

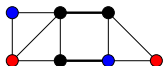
Un noyau polynomial pour Multicut in Trees

Nicolas Bousquet, Jean Daligault, Stéphan Thomassé, Anders Yeo

Journées Graphes et Algorithmes

November 4, 2008

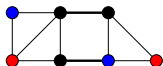
Dualité Flots / Coupes dans les réseaux



Multicut

Entrée : graphe G , ensemble E de requêtes (paires de sommets) de G , entier k

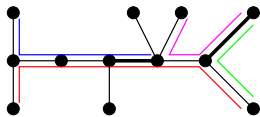
Dualité Flots / Coupes dans les réseaux



Multicut

Entrée : graphe G , ensemble E de requêtes (paires de sommets) de G , entier k

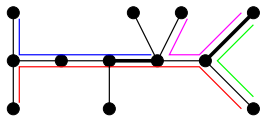
Sortie : VRAI si il existe un ensemble de k arêtes de G qui déconnecte toute requête de E , FAUX sinon



Multicut in Trees

Entrée : arbre T , ensemble E de requêtes (chemins) de T ,
entier k

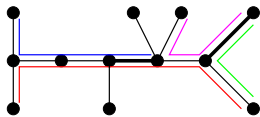
Multicut in Trees



Multicut in Trees

Entrée : arbre T , ensemble E de requêtes (chemins) de T , entier k

Sortie : VRAI si il existe un ensemble de k arêtes de T qui coupent tous les chemins de E , FAUX sinon

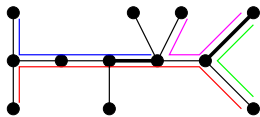


Multicut in Trees

Entrée : arbre T , ensemble E de requêtes (chemins) de T , entier k

Sortie : VRAI si il existe un ensemble de k arêtes de T qui coupent tous les chemins de E , FAUX sinon

- NP-complet



Multicut in Trees

Entrée : arbre T , ensemble E de requêtes (chemins) de T , entier k

Sortie : VRAI si il existe un ensemble de k arêtes de T qui coupent tous les chemins de E , FAUX sinon

- NP-complet
- pas de schéma d'approximation

Traiter des problèmes NP-complets ?

Traiter des problèmes NP-complets ?

- algorithmes exacts (exponentiels)

Traiter des problèmes NP-complets ?

- algorithmes exacts (exponentiels)
- approximation

Traiter des problèmes NP-complets ?

- algorithmes exacts (exponentiels)
- approximation
- ...

Traiter des problèmes NP-complets ?

- algorithmes exacts (exponentiels)
- approximation
- ...

Fixed Parameter Tractability (FPT)

Traiter des problèmes NP-complets ?

- algorithmes exacts (exponentiels)
- approximation
- ...

Fixed Parameter Tractability (FPT)

→ difficulté du problème provient d'un paramètre k (petit)

Traiter des problèmes NP-complets ?

- algorithmes exacts (exponentiels)
- approximation
- ...

Fixed Parameter Tractability (FPT)

→ difficulté du problème provient d'un paramètre k (petit)

→ algorithme en $f(k) * P(n)$

Noyau : Algorithme polynomial (en n) :
entrée de taille $n \Rightarrow$ entrée équivalente de taille $f(k)$.

Noyau : Algorithme polynomial (en n) :
entrée de taille $n \Rightarrow$ entrée équivalente de taille $f(k)$.

Noyau \iff FPT

Noyau : Algorithme polynomial (en n) :
entrée de taille $n \Rightarrow$ entrée équivalente de taille $f(k)$.

Noyau \iff FPT

Plus fort : Noyau polynomial (en k)

Noyau : Algorithme polynomial (en n) :
entrée de taille $n \Rightarrow$ entrée équivalente de taille $f(k)$.

Noyau \iff FPT

Plus fort : Noyau polynomial (en k)

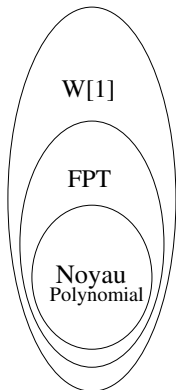
Vertex Cover (équivalent à Multicut in Stars) :
Noyau Linéaire en k

Noyau : Algorithme polynomial (en n) :
entrée de taille $n \Rightarrow$ entrée équivalente de taille $f(k)$.

