Caractérisation des graphes chaîne-complétables

Martin C. Golumbic
Caesarea Rotschild Institute
Haifa

Frédéric Maffray
C.N.R.S., Laboratoire G-SCOP
Grenoble

Grégory Morel
Laboratoire G-SCOP
Grenoble

10èmes Journées Graphes et Algorithmes

7 novembre 2008

Sophia-Antipolis

Un problème de raisonnement temporel

Un groupe constitué de garçons et de filles décide d'une sortie au musée :

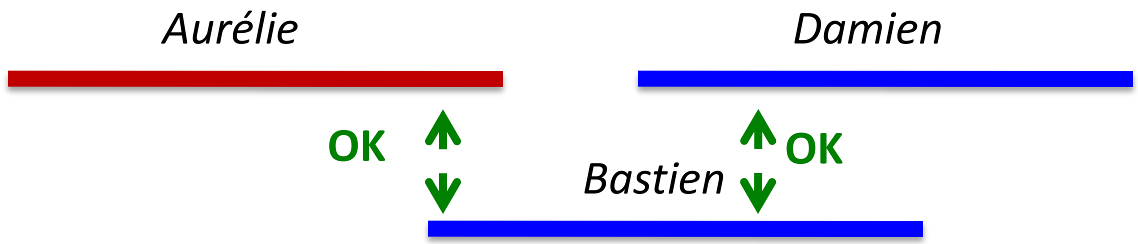
1. chacun est libre ***d'arriver et de partir quand il le souhaite***,
2. une personne qui sort du musée ***ne peut plus y rentrer***,
3. les filles désirent effectuer une visite commune à un moment de la journée ; autrement dit, ***toutes les filles seront présentes à ce moment***,
4. id. pour ***les garçons***,
5. c'est un petit musée, si bien que ***si un garçon et une fille sont présents en même temps*** dans le musée, ***ils se croisent forcément***.

Le petit ami d'Aurélie est Bastien et son frère est Damien

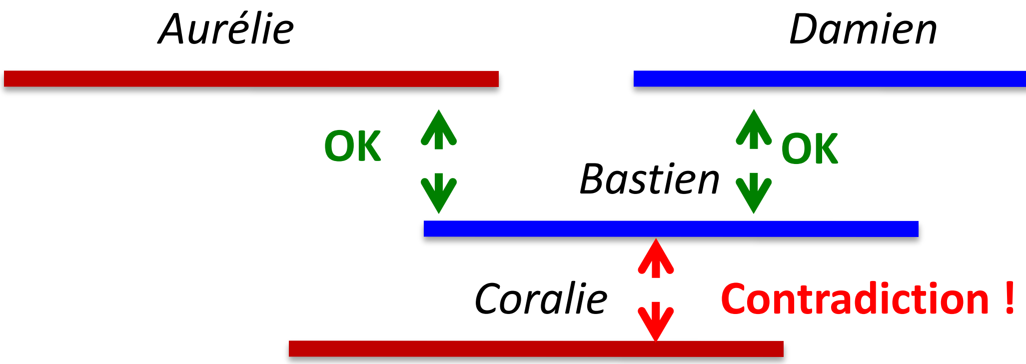
Le petit ami de Coralie est Damien et son frère est Bastien

Est-il possible que les deux filles croisent leur petit ami mais pas leur frère ?

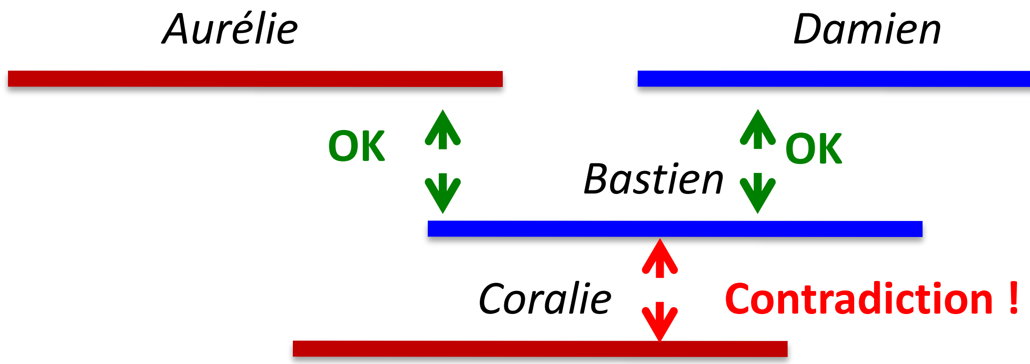
Des intervalles et des graphes



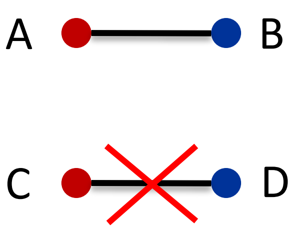
Des intervalles et des graphes



Des intervalles et des graphes



- Graphe de *disjonction* correspondant :
  - un sommet par intervalle,
  - deux sommets sont reliés si les intervalles correspondants **ne s'intersectent pas**.



