Deux graphes sur la bouteille de Klein

L. Beaudou, A. Gerbaud, R. Grappe et F. Palesi

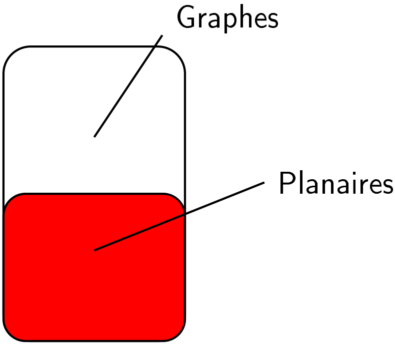
Institut Fourier
Université Joseph Fourier

Laboratoire G-SCOP
Institut Polytechnique de Grenoble

Grenoble, France

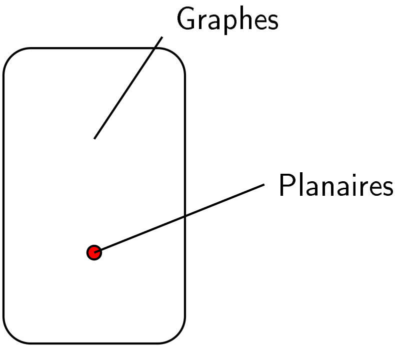
JGA '08
Sophia Antipolis, 6 novembre 2008

Pourquoi la topologie ?



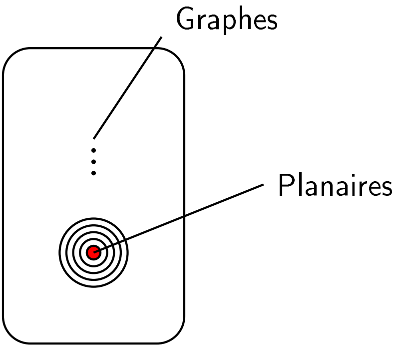
Pourquoi la topologie ?

- Rafiner la séparation.



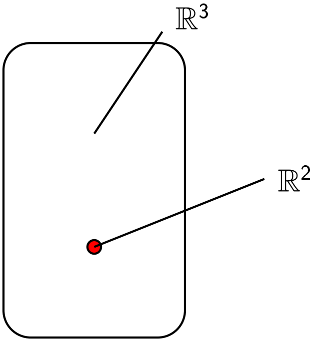
Pourquoi la topologie ?

- Rafiner la séparation.
- Nombre de croisements



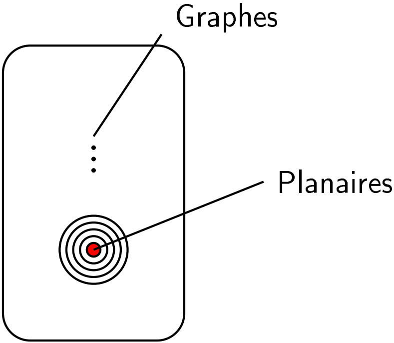
Pourquoi la topologie ?

- Rafiner la séparation.
- Nombre de croisements
- Représentable dans $\mathbb{R}^n$?



Pourquoi la topologie ?

- Rafiner la séparation.
- Nombre de croisements
- Représentable dans $\mathbb{R}^n$?
- Représentable sur le tore (genre).



Surfaces orientables

- **Surface** : variété de dimension 2

Surfaces orientables

- **Surface** : localement c'est le plan.

Surfaces orientables

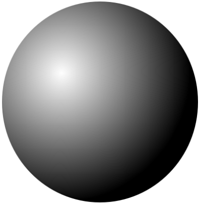
- **Surface** : localement c'est le plan.
- **Orientable** : on peut définir une orientation cohérente.

Surfaces orientables

- **Surface** : localement c'est le plan.
- **Orientable** : je peux différencier la gauche de la droite.

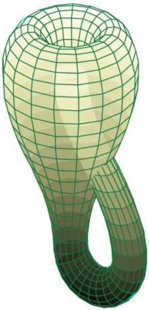
Surfaces orientables

- **Surface** : localement c'est le plan.
- **Orientable** : je peux différencier la gauche de la droite.



