Une méthode de type Galerkin discontinu pour la propagation des ondes sismiques

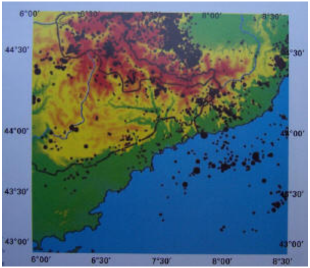
M. Benjemaa, S. Delcourte, L. Fezoui,
N. Glinsky-Olivier, S. Lanteri, S. Moto Pong, G. Serre

Equipe-projet NACHOS, INRIA Sophia Antipolis

Méthodes numériques pour la propagation d'ondes en milieu élastique
Mardi 11 décembre 2007

Contenu

- Prévision des mouvements sismiques
- Etude de scenarii:
  - simulation de la propagation d'ondes sur une configuration réelle (topographie complexe, fortes hétérogénéités)
  - simulation de la rupture des séismes



- Application à l'échelle régionale :
  Modèle de Nice (ANR QSHA : Géosciences Azur, LCPC, BRGM, LGIT, CEA DAM)
- Simulations nécessitant des plateformes de calcul parallèle

Méthode historique et la plus répandue

- Méthode des différences finies
  - $\nearrow$ simplicité d'implémentation
  - $\nearrow$ précision
  - $\searrow$ maillages cartésiens

Méthode en fort développement

- Méthode des éléments spectraux
  - $\nearrow$ précision
  - $\nearrow$ milieux complexes
  - $\searrow$ inversion de grands systèmes

- Méthodes intégrales
  - $\nearrow$ précision
  - $\searrow$ milieux homogènes ou à couches

- Méthode Galerkin discontinu (DG), Reed-Hill (1973) (transport des neutrons)
- Méthode des volumes finis très populaire (mécanique des fluides, électromagnétisme)
- Renouveau des méthodes DG dans les années 1990 (équations de Maxwell)
  - Extension aisée à l'ordre élevé, localement dans l'élément
  - Pas de matrice de masse globale à inverser pour un schéma explicite
  - Large choix de schémas d'intégration temporels
  - Utilisation aisée de maillages complexes
    - tétraèdres pour une meilleure prise en compte du relief et des discontinuités
    - maillage éléments finis conforme ou non conforme, voire hybride
    - raffinement local
  - Méthode hautement parallélisable (schéma explicite)
- Très peu utilisées en propagation d'ondes sismiques (M. Kaeser et al.)

- Le système à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \dfrac{\partial \overline{V}}{\partial t} & = \nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}} \\ \dfrac{\partial \overline{\overline{\sigma}}}{\partial t} & = \lambda \left(\nabla \cdot \overline{V} \right) \overline{\overline{Id}} + \mu \left(\nabla \overline{V} + {}^t(\nabla \overline{V}) \right) \end{array} \right. \tag{1}$$

- Les inconnues

$$\overline{W} = {}^t\left(\overline{V}, \overline{\sigma}\right) \text{ où } \overline{V} = {}^t(v_x, v_y, v_z) \text{ et } \overline{\sigma} = {}^t(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})$$

- Ecriture sous forme matricielle

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \sum_{m=1}^{3} \overline{\overline{A_m}} \left(\rho, \lambda, \mu \right) \frac{\partial \overline{W}}{\partial x_m} = 0 \tag{2}$$

$\overline{\overline{A_m}}$ matrices extra-diagonales par blocs

- Le système est hyperbolique
  Pour tout vecteur non nul $\overline{n} = {}^t(n_x, n_y, n_z)$, la matrice

$$\overline{\overline{A_n}}(\rho, \lambda, \mu) = \sum_{m=1}^{3} n_m \, \overline{\overline{A_m}}(\rho, \lambda, \mu)$$

  est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

- Vitesses d'ondes
  Les valeurs propres λ_k, $k = 1, .., 9$ de $\overline{\overline{A_n}}$ sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm V_p \|\overline{n}\| \quad \lambda_{3,4} = \pm V_s \|\overline{n}\| \quad \lambda_{5,6} = \pm V_s \|\overline{n}\| \quad \lambda_{7,8,9} = 0$$

