Méthodes de différences finies pour la propagation d'ondes mécaniques transitoires en présence d'interfaces

Bruno Lombard

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (UPR CNRS), Marseille

NACHOS, 11 décembre 2007

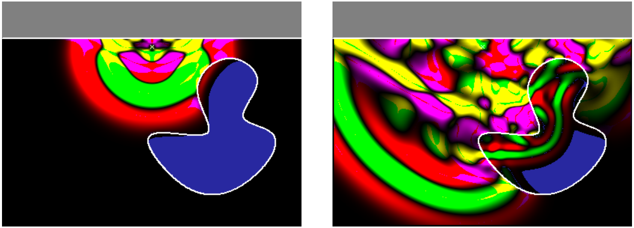
http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/

Première partie I

Introduction

Cadre de travail :

- propagation d'ondes mécaniques dans le domaine temporel
- fluides parfaits, solides (élastiques, viscoélastiques, poroélastiques) isotropes
- interfaces fixes de formes quelconques (régulières)

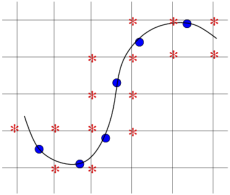


Difficultés des différences finies :

- géométriques : description d'interfaces de formes quelconques sur maillage cartésien régulier, tout en évitant les diffractions parasites
- physiques : prise en compte des conditions de saut dans des schémas construits en milieu homogène
- numériques : maintenir les propriétés de convergence et de stabilité qu'ont les schémas en milieu homogène

Méthodes d'interface immergée :

- schéma classique de DF loin des interfaces
- nouveau schéma près des interfaces ($*$)
- conditions de saut sur l'interface ($\bullet$)



Bref historique :

- Peskin (1977) : Immersed Boundary Method
- LeVeque, Li, Zhang (1994, 1996) : Immersed Interface Method
- Piraux, Lombard (2001 à nos jours) : Explicit Simplified Interface Method

Plan de l'exposé :

- section 2 : fluide parfait 1D
- section 3 : fluide-solide 2D
- section 4 : catalogue
- section 5 : conclusion

Deuxième partie II

Fluide parfait 1D

Lois de conservation :

- inconnues : v vitesse acoustique, p pression acoustique
- paramètres : ρ (masse volumique), c (célérité des ondes)
- on pose

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ \rho\, c^2 & 0 \end{pmatrix}$$

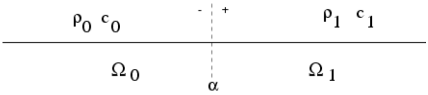
- système hyperbolique linéaire du 1er ordre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + \mathbf{A}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{U} = \mathbf{0} \\ \mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_0(x) \in C^p(\mathbb{R}) \end{cases}$$

- propriété

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}}\mathbf{U} = c^{2n}\,\dfrac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\mathbf{U}, & n \geq 1 \\ \dfrac{\partial^{2n+1}}{\partial t^{2n+1}}\mathbf{U} = -c^{2n}\,\mathbf{A}\,\dfrac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}\mathbf{U}, & n \geq 0 \end{array}}$$

Conditions de saut :



- conditions de saut d'ordre 0

$$\left.\begin{array}{l}[v(\alpha,t)]=0,\\[2ex] [p(\alpha,t)]=0\end{array}\right\}\Rightarrow [\mathbf{U}(\alpha,t)]=\mathbf{0}$$

- dérivation par rapport à t (interface immobile)

$$\frac{\partial^m}{\partial\, t^m}\,[\mathbf{U}(\alpha,t)]=\left[\frac{\partial^m}{\partial\, t^m}\,\mathbf{U}(\alpha,t)\right]=\mathbf{0}$$

- lois de conservation

$$\frac{\partial^m}{\partial\, t^m}\,\mathbf{U}(x,t)=\mathbf{C}_m\,\frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\,\mathbf{U}(x,t)$$

- $\mathbf{U}_0(x)\in C^p(\mathbb{R})\Rightarrow$ conditions de saut d'ordre $m\leq p$

$$\mathbf{D}_m=\left(\mathbf{C}_m^1\right)^{-1}\mathbf{C}_m^0\;\Rightarrow\;\boxed{\frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\,\mathbf{U}(\alpha^+,t)=\mathbf{D}_m\,\frac{\partial^m}{\partial\, x^m}\,\mathbf{U}(\alpha^-,t)}$$

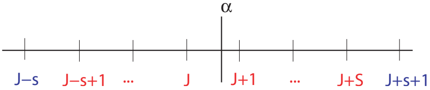
Schéma numérique :

- $\mathbf{U}_i^n \approx \mathbf{U}(x_i = i\,\Delta\,x, t_n = n\,\Delta\,t)$
- schéma explicite à deux pas de temps, stencil centré à $2\,s+1$ points

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{H}\left(\mathbf{U}_{i-s}^n, \dots, \mathbf{U}_{i+s}^n\right)$$

- exemples : Lax-Wendroff ($s=1,\ r=2$), ADER 4 ($s=2,\ r=4$), ...

