde.

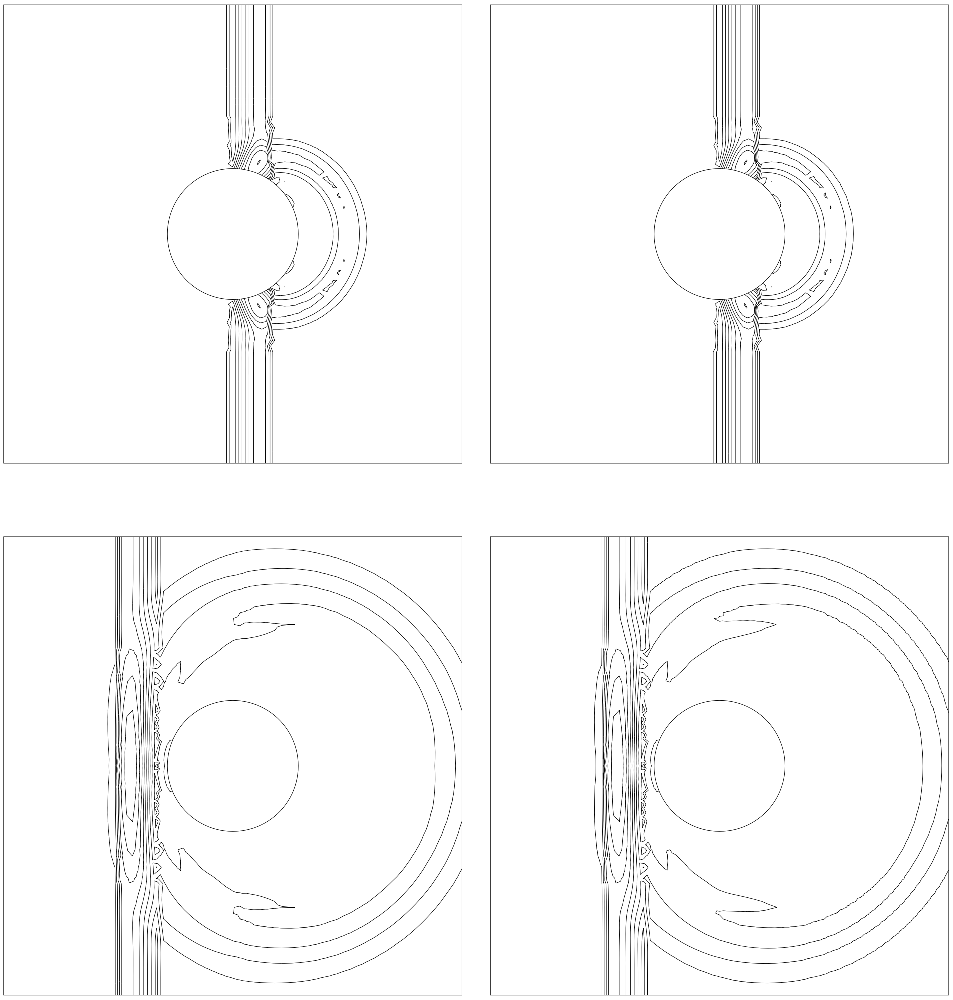

Fig. 5.7 – *Evolution temporelle du champ électrique total E_z (gauche : non struturé - droite : hybride)*

Remarque 5.2.1 *: On cherche à valider le schéma sur un maillage hybride, seuls des critère d'ordre qualitatif sont retenus. On se contente donc ici de l'utilisation de la condition de décentrage à l'infini.*

5.2.2 Problème harmonique : calculs de SER

On s'intéresse maintenant à la propagation d'ondes harmoniques. Une application classique concernant ce domaine est le calcul de surface équivalente radar (SER). Elle consiste à évaluer la puissance rayonnée dans une certaine direction par un objet lorsqu'il est illuminé par une onde incidente émise par un radar. Le lecteur intéressé par les détails de la

méthode utilisée pour calculer cette SER pourra se référer à [11] par exemple.
On utilise ici comme condition aux limites, une adaption des matériaux PML de Bérenger (voir section 2.4) qui permet de placer la frontière Γ_∞ à une longueur d'onde λ de l'objet diffractant [39].
On propose ici de comparer les résultats obtenus sur le calcul de la SER suivant le type de maillage considéré.

Cylindre de section circulaire

Des résultats de SER bistatiques sont maintenant présentés pour un cylindre métallique de section circulaire avec un maillage hybride. Ces résultats, traités en polarisation TM, seront comparés à la fois aux résultats obtenus en maillage triangulaire ainsi qu'aux solutions exactes [33]. Le cylindre est ici illuminé par une onde incidente harmonique et les calculs sont poursuivis jusqu'à ce que la solution atteigne un état stationnaire périodique [11].
Le cylindre métallique placé dans le vide est tel que $ka_0 = 5$ où k est le nombre d'onde et a_0 le rayon.
La comparaison entre les résultats obtenus avec les différents maillages se fera à l'aide de l'erreur relative en norme L^2 de la SER :

$$EL2 = \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{N} \mid S_{app}(\theta_k) - S_{ex}(\theta_k) \mid^2}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N} \mid S_{ex}(\theta_k) \mid^2}},$$

avec $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{N}$, S_{ex} la SER exacte et S_{app} la SER calculée avec les différents maillages. Le maillage hybride est similaire à celui de la figure (5.6). Le pas de discrétisation pour les deux maillages correspond à une quinzaine de points par longueur d'onde. Le tableau 5.3 met en évidence la similitude des résultats obtenus avec les deux types de maillage pour une frontière Γ_∞ placée à une longueur d'onde du cercle.

Profil d'aile

On s'intéresse maintenant au calcul de la Surface Equivalente Radar pour un profil d'aile NACA0012. Ce test est plus complexe que le précédent et la solution exacte n'est pas connue. Néanmoins, on utilisera comme donnée de référence une SER comparée et validée avec d'autres méthodes numériques (méthode intégrale en particulier [40]). De la

TAB. 5.3 – : *EL^2 pour le cylindre*

	Maillage en triangles	Maillage hybride
erreur ($\times 10^{-3}$)	7.65	7.7

même façon que pour le cylindre infini, on illumine le profil d'aile métallique par une onde plane TM à une incidence de 90 deg. L'obstacle a une longueur de 4λ et la fréquence de l'onde incidente est de 1.2 GHz. Le nombre de points par longueur d'onde utilisé pour la maillage (voir figure (5.8)) est de l'ordre de 20. On rappelle que la frontière fictive Γ_∞ est placée à une longueur d'onde du profil.

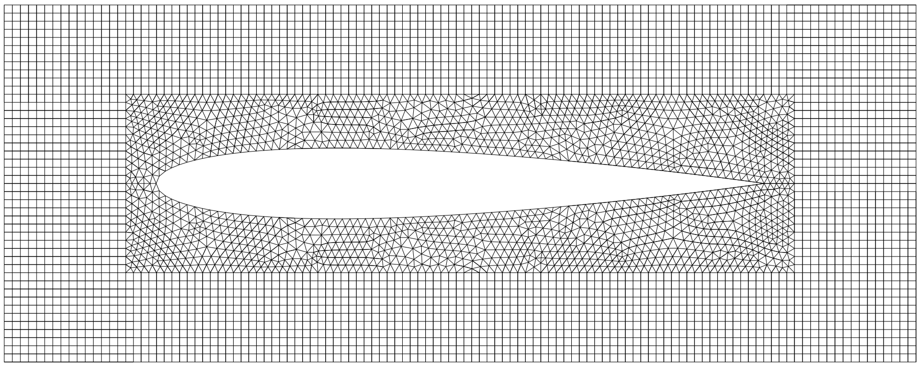

FIG. 5.8 – *Maillage hybride pour le profil d'aile*

De la même façon que pour le cylindre métallique, on se propose d'évaluer l'erreur relative EL^2 de la SER. La SER exacte est alors remplacée par la solution de référence précisée ci dessus.
Le tableau 5.4 met une fois de plus en évidence la bonne correspondance des résultats obtenus avec les deux types de maillage.
Finalement, on montre sur la figure 5.9 le diagramme de SER obtenu avec notre méthode. On le compare avec la SER calculée à l'aide du schéma volume fini classique sur un

TAB. 5.4 – : *EL^2 pour le profil d'aile*

	Maillage en triangles	Maillage hybride
erreur ($\times 10^{-3}$)	2.5	2.6

maillage entièrement non structuré (solution de référence). On peut remarquer la très bonne correspondance entre les deux solutions. Il est à noter que la solution de référence a été obtenue en utilisant la condition de décentrage à l'infini pour une frontière Γ_∞ placée à deux longeurs d'onde de l'aile. La SER présentée sur la figure 5.9, grâce au milieu PML, est obtenue avec Γ_∞ placée à une longueur d'onde du profil.

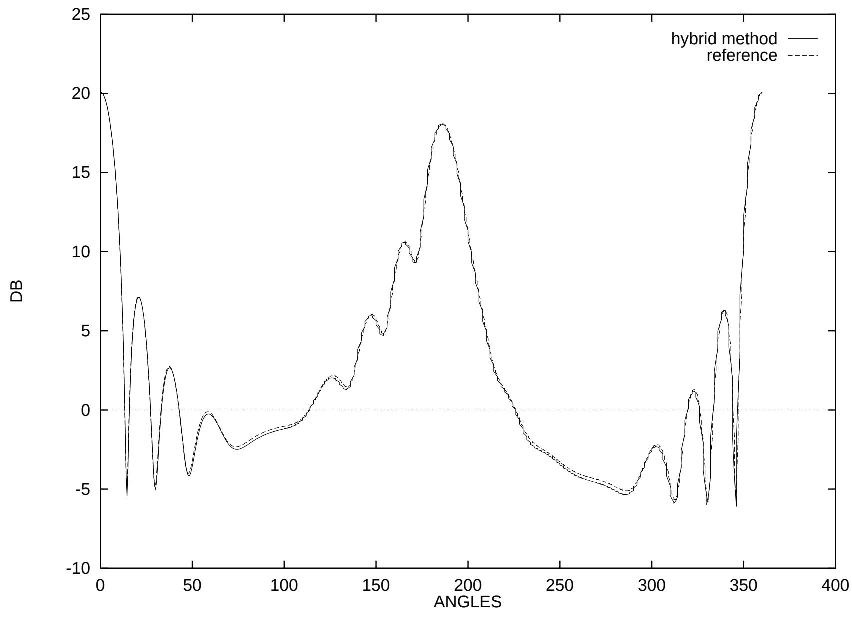

FIG. 5.9 – *Comparaison des SER pour le NACA0012 (cas TM)*

5.2.3 Coûts comparés des méthodes

Nous présentons maintenant des séries de mesures du coût en temps CPU suivant les maillages utilisés pour la diffraction d'ondes sur un cylindre infini. Ces mesures ont été réalisées sur une machine DEC ALPHA 400/233.

