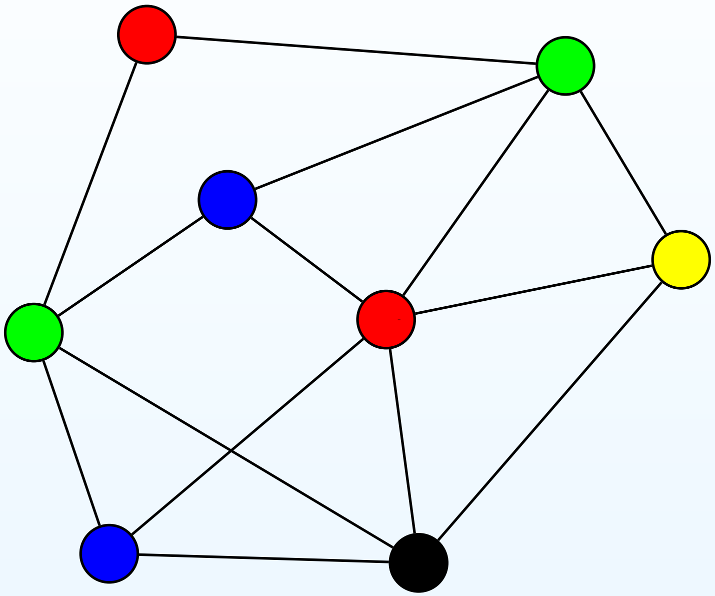
b-coloration des block graphes avec $\omega(G) \leq 3$

Laboratoire G-SCOP - Grenoble
Financée par CAPES

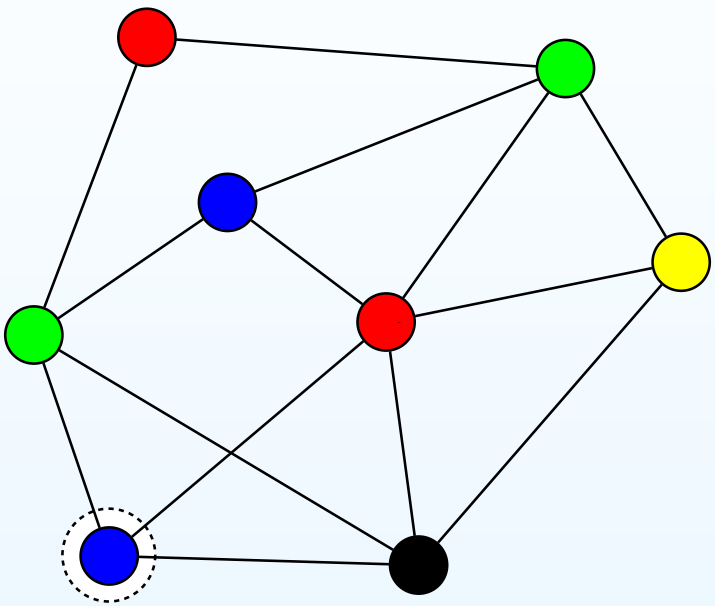
Ana Silva Frédéric Maffray

Améliorer une coloration propre

- b-coloration
- Nombre b-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\phi(G)$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$
- Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

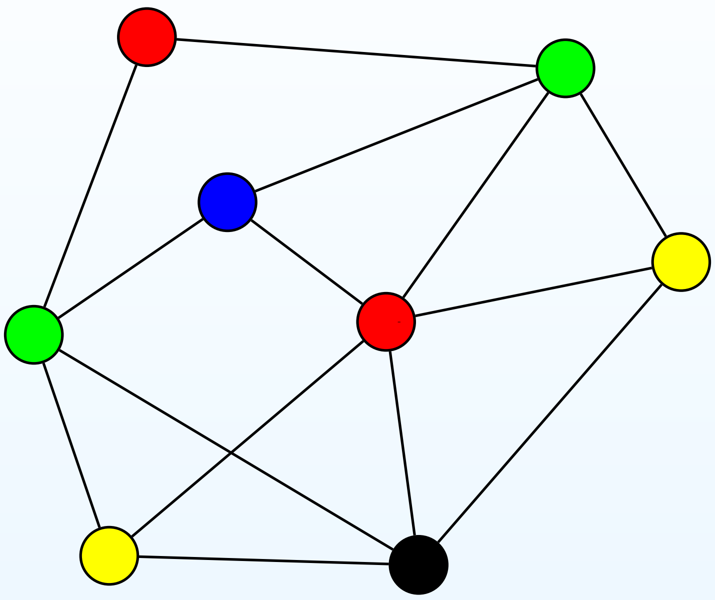


Améliorer une coloration propre



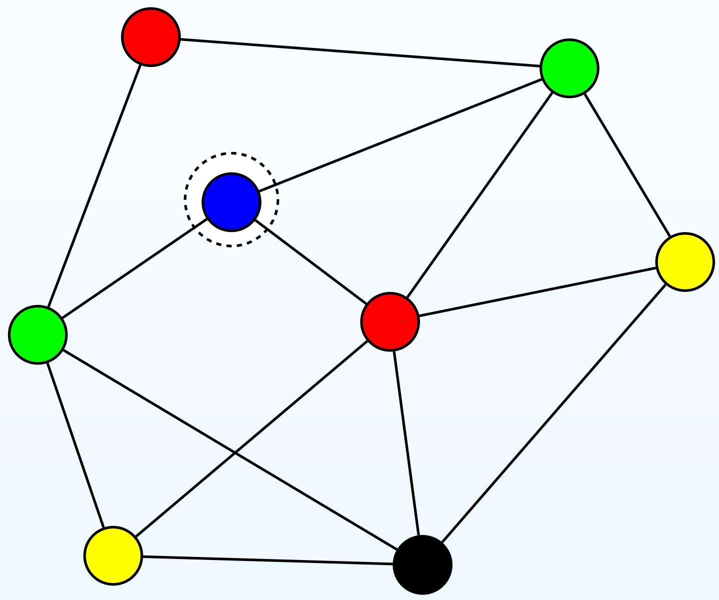
Améliorer une coloration propre

- b-coloration
- Nombre b-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\phi(G)$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$
- Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$



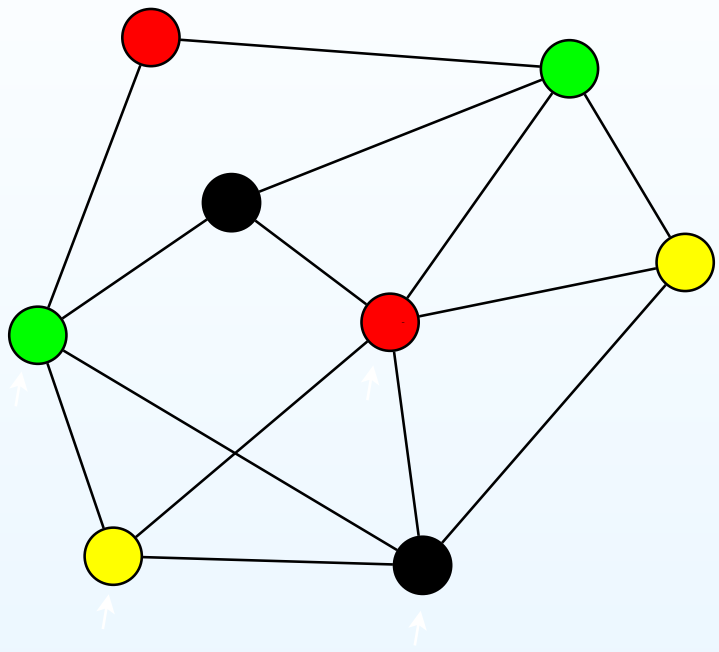
Améliorer une coloration propre

- b-coloration
- Nombre b-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\phi(G)$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$
- Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