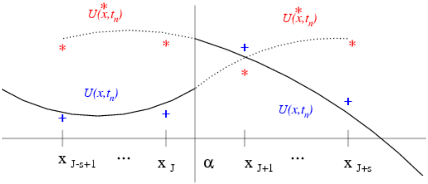
Deux sous-ensembles de points :



- points réguliers : le stencil appartient à un seul milieu
- points irréguliers : le stencil coupe α $(x_{J-s+1}, \dots, x_{J+s})$
  $\Rightarrow$ modification du schéma en ces points (méthode d'interface immergée)

Principe :

- intégration aux points irréguliers $x_{J-s+1}, \dots, x_{J+s}$
- pas de modification du schéma **H** au voisinage de α
- modification des valeurs utilisées pour l'intégration numérique



Valeur modifiée :

- estimations de prolongements réguliers de la solution de l'autre côté de α

$$\alpha \leq x \leq x_{J+s}, \qquad \mathbf{U}^*(x, t_n) = \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial\, x^m} \mathbf{U}(\alpha^-, t_n),$$

$$x_{J-s+1} \leq x \leq \alpha, \qquad \mathbf{U}^*(x, t_n) = \sum_{m=0}^{2\,k-1} \frac{(x-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial\, x^m} \mathbf{U}(\alpha^+, t_n).$$

- problème : estimer $\dfrac{\partial^m}{\partial\, x^m} \mathbf{U}(\alpha^\pm, t_n)$

Calcul des valeurs modifiées (ex : à droite de α)

- développements de Taylor en $\alpha^{\pm}$ + conditions de saut en α

$$\begin{aligned}
J-k+1 \leq i \leq J, \quad \mathbf{U}(x_i,t_n) &= \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \mathbf{U}(\alpha^-,t_n) + \mathbf{O}(\Delta x^{2k}) \\
J+1 \leq i \leq J+k, \quad \mathbf{U}(x_i,t_n) &= \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \mathbf{U}(\alpha^+,t_n) + \mathbf{O}(\Delta x^{2k}) \\
&= \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x_i-\alpha)^m}{m\,!} \mathbf{D}_m \frac{\partial^m}{\partial x^m} \mathbf{U}(\alpha^-,t_n) + \mathbf{O}(\Delta x^{2k})
\end{aligned}$$

- écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}(x_{J-k+1},t_n) \\ \vdots \\ \mathbf{U}(x_{J+k},t_n) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{U}(\alpha^-,t_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}} \mathbf{U}(\alpha^-,t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{O}(\Delta x^{2k}) \\ \vdots \\ \mathbf{O}(\Delta x^{2k}) \end{pmatrix}$$

- estimations numériques

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}^- \\ \vdots \\ \frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}} \mathbf{U}^- \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^n_{J-k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^n_{J+k} \end{pmatrix}$$

Calcul des valeurs modifiées (suite et fin) :

- à droite de α,

$$\mathbf{U}^*(x, t_n) = \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{(x-\alpha)^m}{m\,!} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \mathbf{U}(\alpha^-, t_n)$$

- d'où la valeur modifiée "à droite" ($i = J, \ldots, J+s$)

$$\mathbf{U}_i^* = \left(\mathbf{I}_2 \ldots \frac{(x_i - \alpha)^{2k-1}}{(2k-1)\,!} \mathbf{I}_2 \right) \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^n_{J-k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{U}^n_{J+k} \end{pmatrix}$$

Utilisation des valeurs modifiées

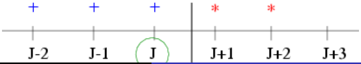
- aux points réguliers

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{H}\left(\mathbf{U}^n_{i-s}, \ldots, \mathbf{U}^n_{i+s}\right)$$