  Vitesses des ondes P et S

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

La méthode Galerkin discontinu
Discrétisation spatiale et base d'interpolation

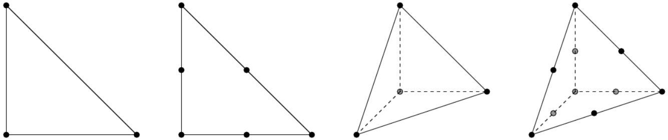
- Discrétisation de type éléments finis en triangles ou tétraèdres

$$\Omega \approx \bigcup_{i=1}^{nt} T_i$$

- Interpolation de Lagrange sur les simplexes
  $\mathbb{P}^n$ ensemble des polynômes de degré n sur chaque élément T_i
  ϕ_k, $k = 1, .., nk$ fonctions de base de $\mathbb{P}^n$

$$\phi_j\left(X_i\right) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, .., nk \;\; nk = \left[(k+1)...(k+n)\right]/n$$

- Les points d'interpolation X_i



$n = 2,\ k = 1$ $\quad$ $n = 2,\ k = 2$ $\quad$ $n = 3,\ k = 1$ $\quad$ $n = 3,\ k = 2$

- Intégration sur T_i

$$\int_{T_i} \left[\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \sum_{m=1}^{3} \overline{\overline{A_m}} (\rho, \lambda, \mu) \frac{\partial \overline{W}}{\partial x_m} \right] \phi_k \, dX = 0$$

- ρ, λ et μ constants sur T_i

$$\underbrace{\int_{T_i} \frac{\partial \overline{W}}{\partial t} \phi_k \, dX}_{1} + \underbrace{\sum_{m=1}^{3} \overline{\overline{A_m}}^{T_i} \cdot \int_{T_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_m} \overline{W} \, dX}_{2} + \underbrace{\overline{\overline{A_n}}^{T_i} \cdot \int_{\partial T_i} \phi_k \overline{W} \, ds}_{3} = 0$$

$\overline{n}$ normale sortante à ∂T_i.

- Projection des composantes de $\overline{W}$ dans la base des ϕ_k

$$W(X,t) = \sum_{j=1}^{nk} W_j(t) \, \phi_j(X)$$

Les $W_j(t)$ sont les degrés de liberté sur T_i.

- Intégrale **1** : terme temporel

$$k = 1, .., nk \quad \int_{T_i} \frac{\partial W}{\partial t} \phi_k \, dX = \sum_{j=1}^{nk} \frac{dW_j(t)}{dt} \int_{T_i} \phi_j \, \phi_k \, dX = \overline{\overline{M}}^{T_i} \cdot \frac{d\overline{\mathcal{W}(t)}}{dt}$$

$\overline{\overline{M}}^{T_i}$ matrice de masse locale sur T_i et $\overline{\mathcal{W}(t)} = (W_j(t))\ j = 1, .., nk$.

- Intégrale **2** volumique

$$k = 1, .., nk \quad \sum_{m=1}^{3} \overline{\overline{A_m}}^{T_i} \cdot \int_{T_i} \frac{\partial \phi_k}{\partial x_m} \overline{W(t)} \, dX = \sum_{m=1}^{3} \sum_{j=1}^{nk} G_{m,jk}^{T_i} \, \overline{\overline{A_m}}^{T_i} \cdot \overline{W_j(t)}$$

$$G_{m,jk}^{T_i} = \int_{T_i} \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial x_m} \, dX \, .$$

- Décomposition de ∂T_i :
  a) $T_i \cap T_l$, b) face libre c) face absorbante d) faille.
- Intégrale **3** pour une face interne : a) $T_i \cap T_l = S_{il}$

$$\overline{\overline{A_{n_{S_{il}}}}}^{T_i} \int_{S_{il}} \phi_k \overline{W} \, ds$$

Schéma centré à l'interface S_{il}

$$\overline{W}^{S_{il}} = \frac{1}{2}\left(\overline{W}^{T_i} + \overline{W}^{T_l}\right)$$