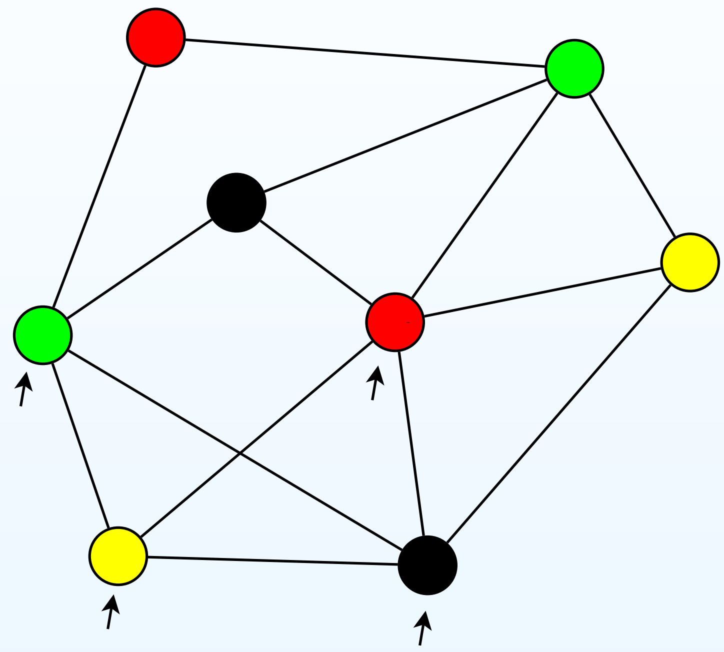


Améliorer une coloration propre

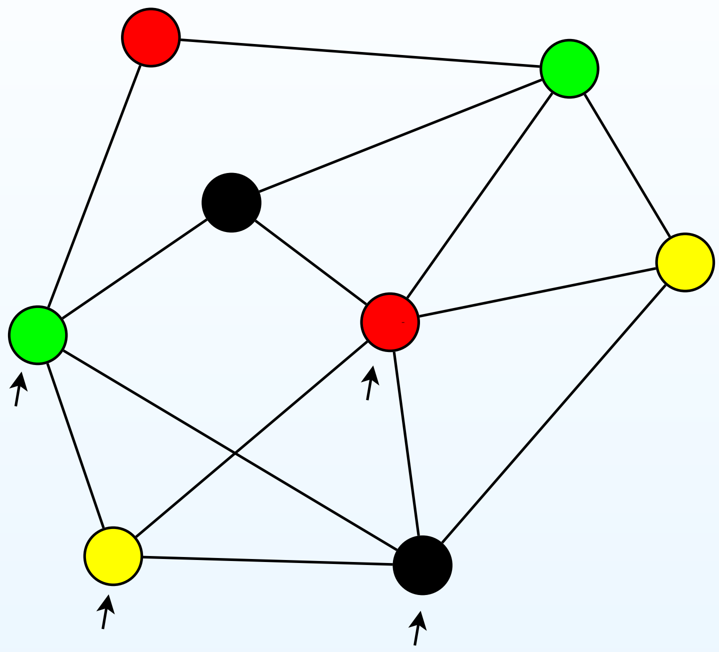
- b-coloration
- Nombre b-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\phi(G)$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$
- Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$



Ne peut pas être améliorée

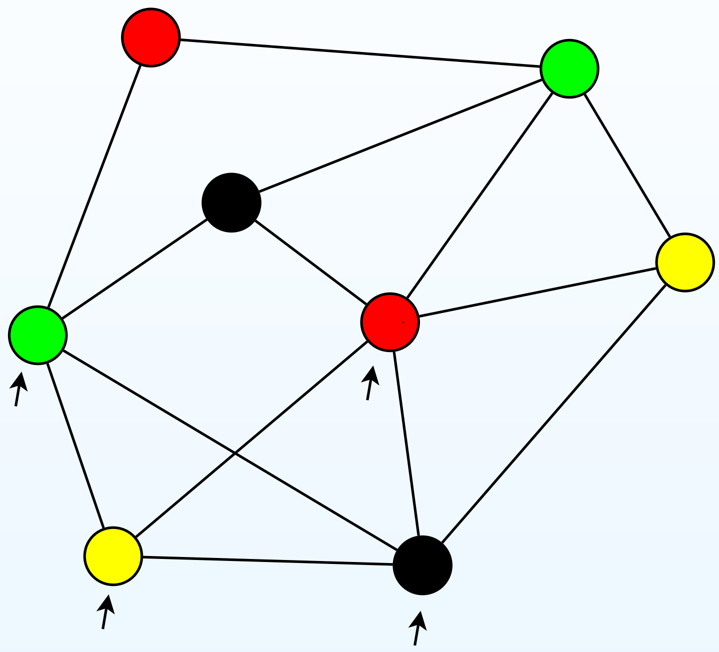


b-coloration



- b-sommet: un sommet qui “voit” toutes les couleurs

b-coloration



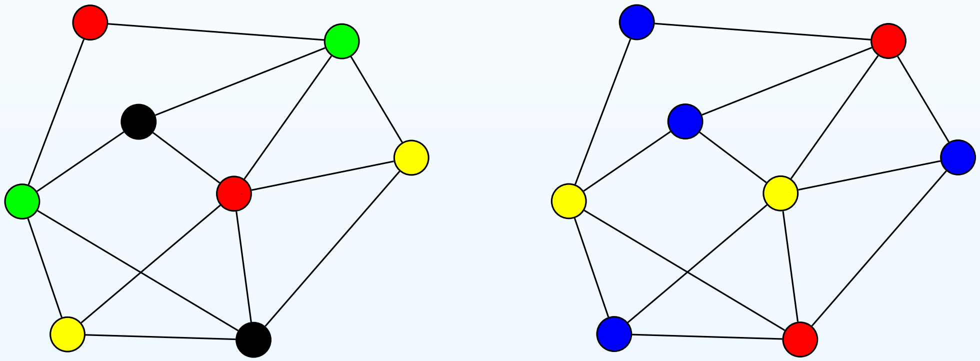
- b-sommet: un sommet qui “voit” toutes les couleurs
- b-coloration: une coloration propre telle que chaque couleur contient un b-sommet

Nombre b-chromatique

Irving et Manlove, 1999

Nombre b-chromatique

Irving et Manlove, 1999



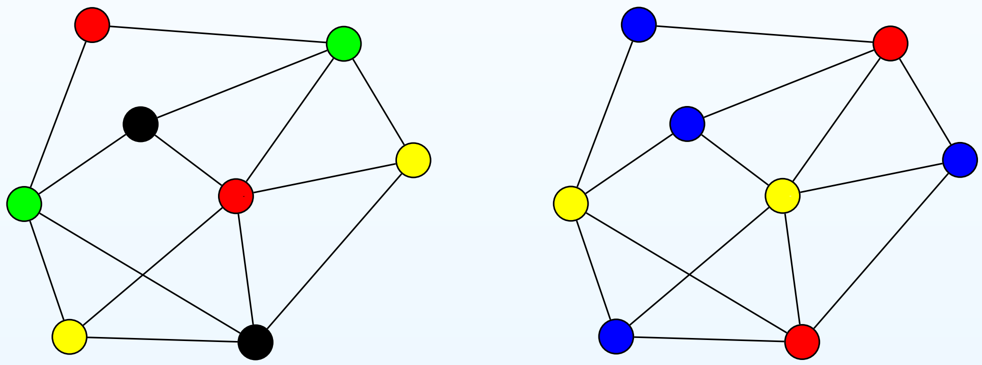
Coloration en 4 couleurs qui ne peut pas être amériolée

Coloration en 3 couleurs

Nombre b-chromatique

- b-coloration
- Nombre $\boldsymbol{b}$-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\boldsymbol{\phi(G)}$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe $\boldsymbol{G}$ tel que $\boldsymbol{\phi(G) < m(G) - 1}$
- Si $\boldsymbol{\omega(G) \leq 3}$, alors $\boldsymbol{m(G) - \phi(G) \leq 1}$

Irving et Manlove, 1999



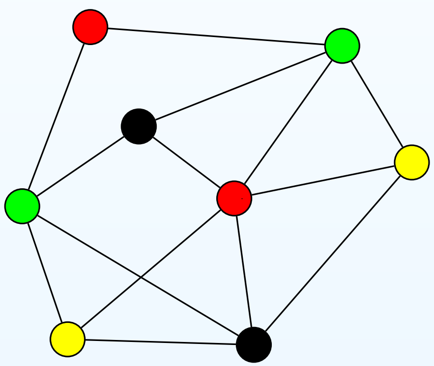
Coloration en 4 couleurs qui ne peut pas être amériolée