- aux points irréguliers

$$\boxed{\begin{array}{ll} J - s + 1 \leq i \leq J, & \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{H}_0\left(\mathbf{U}^n_{i-s}, \ldots, \mathbf{U}^n_J, \mathbf{U}^*_{J+1}, \ldots, \mathbf{U}^*_{i+s}\right) \\ J + 1 \leq i \leq J + s, & \mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{H}_1\left(\mathbf{U}^*_{i-s}, \ldots, \mathbf{U}^*_J, \mathbf{U}^n_{J+1}, \ldots, \mathbf{U}^n_{i+s}\right) \end{array}}$$

- exemple ($i = J$, $s = 2$)



Remarques :

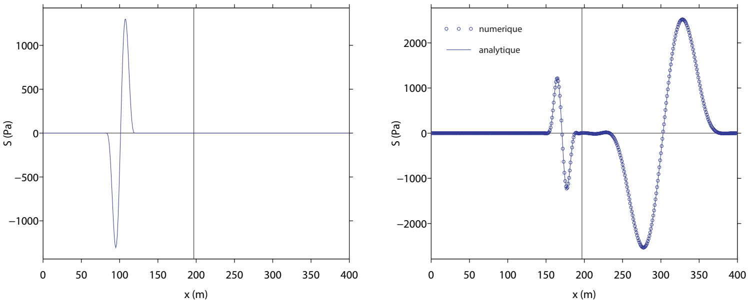
- algorithme simple : $\mathbf{U}^*$ indépendants de $\mathbf{H}$ (schéma quelconque)
- coût informatique négligeable : prétraitement
- prise en compte des conditions de saut et de la position de α

Propriétés :

- cas limite $\rho_0 = \rho_1$, $c_0 = c_1$, $k \geq s \Rightarrow \mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^n$
  $\Rightarrow$ schéma en milieu homogène
- inversibilité des matrices : $\forall k$, $\det \mathbf{M} \neq 0$
- erreur locale de troncature : schéma d'ordre r + méthode d'interface k
  $\Rightarrow$ ordre r aux points irréguliers si $2\,k - 1 \geq r$
  exemple : ADER 4 ($s = 2$, $r = 4$), $\mathbf{U}_0 \in C^4(\mathbb{R}) \Rightarrow k = 3$
  Gustafsson (1975) : $k = 2$ suffit
- stabilité : analyse par modes normaux (GKS 1972, Trefethen 1983)
  analyse automatique / CNS de stabilité / pas d'expression théorique
  études paramétriques : stabilise les schémas, OK avec matériaux usuels

Eau / acier :

- ADER 4, CFL $= 0.9$, sinusoïde tronquée de fréquence centrale 40 Hz
- GKS-instable sans méthode d'interface
- GKS-stable avec méthode d'interface, $\forall \alpha$, $k = 1,2,3$
- convergence d'ordre 4 mesurée si $k = 2$ ou $k = 3$

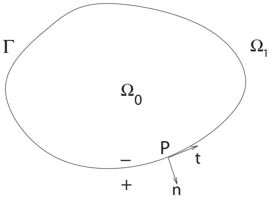


Troisième partie III

Fluide-solide 2D

Impression générale :

- même principe qu'en 1D, en + lourd !
- on n'insiste ici que sur les nouveautés

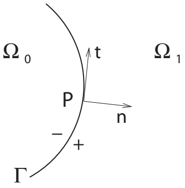


Configurations

- fluide parfait au repos, solide élastique isotrope
- propriétés constantes par morceaux de part et d'autre de Γ
- représentation paramétrique Γ: $(x(\tau), y(\tau)) \in C^q(\mathbb{R})$, $q \geq 1$
- vecteurs tangentiel **t** et normal **n**

$$\mathbf{t} = {}^T\left(x', y'\right), \qquad \mathbf{n} = {}^T\left(-y', x'\right)$$

Conditions de saut



- 2 conditions de saut + 1 condition aux limites

$$[\mathbf{v}.\mathbf{n}] = 0, \quad (\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}).\mathbf{n} = -p, \quad (\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}).\mathbf{t} = 0$$

- écriture matricielle $\mathbf{U}_i^k = \lim_{M \to P, M \in \Omega_i} \left(\mathbf{U}, \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U}, \ldots, \frac{\partial^k}{\partial y^k} \mathbf{U} \right)$
- conditions de saut d'ordre 0 : $\mathbf{C}_1^0 \, \mathbf{U}_1^0 = \mathbf{C}_0^0 \, \mathbf{U}_0^0$
- conditions aux limites d'ordre 0 : $\mathbf{L}_0^0 \, \mathbf{U}_0^0 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{L}_1^0 \, \mathbf{U}_1^0 = \mathbf{0}$
- systèmes sous-déterminés