On utilisera pour ces tests un maillage triangulaire et un maillage hybride. Néanmoins le nombre de points pour la discrétisation sera rigoureusement le même pour ces deux maillages. On représente dans le tableau 5.5 les caractéristiques des maillages utilisés pour cette étude. Dans ce cas, le maillage hybride entraine une diminution de l'ordre de

TAB. 5.5 – *: Caractéristiques des maillages*

	Maillage en triangles	Maillage hybride
noeuds	5776	5776
segments	16940	12912
éléments	11164	7136

20% pour le nombre de segments et de l'ordre de 35% pour le nombre d'éléments. Ceci ce traduit par un gain en temps de calcul au niveau des gradients de l'ordre de 25% et de 20% pour les flux.

La figure (5.10) montre les temps de calcul CPU en fonction des itérations en temps nécessaire à un calcul de diffraction suivant le type de maillage considéré. Le maillage hybride conduit à un certain gain en temps CPU par rapport à un calcul sur maillage triangulaire.

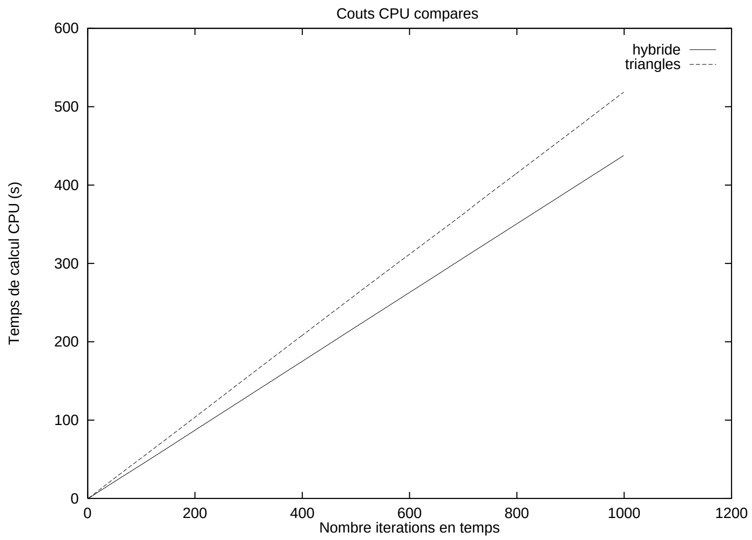

FIG. 5.10 – *Temps CPU suivant le maillage*

Remarque 5.2.2 *: Ces comparaisons ont été réalisées sans les conditions de type PML dans le but de chiffrer le gain effectif apporté par la seule hybridation du maillage.*

Conclusion

Nous avons présenté ici nos premiers résultats sur la résolution des équations de Maxwell en maillage hybride.
La comparaison des résultats avec ceux obtenus avec la même méthode numérique sur une grille triangulaire s'est révélée en faveur des maillages hybrides. La qualité des solutions est préservée avec un gain en temps de calcul de l'ordre de 20%.
Malgré ces résultats assez encourageants en deux dimensions d'espace, il nous semble difficile d'étendre telle quelle cette méthode au cas tridimensionnel. En effet, en trois dimensions d'espace, on ne peut pas recoller de façon conforme des tétraèdres et des héxaèdres sans intercaler d'autres éléments à l'interface comme des pyramides à base carrée par exemple. A notre connaissance, de telles techniques ne sont pas intégrées dans les logiciels de maillage existants. De plus, notre choix des volumes de contrôle (cellule centrée aux noeuds) nous obligerait à des calculs coûteux pour évaluer les normales des différents volumes de contrôle, et en particulier des cellules centrés aux interfaces des différents éléments. Il semblerait donc que l'utilisation de maillage multi-éléments dans le cas tridimensionnel ne soit envisageable à moindre coût qu'à condition d'utiliser à la fois des volumes de contrôle centrés aux éléments et des recollements non conformes. Ce travail fait actuellement l'objet d'une thèse préparée par M.Remaki [41].

Chapitre 6

Étude bibliographique sur les conditions absorbantes

Ce chapitre est paru sous forme d'un raport Cermics (N^o 96-52) intitulé “Rapport bibliographique sur les conditions aux limites absorbantes pour la propagation d'ondes”. Rédigé au cours de l'année 1995, il présente une liste, non exhaustive, des principaux travaux portant sur le sujet des conditions aux limites effectués jusqu'à cette date. En particulier, la métohde des matériaux fictifs absorbants proposée par Bérenger [12, 13] y est présentée. Cependant, depuis ce rapport bibliographique, un très grand nombre de travaux a été consacré au développement de ces nouveaux matériaux absorbants dans le cadre de l'électromagnétisme. Ces contributions n'apparaissent alors évidemment pas dans ce chapitre. Il nous a semblé cependant important d'en citer ici quelques unes. En particulier, les milieux PML ont été adaptés aux coordonnées curvilignes par F. Collino et P. Monk [42]. Il est également intéressant de noter que l'utilisation de ces matériaux parfaitement absorbant a débordé du cadre iniial des applications de l'électromagnétisme. En effet, nous retrouvons cette méthode dans [43] pour la simulation d'ondes élastiques ainsi que dans [44, 45] pour les équations d'Euler et la liste est loin d'être exhaustive.

Introduction

L'étude bibliographique présentée dans ce rapport a été menée dans le but de recenser le maximum d'informations disponibles traitant de la simulation numérique de problèmes de propagation d'ondes posés dans un domaine non borné. Pour absorber les ondes sortantes, deux méthodes sont fréquemment utilisées dans les codes de calcul. La première consiste à obtenir sur la frontière fictive une condition aux limites absorbante (CLA), approximation de la condition aux limites transparente (CLT) non locale. La seconde consiste à entourer le domaine de calcul par un matériau absorbant délimité par une frontière de type conducteur parfait.
Le papier est divisé en quatre parties. Les trois premières traitent de la méthode des conditions aux limites absorbantes. La première partie établit les définitions, présente le problème à résoudre ainsi que les propriétés que l'on doit essayer de vérifier. La seconde s'attache à la résolution du problème modèle de l'équation des ondes scalaire. On rappelera de quelle façon on peut déterminer la condition aux limites transparente et ses différentes approximations pour obtenir les conditions aux limites absorbantes. Dans la troisième partie, on s'attache à l'obtention des CLA pour le système de Maxwell instationnaire. On verra les différentes approches qu'il est classique de considérer. Enfin, la quatrième et dernière partie met en avant la seconde méthode utilisée pour borner le domaine de calcul, à savoir l'utilisation de matériau absorbant. Cette dernière partie est essentiellement fondée sur les travaux récents de Bérenger [12, 13].

6.1 Présentation du problème

Le problème des conditions aux limites artificielles apparaît lorsque l'on doit calculer la solution dans un domaine fini d'un problème posé dans un domaine infini. Pour des raisons d'implémentation numérique (il n'existe pas de domaine infini sur machine), une méthode utilisée couramment dans la pratique consiste à limiter le domaine de calcul en imposant une frontière artificielle notée par la suite Γ. Le domaine de calcul, noté Ω, est alors borné (voir figure 6.1).

On va chercher à obtenir une solution du problème aux limites qui soit la restriction à Ω de la solution du problème posé dans tout l'espace. Dans ce cas là, la condition aux limites sur Γ est appelée **condition aux limites transparente** (CLT). Cette CLT n'entraine, par définition, aucune réflexion sur la frontière artificielle, mais elle a l'inconvénient

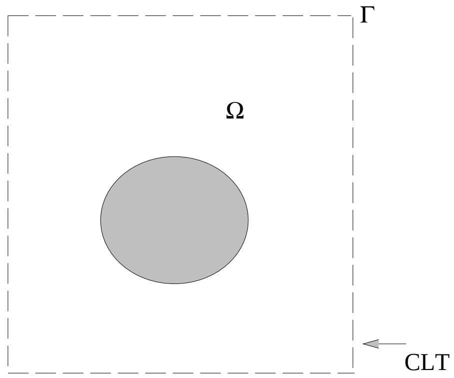

FIG. 6.1 – *Présentation du problème*

d'être généralement non locale en espace et en temps et par conséquent peu commode d'utilisation. On va donc chercher à approcher cette condition exacte : on parlera alors de **conditions aux limites artificielles** , ou **absorbantes** (pour des raisons énergétiques), ou bien encore **approchées** (CLA). On verra par la suite qu'il existe différentes approximations qui conduisent à de nombreuses CLA; néanmoins la CLA retenue doit vérifier certains critères:

- être locale en temps et en espace,
- conduire à un problème aux limites bien posé,
- minimiser les réfléxions parasites sur Γ,
- minimiser l'éloignement de Γ.

Dans le cas des problèmes stationnaires, la condition aux limites transparente est représentée par une équation intégrale sur le bord. Ce type de problèmes n'entrant pas dans le cadre de notre étude, le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à [46, 47]. Pour les problèmes hyperboliques, la stratégie la plus fréquemment utilisée consiste à déterminer des CLA qui rendent la frontière artificielle totalement transparente pour des ondes à incidence normale. L'obtention de conditions aux limites absorbantes de plus en plus précises obligera à augmenter le degré des opérateurs en temps et dans les variables tangentielles des approximations. Bayliss et Turkel propose dans [48] une approche différente pour l'obtention des conditions aux limites artificielles. Ils obtiennent leur famille de conditions au moyen d'une décomposition de la fonction de Green à l'infini. Le principe est le suivant: ils établissent un développement asymptotique en $\dfrac{1}{r}$ de la solution u. Ils obtiennent ainsi une famille d'opérateurs différentiels locaux notée $\mathcal{B}_m$ où quelque soit m, l'opérateur $\mathcal{B}_m$ annihile les m premiers termes du développement asymptotique. Ces résultats s'appliquent particulièrement bien pour des problèmes à symétrie sphérique. Notre étude portant sur des domaines rectangulaires on ne développera pas plus ici ces résultats. Le lecteur intéréssé pourra consulter [48].

6.2 Le problème modèle : l'équation des ondes scalaire

On se propose de rappeler ici la démarche classique afin d'obtenir les conditions aux limites pour l'équation des ondes scalaire dans un demi-espace homogène de dimension trois. Elle est basée sur l'utilisation de la transformée de Fourier dans les variables tangentielles et temporelle appliquée au problème (P).