Coloration en 3 couleurs

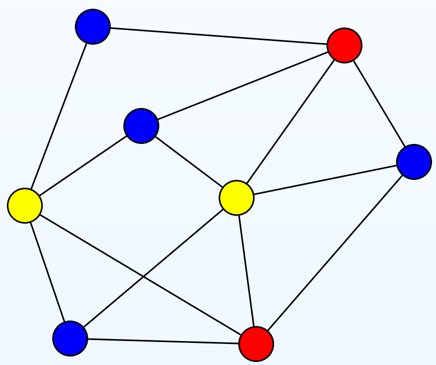
Nombre b-chromatique de G:

Nombre b-chromatique

Irving et Manlove, 1999



Coloration en 4 couleurs qui ne peut pas être amériolée



Coloration en 3 couleurs

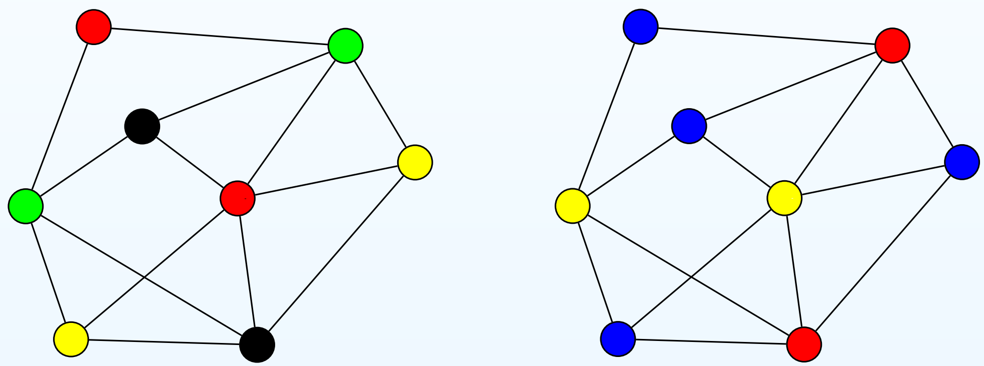
Nombre b-chromatique de G:

$\phi(G) =$ nombre <u>maximum</u> de couleurs utilisées par une b-coloration de G

- b-coloration
- Nombre b-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\phi(G)$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$
- Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

Nombre b-chromatique

Irving et Manlove, 1999



Coloration en 4 couleurs qui ne peut pas être amériolée

Coloration en 3 couleurs

Nombre b-chromatique de G:

$\phi(G) =$ nombre <u>maximum</u> de couleurs utilisées par une b-coloration de G

Fait $\phi(G) \geq \chi(G)$.

Complexité

- $\mathcal{NP}$-complet pour un graphe général (Irving et Manlove)

Complexité

- $\mathcal{NP}$-complet pour un graphe général (Irving et Manlove)
- $\mathcal{NP}$-complet pour les graphes bipartis (Kratochvíl, Tuza et Voigt)

Complexité

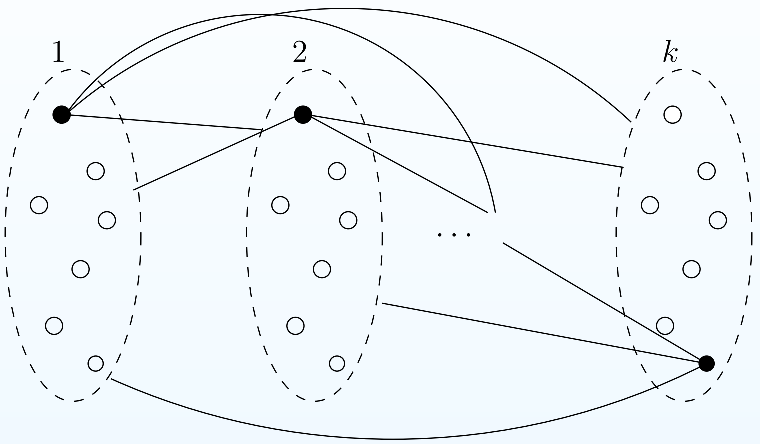
- $\mathcal{NP}$-complet pour un graphe général (Irving et Manlove)
- $\mathcal{NP}$-complet pour les graphes bipartis (Kratochvíl, Tuza et Voigt)
- Polynomial pour les arbres (Irving et Manlove)

Complexité

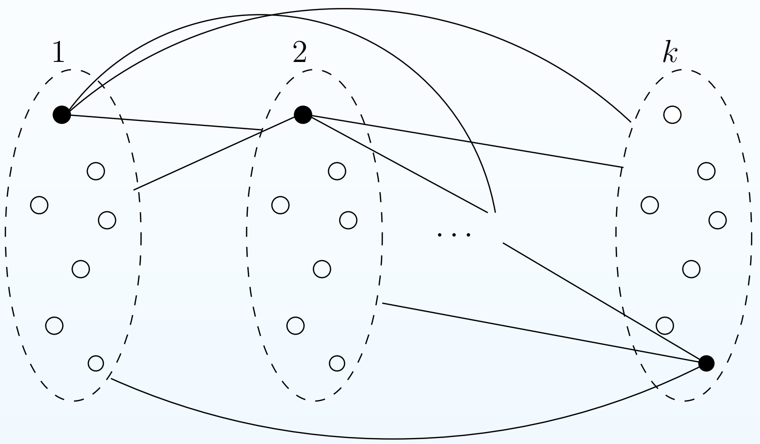
- $\mathcal{NP}$-complet pour un graphe général (Irving et Manlove)
- $\mathcal{NP}$-complet pour les graphes bipartis (Kratochvíl, Tuza et Voigt)
- Polynomial pour les arbres (Irving et Manlove)

Polynomial pour les block graphes avec $\omega(G) \leq 3$

Borne supérieure pour $\phi(G)$

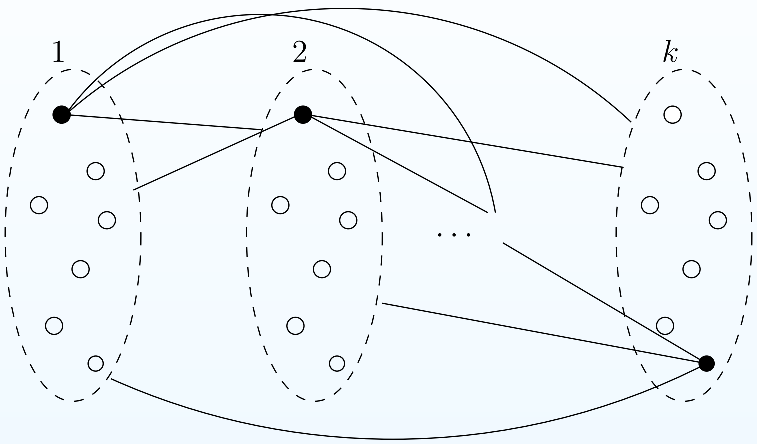


Borne supérieure pour $\phi(G)$



Il y a au moins k sommets de degré au moins $k-1$

Borne supérieure pour $\phi(G)$

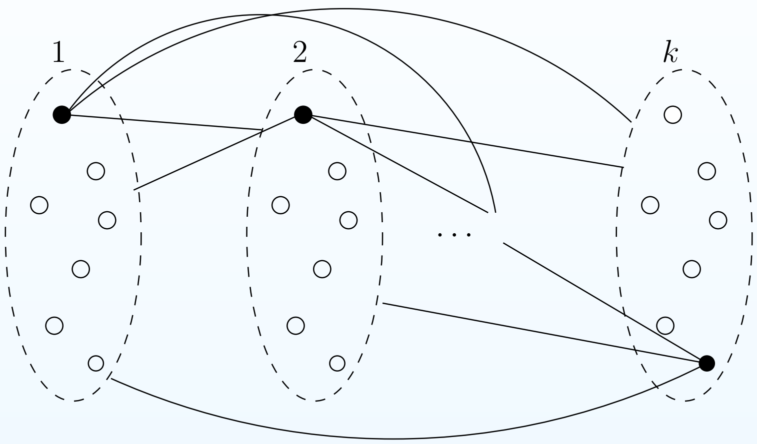


Il y a au moins k sommets de degré au moins $k-1$

$m(G)$: plus grand entier k tel que G a au moins k sommets de degré $\geq k-1$

Borne supérieure pour $\phi(G)$

- b-coloration
- Nombre b-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\phi(G)$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$
- Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