Graphes bipartis sans $2K_2$

Théorème (Hammer, Peled, Simeone,…)

Soit G = (X U Y, E) un graphe biparti. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. G est sans $2K_2$,
2. Il existe un ordre total des sommets de X selon l'inclusion du voisinage,
3. Il existe un ordre total des sommets de Y selon l'inclusion du voisinage,
4. On peut affecter des poids (réels) *w* aux sommets et il existe un réel positif *t* tel que $(i,j) \in E$ si et seulement si $|w(i) - w(j)| \geq t$,
5. Tout sous-graphe induit a au plus une « grosse » composante, qui possède un sommet universel de X et un sommet universel de Y
6. …

- Différents noms pour les mêmes graphes :
  - graphes bipartis sans $2K_2$,
  - graphes de chaîne,
  - graphes de différence…

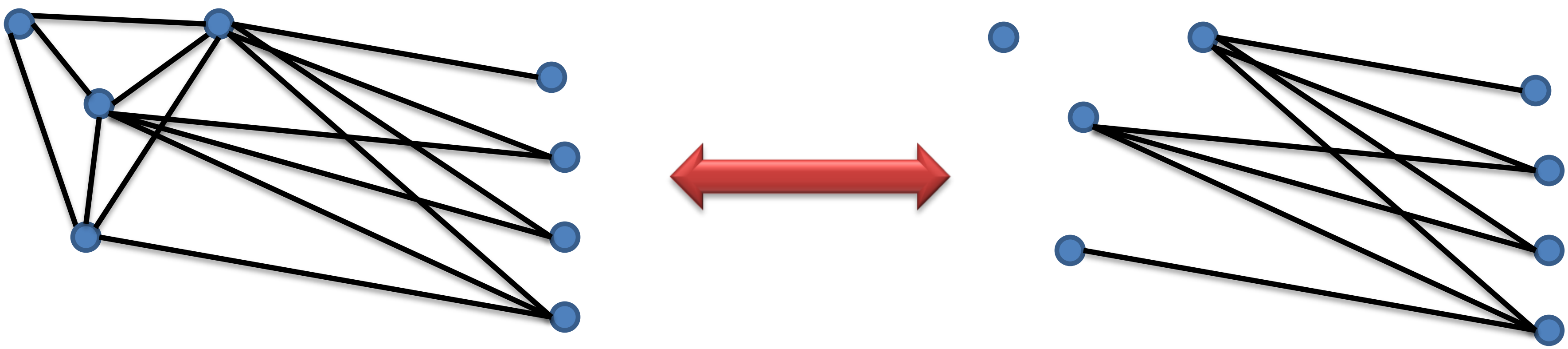
Chain graphs & threshold graphs

Définition

Un graphe G = (V,E) est un graphe à seuil *(threshold graph*) si V peut être partitionné en une clique C et un stable S, où il existe un ordre total sur les sommets de S suivant l'inclusion du voisinage.

- G = (X,Y ; E) est un graphe de chaîne ssi le graphe obtenu à partir de G en reliant 2 à 2 les sommets de X est un graphe à seuil ;

Chain graphs & threshold graphs



Application à l'intelligence artificielle

- En Intelligence Artificielle, certains faits ne sont pas connus

  ⇒ il faut les déduire des faits connus, tout en maintenant une certaine cohérence

- Exemple de la sortie au musée :
  - On ignore les horaires d'arrivée et de départ,
  - On a des informations **partielles** sur qui rencontre qui

  ⇒ on réussit malgré tout à déduire certains faits nouveaux (Coralie rencontre Bastien)

- En termes de graphes, cela revient à chercher certaines arêtes « manquantes »

  ⇒ 2 types de problèmes :
  - Le Sandwich problem,
  - Le Probe problem.

Sandwich problem & Probe problem

Sandwich Problem

Etant donnée une classe $\mathcal{C}$ de graphes et deux graphes $G_1 = (V,E_1)$ et $G_2 = (V,E_2)$ tels que $E_1 \subseteq E_2$, existe-t-il $G = (V,E)$, $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$ tel que G soit dans $\mathcal{C}$?

Sandwich problem & Probe problem

Sandwich Problem

Etant donnée une classe $\mathcal{C}$ de graphes et deux graphes $G_1 = (V,E_1)$ et $G_2 = (V,E_2)$ tels que $E_1 \subseteq E_2$, existe-t-il $G = (V,E)$, $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$ tel que G soit dans $\mathcal{C}$?

Probe Problem

Etant donnée une classe $\mathcal{C}$ de graphes et un graphe G, peut-on rajouter des arêtes dans **un stable** de G de sorte que le graphe résultant soit dans $\mathcal{C}$?

Sandwich problem & Probe problem

Sandwich Problem

Etant donnée une classe $\mathcal{C}$ de graphes et deux graphes $G_1 = (V,E_1)$ et $G_2 = (V,E_2)$ tels que $E_1 \subseteq E_2$, existe-t-il $G = (V,E)$, $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$ tel que G soit dans $\mathcal{C}$?

Probe Problem

Etant donnée une classe $\mathcal{C}$ de graphes et un graphe G, peut-on rajouter des arêtes dans **un stable** de G de sorte que le graphe résultant soit dans $\mathcal{C}$?

Définition

Un $\mathcal{C}$-*probe graph* est un graphe G qui satisfait le Probe problem.