Dérivation de conditions de saut :

- dérivations : par rapport à t (+ lois de conservation)
  par rapport à τ (+ fonction composée $f(x(\tau), y(\tau))$)
- exemple : $\mathbf{L}_1^0\,\mathbf{U}_1^0 = \mathbf{0}$

$$\left.\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{L}_1^0\,\mathbf{U}_1^0) & = & \mathbf{L}_1^0\,\dfrac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{U}_1^0 = \mathbf{0} \\[2ex]
& = & -\mathbf{L}_1^0\,\mathbf{A}_1\,\dfrac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{U}_1^0 - \mathbf{L}_1^0\,\mathbf{B}_1\,\dfrac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{U}_1^0 \\[2ex]
\dfrac{d}{d\tau}(\mathbf{L}_1^0\,\mathbf{U}_1^0) & = & \left(\dfrac{d}{d\tau}\,\mathbf{L}_1^0\right)\,\mathbf{U}_1^0 + \mathbf{L}_1^0\,\dfrac{\partial}{\partial \tau}\,\mathbf{U}_1^0 = \mathbf{0} \\[2ex]
& = & \left(\dfrac{d}{d\tau}\,\mathbf{L}_1^0\right)\,\mathbf{U}_1^0 + \mathbf{L}_1^0\left(x'\,\dfrac{\partial}{\partial x}\,\mathbf{U}_1^0 + y'\,\dfrac{\partial}{\partial y}\,\mathbf{U}_1^0\right)
\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{L}_1^1\,\mathbf{U}_1^1 = \mathbf{0}$$

- écriture à l'ordre $m \geq 1$

$$\mathbf{C}_1^m\,\mathbf{U}_1^m = \mathbf{C}_0^m\,\mathbf{U}_0^m, \qquad \mathbf{L}_i^m\,\mathbf{U}_i^m = \mathbf{0}, \qquad i = 0{,}1$$

- calcul formel conseillé !
- prise en compte de la courbure et de ses dérivées

Conditions de compatibilité

- relations entre certaines dérivées spatiales, en tout point
- Ω_i fluide : $\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial^n v_1}{\partial x^{n-i-1}\,\partial y^{i+1}} - \frac{\partial^n v_2}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i}} = 0, \qquad i = 0,\ldots, n-1$$

- Ω_i solide : relations de Barré de Saint-Venant (CNS de symétrie de $\boldsymbol{\sigma}$)

$$\alpha_2\,\frac{\partial^n \sigma_{11}}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i}} + \alpha_1\,\frac{\partial^n \sigma_{22}}{\partial x^{n-i}\,\partial y^{i}} - \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial^n \sigma_{12}}{\partial x^{n-i-1}\,\partial y^{i+1}}$$

$$+\alpha_1\,\frac{\partial^n \sigma_{11}}{\partial x^{n-i-2}\,\partial y^{i+2}} + \alpha_2\,\frac{\partial^n \sigma_{22}}{\partial x^{n-i-2}\,\partial y^{i+2}} = 0, \qquad i = 0,\ldots, n-2$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + 2\,\mu}{4\,\mu(\lambda+\mu)}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\lambda}{4\,\mu(\lambda+\mu)}$$

- écriture matricielle à l'interface

$$\mathbf{U}_i^m = \mathbf{G}_i^m\,\mathbf{V}_i^m$$

- réduction du nombre d'inconnues

Résolution des conditions d'interface

- but : exprimer $\mathbf{U}_1^m$ en fonction de $\mathbf{U}_0^m$
- résumé :

$$(A) \quad \mathbf{C}_1^m\,\mathbf{U}_1^m = \mathbf{C}_0^m\,\mathbf{U}_0^m$$

$$(B) \quad \mathbf{L}_i^m\,\mathbf{U}_i^m = \mathbf{0}, \quad i = 0,1$$

$$(C) \quad \mathbf{U}_i^m = \mathbf{G}_i^m\,\mathbf{V}_i^m, \quad i = 0,1$$

- un peu d'algèbre : $\mathbf{W}_i^m$ ensemble minimal indépendant

$$(B) \text{ et } (C) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_i^m\,\mathbf{G}_i^m\,\mathbf{V}_i^m = \mathbf{0} \Rightarrow \quad \mathbf{V}_i^m = \mathbf{K}_i^m\,\mathbf{W}_i^m$$

