

Méthodes de décomposition de domaine de type relaxation d'ondes pour les équations de Maxwell

Yves Courvoisier¹

Travail sous la direction de Martin J. Gander

Université de Genève

Sophia-Antipolis, juin 2010

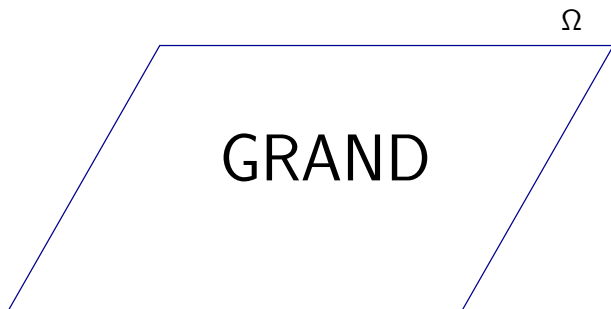
¹ yves.courvoisier@unige.ch

PLAN

1. Introduction
2. SWR appliquée aux équations de Maxwell
3. Condition de transmission classique
4. Convergence en un nombre fini de pas
5. Facteur de convergence pour l'équation des ondes
6. Conditions de transmission:
 - ▶ transparentes
 - ▶ optimisées
7. Conclusion

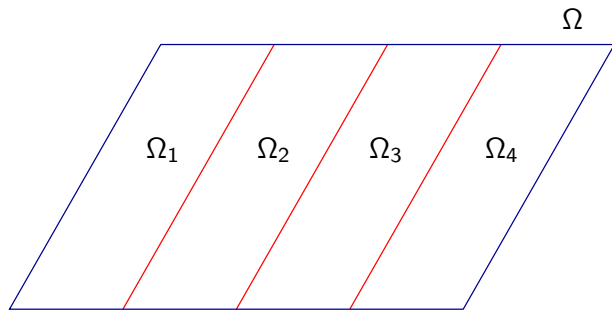
Méthode de décomposition de domaine

Schéma explicatif pour les méthodes de décomposition de domaines (DDM):



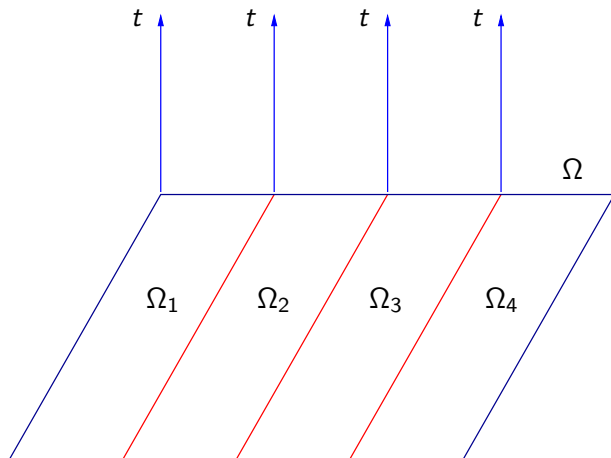
Méthode de décomposition de domaine

Schéma explicatif pour les méthodes de décomposition de domaines (DDM):



Méthode de décomposition de domaine

Schéma explicatif pour les méthodes de décomposition de domaines (DDM):



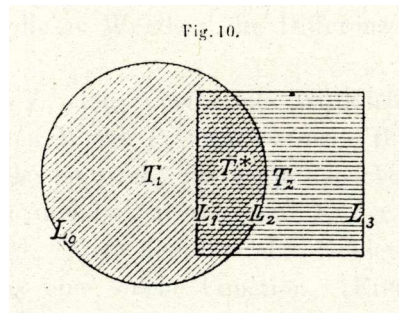
Méthode de décomposition de domaine de Schwarz

Histoire: introduit par H. A. Schwarz en 1869 pour l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{on } \Omega$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

pour une géométrie complexe illustrée par l'image originale.



La méthode de Schwarz **alternée**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1^n(x) = 0, \\ u_1^n(x) = u_2^{n-1}(x), \\ u_1^n(x) = g(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in T_1, \\ x \in L_2, \\ x \in L_0, \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_2^n(x) = 0, \\ u_2^n(x) = u_1^n(x), \\ u_2^n(x) = g(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in T_2, \\ x \in L_1, \\ x \in L_3. \end{array}$$

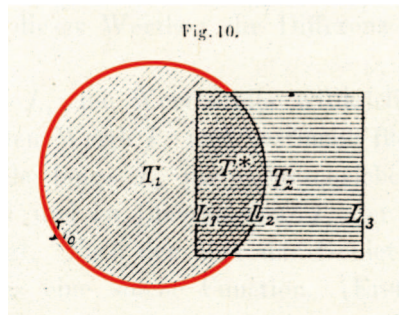
Méthode de décomposition de domaine de Schwarz

Histoire: introduit par H. A. Schwarz en 1869 pour l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{on } \Omega$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

pour une géométrie complexe illustrée par l'image originale.



La méthode de Schwarz **alternée**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1^n(x) = 0, \\ u_1^n(x) = u_2^{n-1}(x), \\ u_1^n(x) = g(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in T_1, \\ x \in L_2, \\ x \in L_0, \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_2^n(x) = 0, \\ u_2^n(x) = u_1^n(x), \\ u_2^n(x) = g(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in T_2, \\ x \in L_1, \\ x \in L_3. \end{array}$$

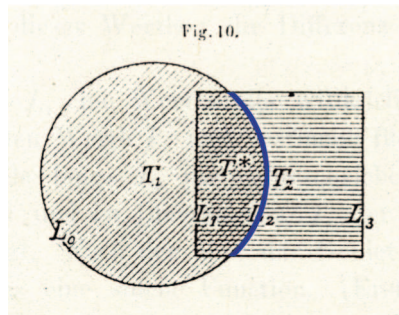
Méthode de décomposition de domaine de Schwarz

Histoire: introduit par H. A. Schwarz en 1869 pour l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{on } \Omega$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

pour une géométrie complexe illustrée par l'image originale.



La méthode de Schwarz **alternée**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1^n(x) = 0, \\ u_1^n(x) = u_2^{n-1}(x), \\ u_1^n(x) = g(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in T_1, \\ x \in L_2, \\ x \in L_0, \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_2^n(x) = 0, \\ u_2^n(x) = u_1^n(x), \\ u_2^n(x) = g(x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \in T_2, \\ x \in L_1, \\ x \in L_3. \end{array}$$

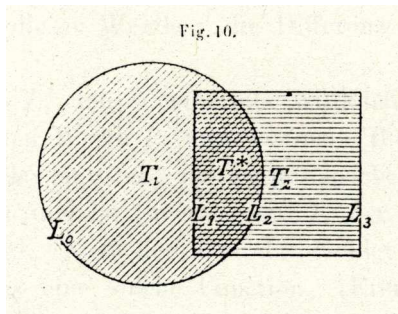
Méthode de décomposition de domaine de Schwarz

Histoire: introduit par H. A. Schwarz en 1869 pour l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{on } \Omega$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

pour une géométrie complexe illustrée par l'image originale.