Classes déjà étudiées :

- *Interval probe graphs* (Zhang, applications en biologie)
- *Chordal probe graphs* (Golumbic, Lipshteyn…)

Chain probe graphs

Définition

Un graphe G est dit ***chaîne-complétable*** (*chain probe graph*) si l'on peut rajouter un ensemble F d'arêtes entre les sommets d'un stable S de G, de sorte que le graphe résultant soit biparti sans $2K_2$.

Chain probe graphs

Définition

Un graphe G est dit ***chaîne-complétable*** (*chain probe graph*) si l'on peut rajouter un ensemble F d'arêtes entre les sommets d'un stable S de G, de sorte que le graphe résultant soit biparti sans $2K_2$.

Q1 : Peut-on caractériser les graphes chaîne-complétables ?

Q2 : Peut-on les reconnaître facilement ?

Graphes non complétables

Propriété

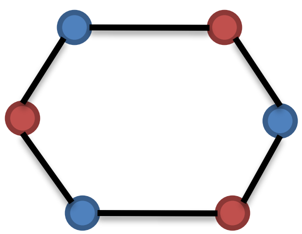
La classe des graphes chaîne-complétables est héréditaire pour les sous-graphes induits.

⇒ Si G est un graphe est chaîne-complétable, tout sous-graphe induit de G est aussi un graphe chaîne-complétable.

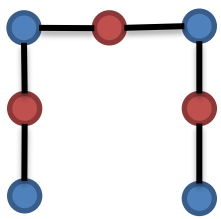
⇒ Il existe une liste de graphes minimalement *non* chaîne-complétables

Graphes non chaîne-complétables

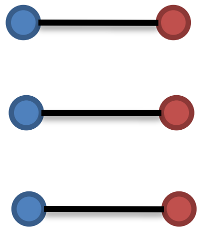
- Exemples de graphes non chaîne-complétables :



C_6



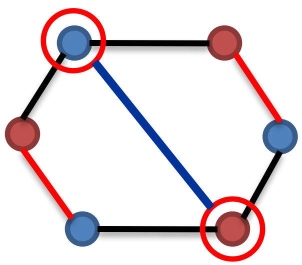
P_7



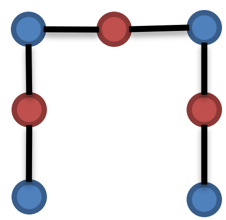
$3K_2$

Graphes non chaîne-complétables

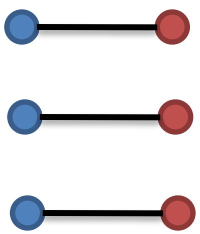
- Exemples de graphes non chaîne-complétables :



C_6



P_7



$3K_2$

Graphes non chaîne-complétables

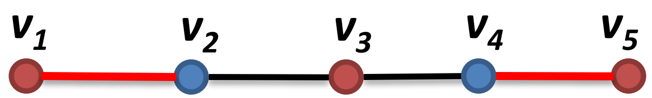
Lemme

- Si G contient un P_5 v_1-v_2-v_3-v_4-v_5, F contient soit v_1v_4, soit v_2v_5,
- Si G contient un P_6 v_1-v_2-v_3-v_4-v_5-v_6, F contient uniquement v_2v_5.

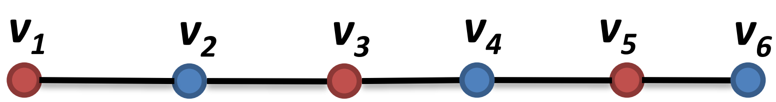
Graphes non chaîne-complétables

Lemme

- Si G contient un P_5 v_1-v_2-v_3-v_4-v_5, F contient soit v_1v_4, soit v_2v_5,
- Si G contient un P_6 v_1-v_2-v_3-v_4-v_5-v_6, F contient uniquement v_2v_5.



P_5

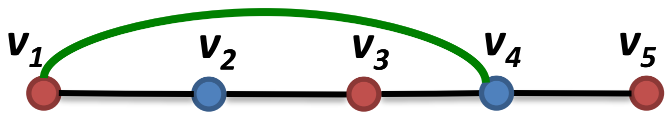


P_6

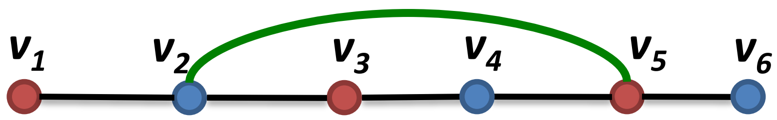
Graphes non chaîne-complétables

Lemme

- Si G contient un P_5 v_1-v_2-v_3-v_4-v_5, F contient soit v_1v_4, soit v_2v_5,
- Si G contient un P_6 v_1-v_2-v_3-v_4-v_5-v_6, F contient uniquement v_2v_5.