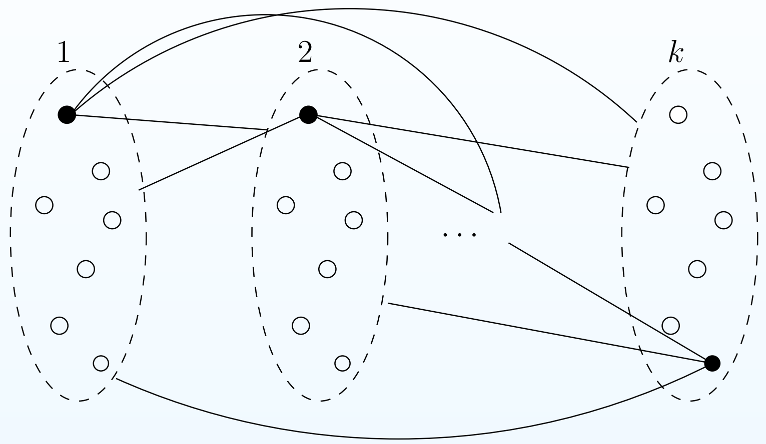


Il y a au moins k sommets de degré au moins $k-1$

$m(G)$: plus grand entier k tel que G a au moins k sommets de degré $\geq k-1$

Fait $\phi(G) \leq m(G)$

Borne supérieure pour $\phi(G)$



Il y a au moins k sommets de degré au moins $k-1$

$m(G)$: plus grand entier k tel que G a au moins k sommets de degré $\geq k-1$

Fait $\phi(G) \leq m(G)$

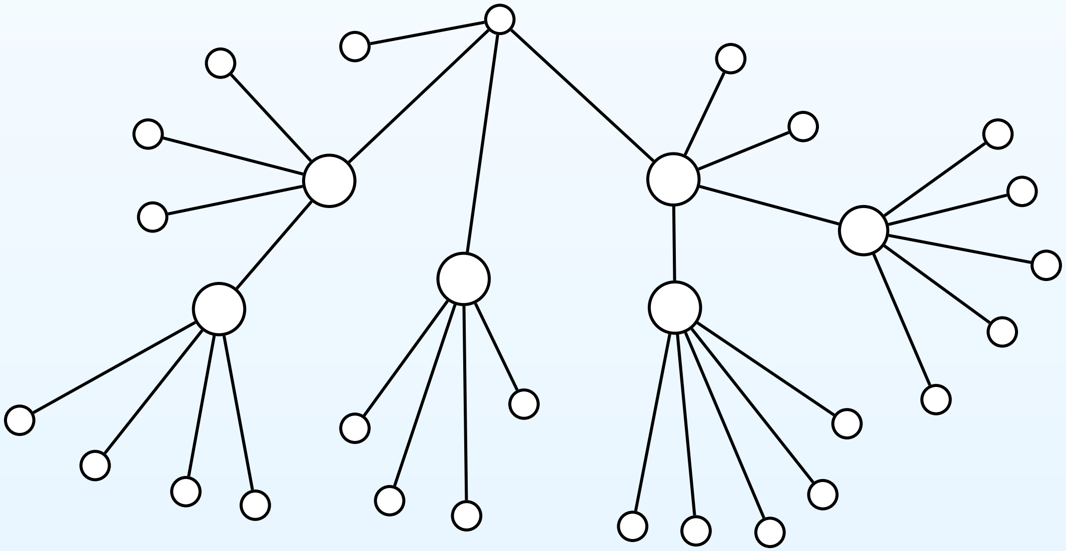
$u \in V(G)$ est *dense* si $d(u) \geq m(G) - 1$.

Le cas des arbres

Théorème (Irving and Manlove) *Si T est une arbre, alors $\phi(T) = m(T)$ ou $\phi(T) = m(T) - 1$.*

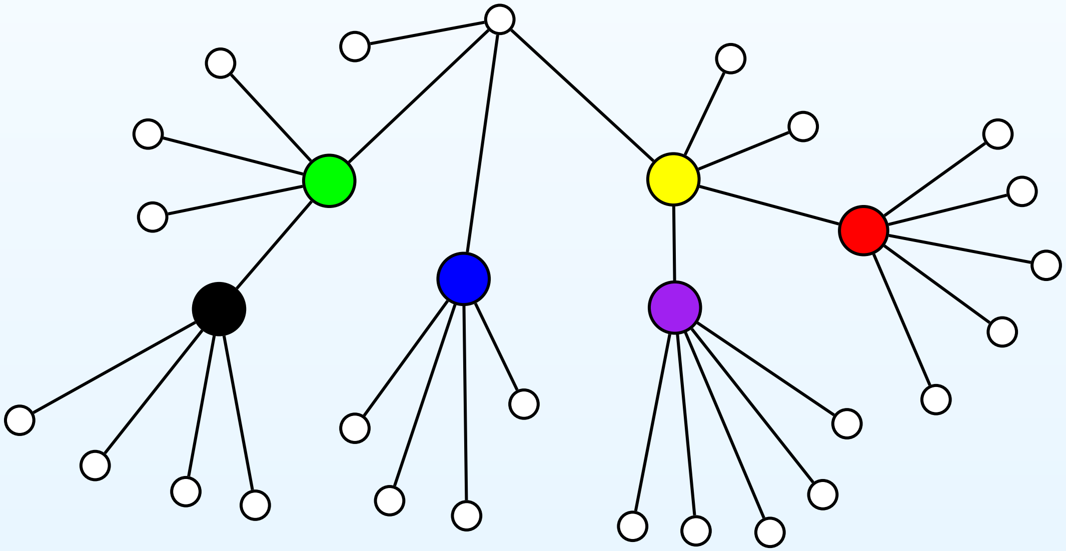
Le cas des arbres

Théorème (Irving and Manlove) *Si T est une arbre, alors $\phi(T) = m(T)$ ou $\phi(T) = m(T) - 1$.*



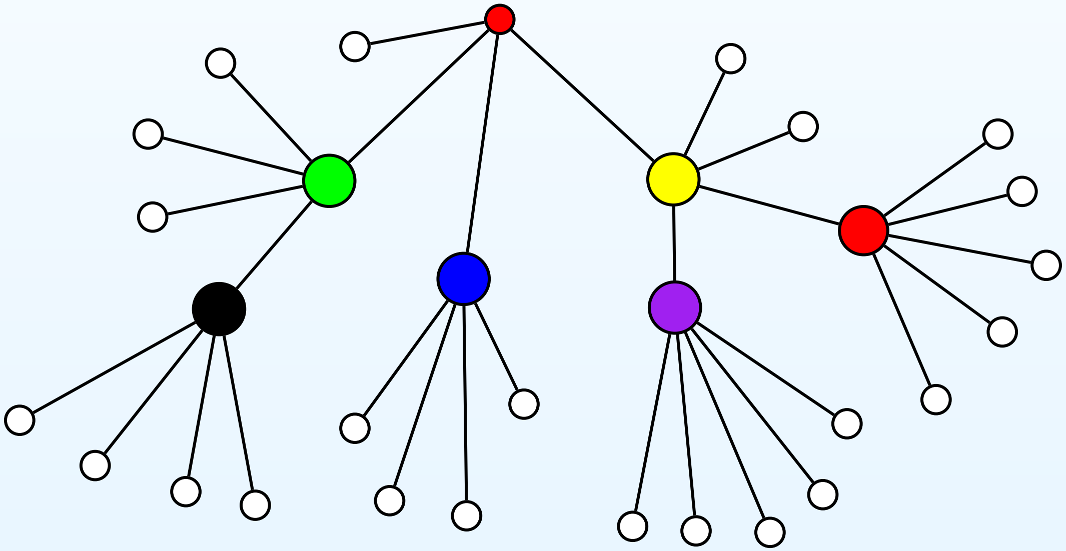
Le cas des arbres

Théorème (Irving and Manlove) *Si T est une arbre, alors $\phi(T) = m(T)$ ou $\phi(T) = m(T) - 1$.*