$$(A) \text{ et } (C) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_1^m\,\mathbf{G}_1^m\,\mathbf{K}_1^m\mathbf{W}_1^m = \mathbf{C}_0^m\,\mathbf{G}_0^m\,\mathbf{K}_0^m\,\mathbf{W}_0^m$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{S}_1^m\,\mathbf{W}_1^m = \mathbf{S}_0^m\,\mathbf{W}_0^m$$

$$\Rightarrow \quad \text{système sous-déterminé } p \times q,\, p < q$$

- résolution par décomposition en valeurs singulières

$$\boxed{\mathbf{W}_1^m = \left((\mathbf{S}_1^m)^{-1}\,\mathbf{S}_0^m \,|\, \mathbf{R}_{S_1}^m\right)\begin{pmatrix} \mathbf{W}_0^m \\ \\ \mathbf{\Lambda}^m \end{pmatrix}}$$

$\mathbf{R}_{S_1}^m$ noyau de $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{\Lambda}_m \in \mathbb{R}^{q-p}$ multiplicateurs de Lagrange

Principe :

- idem qu'en 1D : points réguliers / points irréguliers
- modification des valeurs numériques utilisées par le stencil aux points irréguliers
- prolongements réguliers de $\mathbf{U}(x, y, t_n)$ à partir des conditions d'interface
- mêmes remarques et propriétés qu'en 1D

Prétraitement : ($\sim$ 1 minute pour 1000×1000 points)

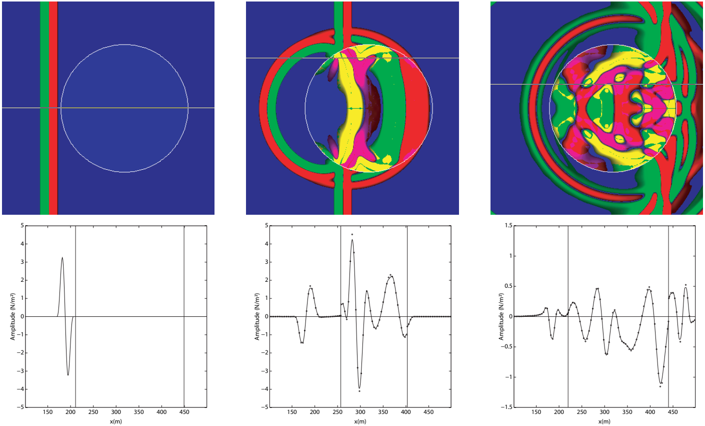
- recherche et stockage des points irréguliers
- en chaque point irrégulier M
  - déterminer la projection orthogonale P de M sur Γ
  - calculer les matrices de conditions d'interfaces
  - calculer (SVD) et stocker les "matrices d'extrapolation"

A chaque pas de temps : (surcoût < 1 %)

- calculer toutes les valeurs modifiées
- appliquer le schéma classique aux points réguliers
- appliquer le schéma modifié aux points irréguliers

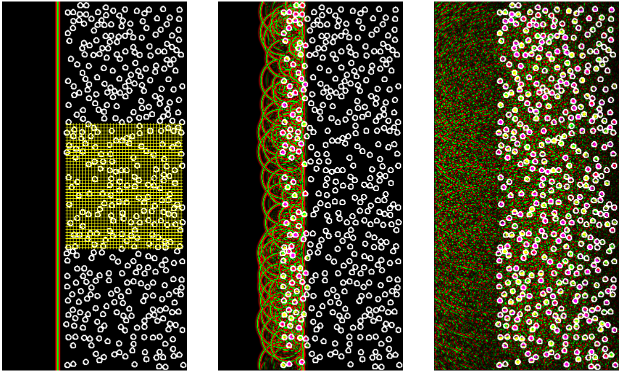
Onde plane sur interface fluide-solide :

- eau / plexiglass
- comparaison avec solution analytique
- Lombard, Piraux : J. Comput. Phys., 2004



Onde plane sur multidiffuseurs élastiques

- tiges d'acier dans l'eau : diamètre 0.8 mm, fréquence 3 MHz, concentration surfacique 0.38
- grille 6000×3000, 20000 pas de temps
- coopération avec le LCPC (Nantes) et l'IRMAR (Rennes)
- comparaison avec théories de multidiffusion (ISA)



Quatrième partie IV

Catalogue

Modélisation :