Projection de $\overline{W}^{T_i/T_l}$ sur T_i/T_l, $W^{T_i} = \sum_{j=1}^{nk} W_j^{T_i} \phi_j^{T_i}$ et $W^{T_l} = \sum_{j=1}^{nk} W_j^{T_l} \phi_j^{T_l}$

$$\overline{\overline{A_{n_{S_{il}}}}}^{T_i} \cdot \int_{S_{il}} \phi_k \overline{W} \, ds = \sum_{j=1}^{nk} \frac{1}{2} \overline{\overline{A_{n_{S_{il}}}}}^{T_i} \cdot \left[\int_{S_{il}} \phi_j^{T_i} \phi_k^{T_i} \, ds \cdot \overline{W_j}^{T_i} + \int_{S_{il}} \phi_j^{T_l} \phi_k^{T_i} \, ds \cdot \overline{W_j}^{T_l} \right]$$

- Pour une composante W de $\overline{W}$, on obtient

$$\overline{\overline{M}}^{T_i} \cdot \frac{d\overline{\mathcal{W}}}{dt} = \overline{\mathcal{F}}^{T_i}$$

avec $\overline{\mathcal{W}} = (W_j)$, $j = 1, .., nk$.

- Schéma saute-mouton (L. Fézoui, S. Piperno)
vitesses au temps $(n - \frac{1}{2})\Delta t$ et contraintes au temps $n\,\Delta t$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{\overline{M}}^{T_i} \left(\overline{\mathcal{W}_v}^{n+\frac{1}{2}} - \overline{\mathcal{W}_v}^{n-\frac{1}{2}} \right) & = \Delta t\, \overline{\mathcal{F}_v}^{T_i} \left(\overline{\mathcal{V}}^{n-\frac{1}{2}}, \overline{\mathcal{S}}^{n} \right) \\ \overline{\overline{M}}^{T_i} \left(\overline{\mathcal{W}_\sigma}^{n+1} - \overline{\mathcal{W}_\sigma}^{n} \right) & = \Delta t\, \overline{\mathcal{F}_\sigma}^{T_i} \left(\overline{\mathcal{V}}^{n+\frac{1}{2}}, \overline{\mathcal{S}}^{n} \right) \end{array} \right.$$

$\overline{\mathcal{W}_v}$ composante de $\overline{V}$ (dimension nk)
$\overline{\mathcal{W}_\sigma}$ composante de $\overline{\sigma}$ (dimension nk)
$\overline{\mathcal{V}}^{n-\frac{1}{2}}$ composantes de $\overline{V}$ au temps $\left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta t$ (dimension 3xnk)
$\overline{\mathcal{S}}^{n}$ composantes de $\overline{\sigma}$ au temps $n\Delta t$ (dimension 6xnk)

- Energie discrète

$$E^n = \frac{1}{2}\sum_i \left[\int_{T_i} \rho \left(\overline{V}^{n-\frac{1}{2}}\right)^t \overline{V}^{n+\frac{1}{2}}\, dX + \int_{T_i} \left(\overline{\sigma}^n\right)^t \overline{\overline{\Lambda\left(\lambda,\mu\right)}}\,\overline{\sigma}^n\, dX\right]$$

Λ matrice issue de la symétrisation du système

- L'énergie du système est conservée en l'absence de conditions aux limites

$$\Delta E = E^{n+1} - E^n = 0$$

$\Longrightarrow$ schéma non diffusif

- Schéma stable sous condition de type CFL

- Intégrale **3** pour une face libre : b) S_i^{libre}
  Condition physique

$$\overline{\overline{\sigma}} = 0$$

A l'interface

$$\overline{W}^{S_i^{libre}} = {}^t(v_x, v_y, v_z, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\overline{\overline{A_{n_{S_i^{libre}}}}}^{T_i} \cdot \int_{S_i^{libre}} \phi_k \, \overline{W} \, ds = \sum_{j=1}^{nk} \overline{\overline{A_{n_{S_i^{libre}}}}}^{T_i} \cdot \int_{S_i^{libre}} \phi_j^{T_i} \phi_k^{T_i} \, ds \cdot \overline{W_j}^{S_i^{libre}}$$