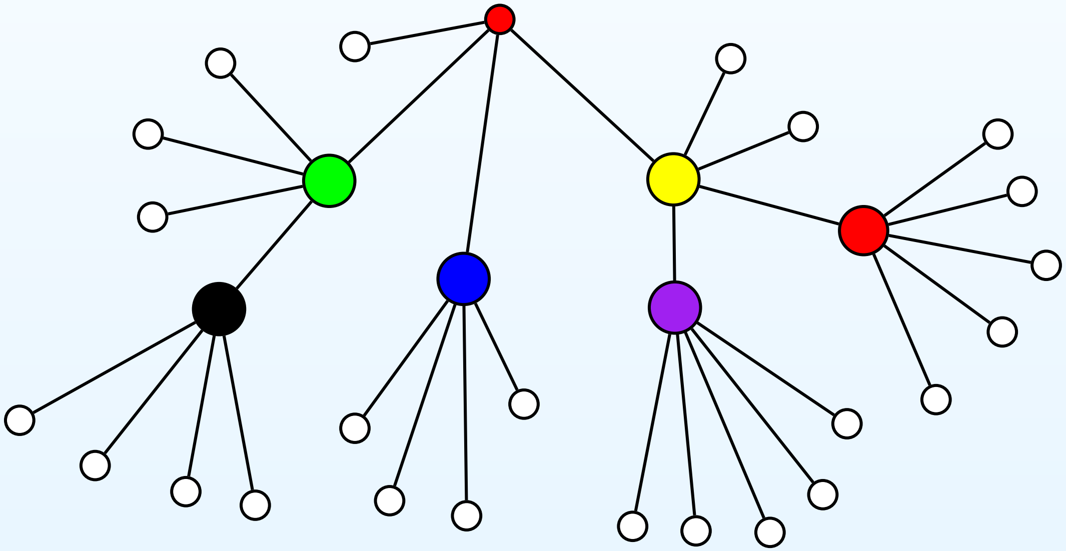
Le cas des arbres

Théorème (Irving and Manlove) *Si T est une arbre, alors $\phi(T) = m(T)$ ou $\phi(T) = m(T) - 1$.*



Le cas des arbres

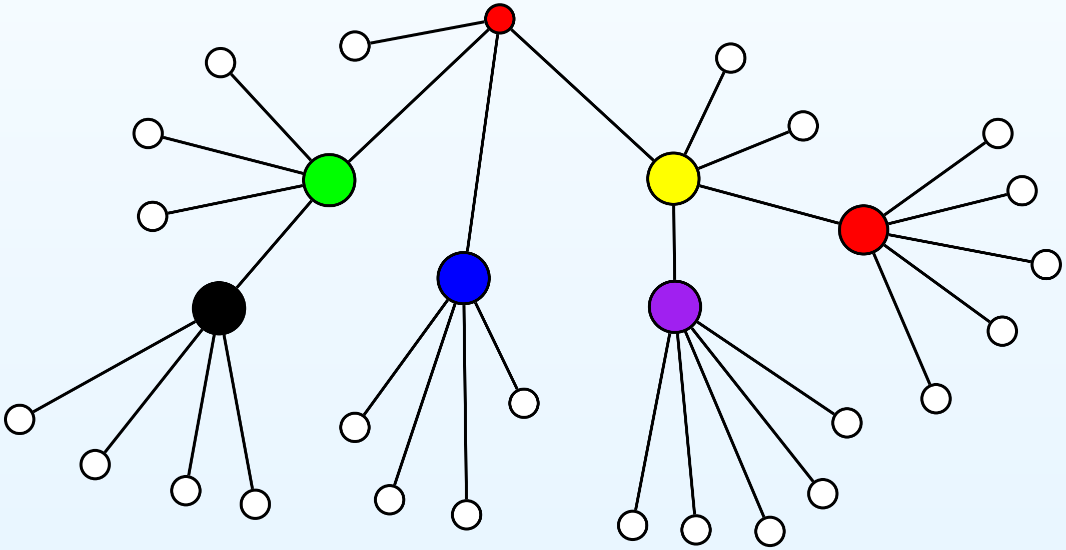
Théorème (Irving and Manlove) *Si T est une arbre, alors $\phi(T) = m(T)$ ou $\phi(T) = m(T) - 1$.*



V': ensemble des sommets denses de T.

Le cas des arbres

Théorème (Irving and Manlove) *Si T est une arbre, alors $\phi(T) = m(T)$ ou $\phi(T) = m(T) - 1$.*



V': ensemble des sommets denses de T.

Sommet *encerclé* par V'

Le cas des arbres

Théorème (Irving and Manlove) *Si $|V'| = m$ et V' encercle un sommet, alors $\phi(T) = m(T) - 1$. Sinon, $\phi(T) = m(T)$.*

Le cas des arbres

Théorème (Irving and Manlove) *Si $|V'| = m$ et V' encercle un sommet, alors $\phi(T) = m(T) - 1$. Sinon, $\phi(T) = m(T)$.*

V'': sous-ensemble de m sommets denses de G.

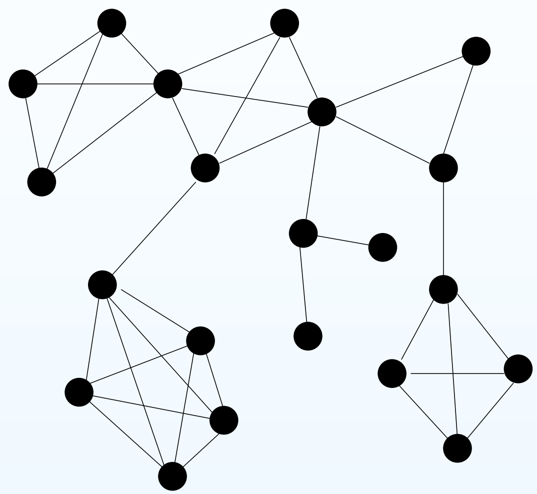
Le cas des arbres

Théorème (Irving and Manlove) *Si $|V'| = m$ et V' encercle un sommet, alors $\phi(T) = m(T) - 1$. Sinon, $\phi(T) = m(T)$.*

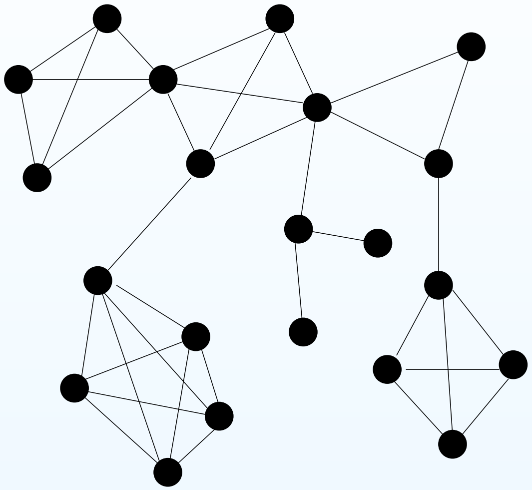
V'': sous-ensemble de m sommets denses de G.

Fait *Si V'' encercle un sommet, alors V'' ne peut pas être un ensemble de b-sommets d'une b-coloration avec $m(G)$ couleurs*

Block graphes

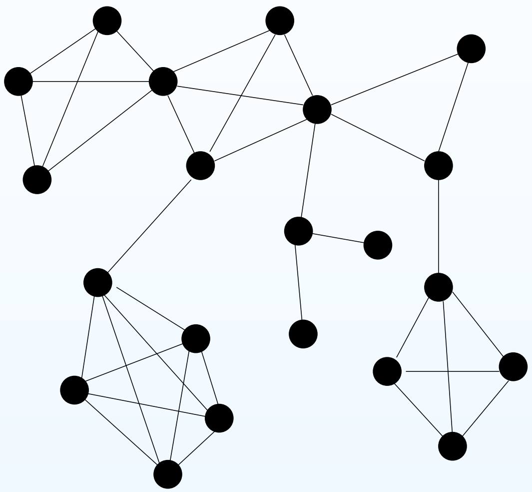


Block graphes



Les block graphes ont une structure d'arbre.