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \ \text{ dans } \ I\!R^3 \\ + \ \text{conditions initiales en temps} \end{array} \right.$$

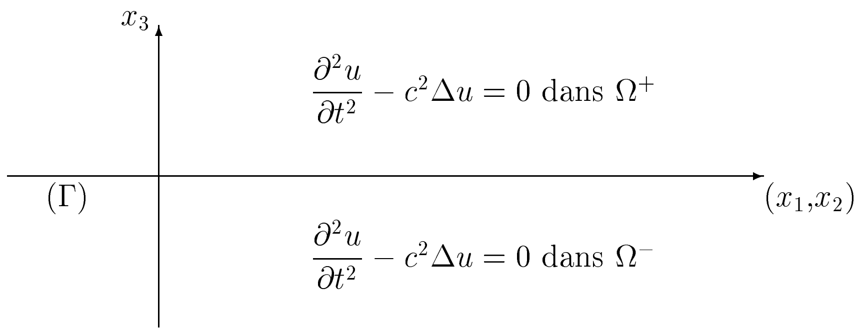

FIG. 6.2 – *Le problème modèle*

Le principe général est le suivant:

- l'espace de départ $I\!R^3$ est borné par la frontière artificielle $\Gamma = \{x_3 = 0\}$, par exemple, le domaine d'étude étant alors limité à un demi-espace (fig.6.2),
- on établit la CLT par transformée de Fourier,
- on approche l'opérateur non local de la CLT par des opérateurs différentiels: on obtient une CLA,
- on étudie alors la stabilité et le caractère bien posé du problème couplant l'équation des ondes dans le domaine intérieur et une CLA sur le bord,
- la précision de ce type de CLA se mesure à l'aide d'une étude classique par onde plane.

6.2.1 Obtention de la CLT

Le problème ainsi posé conduit à un problème de transmission à travers la frontière artificielle Γ. On impose à travers celle ci la continuité de la solution ainsi que la continuité de sa dérivée normale. Afin d'écrire une unique relation liant $u(x_1,x_2,0)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x_3}(x_1,x_2,0)$, on effectue, sur l'équation des ondes, une transformation de Fourier partielle en (x_1,x_2) et en temps t.
A l'extérieur du support des données supposé inclus dans Ω^-, on obtient l'équation différentielle ordinaire:

$$-\frac{d^2\widehat{u}}{dx_3^2} + \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\widehat{u} = 0 \ , \tag{6.1}$$

où $k = (k_1,k_2)$ et ω sont respectivement les variables duales de $x = (x_1,x_2)$ et t.
En imposant une condition de décroissance à l'infini pour $k^2 \geq \dfrac{\omega^2}{c^2}$ ainsi qu'une condition d'onde sortante à l'infini pour $k^2 \leq \dfrac{\omega^2}{c^2}$, la solution exacte s'écrit alors:

$$\widehat{u}(k,x_3,\omega) = \widehat{u}(k,0,\omega)\exp\left(-\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} x_3\right).$$

Soit, en dérivant par rapport à x_3 cette solution exacte, on obtient la *condition aux limites tranparente* (CLT) écrite en variables de Fourier:

$$\frac{d\widehat{u}}{dx_3}(k,x_3,\omega)\mid_{x_3=0} = -\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.\widehat{u}(k,x_3,\omega)\mid_{x_3=0}.$$

Finalement, en effectuant une transformation de Fourier inverse, on obtient la (CLT):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + T.u = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma, \\ \text{avec } \ \widehat{T.u} = \left(k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{u}, \end{array}\right. \tag{6.2}$$

où T est un opérateur pseudo-différentiel sur $\Gamma \times I\!R^+$ de symbole $\left(k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Cet opérateur est non local en temps et en espace.
Les solutions de cette équation se propagent dans le sens des x_3 positifs. On obtient alors le problème suivant à résoudre sur $I\!R^3_- = \{(x_1,x_2,x_3),x_3 < 0\}$:

$$(\mathrm{P}^-)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = 0 \ \text{ dans } \ I\!R^3_-, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} + T.u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \\ + \ \text{conditions initiales en temps.} \end{array}\right.$$

On montre que la solution du problème (P^-) coïncide avec la restriction à $I\!R^3_-$ de la solution de (P) : la condition est dite *transparente.*

6.2.2 Obtention des CLA

Le principe

Afin d'obtenir un opérateur plus maniable que celui obtenue par la condition transparente, on décide de l'approcher par un opérateur différentiel. L'idée de base consiste à approcher la quantité $\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ par des polynômes ou des fractions rationnelles. On s'intéresse ici particulièrement aux ondes propagatives i.e. pour des valeurs de $\frac{k^2c^2}{\omega^2} << 1$.
Ainsi on a $\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = i\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{k^2c^2}{\omega^2}}$.
Remarque: Pour $\omega = 0$ cette méthode n'est plus valable. Les approximations considérées ici sont donc plutôt des approximations hautes fréquences.
On va de la sorte obtenir une condition aux limites approchée locale, s'exprimant à l'aide d'opérateurs différentiels et qui absorbera bien les ondes planes à faible incidence.

Zoologie des approximations

Cette partie est réservée aux différentes approximations de l'opérateur T qu'il est classique de considérer. Pour chacune, on précise la CLA correspondante ainsi que les auteurs auquels on pourra se référer pour de plus amples détails.
On cherche à approcher la quantité suivante:

$$\left(1 - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad \left| \frac{k^2c^2}{\omega^2} \right| < 1 \ \text{(i.e ondes propagatives).}$$

- Développement de Taylor de $\sqrt{1-x^2}$
  - Taylor ordre 0

    (CLA) : $\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ en $x_3 = 0$.
  - Taylor ordre 1

    (CLA) : $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial t} - \frac{1}{2}\Delta_T u = 0$ en $x_3 = 0$, où $\Delta_T = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$.

– Fractions rationnelles

On écrit:

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \sum_{j=1}^{J} \beta_j \frac{x^2}{1-\alpha_j x^2},$$

où les α_j et les β_j sont réels. Si on choisit ces $2J$ coefficients tels que:

$$\begin{cases} \beta_j = \dfrac{2}{2J+1} \sin^2\left(\dfrac{j\pi}{2J+1}\right), \\ \\ \alpha_j = \cos^2\left(\dfrac{j\pi}{2J+1}\right), \end{cases}$$

on obtient les approximants de Padé.

Pour $J = 1$, on a la CLA suivante sur la frontière $x_3 = 0$:

$$\text{(CLA)}: \quad \frac{1}{c^3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x_3 \partial t^2} - \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_T u) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\Delta_T u) = 0. \qquad (6.3)$$

Les conditions aux limites absorbantes obtenues par développements successifs de Taylor ou de Padé ont été proposées par Engquist-Majda. Pour un complément d'informations, on pourra se référer à [49, 50].

D'une facon plus générale, on peut conserver comme inconnues les $2J$ coefficients α_j et β_j. L'approximation de la fonction $\sqrt{1-x^2}$ est en $O(x^{4J+2})$. La méthode qui suit est présentée par Collino dans [51].

Une fois retenue l'approximation par fractions rationnelles on obtient la CLA suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x_3} - \displaystyle\sum_{j=1}^{J} \beta_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2} - \alpha_j \Delta_T \varphi_j = \Delta_T u_{|x_3=0} \;\; \textit{pour} \;\; j = 1...J. \end{cases}$$

Cette formulation, inspirée du domaine des équations paraxiales, fait appel à J fonctions auxiliaires définies sur la frontière. Ces conditions se révélent de qualité ajustable (on dispose de $2J$ degrés de liberté), ce qui permet d'obtenir des conditions d'ordre élevé.

Remarque: Collino [51], Joly et Vezinet [52] proposent une extension de ces CLA au cas de l'équation des ondes avec terme d'amortissement.

6.2.3 Analyse mathématique des CLA

On rappelle dans cette partie les méthodes ainsi que les résultats mathématiques assurant la stabilité et le caractère bien posé du problème couplant l'équation des ondes dans le demi-plan d'étude et la CLA retenue pour la frontière artificielle. Dans un second temps, en utilisant une technique classique d'analyse par onde plane, on donnera la précision des différentes CLA retenues.

Analyse de la stabilité

La CLA choisie doit conduire à un problème mixte (conditions initiales et condition aux limites) bien posé. On se contente ici de rappeler brièvement le critère de Kreiss ([53, 54]) utilisé. A partir de ce critère on donnera les CLA dont le problème mixte associé est bien posé et celles qui engendrent des problèmes mal posés. Une méthode énergétique peut être également utilisée pour établir le caractère bien posé du problème.

On définit par *problème mixte bien posé*, un problème ayant une unique solution et dont la norme peut être estimée par les normes des conditions initiales (la solution vérifie, par exemple, une estimation de type énergie).

Le critère de Kreiss revient à dire que le problème mixte (équation des ondes avec conditions initiales en temps et condition aux limites absorbante) est bien posé dans le demi-espace $x_3 < 0$ s'il n'existe pas de solutions de la forme suivante:

$$u(x_1,x_2,x_3,t) = u_0\, exp\left(\sqrt{\omega^2 + |k|^2}x_3 + ikx + \omega t\right),$$

sous les conditions:

$$Re\,\omega \geq 0 \;\; ; \;\; Re\sqrt{\omega^2 + |k|^2} \geq 0 \;\; et \;\; k \neq 0,$$

où $k = (k_1,k_2) \in I\!R^2$; $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2$ et $x = (x_1,x_2)$.

Engquist et Majda ([49]) montrent que pour des développements de Taylor d'ordre supérieur à deux, les CLA obtenues conduisent à des problèmes mal posés. En revanche, ils montrent que celles obtenues par développement de Padé engendrent des problèmes bien posés.

Collino utilise, pour établir la stabilité de ces CLA, un résultat établi par Halpern et Trefethen ([55]): l'équation des ondes couplée avec des conditions initiales en temps et les CLA obtenues précédemment est un problème bien posé au sens de Kreiss si et seulement si les coefficients α_i et β_i vérifient:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_J < 1, \\ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{J} \frac{\beta_j}{1-\alpha_j} < 1 \;\; ; \beta_j \geq 0. \end{array}\right. \tag{6.4}$$

Remarque importante:
Si l'on considère le problème de propagation d'onde en trois dimensions dans le huitième d'espace Γ , les CLA d'ordre 1 sont bien posées. En revanche, si on impose aux faces délimitant ce huitième d'espace des CLA d'ordre supérieur ou égal à 2, on doit alors leur rajouter des conditions de coins et d'arêtes (en dimension deux uniquement une condition de coin). Pour les CLA d'Engquist-Majda, Bamberger-Joly-Roberts obtiennent ces conditions pour l'équation des ondes scalaire en imposant simplement un critère de continuité ([56]). Par exemple, la condition sur une arête de Γ est une combinaison linéaire de l'équation des ondes et des CLA liées aux deux faces auxquelles appartient l'arête. Sous ces conditions, les auteurs montrent que le problème est bien posé.
De même, Collino propose dans [51] des conditions d'arêtes et de coin pour l'équation des ondes scalaire, avec une démarche différente. En effet, pour obtenir ces conditions, il construit une famille de solutions particulières et il écrit alors les relations satisfaites au coin et aux arêtes par ces solutions. Ainsi le résultat obtenu par cette étude est le suivant: chaque élément de la famille de solutions particulières satisfait les conditions de coin et d'arêtes. Mais la question qui se pose alors et qui reste ouverte est de savoir si *toute* solution régulière vérifie ces conditions [51].