- conditions classiques entre solides : contact parfait soudé

$$[u_N] = 0, \qquad [u_T] = 0, \qquad [\sigma_N] = 0, \qquad [\sigma_T] = 0$$

- généralisation : conditions de masse-ressort

$$\boxed{\begin{array}{ll} [u_N] = \dfrac{1}{K_N}\,\sigma_N^-, & [\sigma_N] = M_N\,\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\,u_N^- \\ [u_T] = \dfrac{1}{K_T}\,\sigma_T^-, & [\sigma_T] = M_T\,\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\,u_T^- \end{array}}$$

- cas-limites :

$K_{N,T} \to +\infty, M_{N,T} = 0 \;\Rightarrow$ contact parfait soudé

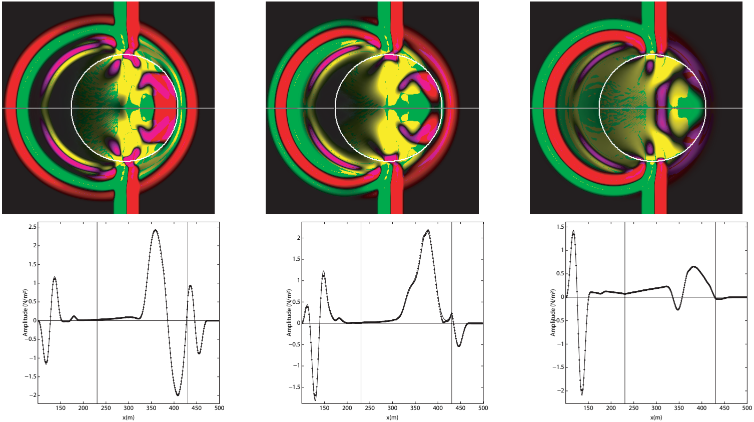
$K_N \to +\infty, K_T \to 0, M_{N,T} = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_T^{\pm} = 0 \;\Rightarrow$ glissement sans frottements

$K_{N,T} \to 0, M_{N,T} = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{N,T}^{\pm} = 0 \;\Rightarrow$ décollement

- justification théorique : longueur d'onde grande devant interphase
- validation expérimentale : Pyrak-Nolte (1990)
- limitation : autorisation d'une interpénétration

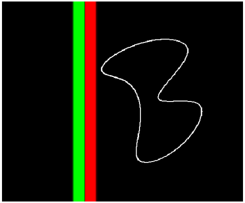
Expérience numérique 1/2 :

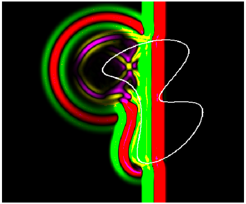
- plexiglass / aluminium, pour différents contacts (K_N)
- géométrie académique ⇒ solution analytique
- Lombard, Piraux : SISC 2003 (1D), SISC 2006 (2D)

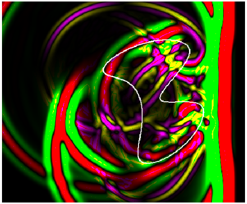


Expérience numérique 2/2 :

- plexiglass-plexiglass avec contact imparfait
- géométrie quelconque : spline cubique
- conversion d'ondes dues uniquement aux conditions de saut



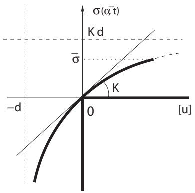




Modélisation :

- joints de fracture sèche
- études expérimentales : Goodman 1974, Bandis-Barton 1983-85

$$\Rightarrow \boxed{[u(\alpha,t)] = \frac{1}{K}\,\frac{\sigma(\alpha^-,t)}{1-\dfrac{\sigma(\alpha^-\,t)}{K\,d}}, \qquad [\sigma(\alpha,t)] = 0}$$



- réponse mécanique non linéaire ($\sigma_N \nearrow$: nombre d'aspérités en contact $\nearrow$)
- cas-limites

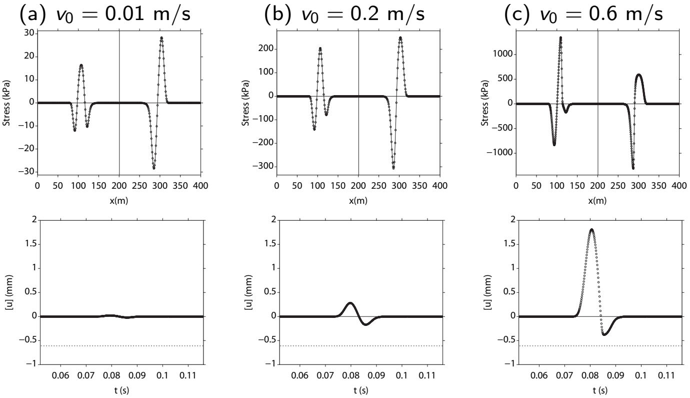
$$\sigma(\alpha^-,t) \ll K\,d \;\Rightarrow\; \text{modèle linéaire tangent}$$

$$d \rightarrow 0 \;\Rightarrow\; \text{contact unilatéral (graphe non différentiable)}$$