- Intégrale **3** pour une face absorbante : c) S_i^{abs}
  Technique de décentrage

$$\overline{\overline{A_{n_{S_i^{abs}}}}}^{T_i} \int_{S_i^{abs}} \phi_k \overline{W} \, ds \approx \left[\overline{\overline{A_{n_{S_i^{abs}}}}}^{T_i}\right]^+ \int_{S_i^{abs}} \phi_k \overline{W} \, ds$$

Contribution des ondes sortantes uniquement, annulation des ondes entrantes

$$\overline{\overline{A_{n_{S_i^{abs}}}}}^{T_i} \cdot \int_{S_i^{abs}} \phi_k \, \overline{W} \, ds = \sum_{j=1}^{nk} \left[\overline{\overline{A_{n_{S_i^{abs}}}}}^{T_i}\right]^+ \cdot \int_{S_i^{abs}} \phi_j^{T_i} \phi_k^{T_i} \, ds \cdot \overline{W_j}^{T_i}$$

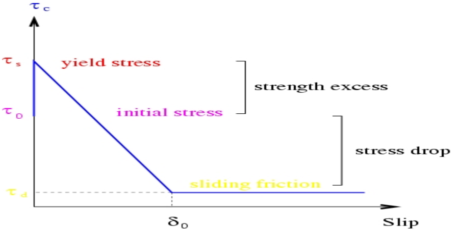
La méthode Galerkin discontinu
Intégrales de surface d) faces de la faille

- Contact parfait avec frottement sur la faille
  $\longrightarrow$ discontinuité localisée des champs élastiques
- Faille prédéfinie évolutive dans le domaine (maillage) : S_{il}
- Modes cisaillants : vecteur traction $\overline{T} = \overline{\overline{\sigma}}\,\overline{n}$

$$\overline{T} = \overline{T}_N + \overline{T}_T$$

- $\overline{T}_N$ et $\overline{V}_N$ continues
- Les tractions sur la faille évoluent en fonction du frottement
- Loi SWF Slip Weakening Friction

$\| T_T \|$



Processus itératif

- Tant que $\| \overline{T}_T \| \leq \mu_s \sigma_N$ la face n'est pas cassée $\sigma_N = \overline{n} \cdot \overline{\overline{\sigma}}\, \overline{n}$
- Dès que $\| \overline{T}_T \| \geq \mu_s \sigma_N$ on applique la loi de SWF

$$\| \overline{T}_T \| = \mu \sigma_N$$

μ fonction du glissement $U(t)$

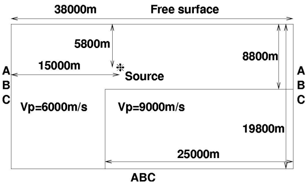
$$U(t) = \int_0^t \| \overline{\mathcal{V}}(s, x) \| \; ds$$

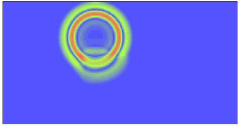
$\overline{\mathcal{V}}$ vitesse de glissement

$$\overline{\mathcal{V}} = \overline{V}_T^+ - \overline{V}_T^-$$

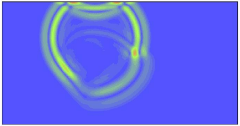
- Condition imposée dans l'intégrale de surface S_{il}
  - décentrée pour les variables discontinues
  - centrée pour les variables continues
  - contrôlée par le bilan d'énergie