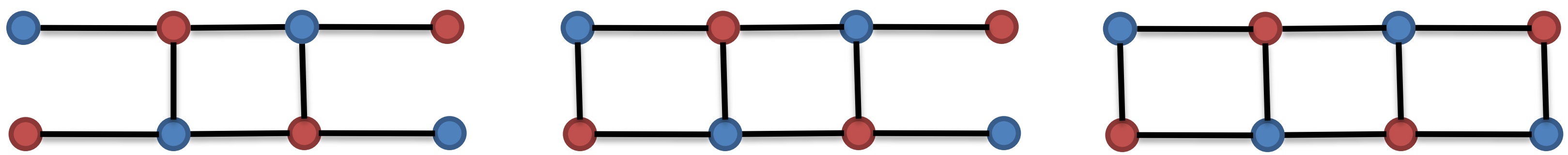
P_5



P_6

Graphes non complétables

- Le lemme permet de démontrer que ces graphes ne sont pas chaîne-complétables :



H_1 H_2 H_3

Caractérisation des graphes chaîne-complétables

Théorème (Golumbic, Maffray, Morel, 2008)

Soit G un graphe biparti. G est un graphe chaîne-complétable si et seulement s'il est sans C_6, P_7, $3K_2$, H_1, H_2, H_3 induits.

Preuve :

$\Rightarrow$: direct d'après les 2 diapos précédentes.

$\Leftarrow$: on distingue 3 cas :

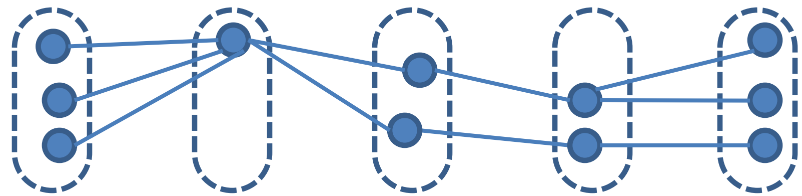
- G contient au moins un P_6 induit,
- G ne contient pas de P_6 induit, mais contient un P_5 induit,
- G est sans P_5 induit.

Cas 1 et 2 : très similaires ; *on va montrer le cas 2*

Cas 3 : simple

Preuve du second cas (1)

- G contient un P_5 mais pas de P_6

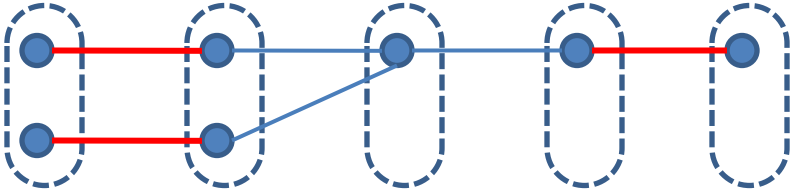


$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5$

- X_i : disjoints, stables
- Tout sommet a au moins voisin dans ses X_i consécutifs
- Il ne peut y avoir des arêtes qu’entre des sommets de 2 X_i consécutifs
- X est maximal

Preuve du second cas (1)

- G contient un P_5 mais pas de P_6



X = X_1 U X_2 U X_3 U X_4 U X_5

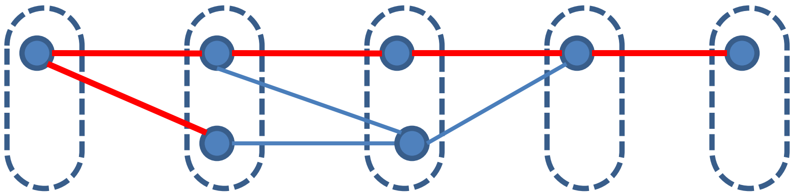
- X_i : disjoints, stables
- Tout sommet a au moins voisin dans ses X_i « voisins »
- Il ne peut y avoir des arêtes qu'entre des sommets de 2 X_i « consécutifs »
- X est maximal

On a :

- X_1 U X_2 est sans $2K_2$ (i.e. il existe v_1 qui « voit » tout X_2, v_2 qui « voit » tout X_1)
- X_4 U X_5 est sans $2K_2$ (i.e. il existe v_4 qui « voit » tout X_5, v_5 qui « voit » tout X_4)

Preuve du second cas (1)

- G contient un P_5 mais pas de P_6



$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5$

- X_i : disjoints, stables
- Tout sommet a au moins voisin dans ses X_i « voisins »
- Il ne peut y avoir des arêtes qu'entre des sommets de 2 X_i « consécutifs »
- X est maximal

On a :

- $X_1 \cup X_2$ est sans $2K_2$ (i.e. il existe v_1 qui « voit » tout X_2, v_2 qui « voit » tout X_1)
- $X_4 \cup X_5$ est sans $2K_2$ (i.e. il existe v_4 qui « voit » tout X_5, v_5 qui « voit » tout X_4)
- X_3 est complet à $X_2 \cup X_4$

Preuve du second cas (2)

- Remarques : on en déduit que :

  - $G[X]$ est connexe,

  - pour tout sommet x_1 de X_1, il existe un P_5 x_1-v_2-v_3-v_4-v_5 (id. pour les autres X_i)

- On note à présent :