- Lombard-Piraux, JCAM (2007): analyse mathématique + simulations

Expérience numérique :

- plexiglass homogène, $d = 6.1\,10^{-4}$ m
- étude paramétrique en fonction de l'amplitude v_0 incidente
- (a) : cf modèle linéaire
- (c) : $\min([u]) \rightarrow -d^+$



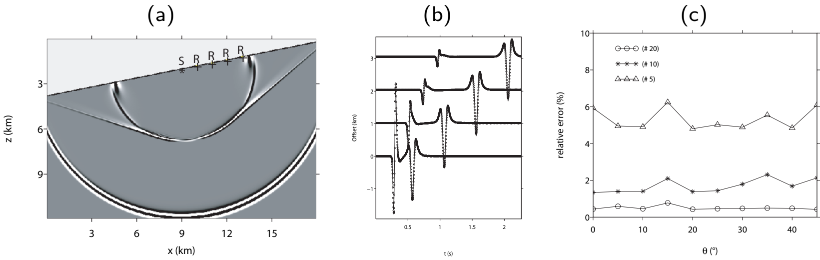
Modélisation :

- conditions de Dirichlet $\Rightarrow$ matrice **L**
- solide élastique isotrope, 2D
- approche implicite : vacuum (Kelly 1976, Virieux 1986)
  $\Rightarrow$ perte de précision si angle entre maillage et interface, instabilités
- approche explicite : image method (Kelly 1976, Levander 1988)
  $\Rightarrow$ diffractions parasites, difficulté de mise en oeuvre
- Lombard-Piraux-Gélis-Virieux, Geophys. J. Int (2007)
  50 longueurs d'onde de propagation

$$\begin{cases} 10 \text{ pts} / \lambda_{\text{min}} \Rightarrow \text{TB} \\ 5 \text{ pts} / \lambda_{\text{min}} \Rightarrow \text{OK} \end{cases}$$

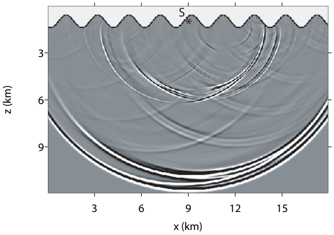
Expérience numérique 1/2 :

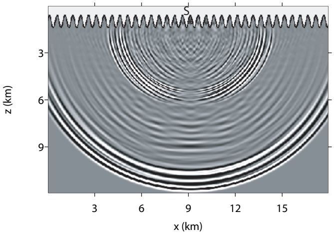
- domaine 18 km × 12 km, h=10 m, $f_c = 24$ Hz
- surface libre plane inclinée de θ, point source enfoui (a)
- solution analytique : Cagniard-de Hoop (b)
- étude paramétrique (c) : erreur indépendante de θ



Expérience numérique 2/2 :

- surface libre sinusoïdale
- point source enfoui
- amplitude : 800 m, longueurs d'onde de la sinusoïde : 0.5 km, 2 km





Modélisation :

- Biot basse-fréquence 1D

$$f \ll f_c = \frac{\eta\,\phi}{2\,\pi\,a\,\kappa\,\rho_f}$$

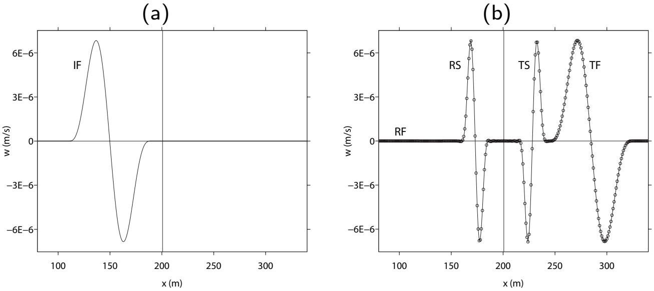
- coefficients indépendants de f $(\eta/\kappa = \text{Cte})$
- système hyperbolique avec terme source

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\,\mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial\,x}\,\mathbf{A}\,\mathbf{U} = -\mathbf{S}\,\mathbf{U}$$