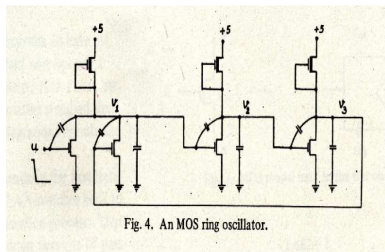
La méthode de Schwarz **parallèle**, une adaptation de P.-L. Lions pour des besoins de parallélisation en 1989:

$$\begin{cases} \Delta u_1^n(x) = 0, & x \in T_1, \\ u_1^n(x) = u_2^{n-1}(x), & x \in L_2, \\ u_1^n(x) = g(x), & x \in L_0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_2^n(x) = 0, & x \in T_2, \\ u_2^n(x) = u_1^{n-1}(x), & x \in L_1, \\ u_2^n(x) = g(x), & x \in L_3, \end{cases}$$

Méthode de relaxation d'ondes

Histoire: pour la simulation de circuit, Lelarasmee, Ruehli and Sangiovanni-Vincentelli en 1982 introduisent la méthode avec l'exemple suivant:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 + g_1(v_1, v_2, v_3) = f_1, \\ \dot{v}_2 + g_2(v_1, v_2, v_3) = f_2, \\ \dot{v}_3 + g_3(v_1, v_2, v_3) = f_3. \end{cases}$$



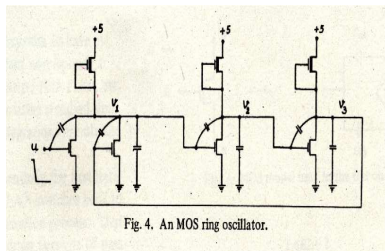
Méthode de relaxation d'ondes

Histoire: pour la simulation de circuit, Lelarasmee, Ruehli and Sangiovanni-Vincentelli en 1982 introduisent la méthode avec l'exemple suivant:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 + g_1(v_1, v_2, v_3) = f_1, \\ \dot{v}_2 + g_2(v_1, v_2, v_3) = f_2, \\ \dot{v}_3 + g_3(v_1, v_2, v_3) = f_3. \end{cases}$$

↓ WR

$$\begin{cases} \dot{v}_1^k + g_1(v_1^k, v_2^{k-1}, v_3^{k-1}) = f_1, \\ \dot{v}_2^k + g_2(v_1^k, v_2^k, v_3^{k-1}) = f_2, \\ \dot{v}_3^k + g_3(v_1^k, v_2^k, v_3^k) = f_3. \end{cases}$$



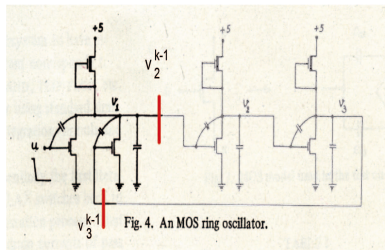
Méthode de relaxation d'ondes

Histoire: pour la simulation de circuit, Lelarasmee, Ruehli and Sangiovanni-Vincentelli en 1982 introduisent la méthode avec l'exemple suivant:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 + g_1(v_1, v_2, v_3) = f_1, \\ \dot{v}_2 + g_2(v_1, v_2, v_3) = f_2, \\ \dot{v}_3 + g_3(v_1, v_2, v_3) = f_3. \end{cases}$$

↓ WR

$$\begin{cases} \dot{v}_1^k + g_1(v_1^k, v_2^{k-1}, v_3^{k-1}) = f_1, \\ \dot{v}_2^k + g_2(v_1^k, v_2^k, v_3^{k-1}) = f_2, \\ \dot{v}_3^k + g_3(v_1^k, v_2^k, v_3^k) = f_3. \end{cases}$$



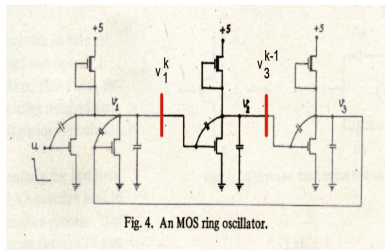
Méthode de relaxation d'ondes

Histoire: pour la simulation de circuit, Lelarasmee, Ruehli and Sangiovanni-Vincentelli en 1982 introduisent la méthode avec l'exemple suivant:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 + g_1(v_1, v_2, v_3) = f_1, \\ \dot{v}_2 + g_2(v_1, v_2, v_3) = f_2, \\ \dot{v}_3 + g_3(v_1, v_2, v_3) = f_3. \end{cases}$$

↓ WR

$$\begin{cases} \dot{v}_1^k + g_1(v_1^k, v_2^{k-1}, v_3^{k-1}) = f_1, \\ \dot{v}_2^k + g_2(v_1^k, v_2^k, v_3^{k-1}) = f_2, \\ \dot{v}_3^k + g_3(v_1^k, v_2^k, v_3^k) = f_3. \end{cases}$$



Méthode de relaxation d'ondes

Histoire: pour la simulation de circuit, Lelarasmee, Ruehli and Sangiovanni-Vincentelli en 1982 introduisent la méthode avec l'exemple suivant:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 + g_1(v_1, v_2, v_3) = f_1, \\ \dot{v}_2 + g_2(v_1, v_2, v_3) = f_2, \\ \dot{v}_3 + g_3(v_1, v_2, v_3) = f_3. \end{cases}$$

↓ WR

$$\begin{cases} \dot{v}_1^k + g_1(v_1^k, v_2^{k-1}, v_3^{k-1}) = f_1, \\ \dot{v}_2^k + g_2(v_1^k, v_2^k, v_3^{k-1}) = f_2, \\ \dot{v}_3^k + g_3(v_1^k, v_2^k, v_3^k) = f_3. \end{cases}$$

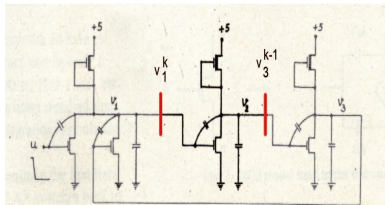


Fig. 4. An MOS ring oscillator.

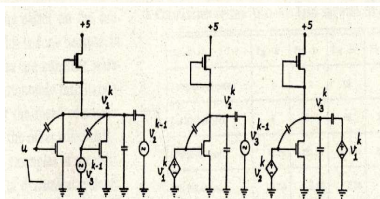


Fig. 5. The decomposition of the circuit in Fig. 4 at the k th iteration of Algorithm 4.1.