  - $Y = \{v \notin X \mid v$ est anticomplet à $X \setminus X_3\}$,

  - $Z = \{v \notin X \mid v$ est complet à $X_1 \cup X_3 \cup X_5\}$,

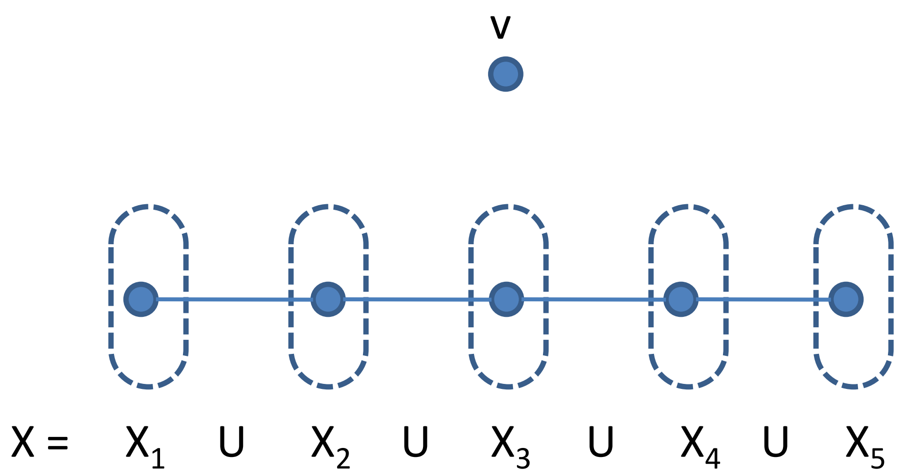
  - $T = \{v \notin X \mid v$ est anticomplet à $X\}$.

On montre que X, Y, Z et T forment une partition de V

Preuve du second cas (3)

1. Les 8 ensembles sont 2 à 2 disjoints, par définition
2. Tout sommet $v \in V \setminus X$ appartient à l'un des ensembles Y, Z ou T :
   - si v n'a pas de voisin dans X, il est dans T ;
   - donc supposons qu'il ait un voisin dans X.

Comme G est biparti et X est connexe et maximal, ce voisin est dans $X_1 \cup X_3 \cup X_5$:

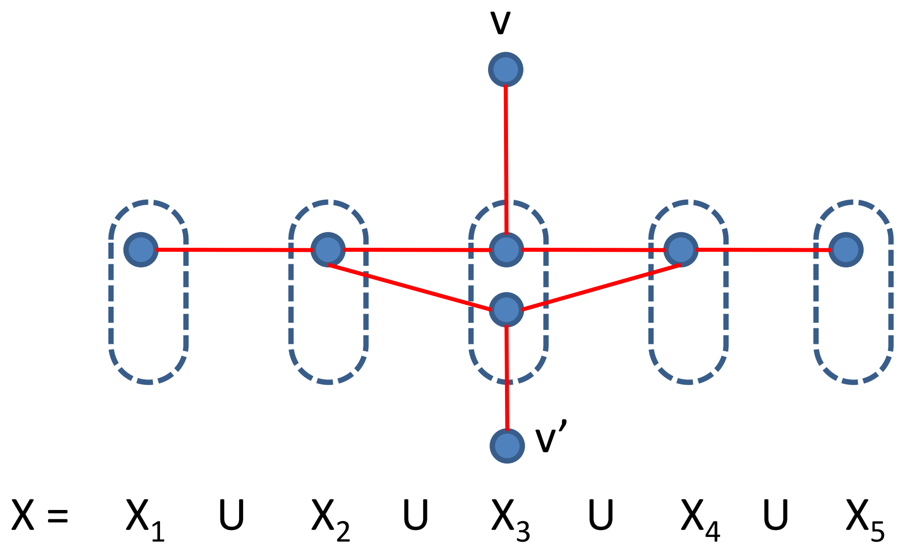


Preuve du second cas (3)

1. Les 8 ensembles sont 2 à 2 disjoints, par définition
2. Tout sommet $v \in V \setminus X$ appartient à l'un des ensembles Y, Z ou T :
   - si v n'a pas de voisin dans X, il est dans T ;
   - donc supposons qu'il ait un voisin dans X.

Comme G est biparti et X est connexe et maximal, ce voisin est dans $X_1 \cup X_3 \cup X_5$:

Y U X_3 est sans $2K_2$:

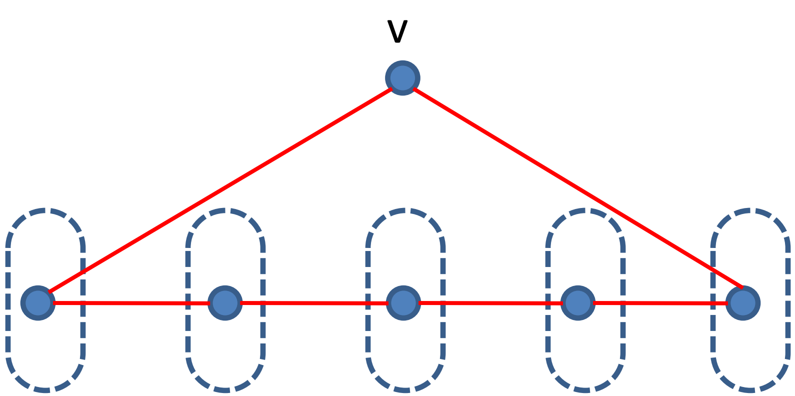


Preuve du second cas (3)

1. Les 8 ensembles sont 2 à 2 disjoints, par définition
2. Tout sommet $v \in V \setminus X$ appartient à l'un des ensembles Y, Z ou T :
   - si v n'a pas de voisin dans X, il est dans T ;
   - donc supposons qu'il ait un voisin dans X.