- 1 onde de compression rapide
- 1 onde de cisaillement lente, diffusive et statique si $f < f_c$
- difficulté 1 : système raide (condition CFL $\searrow$)
  $\Rightarrow$ Strang splitting
- difficulté 2 : échelle d'évolution de l'onde lente
  $\Rightarrow$ raffinement de maillage spatio-temporel
- Chiavassa-Lombard-Piraux (2007) : soumis à JCAM
- 2D en cours : outils testés indépendamment

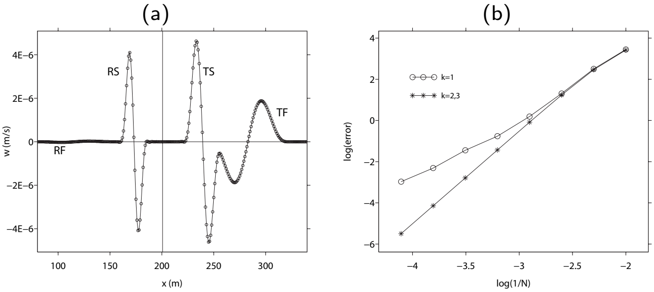
Expérience numérique 1/4 :

- grès saturé d'eau, contact hydraulique imparfait : $[p] \neq 0$
- comparaison avec solution analytique
- schéma seul $\Rightarrow$ pas d'onde diffractée ...



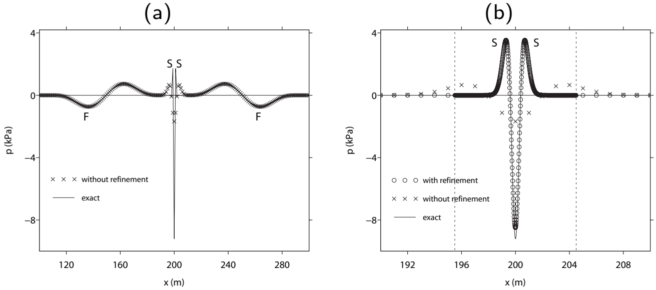
Expérience numérique 2/4 :

- grès + eau ($\eta = 0$) / schiste + eau ($\eta = 0$)
- pas de méthode d'interface (a) : GKS-instable
- mesures de convergence (b) : $k = 2$ ou $k = 3 \Rightarrow$ ordre 4



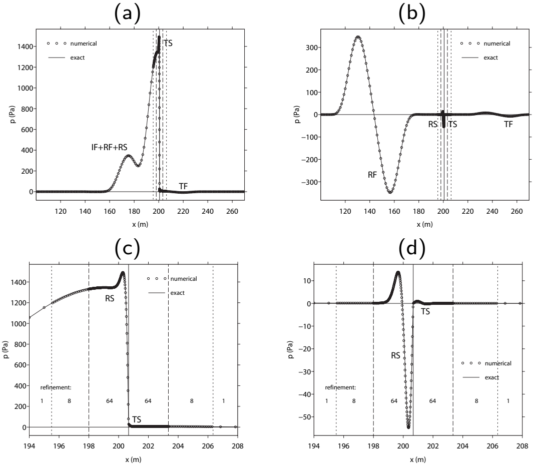
Expérience numérique 3/4 :

- grès + eau ($\eta = 10^{-3}$ Pa.s)
- source ponctuelle de contrainte $f = 30$ Hz $\ll f_c = 25$ kHz
- diffusion de l'onde lente, mal capturée (a)
- raffinement de maillage au voisinage de la source (b)



Expérience numérique 4/4 :

- grès + eau ($\eta = 10^{-3}$ Pa.s) / grès + gaz ($\eta = 2.2\,10^{-5}$ Pa.s)
- raffinement $\times 8$ et $\times 64$ autour de l'interface
- forte amplitude des ondes lentes diffusives



Cinquième partie V

Conclusion

Bilan :

- méthode numérique pour "prendre en compte" les interfaces
- modification locale de schémas classiques

Avantages :

- description géométrique précise sur maillage cartésien (courbure, ...)
- précision des schémas maintenue en présence de discontinuités
- surcoût informatique négligeable
- description physique précise

Inconvénients :

- stabilité pas assurée a priori
- pas de singularités géométriques : coins, intersections ...

Poroélasticité :

- Biot BF 2D (en cours)
- Biot HF 1D-2D : dérivées fractionnaires

Codes :

- 3D
- parallélisation

Contact non linéaire :

- cisaillement 1D
- fracturation dynamique (Ben Jemaa 2007)

`http://w3lma.cnrs-mrs.fr/~MI/`