Schwarz Waveform Relaxation method

On introduit la méthode de **décomposition de domaine de type relaxation d'ondes** pour les équations de Maxwell en temps,

$$-\epsilon\partial_t\mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{H} - \sigma\mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \mu\partial_t\mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

sur $\Omega \times (0, T)$, cette méthode est parallèle par nature.

Deux idées réunies:

Problème évolutif résolu avec une **décomposition de domaine**

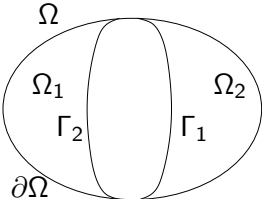
Schwarz Waveform Relaxation method

On introduit la méthode de **décomposition de domaine de type relaxation d'ondes** pour les équations de Maxwell en temps,

$$-\epsilon \partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \mu \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

sur $\Omega \times (0, T)$, cette méthode est parallèle par nature.

Pour $\mathbf{u} = (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3)^T$, $\bar{\mathbf{J}} = (\mathbf{J}, 0)^T$ et \mathcal{L} l'opérateur différentielle de Maxwell. La méthode **Schwarz Waveform Relaxation method** (SWR) est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(\mathbf{u}^{i,n}) = \bar{\mathbf{J}}, \\ \mathbf{u}^{i,n} = \mathbf{g}, \\ \mathbf{u}^{i,n}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Omega_i \times (0, T), \\ \partial\Omega \times (0, T), \\ \Omega_i, \\ \Gamma_i \times (0, T). \end{array}$$


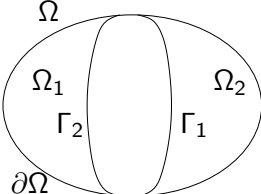
Schwarz Waveform Relaxation method

On introduit la méthode de **décomposition de domaine de type relaxation d'ondes** pour les équations de Maxwell en temps,

$$-\epsilon \partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \mu \partial_t \mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

sur $\Omega \times (0, T)$, cette méthode est parallèle par nature.

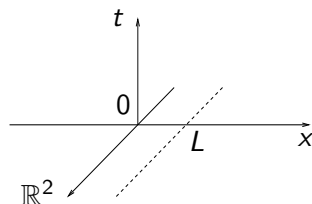
Pour $\mathbf{u} = (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3)^T$, $\bar{\mathbf{J}} = (\mathbf{J}, 0)^T$ et \mathcal{L} l'opérateur différentielle de Maxwell. La méthode **Schwarz Waveform Relaxation method** (SWR) est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}(\mathbf{u}^{i,n}) = \bar{\mathbf{J}}, & \Omega_i \times (0, T), \\ \mathbf{u}^{i,n} = \mathbf{g}, & \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}^{i,n}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 & \Omega_i, \\ \mathcal{B}_i(\mathbf{u}^{i,n}) = \mathcal{B}_i(\mathbf{u}^{j,n-1}), & \Gamma_j \times (0, T). \end{array} \right.$$


Conditions de transmission classiques

On se place dans $\Omega = \mathbb{R}^3$ avec la décomposition suivante:

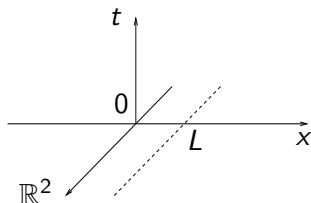
- $\Omega_1 = (-\infty, L] \times \mathbb{R}^2$,
- $\Omega_2 = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$.



Conditions de transmission classiques

On se place dans $\Omega = \mathbb{R}^3$ avec la décomposition suivante:

- $\Omega_1 = (-\infty, L] \times \mathbb{R}^2$,
- $\Omega_2 = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$.



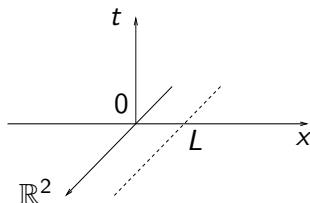
Variables caractéristiques: ($Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ impédance)

$$\begin{aligned} \Omega_1: \quad \omega_-^1 &= \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z} E_2 - H_3 \right), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z} E_3 - H_2 \right) \right)^T & \Omega_2: \quad \omega_-^2 &= \omega_+^1, \\ \omega_+^1 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z} E_2 + H_3 \right), -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z} E_3 - H_2 \right) \right)^T & \omega_+^2 &= \omega_-^1. \end{aligned}$$

Conditions de transmission classiques

On se place dans $\Omega = \mathbb{R}^3$ avec la décomposition suivante:

- $\Omega_1 = (-\infty, L] \times \mathbb{R}^2$,
- $\Omega_2 = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^2$.



Variables caractéristiques: ($Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ impédance)

$$\begin{aligned} \Omega_1: \quad \omega_-^1 &= \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z} E_2 - H_3 \right), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z} E_3 - H_2 \right) \right)^T & \Omega_2: \quad \omega_-^2 &= \omega_+^1, \\ \omega_+^1 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z} E_2 + H_3 \right), -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z} E_3 - H_2 \right) \right)^T & \omega_+^2 &= \omega_-^1. \end{aligned}$$

Conditions de transmission classiques:

$$B_1(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \omega_-^1, \quad B_2(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \omega_-^2.$$

Conditions de Dirichlet sur les variables rentrantes.

Solution dans l'espace des fréquences

Transformée de **Laplace** en temps pour l'équation de l'erreur:

$$-\epsilon s \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \sigma \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \mu s \tilde{\mathbf{H}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = 0.$$

Solution dans l'espace des fréquences

Transformée de **Laplace** en temps pour l'équation de l'erreur:

$$-\epsilon s \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \sigma \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \mu s \tilde{\mathbf{H}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = 0.$$

et une transformée de **Fourier** dans les directions y et z :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_y k_z}{\epsilon s + \sigma} & \frac{k_y^2}{\epsilon s + \sigma} + \mu s \\ 0 & 0 & -\frac{k_z^2}{\epsilon s + \sigma} - \mu s & \frac{k_y k_z}{\epsilon s + \sigma} \\ \frac{k_y k_z}{\mu s} & -\frac{k_y^2}{\mu s} - (\epsilon s + \sigma) & 0 & 0 \\ \frac{k_z^2}{\mu s} + \epsilon s + \sigma & -\frac{k_y k_z}{\mu s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solution dans l'espace des fréquences