Analyse de la précision
On s'intéresse maintenant à l'erreur induite par la frontière artificielle sur la solution du problème. Cette étude repose sur l'analyse du coefficient de réflexion $R(\theta)$ d'une onde plane arrivant sur le bord absorbant avec une incidence θ.

On cherche alors des solutions de la forme:

$$\left\{\begin{array}{rl} u(x_1,x_2,x_3,t) = & \exp\, i(-\omega t + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) \\ \\ & +R(\theta) \exp\, i(-\omega t + k_1 x_1 + k_2 x_2 - k_3 x_3), \end{array}\right.$$

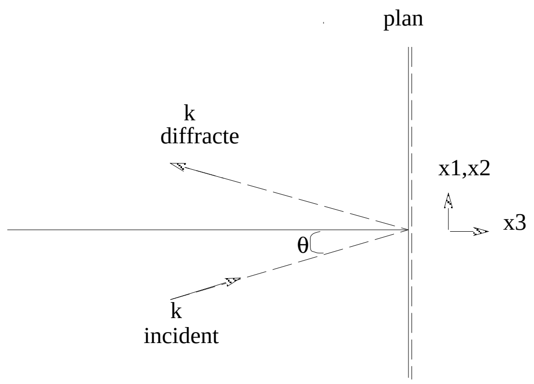

FIG. 6.3 – *Réflexion d'une onde plane*

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2), \\ \\ \cos\theta = \dfrac{k_3 c}{\omega}, \\ \\ \sin^2\theta = \dfrac{(k_1^2 + k_2^2)c^2}{\omega^2}. \end{cases}$$

Par construction, cette solution vérifie l'équation des ondes dans $\boldsymbol{R}^3$. Elle doit également satisfaire la condition aux limites artificielle retenue. On obtient alors:

$$R(\theta) = \left(\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}\right)^n.$$

Ceci permet de lier l'ordre n de l'approximation au coefficient de réflexion parasite R d'une onde plane arrivant sur la frontière artificielle Γ avec une incidence θ.

On montre que les CLA obtenues par développement de Taylor à l'ordre $n-1$ sont d'ordre n.

Par exemple, la CLA obtenue par développement de Taylor à l'ordre 0 est une approximation du 1er ordre et on a: $R(\theta) = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$.

On montre également que la CLA (6.3) obtenue par développement de Padé est une condition d'ordre 3.

On peut remarquer que:

- la frontière artificielle Γ est transparente pour une onde plane d'incidence normale,
- l'angle d'incidence θ étant fixé, et différent de $\dfrac{\pi}{2}$, le coefficient de réflexion R est d'autant plus faible que n est grand,
- une onde rasante ($\theta = \dfrac{\pi}{2}$) est entièrement réfléchie. Ceci n'est en général pas grave dans la pratique car une telle onde reste confinée près de Γ.

6.3 CLA pour le système de Maxwell instationnaire

On présente dans cette partie deux approches pour obtenir les conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell instationnaire. Chaque composante du champ électrique $\vec{E}$ vérifie une équation des ondes dans le vide, mais ces équations restent couplées par la condition de divergence nulle ; la première méthode consiste donc à appliquer les résultats précédents à chacune des composantes du champ électrique. La seconde approche est la généralisation de la technique développée dans [49] pour les systèmes strictement hyperboliques. L'étude est similaire au cas scalaire (obtention de la CLT puis approximation) mais repose directement sur le système de Maxwell.
Les équations de Maxwell normalisées en dimension trois, régissant le comportement du champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{H})$ s'écrivent, en milieu homogène de la façon suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - r\vec{o}t\vec{H} = 0 \ , \ div\vec{E} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} + r\vec{o}t\vec{E} = 0 \ , \ div\vec{H} = 0 \\ \\ \vec{E}(x,t=0) = \vec{E}_0(x), \\ \vec{H}(x,t=0) = \vec{H}_0(x). \end{cases} \tag{6.5}$$

pour $\{x \in I\!R^3 \ \text{ et } \ t \geq 0\}$.
Les données initiales $\vec{E}_0$ et $\vec{H}_0$ sont prises à support compact dans $\Omega = \{x \in I\!R^3 \ / \ x_1 < 0\}$.
On pose la frontière artificielle $\Gamma = \{x \in I\!R^3 \ / \ x_1 = 0\}$.

6.3.1 Application du problème modèle au système de Maxwell

Si l'on applique à chaque composante du champ électrique les conditions obtenues précédemment, les schémas numériques qui en résultent sont instables [26]. On impose alors ces CLA uniquement aux composantes tangentielles du champ électrique, ce qui permet d'obtenir des schémas stables.
Dans [25], Collino adopte cette démarche pour donner, à partir des CLA obtenues dans [51] pour l'équation des ondes, des conditions d'ordre élevé pour le système de Maxwell. On commence par écrire les CLA sur chacune des faces sur lesquelles on désire imposer une condition aux limites. Pour chaque face, la condition aux limites absorbante d'ordre élevé pour l'équation des ondes 3D est donc imposée à chacune des deux composantes tangentielles du champ électrique.

Par exemple, si on considère la face $F^z = \{(x,y,z=0), x<0, y<0\}$, alors la CLA s'écrit sur cette face:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} + \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \displaystyle\sum_{j=1}^{J} \beta_j \dfrac{\partial \left(\varphi_j^{(z)}\right)_x}{\partial t} = 0 \ \text{ en } \ z=0, \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial t} + \dfrac{\partial E_y}{\partial z} - \displaystyle\sum_{j=1}^{J} \beta_j \dfrac{\partial \left(\varphi_j^{(z)}\right)_y}{\partial t} = 0 \ \text{ en } \ z=0, \\ \dfrac{\partial^2 \left(\varphi_j^{(z)}\right)_x}{\partial t^2} - \alpha_j \Delta_T \left(\varphi_j^{(z)}\right)_x = \Delta_T E_x|_{z=0} \ \textit{pour} \ j=1...J, \\ \\ \dfrac{\partial^2 \left(\varphi_j^{(z)}\right)_y}{\partial t^2} - \alpha_j \Delta_T \left(\varphi_j^{(z)}\right)_y = \Delta_T E_y|_{z=0} \ \textit{pour} \ j=1...J. \end{cases}$$

Pour chaque face sur laquelle on impose une condition aux limites artificielle, on doit construire des équations analogues. Il reste cependant un certain nombre de quantités indéterminées le long de chaque arête. Pour clore le système, il convient de rajouter des conditions de coins et d'arêtes. De la même façon que dans le cas de l'équation des ondes scalaire, elles sont obtenues en considérant une famille de solutions particulières régulières, puis en construisant un ensemble de relations de compatibilité que doivent vérifier ces solutions à l'intersection des faces. Afin que le problème ainsi obtenu soit bien posé, on rappelle que les $2J$ coefficients réels α_j et β_j sont choisis tels que (6.4) soit vérifiée.
Numériquement, Collino propose un schéma aux différences finies discrétisant les équations de Maxwell (schéma de Yee) couplé avec les CLA approchées par des équations centrées. Les CLA approchées, d'ordre élevé, nécessitent un nombre important de fonctions auxiliaires qu'il convient de stocker. Néanmoins le surcoût de l'occupation mémoire semble être compensé, au vu des expériences numériques [25], par un pouvoir absorbant plus élevé par rapport à des CLA moins coûteuses mais moins précises comme celle de Silver-Müller. Il est également intéressant de noter que la frontière sur laquelle on impose les conditions aux limites d'ordre élevé doit se situer, dans le cas de la diffraction d'une onde plane sur un parallélépipède, à une distance minimale de l'ordre d'une dizaine de mailles de l'objet diffractant. Sous cette conditon et sous la condition que les coefficients α_j,β_j soient optimisés [57], alors les résultats obtenus pour la CLA avec J=5 sont satisfaisants.

6.3.2 Étude à partir du système

La démarche utilisée ici consiste à établir directement à partir du système des équations de Maxwell (6.5) des conditions aux limites adaptées. On établit dans un premier temps la condition de transparence sur la frontière artificielle Γ. On approche cette condition non locale au voisinage de l'incidence normale. On propose deux méthodes d'approximation: par développement de Taylor ou par développement de Padé. Pour chacune de ces approximations on rappelle les résultats importants concernants la stabilité et la précision.

La Condition aux Limites Transparente

A l'extérieur du support des données le système de Maxwell peut s'écrire sous forme de système symétrique:

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t u = \sum_{i=1}^{3} A_i \partial_i u,\\ \\ u = (\vec{E},\vec{H}).\end{array}\right.$$

On effectue sur ce système une transformation de Fourier partielle dans la direction transverse (x_2,x_3) et une transformation de Laplace en temps. Les variables duales sont respectivement σ_2,σ_3 et $\tau = \eta + i\xi$ avec $\mathrm{Re}\,\tau = \eta > 0$. Le système réduit résultant de cette transformation de Fourier-Laplace se met sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre en x_1:

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_1 v = \tau M(\tau,\sigma) v,\\ \\ v =^t (\widehat{E_2},\widehat{E_3},\widehat{H_2},\widehat{H_3}),\end{array}\right. \tag{6.6}$$

avec les notations:

$$M(\tau,\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -m(\tau,\sigma) \\ m(\tau,\sigma) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad m(\tau,\sigma) = \begin{pmatrix} -\sigma_2\sigma_3\tau^{-2} & 1+\sigma_2^2\tau^{-2} \\ -(1+\sigma_3^2\tau^{-2}) & \sigma_2\sigma_3\tau^{-2} \end{pmatrix}.$$

Les deux autres composantes $(\widehat{E_1},\widehat{H_1})$ du champ électromagnétique se déduisent des autres composantes par combinaisons linéaires.
La matrice $M(\tau,\sigma)$ est diagonalisable et admet deux valeurs propres doubles:

$$\lambda^{+,-} = \pm(1+ \mid\sigma\mid^2 \tau^{-2})^{\frac{1}{2}},$$

avec $\mathrm{Re}\lambda^+ > 0$ et $\mathrm{Re}\lambda^- < 0$.
A partir de (6.6), on calcule la solution générale:

$$v = T^t \left(C_1 \exp(\tau\lambda^- x_1), C_2 \exp(\tau\lambda^- x_1), C_3 \exp(\tau\lambda^+ x_1), C_4 \exp(\tau\lambda^+ x_1)\right),$$

où T est la matrice de passage à la forme diagonale. Pour des raisons d'intégrabilité, le domaine d'étude étant $x_1 > 0$, on doit avoir $v \in \mathcal{L}(r_1,r_2)\exp(\tau\lambda^- x_1)$, où r_1,r_2 sont les vecteurs propres à droite de $M(\tau,\sigma)$ associés à la valeur propre λ^-. On obtient alors la CLT du problème de Maxwell qui s'écrit en variables de Fourier-Laplace:

$$\Pi^+(\tau,\sigma)v = 0, \tag{6.7}$$

avec Π^+, projecteur sur le sous espace propre associé à la valeur propre λ^+. On peut alors écrire la CLT de la façon suivante:

$$(\widehat{E} \wedge n) \wedge n + N(\tau,\sigma)(\widehat{H} \wedge n) = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma, \tag{6.8}$$

où n est la normale extérieure à Γ et

$$N(\tau,\sigma) = (1 + |\sigma|^2 \tau^{-2})^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 + \sigma_2^2\tau^{-2} & \sigma_2\sigma_3\tau^{-2} \\ \sigma_2\sigma_3\tau^{-2} & 1 + \sigma_3^2\tau^{-2} \end{pmatrix}.$$

