Session de problèmes des 15èmes JCALM

March 11, 2015

Taille minimum d'un couplage maximum de l'hypercube

Communiqué par Kolja Knauer.

Problème 1. Quelle est la taille minimum $t(d)$ d'un couplage maximal de l'hypercube ?

On connait les premières valeurs de $t(d)$: $t(1) = 1$, $t(2) = 2$, $t(3) = 3$, $t(4) = 6$ $t(5) = 12$ et $t(6) = 24$. On peut aussi facilement montrer que $t(d + 1) \leq 2t(d)$. On sait que $t(7) \leq 47$.

Le meilleure borne inférieure connue est $t(d) \geq \dfrac{d2^d}{3d-1}$.

Sous-suite croissante maximale pour une famille de suite obtenue par pivot

Communiqué par Jean-Florent Raymond.

Le fameux Théorème d'Erdős-Sekeres affirme que toutes suites d'entiers d'ordre n contient une sous-suite monotone (croissante ou décroissante).

On regarde ici une généralisation. On considère que $n = 2^k$ et que les éléments de la suite σ sont les feuilles d'un arbre binaire complet de hauteur k. D'autres suites peuvent être obtenues en pivotant suivant un nœud v de l'arbre, c'est-à-dire en inversant l'ordre de toutes les feuilles qui sont dans le sous-arbre de v, On prend $\mathcal{S}(\sigma)$ l'ensemble des suites qui peuvent être obtenues à partir de σ en effectuant des pivots sur les noeuds de l'arbre.

Problème 2. Quel est l'entier maximum $m(n)$ tel que pour toute suite σ de taille n, il existe une suite de $\mathcal{S}(\sigma)$ qui possède une sous-suite monotone de taille $m(n)$?

Linkage paramétré par la treewidth

Communiqué par Julien Baste.

Le problème LINKAGE est le suivant.
<u>Instance:</u> Un graphe G, un entier p, et p couples (s_i, t_i), $1 \leq i \leq p$.

Question: Existe-t-il p chemins disjoints P_i, $1 \leq i \leq n$, tels que P_i soit un (s_i, t_i)-chemin, $1 \leq i \leq p$.

Ce problème est NP-complet et FPT avec la treewidth de G, $\mathrm{tw}(G)$, pour paramètre. Il existe un algorithme FPT en $2^{O(\mathrm{tw}(G) \log \mathrm{tw}(G))} \times n^c$. Ceci est optimal dans le sens où sous ETH (l'hypothèse du temps exponentiel), il n'existe pas d'algorithme en $2^{o(\mathrm{tw}(G) \log \mathrm{tw}(G))} \times n^c$.

La question est de savoir ce qui se passe dans le cas où G est planaire. Sous ETH, il n'existe pas d'algorithme en $2^{o(\mathrm{tw}(G))} \times n^c$.

Problème 3. Existe-il un algorithme en $2^{O(\mathrm{tw}(G))} \times n^c$ pour résoudre Linkage dans les graphes planaires ?

Voisinages disjoints dans les digraphes de maille 4

Communiqué par Nathann Cohen.

La *maille (dirigée* d'un digraphe est la longueur d'un plus petit cycle dirigé.

Conjecture 4. Dans un digrapge de maille au moins 4, il existe deux sommets u et v, tels que $N^+(u) \cap N^+(v) = \emptyset$.

Arête-coloration des graphes planaires de degré maximum 4 et maille 4

Communiqué par Petru Valicov.

Soit G un graphe. On note $\Delta(G)$ son degré maximum et $\chi'(G)$ son indice chromatique.

Le célèbre Théorème de Vizing affirme que $\chi'(G) \in \{\Delta(G), \Delta(G) + 1\}$. Il y a donc deux types de graphes ceux de type I, pour lesquels $\chi'(G) = \Delta(G)$ et ceux de type II pour lesquels $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Problème 5. Tous les graphes planaires de degré maximum 4 et de maille 4 sont-ils tous de type I ?

Pour tous les autres couples de valeurs du degré maximum et de la maille, on connait la réponse au problème.

Complémentation en une couverture minimale

Communiqué par Valentin Garnero.

Une *couverture* d'un grap[he est un ensemble de sommets S telle que toute arête ait une extrémité dans S. Une couverture est *minimale* si aucun sous-ensemble strict de S n'est une couverture.

Problème 6. Quelle est la complexité du problème suivant :
Instance: Un graphe G, un sous-ensemble M de sommets. Question: Existe-t-il une couverture minimale S de G telle que $M \subseteq S$?