Comme G est biparti et X est connexe et maximal, ce voisin est dans $X_1 \cup X_3 \cup X_5$:

Si v n'a pas de voisin dans X_3, on a un C_6 :



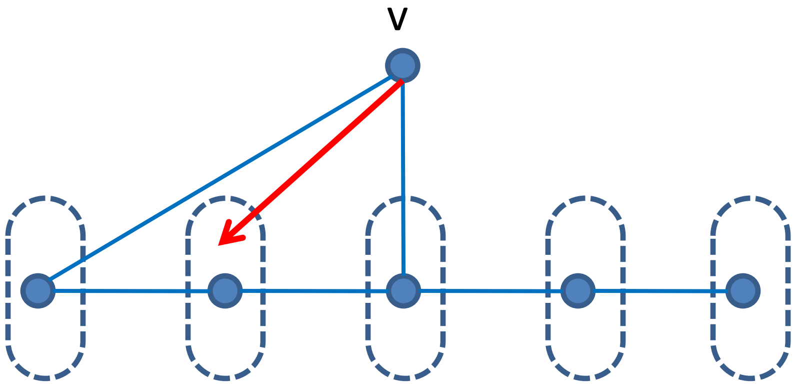
$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5$

Preuve du second cas (3)

1. Les 8 ensembles sont 2 à 2 disjoints, par définition
2. Tout sommet $v \in V \setminus X$ appartient à l'un des ensembles Y, Z ou T :
   - si v n'a pas de voisin dans X, il est dans T ;
   - donc supposons qu'il ait un voisin dans X.

Comme G est biparti et X est connexe et maximal, ce voisin est dans $X_1 \cup X_3 \cup X_5$:

Si v a un voisin dans X_1 mais pas dans X_5 (ou inv.), X n'est pas maximal :



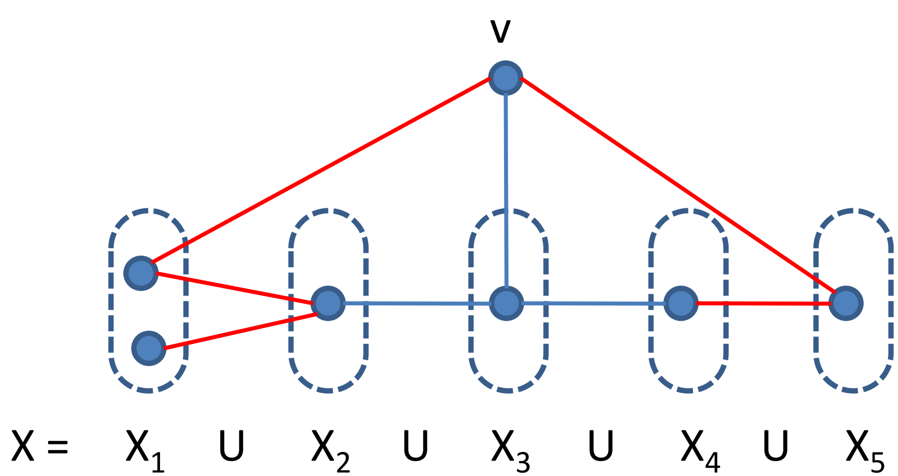
$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 \cup X_5$

Preuve du second cas (3)

1. Les 8 ensembles sont 2 à 2 disjoints, par définition
2. Tout sommet $v \in V \setminus X$ appartient à l'un des ensembles Y, Z ou T :
   - si v n'a pas de voisin dans X, il est dans T ;
   - donc supposons qu'il ait un voisin dans X.

Comme G est biparti et X est connexe et maximal, ce voisin est dans $X_1 \cup X_3 \cup X_5$:

Si v n'est pas complet à ($X_1 \cup X_5$), on a un P_6 :

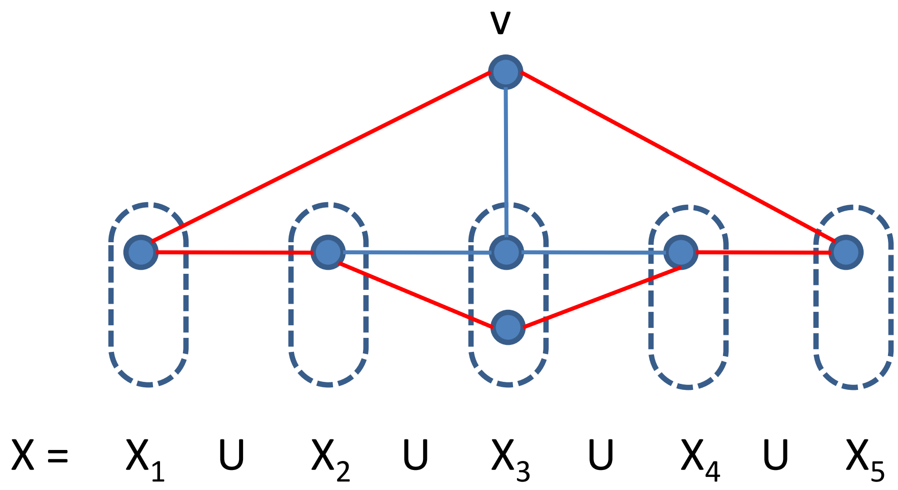


Preuve du second cas (3)

1. Les 8 ensembles sont 2 à 2 disjoints, par définition
2. Tout sommet $v \in V \setminus X$ appartient à l'un des ensembles Y, Z ou T :
   - si v n'a pas de voisin dans X, il est dans T ;
   - donc supposons qu'il ait un voisin dans X.

