La choisissabilité des cycles pondérés.

Jean-Christophe Godin

IMATH, université de Toulon

J.G.A, novembre 2008

Définition d'un graphe (L,ω)-choisissable.

Une liste L d'un graphe G est une application : $V(G) \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$.
Un poids ω d'un graphe G est une application : $V(G) \to \mathbf{N}$.

Definition

Une (L,ω)-choisissabilité c d'un graphe G est une liste du graphe G telle que pour tout $vv' \in E(G)$:

$$c(v) \subset L(v) \ ,$$

$$|c(v)| = \omega(v) \ ,$$

$$c(v) \cap c(v') = \emptyset \ .$$

On dit que G est (L,ω)-choisissable s'il existe une (L,ω)-choisissabilité c du graphe G.

Les cycles pondérés : les deux théorèmes

Dans la suite, on note G un cycle d'ordre n, et on identifie ces sommets avec les entiers dans $\{1, \dots, n\}$.

Theorem

Si ω est un poids de G et L est une liste ω-réductible de G, alors il existe une liste ordonnée L^o de G telle que

$$G \text{ est } (L, \omega) - \text{choisissable} \iff G \text{ est } (L^o, \omega) - \text{choisissable} .$$

Theorem

Si L est une liste ordonnée de G alors

$$G \text{ est } (L, \omega) - \text{choisissable} \iff \vec{\omega} \in R^*(\ \mathcal{F}(L)\ )$$

L'équivalence des listes : la similarité.

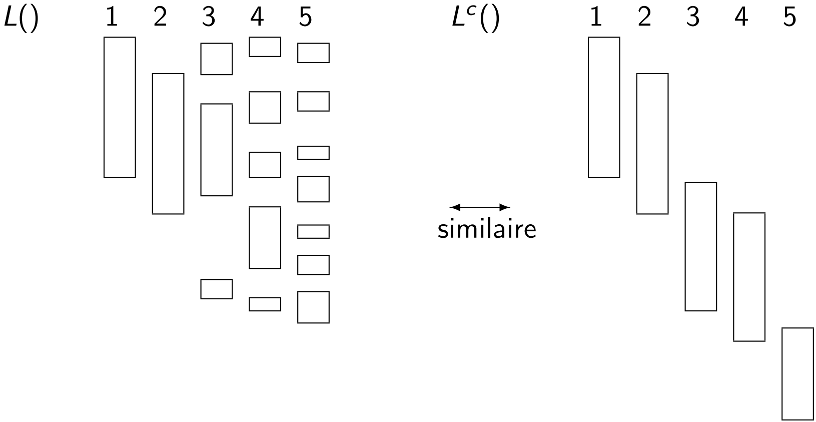

Fig.2. Exemple de liste similaire.