Noyau \iff FPT

Plus fort : Noyau polynomial (en k)

Vertex Cover (équivalent à Multicut in Stars) :
Noyau Linéaire en k

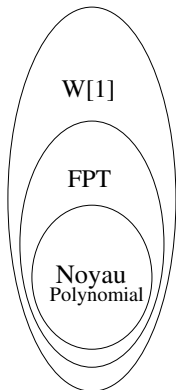


Noyau : Algorithme polynomial (en n) :
entrée de taille $n \Rightarrow$ entrée équivalente de taille $f(k)$.

Noyau \iff FPT

Plus fort : Noyau polynomial (en k)

Vertex Cover (équivalent à Multicut in Stars) :
Noyau Linéaire en k



Intérêt pratique : preprocessing (ou inprocessing) dans algo.

Multicut in Trees (T, k) : paramètre k .

Multicut in Trees (T, k) : paramètre k .

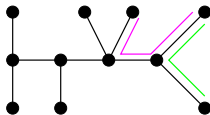
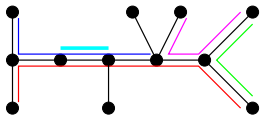
Guo, Niedermeier ('05) : Multicut in Trees est FPT (algorithme en $2^k * P(n)$)

Multicut in Trees (T, k) : paramètre k .

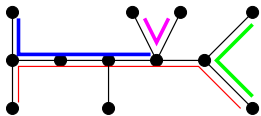
Guo, Niedermeier ('05) : Multicut in Trees est FPT (algorithme en $2^k * P(n)$)

Question (Guo et Niedermeier, Fellows) : Existence d'un noyau polynomial ?

- **Requête unitaire** : Requête de longueur 1 : contracter l'arête, $k \rightarrow k - 1$

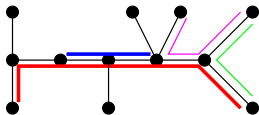


- **Requêtes disjointes** : $k + 1$ requêtes disjointes : FAUX



Règles de réduction (3) : Inclusion

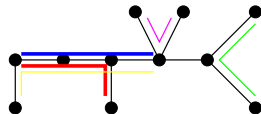
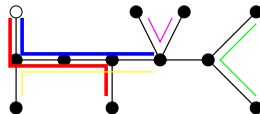
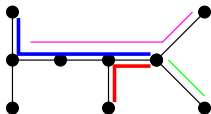
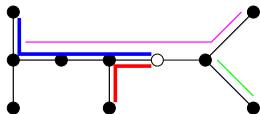
- **Inclusion** : Requête incluse dans une autre : supprimer la plus grande



Règles de réduction (4) : Unique direction

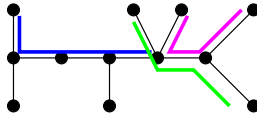
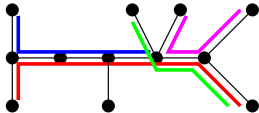
- **Unique direction :**

- (1) Noeud interne sans feuille dont toutes les requêtes ont leur 1ère arête en commun : contracter l'autre arête interne adjacente
- (2) Feuille dont toutes les requêtes ont leur 2e arête en commun : la supprimer



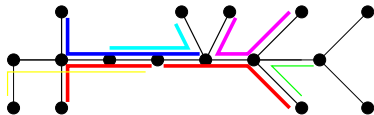
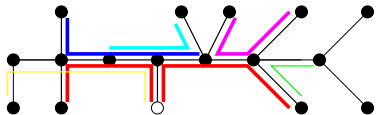
Règle Facteur Commun

Facteur commun : Requête qui contient l'intersection (deux à deux) de $k + 1$ autres : la supprimer



Règles de réduction (6) : Envergure

Envergure : Si l'envergure d'une feuille contient $k + 1$ requêtes extrémités-disjointes, la supprimer



Instance réduite :

- nombre de feuilles extrémales : $O(k^2)$
- nombre de feuilles : $O(k^3)$
- nombre de noeuds internes : $O(k^5)$

Cas général : Envergure plus compliqué, noyau : $O(k^6)$

Résultat

Multicut In Trees a un noyau polynomial ($O(k^6)$).

- Améliorer la borne (analyse) ?
- Nouvelles règles de réduction ?
- Existence / non-existence d'un noyau linéaire ?
- Multicut FPT dans les graphes ?
- Multicut FPT dans les graphes de treewidth bornée ?