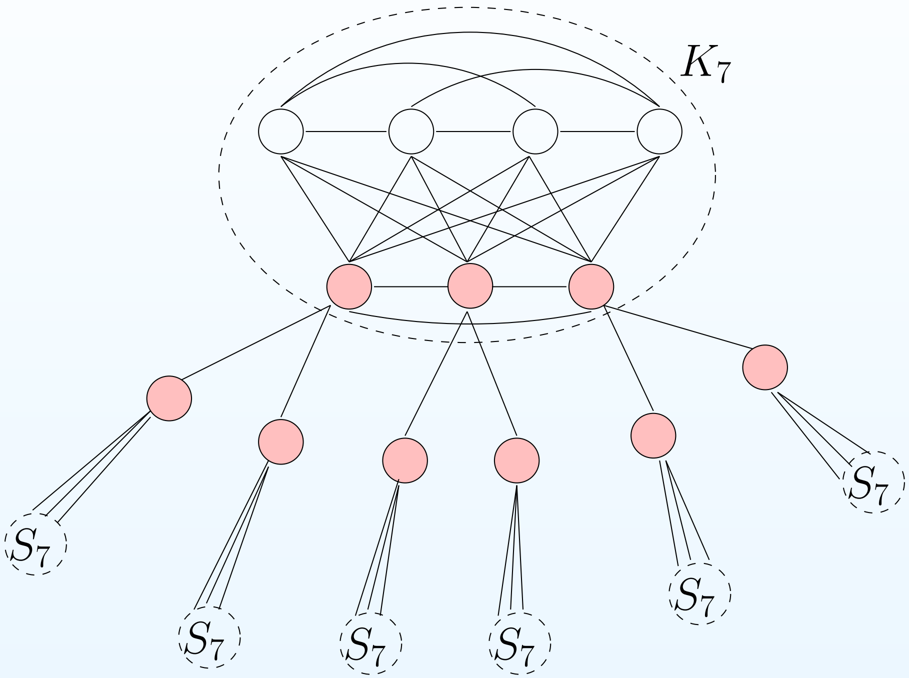
Block graphes



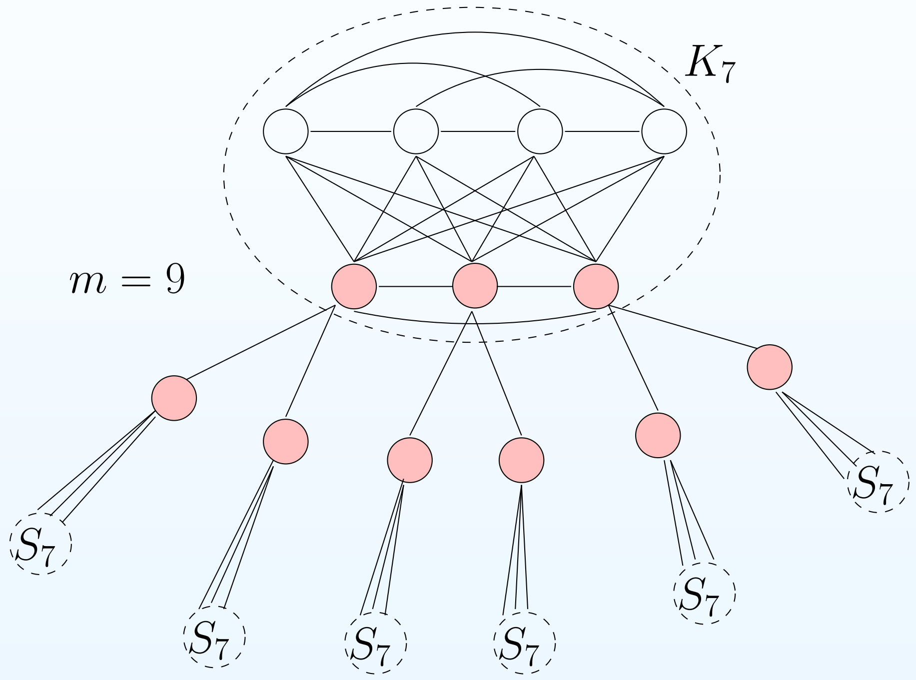
Les block graphes ont une structure d'arbre.

Si G est un block graphe, alors $m(G) - 1 \leq \phi(G) \leq m(G)$?

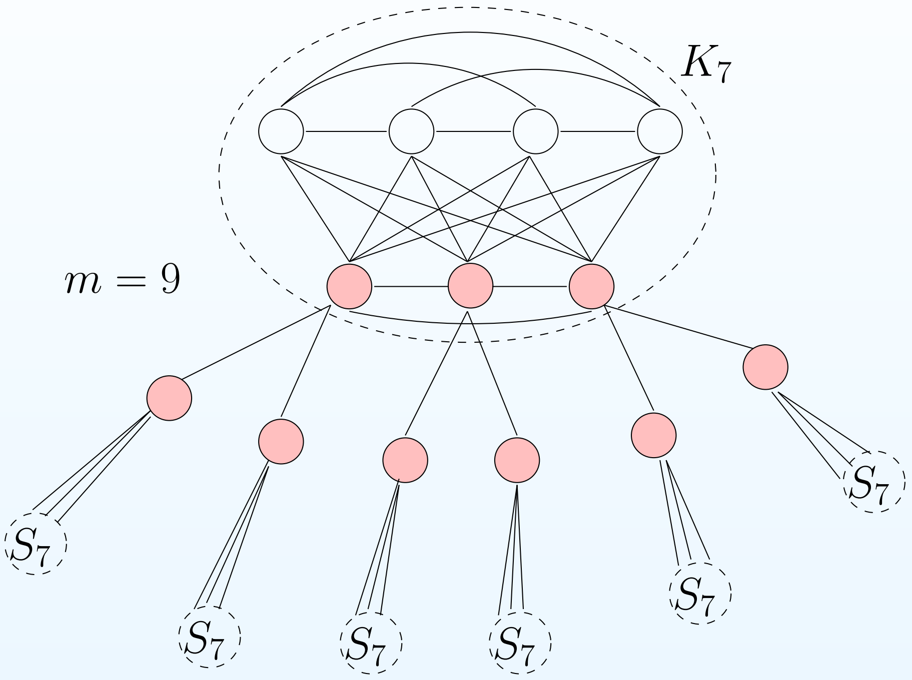
Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$



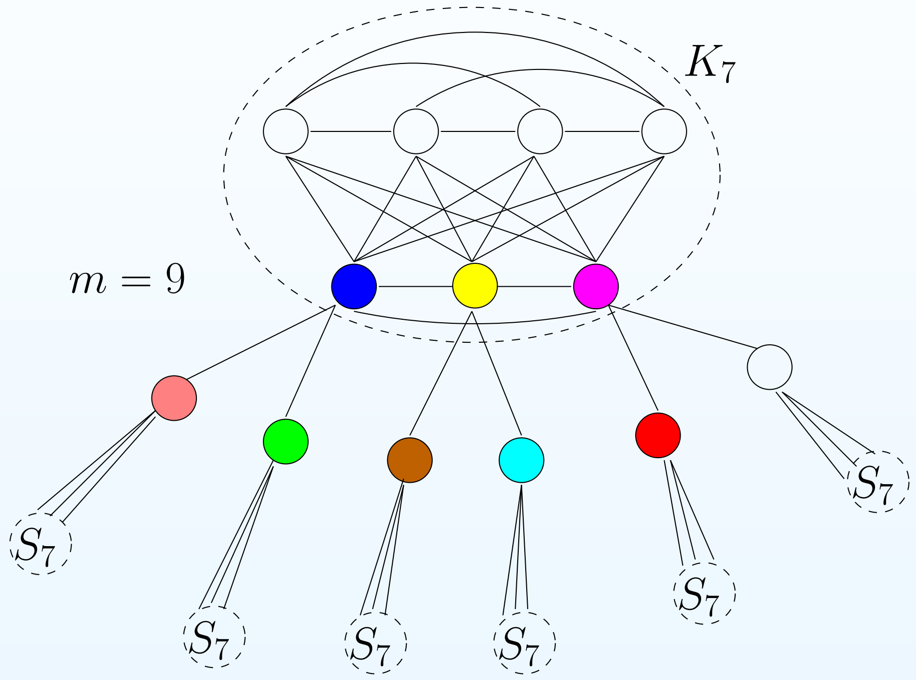
Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$



Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$

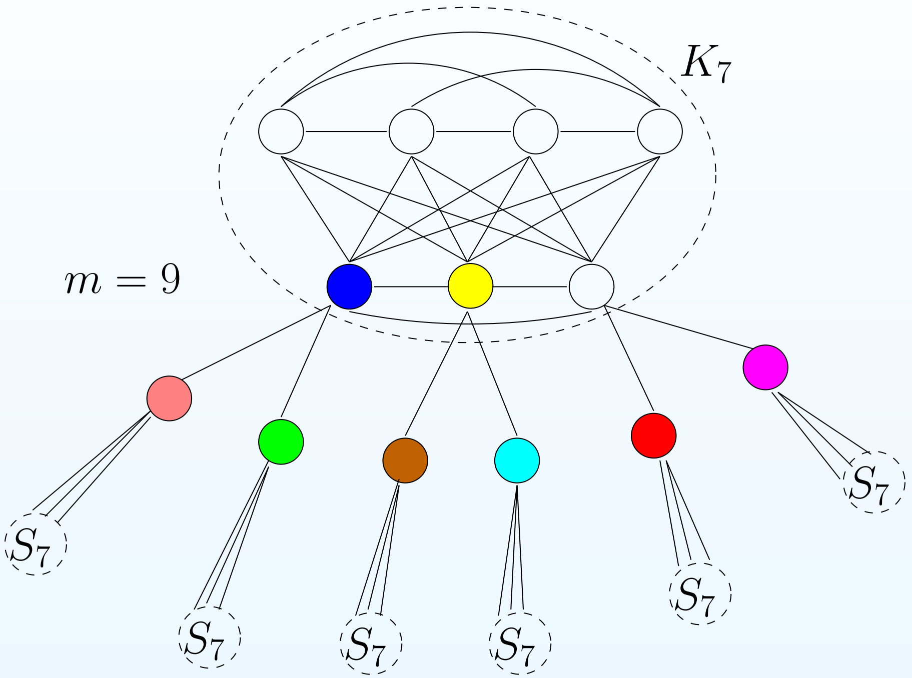


Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$



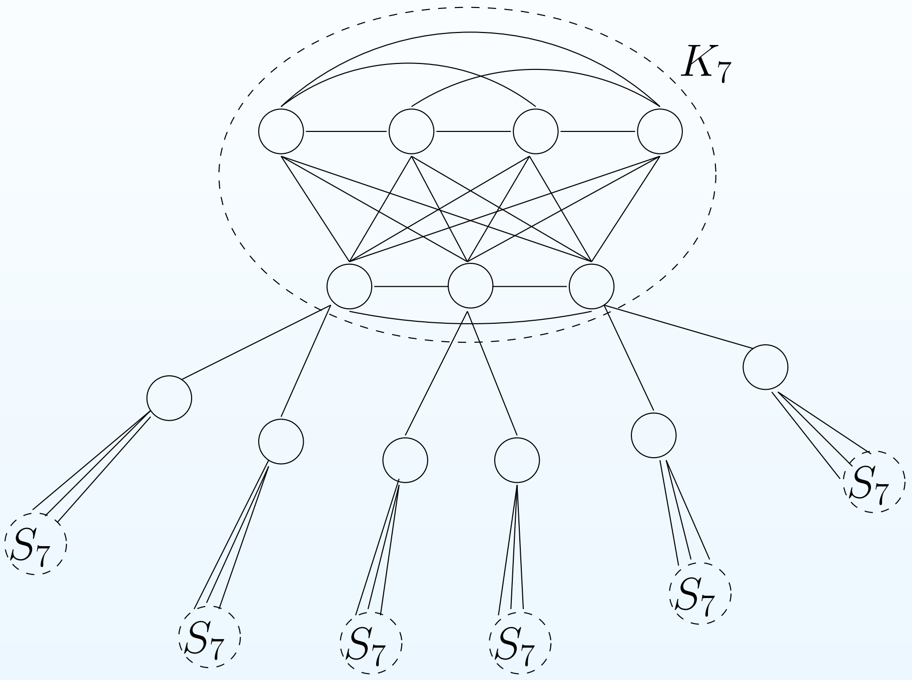
Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$

- b-coloration
- Nombre $\boldsymbol{b}$-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\boldsymbol{\phi(G)}$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe $\boldsymbol{G}$ tel que $\boldsymbol{\phi(G) < m(G) - 1}$
- Si $\boldsymbol{\omega(G) \leq 3}$, alors $\boldsymbol{m(G) - \phi(G) \leq 1}$



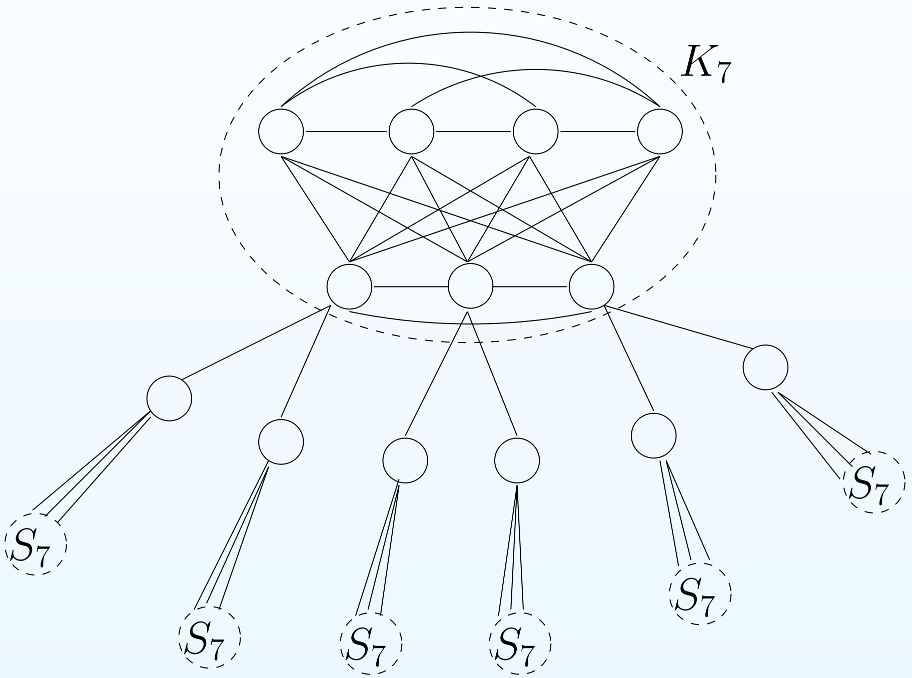
Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$

- b-coloration
- Nombre $\boldsymbol{b}$-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\boldsymbol{\phi(G)}$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe $\boldsymbol{G}$ tel que $\boldsymbol{\phi(G) < m(G) - 1}$
- Si $\boldsymbol{\omega(G) \leq 3}$, alors $\boldsymbol{m(G) - \phi(G) \leq 1}$



- b-coloration
- Nombre $\boldsymbol{b}$-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\boldsymbol{\phi(G)}$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe $\boldsymbol{G}$ tel que $\boldsymbol{\phi(G) < m(G) - 1}$
- Si $\boldsymbol{\omega(G) \leq 3}$, alors $\boldsymbol{m(G) - \phi(G) \leq 1}$