Transformée de **Laplace** en temps pour l'équation de l'erreur:

$$-\epsilon s \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \sigma \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \mu s \tilde{\mathbf{H}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = 0.$$

et une transformée de **Fourier** dans les directions y et z :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_y k_z}{\epsilon s + \sigma} & \frac{k_y^2}{\epsilon s + \sigma} + \mu s \\ 0 & 0 & -\frac{k_z^2}{\epsilon s + \sigma} - \mu s & \frac{k_y k_z}{\epsilon s + \sigma} \\ \frac{k_y k_z}{\mu s} & -\frac{k_y^2}{\mu s} - (\epsilon s + \sigma) & 0 & 0 \\ \frac{k_z^2}{\mu s} + \epsilon s + \sigma & -\frac{k_y k_z}{\mu s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

qui a pour solution

$$\Omega_1 : (\hat{E}_2, \hat{E}_3, \hat{H}_2, \hat{H}_3)^T = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) e^{-\lambda(x-L)} + (\alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4) e^{\lambda(x-L)},$$

$$\Omega_2 : (\hat{E}_2, \hat{E}_3, \hat{H}_2, \hat{H}_3)^T = (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) e^{-\lambda x} + (\beta_3 v_3 + \beta_4 v_4) e^{\lambda x}.$$

Solution dans l'espace des fréquences

Transformée de **Laplace** en temps pour l'équation de l'erreur:

$$-\epsilon s \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \sigma \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \mu s \tilde{\mathbf{H}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = 0.$$

et une transformée de **Fourier** dans les directions y et z :

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{k_y k_z}{\epsilon s + \sigma} & \frac{k_y^2}{\epsilon s + \sigma} + \mu s \\ 0 & 0 & -\frac{k_z^2}{\epsilon s + \sigma} - \mu s & \frac{k_y k_z}{\epsilon s + \sigma} \\ \frac{k_y k_z}{\mu s} & -\frac{k_y^2}{\mu s} - (\epsilon s + \sigma) & 0 & 0 \\ \frac{k_z^2}{\mu s} + \epsilon s + \sigma & -\frac{k_y k_z}{\mu s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

qui a pour solution

$$\Omega_1 : (\hat{E}_2, \hat{E}_3, \hat{H}_2, \hat{H}_3)^T = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) e^{-\lambda(x-L)} + (\alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4) e^{\lambda(x-L)},$$

$$\Omega_2 : (\hat{E}_2, \hat{E}_3, \hat{H}_2, \hat{H}_3)^T = (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) e^{-\lambda x} + (\beta_3 v_3 + \beta_4 v_4) e^{\lambda x}.$$

Facteur de contraction

On détermine les constantes α_j et β_j à l'aide des conditions aux bords.

Facteur de contraction

On détermine les constantes α_j et β_j à l'aide des conditions aux bords.

- ▶ condition à l'infini (Silver-Müller): $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.

Facteur de contraction

On détermine les constantes α_j et β_j à l'aide des conditions aux bords.

- ▶ condition à l'infini (Silver-Müller): $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.
- ▶ condition de transmission: elle implique une relation de récurrence sur les interfaces,

$$\alpha^n = (\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L} \alpha^{n-2}, \quad \beta^n = (\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L} \beta^{n-2}.$$

Facteur de contraction

On détermine les constantes α_i et β_i à l'aide des conditions aux bords.

- ▶ condition à l'infini (Silver-Müller): $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.
- ▶ condition de transmission: elle implique une relation de récurrence sur les interfaces,

$$\alpha^n = (\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L} \alpha^{n-2}, \quad \beta^n = (\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L} \beta^{n-2}.$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -k_y k_z & k_y^2 + \mu s^2 \epsilon + \mu s \sigma + Z \lambda (\epsilon s + \sigma) \\ k_z^2 + \mu s^2 \epsilon + \mu s \sigma + Z \lambda (\epsilon s + \sigma) & -k_y k_z \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} k_y k_z & -(k_y^2 + \mu s^2 \epsilon + \mu s \sigma) + Z \lambda (\epsilon s + \sigma) \\ -(k_z^2 + \mu s^2 \epsilon + \mu s \sigma) + Z \lambda (\epsilon s + \sigma) & k_y k_z \end{bmatrix}.$$

Facteur de contraction

On détermine les constantes α_j et β_j à l'aide des conditions aux bords.

- ▶ condition à l'infini (Silver-Müller): $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.
- ▶ condition de transmission: elle implique une relation de récurrence sur les interfaces,

$$\alpha^n = (\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L} \alpha^{n-2}, \quad \beta^n = (\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L} \beta^{n-2}.$$

Le **facteur de contraction** de la méthode est donné par:

$$\rho := (\rho(\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L})^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{\lambda - s\sqrt{\epsilon\mu}}{\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu}} e^{-\lambda L} \right|$$

Facteur de contraction

On détermine les constantes α_i et β_i à l'aide des conditions aux bords.

- ▶ condition à l'infini (Silver-Müller): $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.
- ▶ condition de transmission: elle implique une relation de récurrence sur les interfaces,

$$\alpha^n = (\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L} \alpha^{n-2}, \quad \beta^n = (\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L} \beta^{n-2}.$$

Le **facteur de contraction** de la méthode est donné par:

$$\rho := (\rho(\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) e^{-2\lambda L})^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{\lambda - s\sqrt{\epsilon\mu}}{\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu}} e^{-\lambda L} \right|$$

Solution après $2n$ itérations pour $\sigma = 0$:

$$\hat{e}_1^{2n} = \left(\frac{\lambda - s\sqrt{\epsilon\mu}}{\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu}} \right)^{2n} e^{-2n\lambda L} \hat{e}_1^0,$$

où $\lambda = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu s^2 \epsilon + \mu s \sigma}$ et $e_i^n = (E_2^{i,n}, E_3^{i,n}, H_2^{i,n}, H_3^{i,n})^T$.

Convergence en un nombre fini de pas

On obtient la **transformée de Laplace inverse** à l'aide des convolutions: ($\sigma = 0$)

$$\bar{e}_i^{2n} = \mathcal{L}^{-1}(\hat{e}_i^{2n}) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{\lambda - s\sqrt{\epsilon\mu}}{\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu}}\right)^{2n}\right) * \mathcal{L}^{-1}(e^{-2n\lambda L}) * \mathcal{L}^{-1}(\hat{e}_i^0).$$

Convergence en un nombre fini de pas

On obtient la **transformée de Laplace inverse** à l'aide des convolutions: ($\sigma = 0$)

$$\bar{e}_i^{2n} = \mathcal{L}^{-1}(\hat{e}_i^{2n}) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{\lambda - s\sqrt{\epsilon\mu}}{\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu}}\right)^{2n}\right) * \mathcal{L}^{-1}(e^{-2n\lambda t}) * \mathcal{L}^{-1}(\hat{e}_i^0).$$