Comme G est biparti et X est connexe et maximal, ce voisin est dans $X_1 \cup X_3 \cup X_5$:

Si v n'est pas complet à X_3, on a un C_6 :

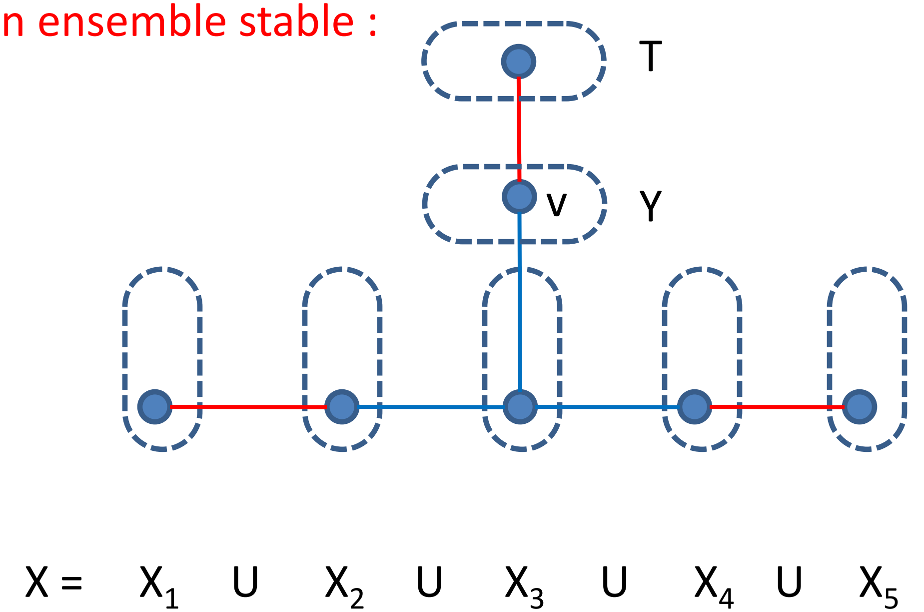


Preuve du second cas (3)

1. Les 8 ensembles sont 2 à 2 disjoints, par définition
2. Tout sommet $v \in V \setminus X$ appartient à l'un des ensembles Y, Z ou T :
   - si v n'a pas de voisin dans X, il est dans T ;
   - donc supposons qu'il ait un voisin dans X.

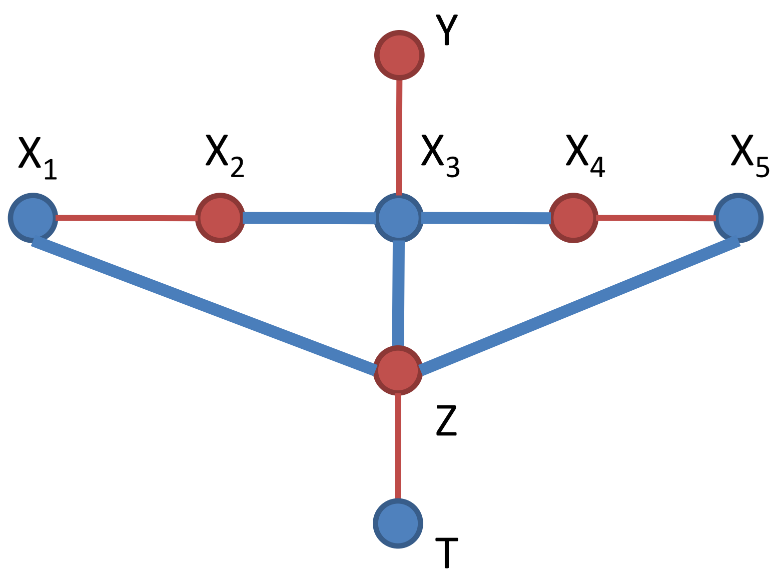
Comme G est biparti et X est connexe et maximal, ce voisin est dans $X_1 \cup X_3 \cup X_5$:

Y U T est un ensemble stable :



Preuve du second cas (4)

- Structure générale du graphe :