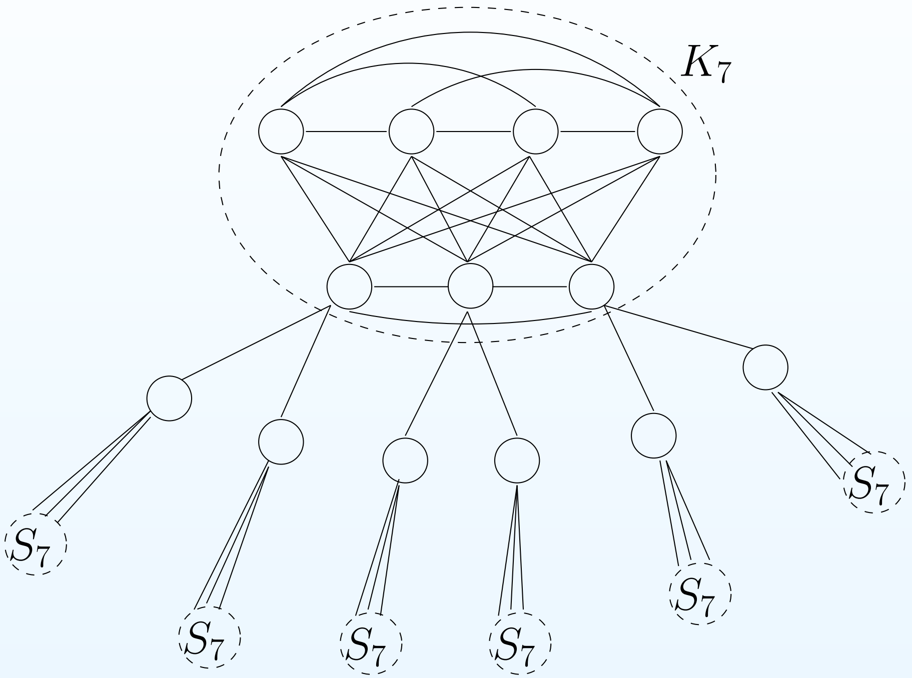
Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$



$$\phi(G) < 8 = m(G) - 1$$

Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$

- b-coloration
- Nombre b-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\phi(G)$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$
- Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$



$$\phi(G) < 8 = m(G) - 1$$

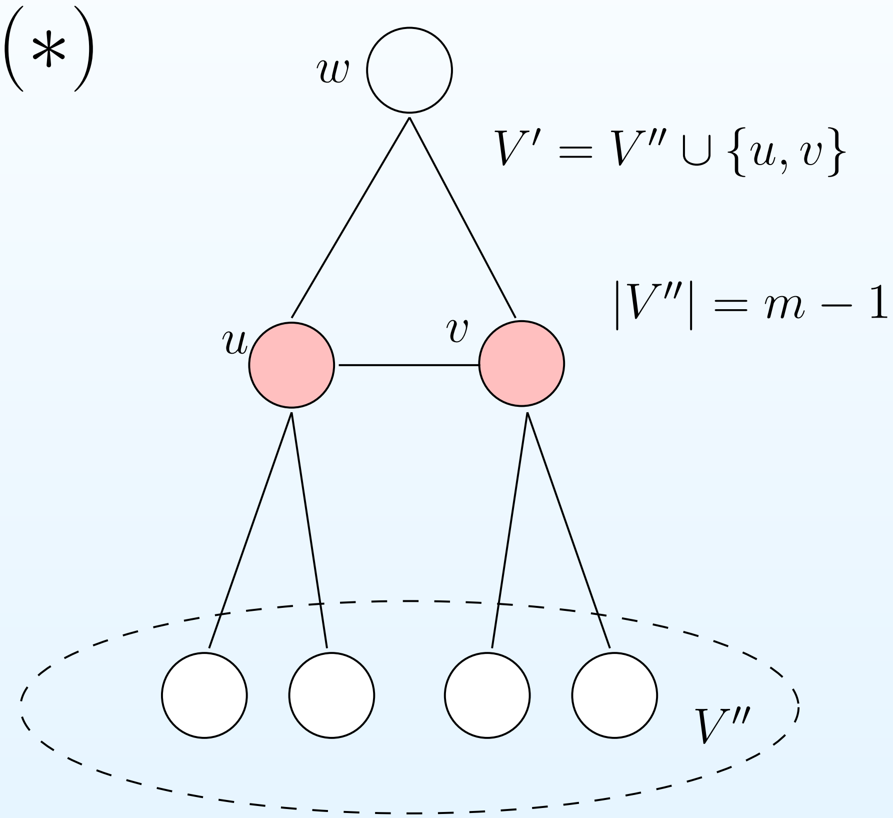
Et si $\omega(G) < 7$?

Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

V': ensemble des sommets denses de G

Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

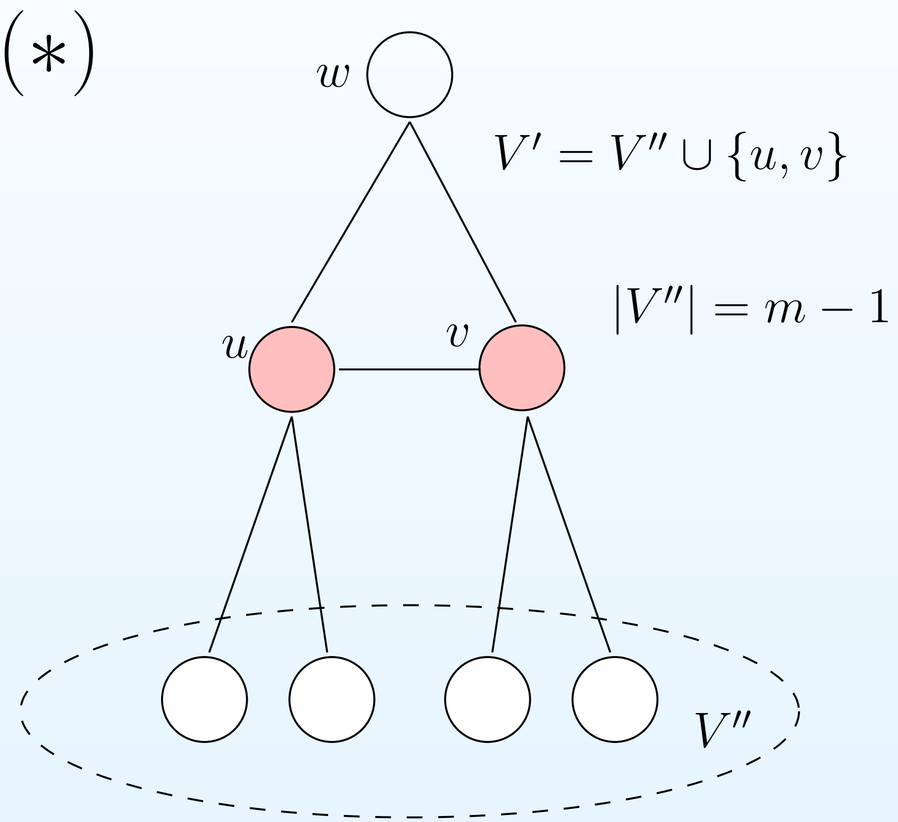
V': ensemble des sommets denses de G



Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

- b-coloration
- Nombre b-chromatique
- Complexité
- Borne supérieure pour $\phi(G)$
- Le cas des arbres
- Block graphes
- Block graphe G tel que $\phi(G) < m(G) - 1$
- Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

V': ensemble des sommets denses de G



Fait *Si $(*)$, alors $\phi(G) < m(G)$.*

Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

Théorème *Si G est un block graphe tel que $\omega(G) = 3$ alors:*

1. *Si $|V'| = m(G)$ et V' encercle un sommet, alors $\phi(G) = m(G) - 1$;*
2. *Si $(*)$, alors $\phi(G) = m(G) - 1$;*
3. *Sinon, $\phi(G) = m(G)$.*

Si $\omega(G) \leq 3$, alors $m(G) - \phi(G) \leq 1$

Théorème *Si G est un block graphe tel que $\omega(G) = 3$ alors:*

1. *Si $|V'| = m(G)$ et V' encercle un sommet, alors $\phi(G) = m(G) - 1$;*
2. *Si $(*)$, alors $\phi(G) = m(G) - 1$;*
3. *Sinon, $\phi(G) = m(G)$.*

Pour G tel que $3 < \omega(G) < 7$?