On montre ([28]) que (6.8) est équivalente à la CLT proposée par Bendali-Halpern ([24]). Cette condition s'écrit:

$$\left(I - \frac{4\alpha(\varepsilon)}{|\varepsilon|^4} G(\varepsilon)\right) \begin{pmatrix} \widehat{E}_2 \\ \widehat{E}_3 \end{pmatrix} + \left(I + \frac{4\alpha(\varepsilon)}{|\varepsilon|^4} G(\varepsilon)\right) \begin{pmatrix} -\widehat{H}_3 \\ \widehat{H}_2 \end{pmatrix}_{|x_1=0} = 0, \tag{6.9}$$

où

$$\begin{cases} \varepsilon_j = \sigma_j \xi^{-1} \quad \mathrm{j} = 2,3, \\ \varepsilon = (\varepsilon_2,\varepsilon_3) \;\text{ et }\; |\varepsilon|^2 = \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2, \\ \\ \alpha(\varepsilon) = 1 - \dfrac{1}{2}|\varepsilon|^2 - \sqrt{1 - |\varepsilon|^2}, \\ \\ G(\varepsilon) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2 & -2\varepsilon_2\varepsilon_3 \\ -2\varepsilon_2\varepsilon_3 & -(\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2) \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{6.10}$$

A partir de cette CLT, il convient, comme dans le cas modèle, d'obtenir des approximations de ces opérateurs afin d'avoir des conditions aux limites locales en temps et en espace.

Approximation par développement de Taylor

Le projecteur Π^+ est approché de la façon suivante:

$$\lim_{\eta \to 0} \Pi^+(\tau = \eta + i\xi, \sigma) = \Pi^+(\xi, \sigma).$$

En tenant compte des variables homogènes (6.10) définies dans la section précédente on a: $\Pi^+(\xi,\sigma) = \Pi^+(1,\varepsilon)$.
On approche alors $\Pi^+(1,\varepsilon)$ pour des ondes à incidence proche de celle de la normale sur la frontière artificielle ($|\varepsilon|$ petit). Dans [28], l'approximation choisie consiste à considérer le développement de Taylor du projecteur Π^+.
Un développement à l'ordre 0 donne, après une tranformation de Fourier inverse:

$$(\vec{E} \wedge n) \wedge n + (\vec{H} \wedge n) = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma,$$

où n est la normale extérieure à $]0, +\infty[\times\Gamma$. C'est la condition absorbante d'ordre un de Silver-Müller.
Comme la différentielle première du projecteur est nulle pour $|\varepsilon| = 0$, on propose alors un développement à l'ordre 2 du projecteur. Après une transformée de Fourier inverse, on obtient alors une série de quatre CLA qui ne se déduisent pas les unes des autres. Ainsi pour une CLT donnée on n'a pas unicité de la CLA pour le système de Maxwell. On donne par exemple la CLA sur Γ obtenue par Bendali-Halpern dans [24]:

$$\partial_t^2\{(\vec{E} \wedge n) \wedge n + \vec{H} \wedge n\} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2^2 - \partial_3^2 & 2\partial_2\partial_3 \\ 0 & 2\partial_2\partial_3 & \partial_3^2 - \partial_2^2 \end{pmatrix}(\vec{E} \wedge n) \wedge n = 0. \tag{6.11}$$

On verra dans la section 6.3.3 que ces CLA obtenues par développement de Taylor ne sont pas optimales.

Approximation par développement de Padé

Dans [27], à partir de la CLT (6.9), Oumansour établit une famille de CLA en utilisant les approximants de Padé de $\sqrt{1 - |\varepsilon|^2}$ donnés par:

$$\begin{cases} P_1(\varepsilon) = 1, \\ P_2(\varepsilon) = 1 - \dfrac{1}{2}|\varepsilon|^2, \\ P_{N+1}(\varepsilon) = 1 - \dfrac{|\varepsilon|^2}{1 + P_N(\varepsilon)}. \end{cases}$$

On a l'ordre d'approximation suivant: $\sqrt{1-|\varepsilon|^2} - P_N(\varepsilon) = O(|\varepsilon|^{2N})$.
En posant: $Q_N(\varepsilon) = \dfrac{4}{|\varepsilon|^4}\left(1 - \dfrac{1}{2}|\varepsilon|^2 - P_{N+1}(\varepsilon)\right)$, on obtient l'ordre d'approximation: $\dfrac{4\alpha(\varepsilon)}{|\varepsilon|^4} - Q_N(\varepsilon) = O(|\varepsilon|^{2N-2})$.
En tenant compte de ces approximations dans la CLT de Bendali-Halpern (6.9) et après différents calculs (cf [27]), on obtient la famille de CLA:

$$\mathcal{B}_{N-1}(\partial_n,\partial_2,\partial_3,\partial_t)\left[\mathcal{P}(\vec{E} + n \wedge \vec{H})\right]_{|\Gamma} = 0,$$

où $\mathcal{P}$ est la projection sur le plan tangent et $\mathcal{B}_{N-1}$ est un opérateur différentiel de degré $N-1$ défini de la façon suivante:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_0 = 2, \\ \mathcal{B}_1 = \partial_n + \partial_t, \\ \mathcal{B}_N = \partial_t \mathcal{B}_{N-1} - \dfrac{1}{4}\Delta_T \mathcal{B}_{N-2}. \end{cases}$$

La condition ainsi obtenue peut être vue comme l'application de l'opérateur $\mathcal{B}_{N-1}$ d'Engquist-Majda ([50]) à la condition de radiation de Silver-Müller. Pour les opérateurs $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ d'ordre respectif 0 et 1, on retrouve la condition de Silver-Müller et la CLA de Joly et Mercier ([26]) respectivement.

Approximations et résultats numériques

Différents types de schéma numérique peuvent être utilisés pour la résolution des équations de Maxwell avec les conditions aux limites absorbantes obtenues dans les paragraphes précédents. Notamment on peut citer l'utilisation par Joly-Mercier [26] d'un schéma d'approximation par différences finies de type saute mouton pour les équations de Maxwell, les équations de la CLA d'ordre deux sur la frontière fictive étant alors approchées par une discrétisation centrée du second ordre en temps et en espace. Du point de vue du coût en temps de calcul et d'occupation mémoire, la condition aux limites du second ordre de Joly-Mercier est plus avantageuse que les conditions proposées par Collino. En revanche, les résultats numériques obtenus avec cette CLA semblent moins bons que ceux obtenus par les CLA d'ordre élevé de Collino.
Il est intéressant de noter également que Sesques dans [28] propose une discrétisation par éléments finis vectoriels de classe $H(rot)$ pour l'équation du second ordre sur le champ électrique, la partie temporelle est alors intégrée par un schéma de type Newmark. Les conditions aux limites testées en dimension deux d'espace sont d'ordre un et deux. La

CLA d'ordre un est prise en compte dans la formulation varationnelle, et celle d'ordre deux est intégrée de façon ponctuelle. Les tests présentés viennent confirmer le bon comportement de la CLA d'ordre deux par rapport à celle d'ordre un, quelque soit l'angle d'incidence de l'onde plane sur la frontière absorbante. Cependant aucune étude précise ne porte sur la distance entre le bord absorbant et l'objet diffractant.

6.3.3 Propriétes des CLA obtenues

L'analyse de la stabilité des problèmes mixtes associés à des systèmes hyperboliques linéaires est très technique. Les résultats théoriques obtenus notamment par Kreiss ([53]) et Higdon ([54]) assurant la nature bien posé du problème mixte requièrent des hypothèses restrictives. En particulier, ces hypothèses ne sont pas vérifiées par le système des équations de Maxwell. Dans [58], Majda et Osher établissent une généralisation de la théorie de Kreiss: les hypothèses y sont moins restrictives et les critères restent les mêmes. Ainsi on dira que les CLA obtenues précédemment conduisent à un problème mixte bien posé au sens de Kreiss dans le demi-espace $x_1 < 0$ s'il n'existe pas de solution de la forme:

$$u = u_0 \;\; exp(\sqrt{\tau^2 + \mid \sigma \mid^2} x_1 + i\sigma x' + \tau t),$$

sous les conditions:

$$\mathrm{Re}\, \tau \geq 0; \quad \mathrm{Re} \sqrt{\tau^2 + \mid \sigma \mid^2} > 0 \quad \text{et} \quad \tau \neq 0,$$

avec les notations:

$$u = (\vec{E},\vec{H}) \quad \sigma = (\sigma_2,\sigma_3) \in I\!R^2 \quad \mid \sigma \mid^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad x' = (x_2,x_3).$$

A l'aide de ce critère Sesques montre ([28]) que les différentes CLA obtenues par développement de Taylor d'ordre deux du projecteur conduisent toutes à des problèmes mixtes mal posés. Néanmoins, il est intéressant de remarquer que dans le cas bidimensionnel le problème mixte associé à certaines des CLA est bien posé. De la même façon que dans le cas de l'équation des ondes scalaire, l'ordre de la CLA est obtenue par une analyse par onde plane. On peut noter de plus que la condition du second ordre établie par Bendali et Halpern (6.11) s'exprime à l'aide d'opérateurs différentiels du second ordre ce qui la rend difficile à approcher par des méthodes numériques.

La famille de CLA établie par Oumansour permet de généraliser la condition aux limites obtenue par Joly et Mercier ([26]) de façon intuitive. Cette famille de CLA possède des propriétés très intéressantes:

- le problème posé dans un demi-espace est bien posé au sens de Kreiss,

- pour un opérateur différentiel d'ordre $N-1$ ($\mathcal{B}_{N-1}$), la condition est d'ordre N, en particulier la condition d'ordre deux s'exprime à l'aide d'opérateurs différentiels d'ordre un,
- la condition est intrinsèque: elle est invariante par rotation des composantes tangentielles sur Γ,
- il n'y a pas de couplages de polarisations des champs réfléchis sur la frontière artificielle.

6.4 Une approche différente: les couches absorbantes

Une autre approche pour résoudre des problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques posés dans un domaine non borné consiste à entourer le domaine d'étude par un matériau absorbant fictif (cf fig.6.4).