Convergence en un nombre fini de pas

On obtient la **transformée de Laplace inverse** à l'aide des convolutions: ($\sigma = 0$)

$$\bar{e}_i^{2n} = \mathcal{L}^{-1}(\hat{e}_i^{2n}) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{\lambda - s\sqrt{\epsilon\mu}}{\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu}}\right)^{2n}\right) * \mathcal{L}^{-1}(e^{-2n\lambda L}) * \mathcal{L}^{-1}(\hat{e}_i^0).$$

La transformée de Laplace inverse du terme exponentielle:

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-2nL\lambda}) = \begin{cases} -J_1(|k|c(t^2 - (\frac{2nL}{c})^2)^{1/2}) \frac{|k|2nL}{(t^2 - (\frac{2nL}{c})^2)^{1/2}}, & t > \frac{2nL}{c}, \\ 0, & 0 < t < \frac{2nL}{c}, \end{cases}$$

Convergence en un nombre fini de pas

On obtient la **transformée de Laplace inverse** à l'aide des convolutions: ($\sigma = 0$)

$$\bar{e}_i^{2n} = \mathcal{L}^{-1}(\hat{e}_i^{2n}) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{\lambda - s\sqrt{\epsilon\mu}}{\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu}}\right)^{2n}\right) * \mathcal{L}^{-1}(e^{-2n\lambda L}) * \mathcal{L}^{-1}(\hat{e}_i^0).$$

La transformée de Laplace inverse du terme exponentielle:

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-2nL\lambda}) = \begin{cases} -J_1(|k|c(t^2 - (\frac{2nL}{c})^2)^{1/2}) \frac{|k|2nL}{(t^2 - (\frac{2nL}{c})^2)^{1/2}}, & t > \frac{2nL}{c}, \\ 0, & 0 < t < \frac{2nL}{c}, \end{cases}$$

Theorem

L'erreur de l'algorithme SWR appliquée à Maxwell avec $\sigma = 0$, $L > 0$, et une fenêtre de temps $(0, T)$ s'annule lorsque

$$n > \frac{Tc}{2L}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \text{ (vitesse de l'onde)}$$

Conditions aux bords transparentes

On cherche des conditions de transmission telles que la solution de SWR coïncide avec la solution exacte sur le domaine Ω en 2 itérations. **Transformée de Laplace:** (pour l'erreur)

$$-\epsilon s \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \sigma \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \mu s \tilde{\mathbf{H}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = 0.$$

Conditions aux bords transparentes

On cherche des conditions de transmission telles que la solution de SWR coïncide avec la solution exacte sur le domaine Ω en 2 itérations. **Transformée de Laplace:** (pour l'erreur)

$$-\epsilon s \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \sigma \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \mu s \tilde{\mathbf{H}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = 0.$$

Theorem

Les conditions de transmission ci-dessous sont *transparentes*:

$$\omega_+^2 + \mathcal{S}_1^{\text{ex}} \omega_-^2(0, y, z) = 0, \quad \omega_-^1 + \mathcal{S}_2^{\text{ex}} \omega_+^1(L, y, z) = 0,$$

où les opérateurs \mathcal{S}_l , $l = 1, 2$, ont pour symbol en Fourier:

$$\sigma_l^{\text{ex}} = \frac{1}{(\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu})(\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu} + \sigma Z)} \begin{bmatrix} k_y^2 - k_z^2 - \lambda\sigma Z & -2k_y k_z \\ -2k_y k_z & k_z^2 - k_y^2 - \lambda\sigma Z \end{bmatrix},$$

$\mathbf{k} = (k_y, k_z)$ fréquences Fourier, $\lambda = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu s^2 \epsilon + \mu s \sigma}$.

Conditions aux bords transparentes

On cherche des conditions de transmission telles que la solution de SWR coïncide avec la solution exacte sur le domaine Ω en 2 itérations. **Transformée de Laplace:** (pour l'erreur)

$$-\epsilon s \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} - \sigma \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \mu s \tilde{\mathbf{H}} + \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = 0.$$

Theorem

Les conditions de transmission ci-dessous sont *transparentes*:

$$\omega_+^2 + \mathcal{S}_1^{\text{ex}} \omega_-^2(0, y, z) = 0, \quad \omega_-^1 + \mathcal{S}_2^{\text{ex}} \omega_+^1(L, y, z) = 0,$$

où les opérateurs \mathcal{S}_l , $l = 1, 2$, ont pour symbol en Fourier:

$$\sigma_l^{\text{ex}} = \frac{1}{(\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu})(\lambda + s\sqrt{\epsilon\mu} + \sigma Z)} \begin{bmatrix} k_y^2 - k_z^2 - \lambda\sigma Z & -2k_y k_z \\ -2k_y k_z & k_z^2 - k_y^2 - \lambda\sigma Z \end{bmatrix},$$

$\mathbf{k} = (k_y, k_z)$ fréquences Fourier, $\lambda = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \mu s^2 \epsilon + \mu s \sigma}$.

Optimized SWR ($\sigma = 0$)

On modifie alors le système SWR:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(u^{i,n}) = \bar{J}, \\ u^{i,n} = g, \\ u^{i,n}(x, 0) = u_0 \\ \mathcal{B}_i(u^{i,n}) = \mathcal{B}_i(u^{j,n-1}), \end{array} \right. \begin{array}{l} \Omega_i \times (0, T), \\ \partial\Omega \times (0, T), \\ \Omega_i, \\ \Gamma_i \times (0, T). \end{array}$$

Optimized SWR ($\sigma = 0$)

On modifie alors le système SWR:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}(u^{i,n}) = \bar{J}, & \Omega_i \times (0, T), \\ u^{i,n} = g, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u^{i,n}(x, 0) = u_0 & \Omega_i, \\ \omega_-^{i,n} + S_i^{\text{ex}} \omega_+^{i,n} = \omega_+^{j,n-1} + S_i^{\text{ex}} \omega_-^{j,n-1}, & \Gamma_i \times (0, T). \end{array} \right.$$

Optimized SWR ($\sigma = 0$)

On modifie alors le système SWR:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}(u^{i,n}) = \bar{J}, & \Omega_i \times (0, T), \\ u^{i,n} = g, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u^{i,n}(x, 0) = u_0 & \Omega_i, \\ \omega_-^{i,n} + \mathbf{S}_i^{\text{app}} \omega_+^{i,n} = \omega_+^{j,n-1} + \mathbf{S}_i^{\text{app}} \omega_-^{j,n-1}, & \Gamma_i \times (0, T). \end{array} \right.$$

Optimized SWR ($\sigma = 0$)