Résultats numériques
Volumes finis 2D - Corner edge

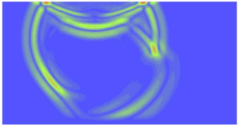




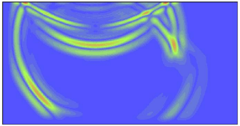
t=1. s



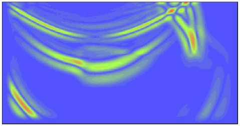
t=1.5 s



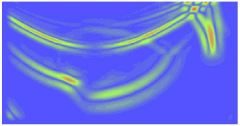
t=2. s



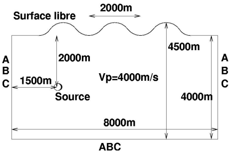
t=2.5 s



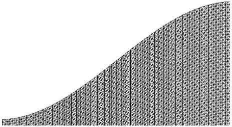
t=3. s

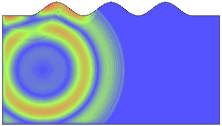


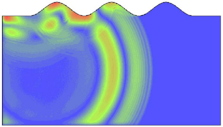
t=3.5 s

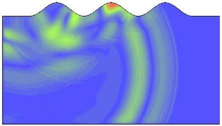


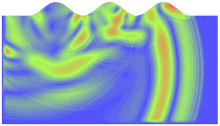
ρ=2500 kg/m^3
arête minimale = 10m
maillage = 640000 triangles

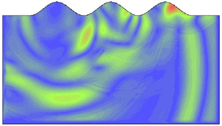

Maillage (détail)


t=0.75 s


t=1. s


t=1.25 s

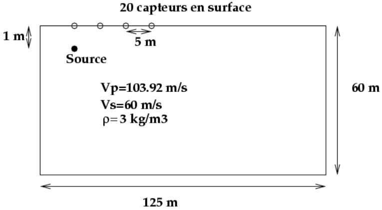

t=1.5 s


t=1.75 s

Méthode Galerkin discontinu - 2D

Cas test de Garvin

- Source explosive dans un demi-domaine infini

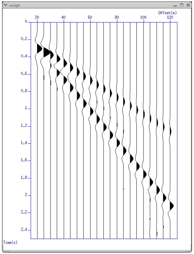


- $\rho = 1$, V_p=103.92 m/s, V_s=60 m/s
- Domaine $[0, 120] \times [0, 60]$, source en $\overline{X}_s = (20, 59)$
- Ricker $s(t) = [-1 + 2\alpha(t - t_0)^2]exp^{-\alpha(t-t_0)2}$, t_0=0.301, α=159.42
- Second membre sur σ_{xx} et σ_{yy} $s(t)\delta(\overline{X}_s)$ dans le triangle T_s

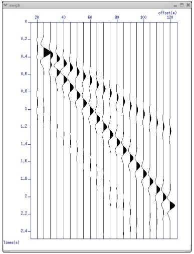
$$s(t) \int_{T_s} \delta(\overline{X}_s)\phi_k^{T_s} dX = s(t)\phi_k^{T_s}(\overline{X}_s)$$

Méthode Galerkin discontinu - 2D

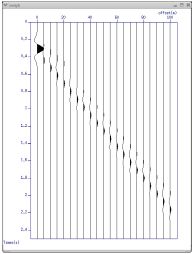
Cas test de Garvin
Sismogrammes différences finies et Galerkin discontinu (DGP2)



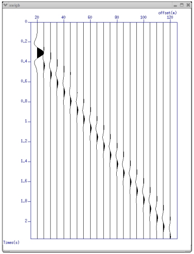
v_x différences finies



v_x DG

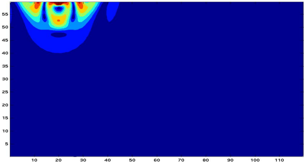


v_y différences finies

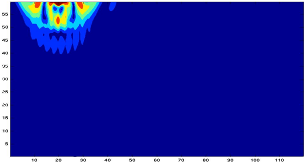


v_y DG

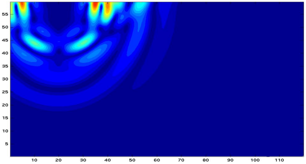
Cas test de Garvin
Isovaleurs de la norme de la vitesse, DGP3 40000 triangles