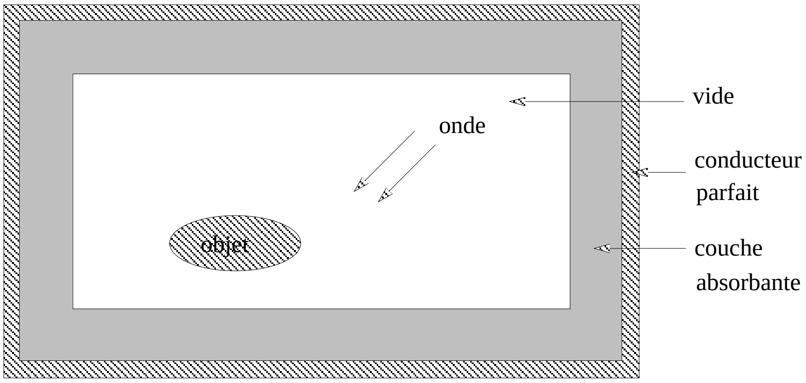

FIG. 6.4 – *Couche absorbante pour le cas 2-D*

Les matériaux absorbants fictifs utilisés jusqu'alors [4] pour des schémas temporels aux différences finies vérifiaient uniquement la condition d'adaptation d'impédance suivante :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \tag{6.12}$$

où σ et σ^* représentent respectivement la conductivité électrique et magnétique du milieu, ε_0 et μ_0 la permittivité et la perméabilité du vide. Cette condition assurant l'égalité entre l'impédance du vide et celle du milieu, seules les ondes planes à incidence normale n'engendrent aucune réflexion à l'interface vide-milieu.
Bérenger propose une technique dans le cas bidimensionnel [12] permettant d'obtenir un

coefficient théorique de réflexion nul pour une onde plane arrivant sur l'interface vide-milieu quelque soit la fréquence ou l'angle d'incidence.
L'extension au cas tridimensionnel ne posant aucun problème [13, 30], on rappelle ici brièvement la technique dans un cas bidimensionnel. En coordonnées cartésiennes, les équations de Maxwell bidimensionnelles dans un matériau absorbant s'écrivent, dans le cas Transverse Electrique (T.E.) [2] de la façon suivante:

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \dfrac{\partial H_z}{\partial y}, \\[2ex] \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = -\dfrac{\partial H_z}{\partial x}, \\[2ex] \mu_0 \dfrac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = \dfrac{\partial E_x}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial x}. \end{array}\right.$$

Le milieu proposé par Bérenger, appelé *couche parfaitement absorbante*, noté milieu PML, est obtenu en introduisant un nouveau degré de liberté. On décompose, dans le cas T.E., la composante H_z en deux sous-composantes H_{zx} et H_{zy}. Le milieu PML ainsi déterminé est un milieu dans lequel le champ électromagnétique a quatre composantes et vérifie le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \dfrac{\partial \left(H_{zx} + H_{zy}\right)}{\partial y}, \\[2ex] \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\dfrac{\partial \left(H_{zx} + H_{zy}\right)}{\partial x}, \\[2ex] \mu_0 \dfrac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\dfrac{\partial E_y}{\partial x}, \\[2ex] \mu_0 \dfrac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \dfrac{\partial E_x}{\partial y}. \end{array}\right.$$

Remarques:

- Si $\sigma_x = \sigma_x^* = \sigma_y = \sigma_y^* = 0$ alors on a les équations de Maxwell dans le vide,
- Si $\sigma_x = \sigma_y$ et $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$ alors on a les équations de Maxwell dans un milieu conducteur classique,
- Si $\sigma_x = \sigma_y$ et $\sigma_x^* = \sigma_y^*$ alors on a les équations de Maxwell dans un milieu absorbant.

On considère maintenant une interface plane (par exemple $x = 0$) séparant deux milieux PML, chacun caractérisé par les deux composantes de ses conductivités électrique et

magnétique. On notera ainsi un tel milieu : PML (σ_{xi},σ^*_{xi},σ_{yi},σ^*_{yi}) pour i= 1,2. Une analyse par onde plane montre que si l'on prend : $\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_y$ et $\sigma^*_{y1} = \sigma^*_{y2} = \sigma^*_y$ et que les couples (σ_{x1},σ^*_{x1}), (σ_{x2},σ^*_{x2}) et (σ_y,σ^*_y) vérifient la loi (6.12) alors le coefficient de réflexion de cette onde sur l'interface $x = 0$ séparant ces deux milieux particuliers est nul quelques soient l'angle d'incidence et la fréquence. En particulier, une interface $\{x = 0\}$ séparant le vide (milieu PML(0,0,0,0)) et un milieu PML(σ_x,σ^*_x,0,0) possède cette propriété. Tous ces résultats s'étendent aux cas Transverse Magnétique (la composante E_z est décomposée en E_{zx},E_{zy}) [12] et tridimensionnel [13, 30].
Pour fermer le domaine d'étude, Bérenger propose de mettre une condition de type métallique après le matériau absorbant. Il reste donc à étudier la réflexion de l'onde plane sur le bord parfaitement conducteur limitant le milieu PML.

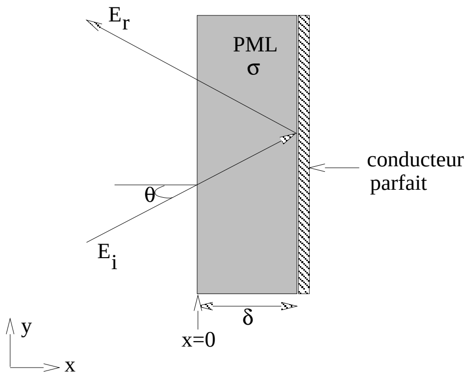

FIG. 6.5 – *Réflexion sur le bord métallique*

L'amplitude d'une onde plane sortante se propageant dans le milieu PML peut s'écrire sous la forme:

$$E(x) = E(0)exp\left(-\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0 c}\cos\theta.x\right),$$

où θ est l'angle d'incidence. Après avoir traversé le milieu PML de largeur δ, l'onde plane se réfléchit sur le conducteur parfait, puis traverse à nouveau le milieu PML pour revenir enfin dans le vide (cf fig.6.5). Le coefficient de réflexion de l'onde plane sur le bord métallique est alors donné par:

$$R(\theta) = \exp\left(-2\frac{\sigma_x\cos\theta}{\varepsilon_0 c}\delta\right),$$

où δ est la largeur du milieu PML. Le milieu PML étant fictif, le choix de la conductivité σ_x est libre. Bérenger propose la loi suivante:

$$\sigma(x) = \sigma_{max}\left(\frac{x}{\delta}\right)^n.$$

Dans ce cas là, le coefficient de réflexion peut alors s'écrire:

$$R(\theta) = [R(0)]^{\cos\theta},$$

avec $R(0) = exp\left(-\dfrac{2}{n+1}\dfrac{\sigma_{max}\delta}{\varepsilon_0 c}\right)$.

On peut alors noter que trois paramètres controlent l'amplitude de la réflexion sur le bord métallique :

- la largeur du milieu PML,
- le coefficient théorique de réflexion à incidence normale (R_0),
- le choix de la conductivité.

Bérenger propose une approximation numérique basée sur un schéma aux différences finies en domaine temporel. Les différents tests numériques réalisés permettent de comparer cette nouvelle approche avec des conditions aux limites absorbantes classiques ; les résultats obtenus avec une onde plane harmonique sont bien meilleurs avec une telle technique. Ils permettent également de vérifier numériquement le bon comportement du matériau absorbant losque l'angle d'incidence de l'onde plane varie. De plus, il ressort de ces tests que les propriétés théoriques obtenues pour ce matériau PML se conservent pour un tel schéma. Il est intéressant de noter également le très bon comportement du matériau losque l'onde sortante est de type pulse et non plus harmonique. On peut en effet réduire considérablement dans ce cas là les réflexions parasites issues du bord du domaine de calcul. Enfin, des résultats numériques tridimensionnels [13] montrent que cette technique permet de rapprocher sensiblement le bord du domaine de calcul de l'objet diffractant par rapport à une condition absorbante classique.

De nombreux travaux sont venus confirmer et étendre [30, 31] cette nouvelle méthode. Les milieux PML ont été notamment testés pour l'étude des guides d'onde [29, 59, 60]. Il ressort de ces applications certaines limitations des couches PML, notamment le mauvais comportement du matériau fictif dans le cas d'ondes évanescentes. Néanmoins Gribbons, Lee et Cangellaris [29] proposent une version modifiée de la technique développée par Bérenger. Ils utilisent les coordonnées étendues ([60]) afin d'obtenir des résultats satisfaisants dans le cas d'ondes évanescentes.

Conclusion

Cette étude sur les conditions aux limites absorbantes n'est pas exhaustive. Néanmoins elle regroupe les différentes techniques qui semblent les plus usitées dans la pratique.

Les résultats numériques présentés sont difficilement comparables de par la différence des schémas utilisés et des cas tests considérés. Cepandant, la technique développée récemment par Bérenger nous semble la plus prometteuse. Il semblerait en effet que tant du point de vue de la précision, que du coût de calcul et de l'occupation mémoire cette méthode soit la plus efficace. A ce sujet il semblerait intéressant d'adapter et de tester cette nouvelle méthode avec d'autres types de schémas numériques.

Conclusion

Le but de cette thèse était d'améliorer, dans le double objectif coût-précision, une méthode de volumes finis pour la résolution du système de Maxwell instationnaire.
Tout d'abord nous nous sommes intéressés au problème des conditions aux limites. Après avoir mené une étude bibliographique sur le sujet, nous nous sommes axés, pour des raisons de coût et d'optimisation de calcul, sur la technique des matériaux fictifs parfaitement absorbant (PML). Des expériences numériques en deux et trois dimensions d'espace ont été effectuées avec ce milieu PML pour absorber les ondes sortantes et les résultats obtenus révèlent un bon comportement des solutions. En particulier le domaine de calcul a pu être réduit de moitié, en deux dimensions d'espace, par rapport à une condition de décentrage à l'infini.
Il s'est avéré lors de cette étude que le schéma numérique choisi dans un premier temps présentait un caractère diffusif en temps long. Nous nous sommes donc attachés à construire et à étudier un nouveau schéma afin de réduire le taux de dissipation. Ce schéma, appelé schéma d'ordre trois modifié, requiert le même temps de calcul que le schéma d'ordre 3 classique du fait du jeu des valeurs des paramètres β et γ.
Finalement, toujours dans la perspective de réduire les temps de calcul, nous avons proposé l'extension de ces schémas numériques de type volumes finis au cas des maillages multi-éléments en deux dimensions d'espace.
Cependant, il est apparu clairement lors de cette étude en volumes finis multi-éléments bidimensionnelle que l'extension au cas tridimensionnel n'était pas chose simple. En effet, l'utilisation de maillages multi-éléments conformes en trois dimensions d'espace nécessite l'introduction d'un nouveau type d'élément à l'interface entre les tétraèdres et les cubes : les pyramides à base carrée. Outre les problèmes directs liés au maillage la méthode nous parait lourde et difficile à implémanter. Il semble donc que les schémas de type volumes finis centrés aux noeuds ne soient pas la méthode adéquate pour l'utilisation de maillages multi-éléments. Il est donc nécessaire pour avoir recours à de tels maillages d'utiliser un autre formalisme. L'implémentation de schémas en volumes finis mais centrés

maintenant aux éléments devrait permettre sans difficulté majeure l'emploi de maillages multi-éléments. Cette nouvelle méthode fait l'objet de travaux en cours [41].

