Couvertures de rectangles dans le plan

Frédéric Havet.

JCALM Février 2011

Ces notes ont été rédigées à la suite de la journée CALM à Marseille le 18 février 2011. Elles reprennent une partie du contenu des exposés de J. Chalopin, V. Chepoi, B. Estellon, A. Labourel, K. Nouioua et Y. Vaxès.

1 Introduction

Nous nous intéresserons dans ces notes aux familles de rectangles dont les côtés parallèles aux axes et à quelques généralisations. Dans la suite, par rectangle, nous entendrons toujours rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes.

Deux rectangles sont *indépendants* s'ils ne s'intersectent pas. Un *ensemble indépendant* de $\mathcal{F}$ est un ensemble de rectangles deux à deux indépendants. On note $\nu(\mathcal{F})$ la cardinalité maximum d'un ensemble indépendant de $\mathcal{F}$.

Un point du plan *couvre* un rectangle s'il est à l'intérieur de ce rectangle. Une *couverture* de $\mathcal{F}$ est un ensemble P de points tel que tout élément de $\mathcal{F}$ soit couvert par (au moins) un élément de P. On note $\tau(\mathcal{F})$ la cardinalité minimum d'une couverture de $\mathcal{F}$.

Clairement,

$$\nu(\mathcal{F}) \leq \tau(\mathcal{F}). \tag{1}$$

En effet, si I est un ensemble indépendant, alors toute couverture C doit contenir au moins un point couvrant chaque paire de I et un point ne peut couvrir qu'au plus une paire de I par définition d'indépendant.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de rectangles, le *graphe d'intersection* de $\mathcal{F}$ est le graphe $G_{\mathcal{F}}$ dont les sommets sont les rectangles de $\mathcal{F}$ et tels que deux rectangles sont reliés par une arête si et seulement si ils ne s'intersectent pas. Clairement, les ensembles indépendants de rectangles de $\mathcal{F}$ sont en bijection avec les ensembles stables de $G_{\mathcal{F}}$. Ainsi

$$\nu(\mathcal{F}) = \alpha(G_{\mathcal{F}}).$$

A tout point du plan p, on peut associer l'ensemble des rectangles $\mathcal{R}_p$ qui le contiennent. Clairement, ces rectangles forment une clique dans $G_{\mathcal{F}}$ car ils s'intersectent tous en p. Ainsi a toute couverture C de $\mathcal{F}$, on peut associer une couverture par cliques de $G_{\mathcal{F}}$. Une *couverture par cliques* d'un graphe G, est un ensemble de cliques de G dont l'union est $V(G)$. Réciproquement, si K est une clique de $G_{\mathcal{F}}$ alors tous les rectangles de K s'intersectent deux à deux. Comme les rectangles possèdent la propriété de Helly, il existe un point du plan p_k qui est dans tous les rectangles de K. Ainsi en associant à toute cliqe K d'une couverture par cliques $\mathcal{K}$ de $G_{\mathcal{F}}$ un tel point p_K, on obtient une couverture de $\mathcal{F}$ de même taille de $\mathcal{K}$.

Notant $cc(G)$, Le nombre minimal de cliques dans une couverture par cliques, on a donc

$$\tau(\mathcal{F}) = cc(G_{\mathcal{F}}).$$

Conjecture 1 (Wegner, 1965). *Pour toute famille de rectangles $\mathcal{F}$, alors $\tau(\mathcal{F}) \leq 2\nu(\mathcal{F}) - 1$.*

Cette borne serait optimale pour $\nu(\mathcal{F}) = 2$. En effet, si on met cinq rectangles de façon à ce que leur graphe d'intersection soit un cycle alors $\nu = 2$ et $\tau = 3$. Voir Figure 1

Il existe des exemples de famille de rectangles telles que $\tau(\mathcal{F}) \geq \frac{5}{3}\nu(\mathcal{F})$.

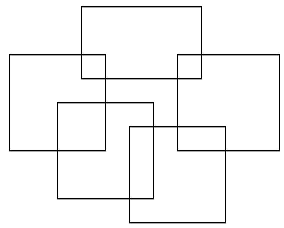

Figure 1: Une famille $\mathcal{F}$ de cinq rectangles tels que $\nu(\mathcal{F}) = 2$ et $\tau(\mathcal{F}) = 3$.

2 Bornessupérieure sur τ en fonction de ν

Le but de cette partie est de montrer le résulat suivant:

Théorème 2 (Kostochka, Fon der Flass)**.** *Soit $\mathcal{F}$ une famille de rectangles. Si $\nu(\mathcal{F}) = k$ alors $\tau(\mathcal{F}) = O(k \log k)$.*

Remarque 3. Ce théorème se généralise aux boîtes de dimension d quelconque.

Commençons donc par voir ce qui se passepour des boîtes de dimension 1, c'est-à-dire des intervalles.