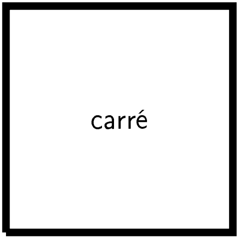
Surfaces non-orientables

- Les autres surfaces
- **Exemple** :



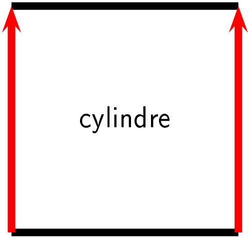
Représentation d'une surface

- Identification des bords d'un polygone



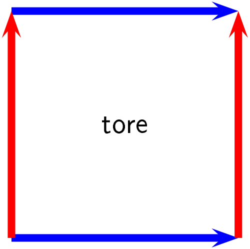
Représentation d'une surface

- Identification des bords d'un polygone



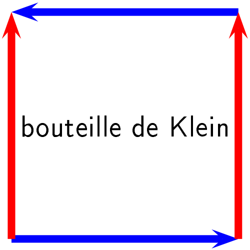
Représentation d'une surface

- Identification des bords d'un polygone



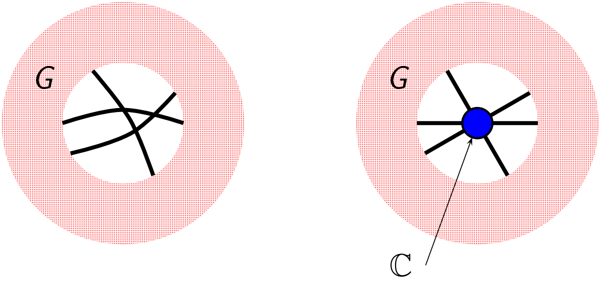
Représentation d'une surface

- Identification des bords d'un polygone



Représentation d'une surface

- Identification des bords d'un polygone
- Le patch cross-cap



The long standing conjecture

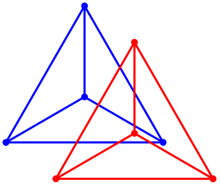
Conjecture 1 [DeVos, Mohar et Samal '07]

Sur n'importe quelle surface, il est strictement préférable de représenter deux graphes disjoints de façon disjointe.

M. DeVos, B. Mohar, R. Samal, Drawing disconnected graphs on the same surface, *Open Problem Garden*, World Wide Web (2007).

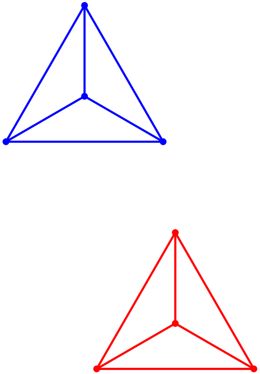
Trivial ?

(a) Sphère



Trivial ?

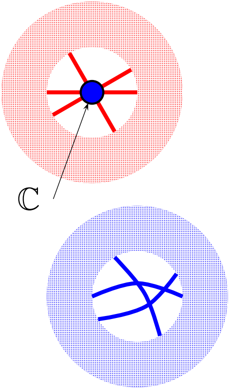
(a) Sphère ✔



Trivial ?

(a) Sphère ✔

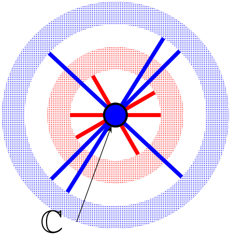
(b) Plan projectif



Trivial ?

(a) Sphère ✔

(b) Plan projectif [Devos et al.] ✔

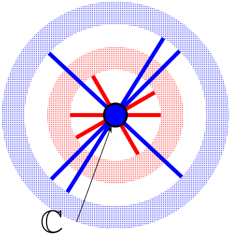


Trivial ?

(a) Sphère ✔

(b) Plan projectif
[Devos et al.] ✔

(c) Bouteille
[Nous + Bokal (?)] ✔



Le résultat

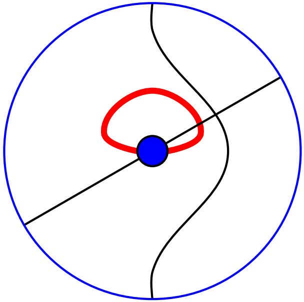
Théorème 2

Soit G l'union disjointe de deux graphes G_1 et G_2 et Ψ une représentation optimale de G sur la bouteille de Klein, alors $\Psi_{|G_1}$ et $\Psi_{|G_2}$ sont disjointes.