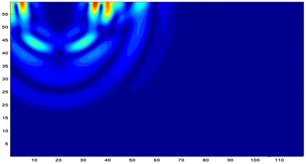
Différences finies



DGP3 t=0.612s

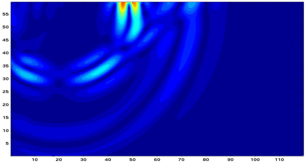


Différences finies

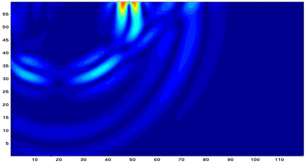


DGP3 t=0.816s

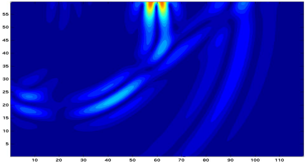
Cas test de Garvin
Isovaleurs de la norme de la vitesse, DGP3 40000 triangles



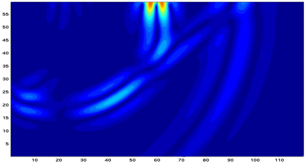
Différences finies



DGP3 t=1.02s



Différences finies



DGP3 t=1.224s

Méthode Galerkin discontinu - 2D

Mode propre dans une cavité homogène 2D

- Domaine $[0,1] \times [0,1]$, frontières libres

$$\left\{\begin{array}{lrllll} v_x & = \Omega & \cos \pi x & \sin \pi y & \cos \Omega t \\ v_y & = -\Omega & \sin \pi x & \cos \pi y & \cos \Omega t \\ \sigma_{xx} & = -A & \sin \pi x & \sin \pi y & \sin \Omega t \\ \sigma_{yy} & = A & \sin \pi x & \sin \pi y & \sin \Omega t \\ \sigma_{xy} & = 0 & & & \end{array}\right.$$

$A = 2\pi\mu$ et $\Omega = \sqrt{2}\pi V_s$.

- Définition de l'erreur L^2

$$E_{L^2} = \left[\int_\Omega \left(\overline{W}(n\,\Delta t) - \overline{W}^n \right) \cdot {}^t\!\left(\overline{W}(n\,\Delta t) - \overline{W}^n \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

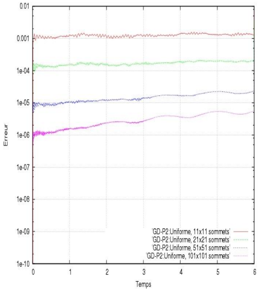
après projection

$$E_{L^2} = \left[\sum_{l=1}^{nt} \sum_{j=1}^{nk} \sum_{k=1}^{nk} M_{jk}^{T_l} \left(\overline{W_j}(n\Delta t) - \overline{W_j}^n \right) \cdot {}^t\!\left(\overline{W_k}(n\Delta t) - \overline{W_k}^n \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

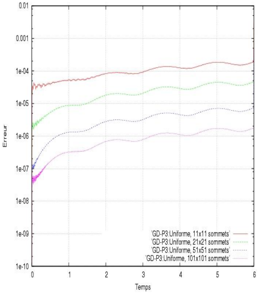
Méthode Galerkin discontinu - 2D

Mode propre dans une cavité homogène 2D

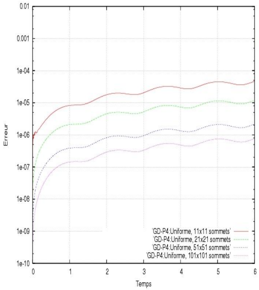
Evolution en temps de l'erreur pour différents maillages
M1 : $h \simeq 10^{-1}$ - M2 : $h \simeq 5.10^{-2}$ - M3 : $h \simeq 2.10^{-2}$ - M4 : $h \simeq 10^{-3}$