En ce qui concerne l'utilisation de matériau PML pour simuler l'infini, les résultats obtenus sont encourageants et nous pensons avoir montré l'efficacité d'une telle méthode à travers les différents test numériques présentés. Une des perspectives de ce travail serait maintenant de paralléliser cette méthode et de l'étendre aux volumes finis centrés aux éléments.

Annexe A

$$\mathcal{A}_1^+(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_1^-(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Annexe B

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = diag(\sigma_y,\sigma_x,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_x,\sigma_x)$$

$$B_2 = diag(\sigma_z - \sigma_y,\sigma_z - \sigma_x,\sigma_y - \sigma_x,\sigma_z - \sigma_y,\sigma_z - \sigma_x,\sigma_y - \sigma_x)$$

$$B_4 = diag(\sigma_z,\sigma_z,\sigma_y,\sigma_z,\sigma_z,\sigma_y)$$

Annexe C

La discrétisation spatiale utilisée dans la section 4.1.1 correspond au système semi-discret associé à chaque noeud I (les indices I et h sont omis) :

$$U_t + \Psi(U) = 0\,,$$

où Ψ représente la discrétisation spatiale.
On rappelle ici l'algorithme d'intégration temporelle multi-pas Runge-Kutta utilisé (RK3) :

$$\begin{cases} U^0 = U^n \\ U^l = U^0 - \dfrac{\Delta t}{(4-l)}\Psi(U^{l-1}) \quad l = 1,2,3 \\ U^{n+1} = U^3 \end{cases}$$

où Δt représente le pas de temps tel que : $t^n = n\Delta t$.

Annexe D

On donne ici le flux numérique Φ_I obtenu dans le cas du schéma écrit en maillage **rectangulaire**. On a :

$$\frac{dU_I}{dt} = -\frac{\Phi_I}{\Delta x \Delta y},$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi_I = \quad & \Delta x \, (\tfrac{C_2}{2}(1+\beta) - \beta\gamma \mid c_2 \mid) U_{i\,j+1} \\
& -\Delta x \, (\tfrac{C_2}{2}(1+\beta) + \beta\gamma \mid c_2 \mid) U_{i\,j-1} \\
& +\tfrac{1}{4}\beta \Delta x \, (c_2 + \gamma \mid c_2 \mid) U_{i\,j-2} \\
& +\tfrac{1}{4}\beta \Delta x \, (-c_2 + \gamma \mid c_2 \mid) U_{i\,j+2} \\
& \Delta y \, (\tfrac{C_1}{2}(1+\beta) - \beta\gamma \mid c_1 \mid) U_{i+1\,j} \\
& -\Delta y \, (\tfrac{C_1}{2}(1+\beta) + \beta\gamma \mid c_1 \mid) U_{i-1\,j} \\
& +\tfrac{1}{4}\beta \Delta y \, (c_1 + \gamma \mid c_1 \mid) U_{i-2\,j} \\
& +\tfrac{1}{4}\beta \Delta y \, (-c_1 + \gamma \mid c_1 \mid) U_{i+2\,j} \\
& +\tfrac{3\beta\gamma}{2}(\mid c_2 \mid \Delta x + \mid c_1 \mid \Delta y) U_{ij}
\end{aligned}$$

Annexe E

On donne ici le flux numérique Φ_I obtenu dans le cas du schéma écrit en maillage **triangulaire**. On a :

$$\frac{dU_I}{dt} = -\frac{\Phi_I}{\Delta x \Delta y},$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi_I = \quad & A_{0,0}U_{i,j} + A_{1,1}U_{i+1,j+1} + A_{2,2}U_{i+2,j+2} + A_{1,2}U_{i+1,j+2} + A_{2,1}U_{i+2,j+1} \\
& A_{1,0}U_{i+1,j} + A_{0,1}U_{i,j+1} + A_{0,-1}U_{i,j-1} + A_{-1,0}U_{i-1,j} + A_{-1,-1}U_{i-1,j-1} \\
& A_{0,2}U_{i,j+2} + A_{-1,1}U_{i-1,j+1} + A_{-2,0}U_{i-2,j} + A_{-2,-1}U_{i-2,j-1} + A_{-1,-2}U_{i-1,j-2} \\
& A_{-2,-2}U_{i-2,j-2} + A_{1,-1}U_{i+1,j-1} + A_{0,-2}U_{i,j-2} + A_{2,0}U_{i+2,j}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&A_{0,0} = 10\beta\gamma(|N_1| + |N_2| + |N_3| + |N_4| + |N_5| + |N_6|) \\
&A_{1,1} = 6N_1 + \beta(2N_1 + 2N_2 - N_3 - 2N_4 - N_5 + 2N_6) - \beta\gamma(2\,|N_4| + |N_3| + 10\,|N_1| + |N_5|) \\
&A_{2,2} = -2\beta(N_1 - \gamma\,|N_1|) \\
&A_{1,2} = -\beta(N_1 + N_2) + \beta\gamma(|N_1| + |N_2|) \\
&A_{2,1} = -\beta(N_1 + N_6) + \beta\gamma(|N_1| + |N_6|) \\
&A_{1,0} = 6N_6 + \beta(2N_1 - N_2 - 2N_3 - N_4 + 2N_5 + 2N_6) - \beta\gamma(2\,|N_3| + |N_2| + 10\,|N_6| + |N_4|) \\
&A_{0,1} = 6N_2 + \beta(2N_1 + 2N_2 + 2N_3 - N_4 - 2N_5 - N_6) - \beta\gamma(2\,|N_5| + |N_4| + 10\,|N_2| + |N_6|) \\
&A_{0,-1} = 6N_5 + \beta(-N_1 - 2N_2 - N_3 + 2N_4 + 2N_5 + 2N_6) - \beta\gamma(|N_1| + 2\,|N_2| + 10\,|N_5| + |N_3|) \\
&A_{-1,0} = 6N_3 + \beta(-N_1 + 2N_2 + 2N_3 + 2N_4 - N_5 - 2N_6) - \beta\gamma(|N_1| + 10\,|N_3| + |N_5| + 2\,|N_6|) \\
&A_{-1,-1} = 6N_4 + \beta(2(-N_1 + N_3 + N_4 + N_5) - N_2 - N_6) - \beta\gamma(2\,|N_1| + |N_2| + 10\,|N_4| + |N_6|)
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
A_{0,2} = 2\beta(-N_2 + \gamma \mid N_2 \mid) & A_{-1,1} = -\beta(N_2 + N_3) + \beta\gamma(\mid N_2) + \mid N_3 \mid) \\
A_{-2,0} = 2\beta(-N_3 + \gamma \mid N_3 \mid) & A_{-2,-1} = -\beta(N_3 + N_4) + \beta\gamma(\mid N_3) + \mid N_4 \mid) \\
A_{-1,-2} = -\beta(N_4 + N_5) + \beta\gamma(\mid N_4 \mid + \mid N_5 \mid) & A_{-2,-2} = 2\beta(-N_4 + \gamma \mid D \mid) \\
A_{1,-1} = -\beta(N_5 + N_6) + \beta\gamma(\mid N_5 \mid + \mid N_6 \mid) & A_{0,-2} = 2\beta(-N_5 + \gamma \mid N_5 \mid) \\
A_{2,0} = 2\beta(-N_6 + \gamma \mid N_6 \mid) &
\end{array}
$$

et

$$
\begin{array}{ll}
N_1 = \frac{1}{36}(c_1\Delta y + c_2\Delta x) & N_4 = \frac{1}{36}(-c_1\Delta y - c_2\Delta x) \\
 & \\
N_2 = \frac{1}{36}(-c_1\Delta y + 2c_2\Delta x) & N_5 = \frac{1}{36}(c_1\Delta y - 2c_2\Delta x) \\
 & \\
N_3 = \frac{1}{36}(-2c_1\Delta y + c_2\Delta x) & N_6 = \frac{1}{36}(2c_1\Delta y - c_2\Delta x)
\end{array}
$$

Bibliographie

[1] Dautray (R.) et Lions (J.L.). – *Analyse mathématique et calcul numérique.* – Masson, 1987. vol 1 pp. 68-127.

[2] Joly (P.). – Equations de Maxwell et ondes électromagnétiques, quelques aspects mathématiques et numériques. – Octobre 1989. Cours INRIA, Rocquencourt.

[3] Taflove (A.). – Re-inventing electromagnetics: supercomputing solution of Maxwell's equations via direct time integration on space grids. *AIAA*, no92-0333, 1992.

[4] Yee (K.). – Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Antennes and Propagation*, 1966.

[5] Cohen (G.) et Joly (P.). – Fourth order schemes for the acoustic equation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.*, vol. 80, 1990.

[6] Nédélec (J.C.). – Mixed finite element in $I\!R^3$. *Num. Math.*, vol. 35, 1980.

[7] Cohen (G.) et Monk (P.). – Efficient edge finite elements schemes in computational electromagnetism. *In : Third international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation.* – Mandelieu la Napoule, 1995.

[8] Cohen (G.), Joly (P.) et Tordjman (N.). – Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. *In : Third international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation.* – Mandelieu la Napoule, 1995.

[9] Shankar (V.), Hall (W.F.) et Mohammadian (A.H.). – A time-domain differential solver for electromagnetic scattering problems. *In : Proceedings on the IEEE*, pp. 709–721.

[10] Cioni (J.P.), Fezoui (L.) et Issautier (D.). – High-order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equation. *La Recherche Aérospatiale*, no5, 1994, pp. 319–328. – Numéro spécial électromagnétisme.

[11] Cioni (J.P.). – *Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par*

une méthode de volumes finis. – Thèse de PhD, Université de Nice Sophia-Antipolis, 1995.

[12] Berenger (J.P.). – A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Physics*, vol. 114, octobre 1994, pp. 185–200.

[13] Berenger (J.P.). – Three-dimensional Perfectly Matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Physics*, vol. 127, 1996, pp. 363–379.

[14] Carpentier (R.). – *Approximation et analyse numérique d'écoulements instationnaires, application à des instabilités tourbillonaires.* – Thèse de PhD, Université de Nice Sophia Antipolis, 1995.

[15] Depeyre (S.). – *Etude de schémas d'ordre élevé en volumes finis pour des problèmes hyperboliques. Application aux équations de Maxwell, d'Euler et aux écoulements diphasiques dispersés.* – Thèse de PhD, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.