LA liste ordonnée L^θ

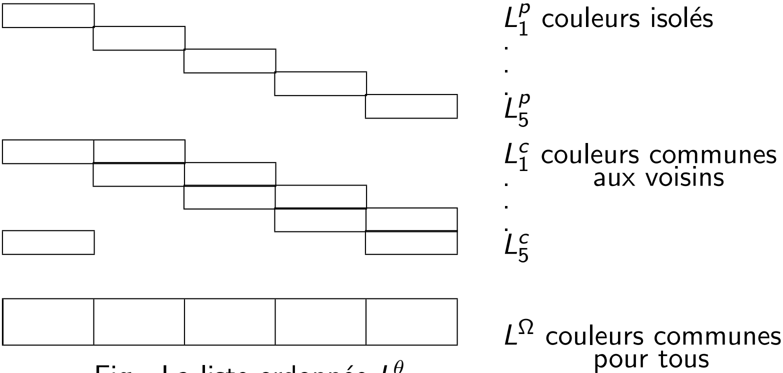

Fig.. La liste ordonnée L^θ

Liste $\iff$ liste propre

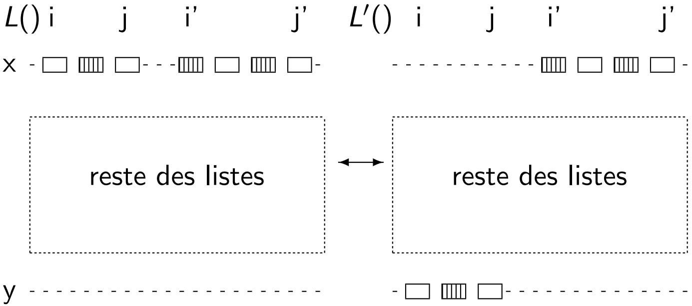

Fig.3. Exemple L similaire à L'

Liste propre $\iff$ liste en cascade, Si L est une liste ω-réductible

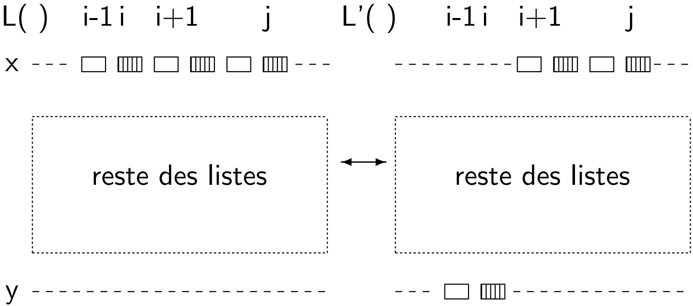

Fig.. Exemple d'une transformation

LA liste ordonnée L^{θ}

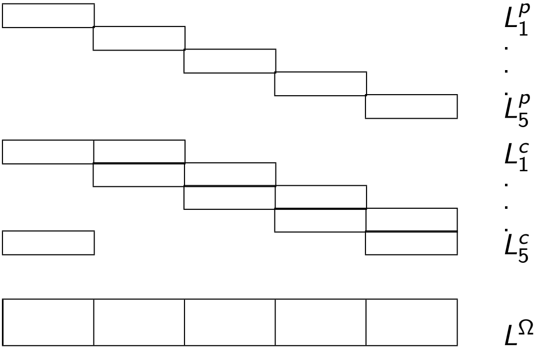

Fig.. La liste ordonnée L^{θ}

le premier théorème

On dit que L est ω-réductible si pour tout $i \in \{1, \dots, n\} = \Omega$

$$|L(i)| \geq \omega(i) + \omega(i+1) \ .$$

On note l'intersection totale des listes $L^{\Omega} = \bigcap_{k \in \Omega} L(k)$. On dit que L est une liste ordonnée de G si L est une liste telle que

$$\forall i, j \in \Omega \ , \ |j - i|_n \geq 2 : \ | \ L(i) \cap L(j) \setminus L^{\Omega} \ | = 0 \ .$$

Theorem

Si ω est un poids de G et L est une liste ω-réductible de G, alors il existe une liste ordonnée L^o de G telle que

$$G \text{ est } (L, \omega) - \text{choisissable} \iff G \text{ est } (L^o, \omega) - \text{choisissable} \ .$$

Le second théorème pour les listes ordonnées

Definition

Soit L une liste ordonnée d'un cycle G, on associe à L trois vecteurs $\vec{L}^p, \vec{L}^c, |L^\Omega|$

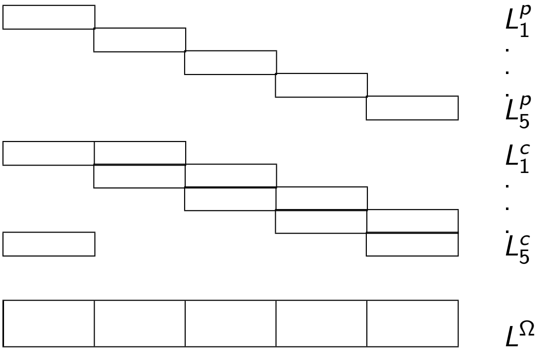

Fig.. La liste ordonnée L

L'ensemble $W(L)$

Soit $\vec{e}_i$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, on note le vecteur poids $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \omega(i)\vec{e}_i \ .$$