On modifie alors le système SWR:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}(u^{i,n}) = \bar{J}, & \Omega_i \times (0, T), \\ u^{i,n} = g, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u^{i,n}(x, 0) = u_0 & \Omega_i, \\ \omega_-^{i,n} + \mathbf{S}_i^{\text{app}} \omega_+^{i,n} = \omega_+^{j,n-1} + \mathbf{S}_i^{\text{app}} \omega_-^{j,n-1}, & \Gamma_i \times (0, T). \end{array} \right.$$

On approxime l'opérateur exacte (fréquences):

$$\sigma_i^{\text{app}} = \gamma_i \begin{bmatrix} k_y^2 - k_z^2 & -2k_y k_z \\ -2k_y k_z & k_z^2 - k_y^2 \end{bmatrix}, \quad \text{où } \gamma_i \in \mathbb{C}.$$

Optimized SWR ($\sigma = 0$)

On modifie alors le système SWR:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}(u^{i,n}) = \bar{J}, & \Omega_i \times (0, T), \\ u^{i,n} = g, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u^{i,n}(x, 0) = u_0 & \Omega_i, \\ \omega_-^{i,n} + \mathbf{S}_i^{\text{app}} \omega_+^{i,n} = \omega_+^{j,n-1} + \mathbf{S}_i^{\text{app}} \omega_-^{j,n-1}, & \Gamma_i \times (0, T). \end{array} \right.$$

On approxime l'opérateur exacte (fréquences):

$$\sigma_i^{\text{app}} = \gamma_i \begin{bmatrix} k_y^2 - k_z^2 & -2k_y k_z \\ -2k_y k_z & k_z^2 - k_y^2 \end{bmatrix}, \quad \text{où } \gamma_i \in \mathbb{C}.$$

Il faut alors choisir γ_i de telle sorte que S_i^{app} soient locaux et que le facteur de contraction correspondant soit petit.

Facteur de contraction optimisé

Avec le choix particulier $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{p - s\sqrt{\mu\epsilon}}{|\mathbf{k}|^2(p + s\sqrt{\mu\epsilon})}$, $p \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\rho^{app} = \left| \left(\frac{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2\mu\epsilon} - p}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2\mu\epsilon} + p} \right) e^{-\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2\mu\epsilon}L} \right|,$$

Facteur de contraction optimisé

Avec le choix particulier $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{p - s\sqrt{\mu\epsilon}}{|\mathbf{k}|^2(p + s\sqrt{\mu\epsilon})}$, $p \in \mathbb{C}$, on obtient

$$\rho^{app} = \left| \left(\frac{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2\mu\epsilon} - p}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2\mu\epsilon} + p} \right) e^{-\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2\mu\epsilon}L} \right|,$$

Ce choix ramène la problématique de l'optimisation à quelque chose de connu:

Equation des Ondes

Equation des ondes

Méthode SWR pour l'équation des ondes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \partial_{tt} u_i^n = \Delta u_i^n + f & \Omega_i \times (0, T) \\ u_1^n = g & \partial\Omega_i \cap \Omega \times (0, T) \\ u_1^n(\cdot, 0) = u_0|_{\Omega_i} & \Omega_i \\ \partial_t u_1^n(\cdot, 0) = u'_0|_{\Omega_i} & \Omega_i \end{array} \right.$$

Et sur les bords artificielles,

$$\mathcal{B}_{1,\Gamma_1} u_1^n = \mathcal{B}_{1,\Gamma_1} u_2^{n-1}, \text{ sur } \Gamma_1, \quad \mathcal{B}_{2,\Gamma_2} u_2^n = \mathcal{B}_{2,\Gamma_2} u_1^{n-1}, \text{ sur } \Gamma_2.$$

Equation des ondes

Méthode SWR pour l'équation des ondes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \partial_{tt} u_i^n = \Delta u_i^n + f & \Omega_i \times (0, T) \\ u_1^n = g & \partial\Omega_i \cap \Omega \times (0, T) \\ u_1^n(\cdot, 0) = u_0|_{\Omega_i} & \Omega_i \\ \partial_t u_1^n(\cdot, 0) = u'_0|_{\Omega_i} & \Omega_i \end{array} \right.$$

Et sur les bords artificielles,

$$\mathcal{B}_{1,\Gamma_1} u_1^n = \mathcal{B}_{1,\Gamma_1} u_2^{n-1}, \text{ sur } \Gamma_1, \quad \mathcal{B}_{2,\Gamma_2} u_2^n = \mathcal{B}_{2,\Gamma_2} u_1^{n-1}, \text{ sur } \Gamma_2.$$

Où le contexte est le même que précédemment:

$$\Omega = \mathbb{R}^3, \quad \Omega_1 = (-\infty, L) \times \mathbb{R}^2, \quad \Omega_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}^2.$$

Equation des ondes

Méthode SWR pour l'équation des ondes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{c^2} \partial_{tt} u_i^n = \Delta u_i^n + f & \Omega_i \times (0, T) \\ u_1^n = g & \partial\Omega_i \cap \Omega \times (0, T) \\ u_1^n(\cdot, 0) = u_0|_{\Omega_i} & \Omega_i \\ \partial_t u_1^n(\cdot, 0) = u'_0|_{\Omega_i} & \Omega_i \end{array} \right.$$

Et sur les bords artificielles,

$$\mathcal{B}_{1,\Gamma_1} u_1^n = \mathcal{B}_{1,\Gamma_1} u_2^{n-1}, \text{ sur } \Gamma_1, \quad \mathcal{B}_{2,\Gamma_2} u_2^n = \mathcal{B}_{2,\Gamma_2} u_1^{n-1}, \text{ sur } \Gamma_2.$$

Où le contexte est le même que précédemment:

$$\Omega = \mathbb{R}^3, \quad \Omega_1 = (-\infty, L) \times \mathbb{R}^2, \quad \Omega_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}^2.$$

On cherche les conditions au bord transparentes pour une convergence en deux itérations pour ensuite les approximer

Conditions transparents pour les ondes

Conditions transparentes sont données par l'opérateur DtN:

$$(\partial_{\mathbf{n}} + S_i^{ex})u_i^n = 0, \quad \text{où } \sigma_i^{ex} = \lambda = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Conditions transparentes pour les ondes

Conditions transparentes sont données par l'opérateur DtN:

$$(\partial_{\mathbf{n}} + S_i^{ex})u_i^n = 0, \quad \text{où } \sigma_i^{ex} = \lambda = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Conditions de transmission pour convergence en 2 itérations:

$$(\partial_{\mathbf{n}} + S_i^{ex})u_i^n = (\partial_{\mathbf{n}} + S_i^{ex})u_j^{n-1}.$$

Conditions transparentes pour les ondes

Conditions transparentes sont données par l'opérateur DtN:

$$(\partial_{\mathbf{n}} + S_i^{ex})u_i^n = 0, \quad \text{où } \sigma_i^{ex} = \lambda = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Conditions de transmission pour convergence en 2 itérations:

$$(\partial_{\mathbf{n}} + S_i^{ex})u_i^n = (\partial_{\mathbf{n}} + S_i^{ex})u_j^{n-1}.$$

Conditions de transmission approximées:

$$(\partial_{\mathbf{n}} + S_i^{app})u_i^n = (\partial_{\mathbf{n}} + S_i^{app})u_j^{n-1}.$$

où σ^{app} approxime λ .