Point-clé : courbes essentielles

Courbe non contractible non séparante :

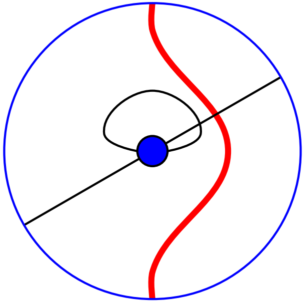
- type $\mathcal{A}$



Point-clé : courbes essentielles

Courbe non contractible non séparante :

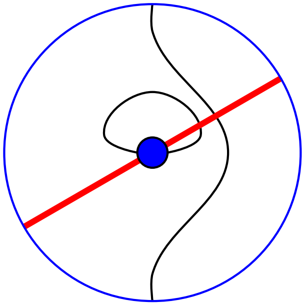
- type $\mathcal{A}$
- type $\mathcal{B}$



Point-clé : courbes essentielles

Courbe non contractible non séparante :

- type $\mathcal{A}$
- type $\mathcal{B}$
- type $\mathcal{AB}$



Point-clé : courbes essentielles

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{AB}$
$\mathcal{A}$	$\times$		$\times$
$\mathcal{B}$		$\times$	$\times$
$\mathcal{AB}$	$\times$	$\times$	

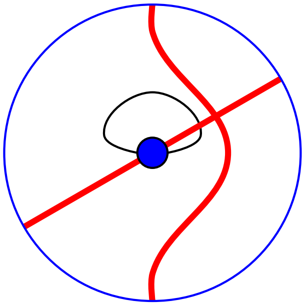


Schéma de la preuve

Etude des graphes eulériens plongeables sur K

- Exhiber beaucoup de courbes essentielles qui se croisent. [Schrijver]
- En déduire qu'on a beaucoup de croisements.
- Transformer la représentation en une représentation disjointe.
- Vérifier qu'on a moins de croisements.

Etendre le résultat aux graphes non eulériens puis aux graphes quelconques.

Beaucoup de croisements

Notion proche de la représentativité du graphe :

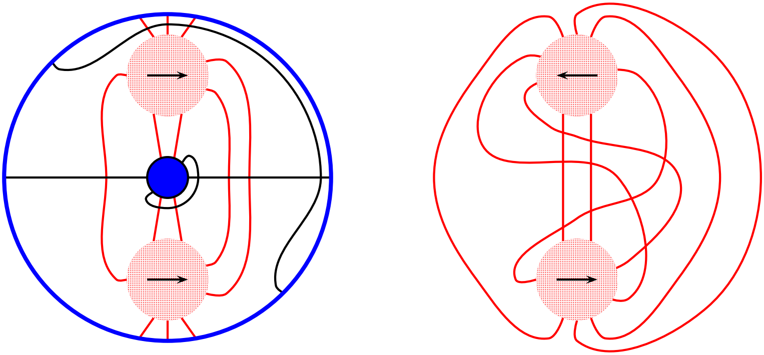
$$k_{\mathcal{A}} = \min\{|\Psi \cap C| : C \text{ est une courbe de type } \mathcal{A}\}$$

Théorème 3 [≈ M. de Graaf et A. Schrijver '97]

Il existe $k_{\mathcal{A}}$ courbes de type $\mathcal{A}$ et $k_{\mathcal{B}}$ courbes de type $\mathcal{B}$ dans Ψ, ou il existe $k_{\mathcal{AB}}$ courbes de type $\mathcal{AB}$ dans Ψ.

M. de Graaf, A. Schrijver, Decomposition on surfaces, *J. Combin. Theory Ser. B*, 70(2007).

Exemple de transformation



$$k_{\mathcal{AB}} * \min(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}}) + \frac{k_{\mathcal{AB}}(k_{\mathcal{AB}} - 1)}{2}$$

Conclusion

- Méthode pas valide pour le tore.
- Génralisation de [de Graaf et Schrijver] ?
- Tore réglé par DeVos, Mohar et Samal.
- Ouvert pour les autres surfaces.

Conclusion

- Méthode pas valide pour le tore.
- Génralisation de [de Graaf et Schrijver] ?
- Tore réglé par DeVos, Mohar et Samal.
- Ouvert pour les autres surfaces.

Au suivant...

(*J. Brel 1929-1978*)