[16] Jackson (J.D.). – *Classical Electrodynamics.* – J.Wiley & Sons, 1975.

[17] Fezoui (L.) et Stoufflet (B.). – A class of Implicit Upwind Schemes for Euler Simulations with Unstructured Meshes. *J. Comput. Physics*, vol. 84, 1989, pp. 174–206.

[18] Dervieux (A.). – Steady Euler simulations using unstructured meshes. – 1985. Cours au Von Karman Institute Lectures Series 85-04.

[19] Lax (P.D.), Harten (A.) et Van Leer (B.). – On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Revue*, vol. 25, n° 1, 1983.

[20] Fezoui (L.). – Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis. *Rapport de Recherche INRIA*, no358, 1985.

[21] Desideri (J.A.), Goudjo (A.) et Selmin (V.). – Third-order numerical schemes for hyperbolic problems. *Rapport de Recherche INRIA*, no607, 1987.

[22] Depeyre (S.), Larrouturou (B.) et Carpentier (R.). – Méthodes numériques décentrées d'ordre élevé en deux dimensions d'espace. *Rapport de Recherche CERMICS*, no95-41, 1995.

[23] Harten (A.). – High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Physics*, vol. 49, 1983, pp. 357–393.

[24] Bendali (A.) et Halpern (L.). – Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell dans le vide en dimension trois. *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 307, n° I20, 1988.

[25] Collino (F.). – Conditions absorbantes d'ordre élevé pour les équations de Maxwell dans des domaines rectangulaires. *Rapport de Recherche INRIA*, no1991, 1993.

[26] Joly (P.) et Mercier (B.). – Une nouvelle condition transparente d'ordre deux pour les équations de Maxwell en dimension trois. *Rapport de Recherche INRIA*, no1047, 1989.

[27] Oumansour (A.). – Conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Maxwell en dimension trois. – 1989. Institut de Mathématiques U.S.T.H.B., Alger.

[28] Sesques (M.). – *Conditions aux limites artificielles pour le système de Maxwell.* – Thèse de PhD, Université de Bordeaux I, 1990.

[29] Gribbons (M.), Lee (S.K.) et Cangellaris (A.C.). – Modification of Berenger's perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves in layered media. *In : 11th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics.* – Monterey, Mars 1995.

[30] Katz (D.S.), Thiele (E.T.) et Taflove (A.). – Validation and extension to three dimensions of the Berenger PML absorbing boundary condition for fd-td meshes. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 4, 1994, pp. 268–270.

[31] Kingsland (D.M.), Sacks (Z.S.) et Lee (J.F.). – Perfectly matched anisotropic absorbers for finite element, application in electromagnetics. *In : 11th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics.* – Monterey, Mars 1995.

[32] La Bourdonnaye (A. de). – Sur le problème de Cauchy pour le système de Bérenger. *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 322, n° I, 1996, pp. 285–288.

[33] Harrington (R.F.). – *Time Harmonic Electromagnetic Fields.* – Mc Graw-Hill Book Company, 1961.

[34] Cioni (J.P.) et Steve (H.). – Finite volume schemes fot solving Maxwell equations. *In : Workshop on Approximation and numerical methods for the solution of the Maxwell equations.* – OXFORD, Mars 1995.

[35] Piperno (S.) et Depeyre (S.). – Criteria for the design of limiters yielding efficient high resolution TVD schemes. *Computers and Fluids*, 1997. – accepté pour publication.

[36] Warming (R.F.) et Hyett (F.). – The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. *J. Comput. Physics*, vol. 14, (2), 1974, p. 159.

[37] Carpentier (R.), La Bourdonnaye (A. de) et Larrouturou (B.). – Sur le calcul des équations équivalentes pour l'analyse des méthodes numériques linéaires. *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 319, n° I, 1994, pp. 757–760.

[38] Carpentier (R.), de La Bourdonnaye (A.) et Larrouturou (B.). – On the derivation

of the modified equation for the analysis of linear numerical methods. *M2AN*, vol. 31 (4), 1997.

[39] Bonnet (F.) et Poupaud (F.). – Condition aux limites de Bérenger avec un schéma temporel de type volumes finis en maillage triangulaire. *Rapport de Recherche CERMICS*, no96-53, 1996. – Accepté pour publication dans la revue Applied Numerical Mathematics.

[40] Cioni (J.P.), Fezoui (L.) et Steve (H.). – Approximation and numerical methods for the solutions of the Maxwell equations. *In : Workshop*. – Washington, Octobre 1993.

[41] Remaki (M.). – Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène. – Thèse en cours.

[42] Collino (F.) et Monk (P.). – The Perfectly Matched Layer in curvilinear coordinates. *Rapport de Recherche INRIA*, no3049, 1996.

[43] Zhang (Y.G.) et Ballman (J.). – Two techniques for the absorption of elastic waves using an artificial transition lyer. *Wave Motion*, vol. 25, 1997, pp. 15–33.

[44] Hu (F.Q.). – On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a Perfectly Matched Layer. *J. Comput. Physics*, vol. 129, 1996, pp. 201–219.

[45] Hayder (M.E.), Hu (F.Q.) et Hussaini (M.Y.). – Towards perfectly absorbing boundary conditions for Euler equations. *Icase*, no97-25, 1997.

[46] Bayliss (A.), Gunzberger (M.) et Turkel (E.). – Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM J.Appl.Math.*, vol. 42, n° 2, 1982, pp. 430–451.

[47] Johnson (C.) et Nedelec (J.C.). – On the coupling of boundary integrals and finite element methods. *Math. Comp.*, vol. 35, 1980, pp. 1063–1079.

[48] Bayliss (A.) et Turkel (E.). – Radiation boundary conditions for wave like equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 33, 1980, pp. 707–725.

[49] Engquist (B.) et Majda (A.). – Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves calculation. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 32, 1977, pp. 313–357.

[50] Engquist (B.) et Majda (A.). – Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math.Comp.*, vol. 31, n° 139, 1979, pp. 629–651.

[51] Collino (F.). – Conditions absorbantes d'ordre élevé pour des modèles de propagation d'onde dans des domaines rectangulaires. *Rapport de Recherche INRIA*, no1790, 1992.

[52] Joly (P.) et Vezinet (R.). – Conditions aux limites absorbantes pour les équations de Maxwell en milieu conducteur tridimensionnel. *Rapport de Recherche INRIA*, no1728, 1992.

[53] Kreiss (H.O.). – Initial boundary value problems for linear hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 23, 1970, pp. 277–298.

[54] Higdon (R.L.). – Initial-boundary value problem for linear hyperbolic systems. *SIAM Review*, vol. 28, n° 2, Juin 1986, pp. 177–217.

[55] Halpern (L.) et Trefethen (L.N.). – Well posedness of one way equations and absorbing boundary conditions. *Math.Comp.*, vol. 47, n° 176, 1986, pp. 421–435.

[56] Bamberger (A.), Joly (P.) et Roberts (J.E.). – Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: a solution for the corner problem. *Rapport de Recherche INRIA*, no644, 1987.

[57] Vezinet (R.), Joly (P.) et Collino (F.). – Nouvelles conditions absorbantes pour les équations de Maxwell. – Revue Scientifique de la Défense, A paraître.

[58] Majda (A.) et Osher (S.). – Initial boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 28, 1975, pp. 607–675.

[59] Reuter (C.E.), Joseph (R.M.), Thiele (E.T.), Katz (D.S.) et Taflove (A.). – Ultrawideband termination of waveguiding and multilayer structures for FD-TD simulations in 2-D and 3-D. *In: 11th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics.* – Monterey, Mars 1995.

[60] Wu (Z.) et Fang (J.). – Performance of the perfectly matched layer in modeling wave propagation in microwave and digital circuit interconnects. *In: 11th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics.* – Monterey, Mars 1995.

Résolutions efficaces pour le système de Maxwell instationnaire

• Mots-clés : **Électromagnétisme - Système de Maxwell - Conditions absorbantes - Matériau fictif PML - Volumes finis - β-γ schémas - maillage multi-éléments.**

Résumé

Ce travail a consisté essentiellement en l'élaboration de méthodes efficaces en volumes finis pour la résolution du système de Maxwell dans le domaine temporel et pour des maillages non structurés. Le but ainsi recherché est d'obtenir une excellente précision sur les résultats tout en étant capable de simuler des problèmes de plus en plus réalistes pour des coûts en temps de calcul raisonnables. Nous présentons dans un premier temps les équations de Maxwell sous forme conservative ainsi que le caractère hyperbolique de ce système. La seconde partie traite de l'approximation numérique utilisée. Il s'agit d'une méthode explicite de type volumes finis centrés aux noeuds et d'ordre trois en espace et en temps. La troisième partie est consacrée à l'adaptation des conditions absorbantes de type Bérenger, ou encore milieu PML, initialement introduite pour des méthodes de type différences finis, à notre méthode temporelle de type volumes finis en maillage non structuré. Des cas tests numériques de validation en deux et trois dimensions d'espace y figurent. Une étude d'une classe de β-γ schémas, développée dans le but de diminuer la diffusion numérique sans augmenter le coût en temps de calcul a également été menée et validée sur l'équation scalaire d'advection bidimensionnelle ainsi que sur le système de Maxwell. De plus, la méthode de volumes finis présentée pour des maillages mono-éléments a été étendue à des maillages de type multi-éléments en deux dimensions d'espace. Enfin, on trouvera à la fin de ce mémoire une bibliographie non exhaustive sur les conditions absorbantes pour la propagation d'ondes en domaine non borné.

Efficacious numerical methods for solving the time-domain Maxwell equations

• Key-words : **Electromagnetism - Maxwell system - Absorbing boundary conditions -**
Perfectly matched layer (PML) - Finite volumes - β-γ schemes - multi-elements mesh.

Abstract

This work mainly consisted in the elaboration of effacious methods based on finite volume schemes in order to solve numerically time-domain Maxwell equations using unstuctured meshes. The methods we have to construct in order to solve realistic problems must allow us to spare both time and memory place without loss of accuracy. We first present the conservative form and the hyperbolic character of Maxwell equations. The second part is mostly dedicated to numerical approximation we use. We are concerned with a third order accurate finite volume time domain scheme. The third part consists on presenting the extension of Bérenger PML absorbing layer, initially used for finite differences time domains, to our time finite volume scheme for unstructured meshes. Numerous numerical test cases are presented in two and three dimensions and serve as a validation of the method. A study of high-order upwind β-γ schemes in finite volume formulation is proposed in order to control the amount of residual viscosity keeping the same time cost. Some numerical results obtained for advection equation and Maxwell system are also presented. Furthermore, the finite volume scheme proposed here for uniform meshes is extended to hybrid meshes. Finally, a bibliography on the numerous absorbing boundary conditions for the wave propagation in exterior domain has been realised.