Definition

L'ensemble des vecteurs poids de L, noté $W(L)$, est

$$W(L) = \{\vec{\omega} \mid G \ est \ (L, \omega) - choisissable \ \}.$$

Le second théroème

On note $\vec{v} \leq \vec{u}$ si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$: $v_i \leq u_i$.
On note R^* l'application tel que

$$R^* = R \circ convexe$$

$$R(\vec{x}) = \{ \ \vec{\omega} \mid \vec{\omega} \leq \vec{x}, \ \vec{\omega} \in \mathbf{N}^n \ \} \ ,$$

$R(\vec{x})$ est l'hyperrectangle à coordonnée entière de point de base $\vec{0}$ et de diagonale $\vec{x}$.
L'application *convexe* est l'application qui a une famille de vecteur associe l'ensemble convexe de ces vecteurs.

Theorem

Si L est une liste ordonnée de G alors

$$G \ est \ (L, \omega) - choisissable \iff \vec{\omega} \in W(L) = R^*\big(\ \mathcal{F}(L) \ \big)$$

Schéma de la preuve

Theorem

$$W(L) = R^*(\mathcal{F}(L))$$

$$W(L) = W^p(\vec{L}^p) + W^c(\vec{L}^c) + W^\Omega(|L^\Omega|) \; .$$
$$W(L) = R^*(\vec{L}^p) + R^*(\mathcal{F}^c(\vec{L}^c)) + R^*(\mathcal{F}^\Omega(|L^\Omega|))$$

Puisque R^* est un opérateur linéaire :

$$W(L) = R^*(\vec{L}^p + \mathcal{F}^c(\vec{L}^c) + \mathcal{F}^\Omega(|L^\Omega|))$$

Exemple en dimension 2

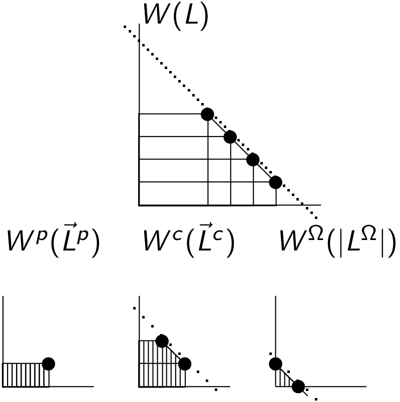

Fig.. Exemple en dimension 2

l'ensemble des vecteurs poids-propres

Definition

On note $W^p(\vec{L}^p)$ l'ensemble des vecteurs poids-propres :

$$W^p(\vec{L}^p) = \{ \ \vec{\omega} \mid \vec{\omega} \in \mathbf{N}^n \ , \ \vec{\omega} \leq \vec{L}^p \ \} \ .$$

Alors par définition

$$W^p(\vec{L}^p) = R^*(\vec{L}^p) \ .$$

l'ensemble des vecteurs poids-cycle-propres

Soit M^L la matrice de taille $n \times 2n$ tel que (par convention 2n+1=1)

$$M^L_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \ j \in \{2i, 2i+1\} \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$$

Soit M^ω la matrice de taille $n \times 2n$ tel que :

$$M^\omega_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \ j \in \{2i-1, 2i\} \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$$

Definition

On note $W^c(\vec{L}^c)$ l'ensemble des vecteurs poids-cycle-propres :

$$W^c(\vec{L}^c) = \{ \ \vec{\omega} \mid \exists \ \vec{C} \in \mathbf{N}^{2n} \ : \ M^L \vec{C} \leq \vec{L}^c \ et \ M^\omega \vec{C} = \vec{\omega} \} \ .$$

Les points extrémaux de $W^c(\vec{L})$

On note $\vec{v}_i = \vec{e}_{i+1} - \vec{e}_i$.