Facteur de contraction pour les ondes

Pour les conditions de transmission approximées, on obtient un facteur de contraction:

$$\rho^{onde} := \left| \frac{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} - \sigma^{app}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \sigma^{app}} e^{-\lambda L} \right|.$$

Facteur de contraction pour les ondes

Pour les conditions de transmission approximées, on obtient un facteur de contraction:

$$\rho^{onde} := \left| \frac{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} - \sigma^{app}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \sigma^{app}} e^{-\lambda L} \right|.$$

Rappelle Maxwell:

$$\rho^{app} = \left| \frac{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2 \mu \epsilon} - p}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2 \mu \epsilon} + p} e^{-\lambda L} \right|.$$

Facteur de contraction pour les ondes

Pour les conditions de transmission approximées, on obtient un facteur de contraction:

$$\rho^{onde} := \left| \frac{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} - \sigma^{app}}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \sigma^{app}} e^{-\lambda L} \right|.$$

Rappelle Maxwell:

$$\rho^{app} = \left| \frac{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2 \mu \epsilon} - p}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + s^2 \mu \epsilon} + p} e^{-\lambda L} \right|.$$

Donc pour $s = i\omega$, on a ($c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$)

$$\rho^{app} = \rho^{onde}.$$

Optimisation

On cherche la solution de: (principe du maximum)

$$\min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(s, k_y, k_z)} \rho^{app} = \min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \rho^{app}$$

Optimisation

On cherche la solution de: (principe du maximum)

$$\min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(s, k_y, k_z)} \rho^{app} = \min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \rho^{app}$$

L'article [Gander & Halpern] répond à cette question avec les suggestions suivantes.

Optimisation

On cherche la solution de: (principe du maximum)

$$\min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(s, k_y, k_z)} \rho^{app} = \min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \rho^{app}$$

L'article [Gander & Halpern] répond à cette question avec les suggestions suivantes.

▶ $\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}|^2 c^2}{\omega^2}}.$

Optimisation

On cherche la solution de: (principe du maximum)

$$\min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(s, k_y, k_z)} \rho^{app} = \min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \rho^{app}$$

L'article [Gander & Halpern] répond à cette question avec les suggestions suivantes.

- ▶ $\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}|^2 c^2}{\omega^2}}$.
- ▶ $p = i \frac{\omega}{c} r \left(\frac{|\mathbf{k}| c}{\omega} \right)$

Optimisation

On cherche la solution de: (principe du maximum)

$$\min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(s, k_y, k_z)} \rho^{app} = \min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \rho^{app}$$

L'article [Gander & Halpern] répond à cette question avec les suggestions suivantes.

- ▶ $\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}|^2 c^2}{\omega^2}}$.
- ▶ $p = i \frac{\omega}{c} r\left(\frac{|\mathbf{k}|c}{\omega}\right)$
- ▶ $r\left(\frac{|\mathbf{k}|c}{\omega}\right)$ une fonction rationnelle **réelle** interpolant $\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}|^2 c^2}{\omega^2}}$.

Optimisation

On cherche la solution de: (principe du maximum)

$$\min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(s, k_y, k_z)} \rho^{app} = \min_{p \in \mathbb{C}} \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \rho^{app}$$

L'article [Gander & Halpern] répond à cette question avec les suggestions suivantes.

▶ $\sqrt{|\mathbf{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}|^2 c^2}{\omega^2}}.$

▶ $p = i \frac{\omega}{c} r\left(\frac{|\mathbf{k}|c}{\omega}\right)$

▶ $r\left(\frac{|\mathbf{k}|c}{\omega}\right)$ une fonction rationnelle **réelle** interpolant $\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{k}|^2 c^2}{\omega^2}}.$

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1 - a^2} - r(a)}{\sqrt{1 - a^2} + r(a)} e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - a^2} L} \right|, \text{ où } a = \frac{|\mathbf{k}|c}{\omega}.$$

Evanescent vs Propagative

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{1-a^2}L} \right|, \text{ où } a = \frac{|\mathbf{k}|c}{\omega}.$$

Evanescente vs Propagative, i.e. $a > 1$ vs $0 < a < 1$:

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{1-a^2}L} \right| \quad \text{vs} \quad \min_{r \in \mathbb{R}} \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} \right|$$

Evanescent vs Propagative

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{1-a^2}L} \right|, \text{ où } a = \frac{|\mathbf{k}|c}{\omega}.$$

Evanescente vs Propagative, i.e. $a > 1$ vs $0 < a < 1$:

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{1-a^2}L} \right| \quad \text{vs} \quad \min_{r \in \mathbb{R}} \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} \right|$$

On traite le cas **evanescent** avec le recouvrement

Evanescent vs Propagative

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{1-a^2}L} \right|, \text{ où } a = \frac{|\mathbf{k}|c}{\omega}.$$

Evanescente vs Propagative, i.e. $a > 1$ vs $0 < a < 1$:

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{1-a^2}L} \right| \quad \text{vs} \quad \min_{r \in \mathbb{R}} \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} \right|$$

Interprétation de a

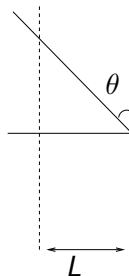
$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} \right|$$

Interprétation de a

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} \right|$$

On interprète a :

$$a = \frac{|\mathbf{k}|c}{\omega} = \cos(\theta)$$

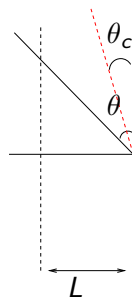


Interprétation de a

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} \right|$$

On interprète a :

$$a = \frac{|\mathbf{k}|c}{\omega} = \cos(\theta)$$



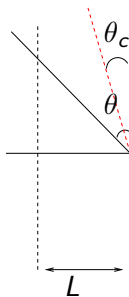
Donc on limite la recherche à des angles $\theta \in (\theta_c, \frac{\pi}{2})$.

Interprétation de a

$$\min_r \max_{(i\omega, k_y, k_z)} \left| \frac{\sqrt{1-a^2} - r(a)}{\sqrt{1-a^2} + r(a)} \right|$$

On interprète a :

$$a = \frac{|\mathbf{k}|c}{\omega} = \cos(\theta)$$



Donc on limite la recherche à des angles $\theta \in (\theta_c, \frac{\pi}{2})$.