DG-P2

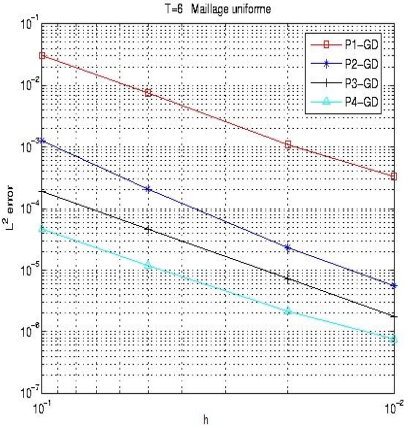


DG-P3

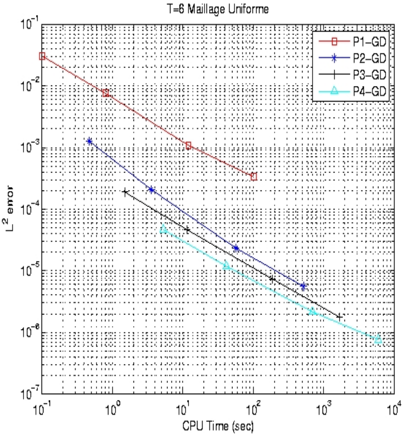


DG-P4

Mode propre dans une cavité homogène 2D



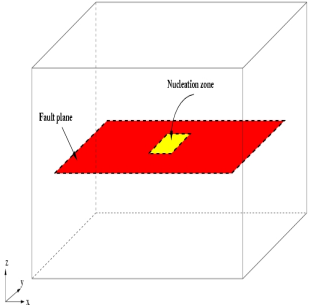
E_{L^2} en fonction de h

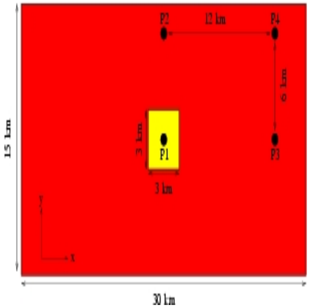


E_{L^2} en fonction du temps CPU

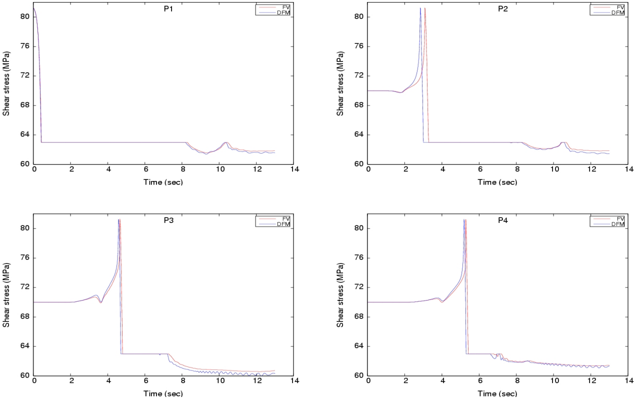
Résultats numériques
Volumes finis 3D - Faille plane

- Faille plane 3D, SCEC benchmark (Harris et al., 2004)
- Milieu linéaire élastique homogène : $\rho = 2670\, kg/m^3$, $v_p = 6000\, m/s$, $v_s = 3464\, m/s$
- $\tau_s = 81.24$ MPa, $\tau_d = 63$ MPa, $\tau_0 = 70$ MPa, $\delta_0 = 0.4$ m
- 100 processeurs (stratégie de communication MPI)
- $\Delta\, t = 8\, 10^{-3} s$, temps CPU $\simeq$ 1h 25mn

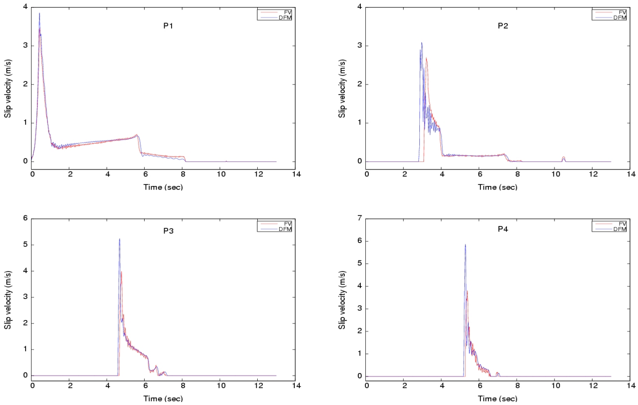




Résultats numériques
Volumes finis 3D - Faille plane



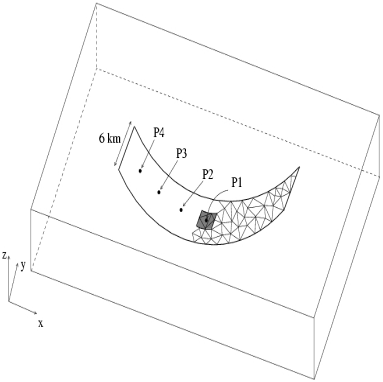
Comparaison des contraintes de cisaillement aux capteurs
Différences finies en bleu (Day et al., 2005)