Definition

On note $\mathcal{F}^c(\vec{L}^c)$ l'ensemble des points extrémaux de $W^c(\vec{L}^c)$

$$\mathcal{F}^c(\vec{L}^c) = \vec{L}^c + \{ \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} \lambda_i \vec{v}_i \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \ : \ \lambda_i \in \{0, L_i\}\} \ .$$

$\mathcal{F}^c(\vec{L}^c)$ est le projetté des sommets d'un hyperrectangle de $\mathbf{R}^n$ dans un hyperplan de $\mathbf{R}^{n-1}$.

Proposition

$$W^c(\vec{L}^c) = R^* \left(\mathcal{F}^c(\vec{L}^c) \right) \ .$$

l'ensemble des vecteurs poids-cycle-impropres

On note

$$|\vec{\omega}|_\Omega = \max_{i \in \Omega} \{ \ \omega_i + \omega_{i+1} \ \} \ ,$$

$$|\vec{\omega}|_1 = \sum_{i \in \Omega} \omega_i \ .$$

Definition

On note $W^\Omega(L^\Omega)$ l'ensemble des vecteurs poids-cycle-impropres :

$$W^\Omega(L^\Omega) = \{ \ \vec{\omega} \mid \vec{\omega} \in \mathbf{N}^n \ , \ |\vec{\omega}|_\Omega \leq |L^\Omega| \ , \ |\vec{\omega}|_1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor |L^\Omega| \ \} \ .$$

Les points extrémaux de $W^{\Omega}(x)$

On note $\mathcal{P}_x^{\Omega}$ l'ensemble des parties de Ω de poids x et compatible :

$\mathcal{P}_x^{\Omega} = \{\, A \mid A \in \mathcal{P}(\Omega)\,,\ |A| = x\,,\ si\ i \in A\ alors\ \{i-1, i+1\} \cap A = \emptyset \,\}$.

On note $\mathcal{F}^{\Omega}(|L^{\Omega}|)$ l'ensemble des points extrémaux

$$\mathcal{F}^{\Omega}(|L^{\Omega}|) = |L^{\Omega}|.\{ \sum_{i \in A} \vec{e}_i \mid A \in \mathcal{P}^{\Omega}_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \cup \mathcal{P}^{\Omega}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \} \ .$$

On peut voir $\mathcal{F}^{\Omega}(|L^{\Omega}|)$ comme certains sommets de l'hypercube de point de base $\vec{0}$ et de longueur d'arrête $|L^{\Omega}|$.

Proposition

$$W^{\Omega}(|L^{\Omega}|) = R^{*}\ \left(\ \mathcal{F}^{\Omega}(|L^{\Omega}|)\ \right)\ .$$

Le second théorème, rappel

$$\mathcal{F}(L) = \vec{L}^p + \mathcal{F}^c(\vec{L}^c) + \mathcal{F}^\Omega(|L^\Omega|)$$

$\mathcal{F}^c(\vec{L}^c)$ est le projetté des sommets d'un hyperrectangle de $\mathbf{R}^n$ dans un hyperplan de $\mathbf{R}^{n-1}$.
$\mathcal{F}^\Omega(|L^\Omega|)$ est l'ensemble de certains sommets de l'hypercube de point de base $\vec{0}$ et de longueur d'arrête $|L^\Omega|$.
On note R^* l'application tel que

$$R^* = R \circ convexe$$

$R(\vec{x})$ est l'hyperrectangle à coordonnée entière de point de base $\vec{0}$ et de diagonale $\vec{x}$.
L'application *convexe* est l'application qui a une famille de vecteur associe l'ensemble convexe de ces vecteurs.

Theorem

Si L est une liste ordonnée de G alors

$$G \ est \ (L, \omega) - choisissable \iff \vec{\omega} \in R^*\big(\ \mathcal{F}(L)\ \big)$$

Merci pour votre attention!

Merci

Pour

Votre

Attention