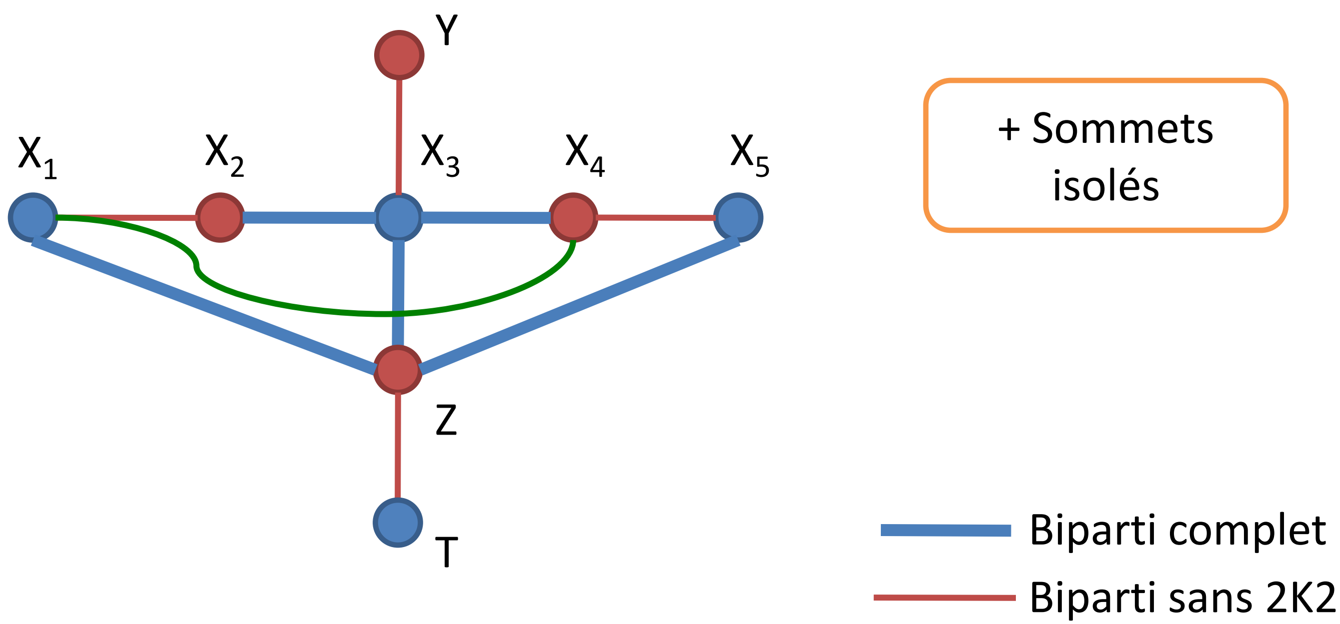
+ Sommets isolés

Biparti complet

Biparti sans 2K2

Preuve du second cas (5)

- X_1 U X_4 est stable ; soit F:= {(u,v) | u ∈ X_1, u ∈ X_4}
- G + F est sans $2K_2$: Y ≼ X2 ≼ X4 ≼ Z
- F est minimal tel que G + F est sans $2K_2$



Algorithme de reconnaissance

- Graphes interdits d'ordre au plus 8

  ⇒ : algorithme « brutal » en $O(n^8)$

- La preuve du théorème permet de faire beaucoup mieux :

Algorithme de reconnaissance

- Graphes interdits d'ordre au plus 8

  ⇒ : algorithme « brutal » en $O(n^8)$

- La preuve du théorème permet de faire beaucoup mieux :

(G est biparti sans $2K_2$) ∧ (G a au plus deux composantes de taille au moins 2) ? **$O(n^2)$**

- si oui ⇒ **G est chaîne-complétable**.
- si non :

Algorithme de reconnaissance

- Graphes interdits d'ordre au plus 8

  ⇒ : algorithme « brutal » en $O(n^8)$

- La preuve du théorème permet de faire beaucoup mieux :

(G est biparti sans $2K_2$) ∧ (G a au plus deux composantes de taille au moins 2) ? ***O*(n²)**

- si oui ⇒ **G est chaîne-complétable**.
- si non :
  - si G a 3 composantes de taille au moins 2 ⇒ Présence d'un $3K_2$ ⇒ **G n'est pas chaîne-complétable**.
  - sinon G contient un P_5 et on construit le graphe comme dans la preuve ***O*(n²)**

Algorithme de reconnaissance

- Graphes interdits d'ordre au plus 8

  ⇒ : algorithme « brutal » en $O(n^8)$

- La preuve du théorème permet de faire beaucoup mieux :

(G est biparti sans $2K_2$) ∧ (G a au plus deux composantes de taille au moins 2) ? **$O(n^2)$**

- si oui ⇒ **G est chaîne-complétable**.
- si non :
  - si G a 3 composantes de taille au moins 2 ⇒ Présence d'un $3K_2$ ⇒ **G n'est pas chaîne-complétable**.
  - sinon G contient un P_5 et on construit le graphe comme dans la preuve **$O(n^2)$**
    - Si toutes les propriétés sont vérifiées, **G est chaîne-complétable**
    - sinon :

Algorithme de reconnaissance

- Graphes interdits d'ordre au plus 8

  ⇒ : algorithme « brutal » en $O(n^8)$

- La preuve du théorème permet de faire beaucoup mieux :

(G est biparti sans $2K_2$) ∧ (G a au plus deux composantes de taille au moins 2) ? **$O(n^2)$**

- si oui ⇒ **G est chaîne-complétable**.
- si non :
  - si G a 3 composantes de taille au moins 2 ⇒ Présence d'un $3K_2$ ⇒ **G n'est pas chaîne-complétable**.
  - sinon G contient un P_5 et on construit le graphe comme dans la preuve **$O(n^2)$**
    - Si toutes les propriétés sont vérifiées, **G est chaîne-complétable**
    - sinon :
      - G contient un graphe interdit : **G n'est pas chaîne-complétable**
      - Sinon, G contient un P_6 et on construit le graphe…

⇒ Algorithme de reconnaissance en $O(n^2)$

Merci de votre attention !