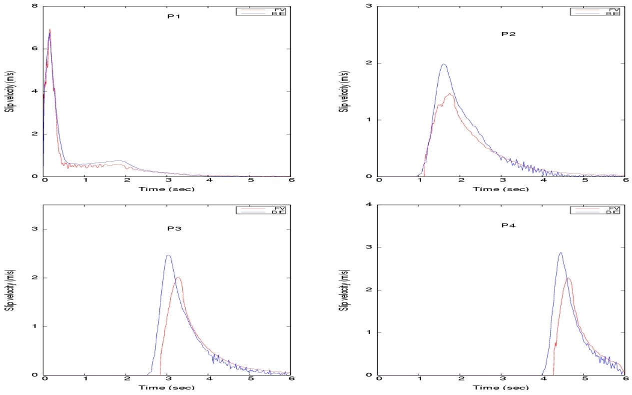


Comparaison des vitesses de glissement aux capteurs
Différences finies en bleu (Day et al., 2005)

Résultats numériques
Volumes finis 3D - Faille parabolique

- Faille parabolique dans un milieu linéaire élastique homogène
- $\rho = 2670\, kg/m^3$, $v_p = 6000\, m/s$, $v_s = 3464\, m/s$
- $\tau_s = 81.24$ MPa, $\tau_d = 63$ MPa, $\tau_0 = 73.73$ MPa, $\delta_0 = 0.8$ m
- 64 processeurs (statégie de communication MPI)
- $\Delta\, t = 2.1\, 10^{-3} s$, temps CPU $\simeq$ 33 mn

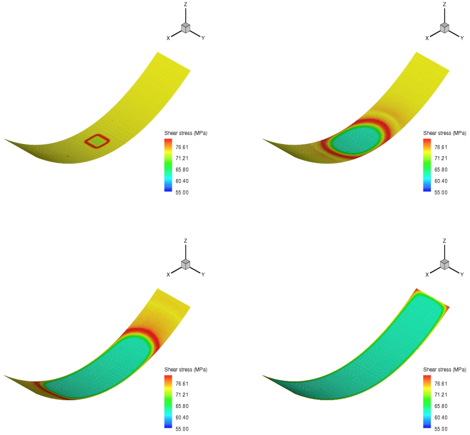




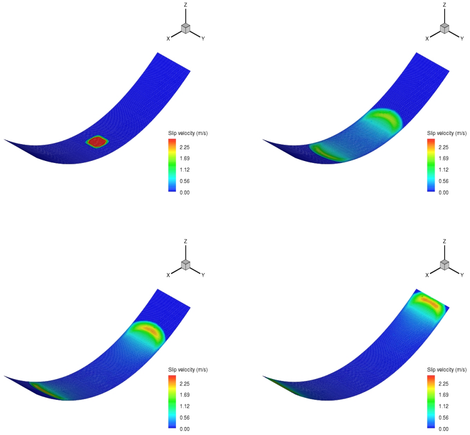
Comparaison des vitesses de glissement
Méthodes intégrales en bleu (H. Aochi et al., 2000)
Solution volumes finies filtrées $\eta = 0.2$

Résultats numériques

Volumes finis 3D - Faille parabolique



Isovaleurs des contraintes de cisaillement



Isovaleurs de la vitesse de glissement

Travaux en cours et perspectives

- Propriétés de la méthode DG pour l'élastodynamique
- Simulations de propagation 2D et 3D plus réalistes
- Simulation de la rupture par une méthode DG
- Conditions aux limites (PML, absorbantes d'ordre supérieur)
- Schémas en temps d'ordre supérieur