Ce qui implique:

$$\min_r \max_{\theta \in [\theta_c, \frac{\pi}{2}]} \left| \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta)^2} - r(\cos(\theta))}{\sqrt{1 - \cos(\theta)^2} + r(\cos(\theta))} \right|$$

Notation: $\tau := \sqrt{1-a^2} = \sin(\theta) \in [\sin(\theta_c), 1]$.

$$\min_r \max_{\tau \in [\sin(\theta_c), 1]} \left| \frac{\tau - r(a)}{\tau + r(a)} \right|$$

Choix de r

Finalement on choisit

$$r(a) = \tau \frac{q(-\tau) + q(\tau)}{q(-\tau) - q(\tau)}, \quad \text{où } q = \prod_{l=1}^m (\tau - \sqrt{1 - a_l^2}).$$

où $r(a)$ interpole $\sqrt{1 - a^2}$ au points a_l .

Choix de r

Finalement on choisit

$$r(a) = \tau \frac{q(-\tau) + q(\tau)}{q(-\tau) - q(\tau)}, \quad \text{où } q = \prod_{l=1}^m (\tau - \sqrt{1 - a_l^2}).$$

où $r(a)$ interpole $\sqrt{1 - a^2}$ au points a_l . **facteur de contraction:**

$$\rho^{app} = \prod_{l=1}^m \left| \frac{\tau - \sqrt{1 - a_l^2}}{\tau + \sqrt{1 - a_l^2}} \right|.$$

Choix de r

Finalement on choisit

$$r(a) = \tau \frac{q(-\tau) + q(\tau)}{q(-\tau) - q(\tau)}, \quad \text{où } q = \prod_{l=1}^m (\tau - \sqrt{1 - a_l^2}).$$

où $r(a)$ interpole $\sqrt{1 - a^2}$ au points a_l . **facteur de contraction:**

$$\rho^{app} = \prod_{l=1}^m \left| \frac{\tau - \sqrt{1 - a_l^2}}{\tau + \sqrt{1 - a_l^2}} \right|.$$

Theorem

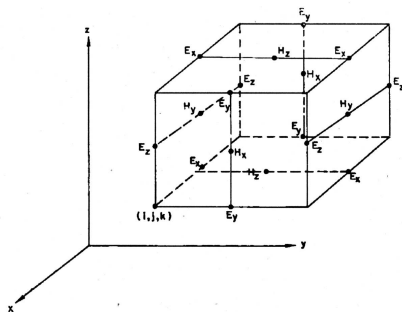
Pour $m = 1$, on atteint le minimum de $\min \max \rho^{app}$ lorsque

$$\sqrt{1 - a_1^2} = \sqrt{\sin(\theta_c)}.$$

Expérience numérique

Schéma numérique: Yee

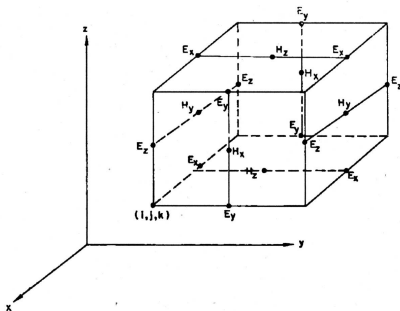
- ▶ Champs évalués sur des mailles décalées.



Expérience numérique

Schéma numérique: Yee

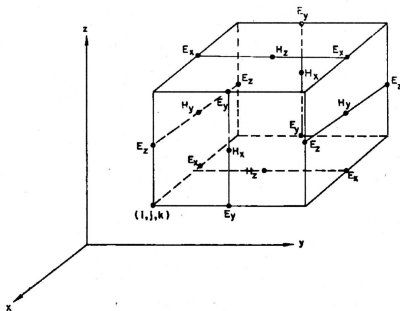
- ▶ Champs évalués sur des mailles décallées.
- ▶ Explicite en temps



Expérience numérique

Schéma numérique: Yee

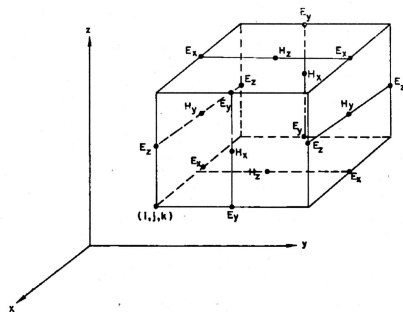
- ▶ Champs évalués sur des mailles décalées.
- ▶ Explicite en temps
- ▶ Condition aux bords parfaitement conductrice



Expérience numérique

Schéma numérique: Yee

- ▶ Champs évalués sur des mailles décalées.
- ▶ Explicite en temps
- ▶ Condition aux bords parfaitement conductrice



Exemple: Deux sous-domaines $\Omega_1 = [0, \frac{1}{2} + L]$ et $\Omega_2 = [\frac{1}{2} - L, 1]$, recouvrement $2L$. **Conditions de transmissions:**

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix}^{i,n} - \mathbf{B} \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix}^{i,n} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} H_y \\ H_z \end{bmatrix}^{j,n-1} - \mathbf{B} \begin{bmatrix} E_y \\ E_z \end{bmatrix}^{j,n-1}$$

\mathbf{A}, \mathbf{B} tel que conditions caractéristiques

Conclusion

- ▶ Résultat de convergence en un nombre fini de pas (équivalent à l'équation des ondes)
- ▶ Ondes évanescentes traitées avec le recouvrement.
- ▶ Conditions de transmission optimisées pour les ondes propagatives.

Conclusion

- ▶ Résultat de convergence en un nombre fini de pas (équivalent à l'équation des ondes)
- ▶ Ondes évanescentes traitées avec le recouvrement.
- ▶ Conditions de transmission optimisées pour les ondes propagatives.

Travaux en cours:

- ▶ Implementation d'un code en C++.
- ▶ Analyse de différentes approches pour l'approximation des conditions transparentes.

Références

V. Dolean, M.J. Gander, and L. Gerardo-Giorda, [Optimized Schwarz Methods for Maxwells equations](#) , SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 31, No. 3, pp. 2193-2213, 2009.

A. Alonso Rodriguez, L. Gerardo-Giorda, [New nonoverlapping domain decomposition methods for the harmonic Maxwell system](#), SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 28, No. 1, pp. 102-122, 2006.

M.J. Gander and L. Halpern, [Absorbing boundary conditions for the wave equation and parallel computing](#), Mathematics of Computation, Vol. 74, No. 249, pp. 153-176, 2004.

Merci de votre attention