Proposition 4. *Si I est une famille d'intervalles alors $\nu(I) = \tau(I)$.*

Preuve. Considérons l'algorithme glouton qui construit un ensemble $\mathcal{J}$ d'intervalles et un ensemble P de points de $\mathbb{R}$. A chaque étape, on prend l'intervalle I dont l'extrémité droite x est minimum. On ajoute I à $\mathcal{J}$, x à P et on enlève tous les intervalles intersectant I. Par défintion de I, tous ces intervalles contenaient x.

Clairement $|\mathcal{J}| = |P|$. De plus, $\mathcal{J}$ est un ensemble indépendant (deux à deux non-intersectant) d'intervalles car à chaque fois que l'on sélectionne un intervalle (I), on retire tous les intervalles qui l'intersectent. Enfin, $|P|$ est une couverture car à chaque étape, les intervalles que l'on ôte contiennent le point que l'on ajoute (x) à P.

Ainsi nous avons un ensemble indépendant d'intervalles et une couverture de même taille. Par (1), il vient $\nu(I) = \tau(I)$. □

Preuve du Théorème 2. Notons $f(k) = \max\{\tau(\mathcal{F}) \mid \nu(\mathcal{F}) = k\}$. Il est facile de voir que f est croissante.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de rectangle telle que $\nu(\mathcal{F}) = k$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, dénotons par $\mathcal{F}^-(x)$ (resp. $\mathcal{F}^+(x)$) l'ensemble des rectangles de $\mathcal{F}$ sont tous les points sont d'abscisse strictement inférieure (resp. supérieure) à x et $\mathcal{F}^=(x) = \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^-(x) \cup \mathcal{F}^+(x))$ l'ensemble des rectangles ayant un point d'abscisse x.

Notons que si $R^- \in \mathcal{F}^-(x)$ et $R^+ \in \mathcal{F}^+(x)$, alors R^- et R^+ ne s'intersectent pas. Ainsi l'union d'un indépendant de $\mathcal{F}^-(x)$ et d'un indépendant de $\mathcal{F}^+(x)$ est un indépendant de $\mathcal{F}$. Donc $\nu(\mathcal{F}^-(x)) + \nu(\mathcal{F}^+(x)) \leq k$.

Prenons x tel que $\nu(\mathcal{F}^-(x)) = \lfloor k/2 \rfloor$. Alors $\nu(\mathcal{F}^+(x)) \leq \lceil k/2 \rceil$. Donc $\tau(\mathcal{F}^-(x)) \leq f(\lfloor k/2 \rfloor)$ et $\tau(\mathcal{F}^+(x)) \leq f(\lceil k/2 \rceil)$.

Soit $I^=(x)$ l'ensemble des intervalles obtenus en projetant les rectangles de $\mathcal{F}^=(x)$ sur l'axe des ordonnées. Clairement $\nu(I^=(x)) = \nu(\mathcal{F}^=(x)) \leq k$. Par la Proposition 4, $I^=(x)$ a une couverture de taille k, disons $\{y_1, \dots, y_k\}$. Comme tous les rectangles de $\mathcal{F}^=(x)$ contiennent un point d'abscisse x, l'ensemble $P^=(x) = \{(x, y_1), \dots, (x, y_k)\}$ est une couverture de $\mathcal{F}^=(x)$.

L'union de couvertures de $\mathcal{F}^-(x)$, $\mathcal{F}^+(x)$ et $\mathcal{F}^=(x)$ est une couverture de $\mathcal{F}$. Donc

$$\tau(\mathcal{F}) \leq \tau(\mathcal{F}^-(x)) + \tau(\mathcal{F}^+(x)) + \tau(\mathcal{F}^=(x)) \leq f(\lfloor k/2 \rfloor) + f(\lceil k/2 \rceil) + k.$$

Ainsi $f(k) \leq f(\lfloor k/2 \rfloor) + f(\lceil k/2 \rceil) + k$ et donc $f(k) = O(k \log k)$.

□

3 Familles bi-supermodulaires

Dans cette partie, nous nous plaçons dans un contexte un peu plus général que celui des familles de rectangles, les familles de paires d'ensembles. Un rectangle peut être vu comme un paire d'intervalles (I_1, I_2), chaque intervalle correspondant à un côté.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de paires d'ensembles. Deux paires (A,B) et (A',B') de $\mathcal{F}$ sont *indépendantes* si $A \cap A' = \emptyset$ ou $B \cap B' = \emptyset$. Observons que la notion de paires d'intervalles indépendantes correspond bien à celles de rectangles indépendants. De même que pour les familles de rectangles, un *ensemble indépendant* de $\mathcal{F}$ est un ensemble de paires d'ensembles deux à deux indépendants et on note $\nu(\mathcal{F})$ la cardinalité maximum d'un ensemble indépendant de $\mathcal{F}$.

Un point $p = (a,b)$ *couvre* une paire (A,B) si $a \in A$ et $b \in B$. Là encore, cela généralise bien la notion de couverture pour un rectangle. De même qeu pour les familles de rectangles, une *couverture* de $\mathcal{F}$ est un ensemble P de points tel que tout élément de $\mathcal{F}$ soit couvert par (au moins) un élément de P, et on note $\tau(\mathcal{F})$ la cardinalité minimum d'une couverture de $\mathcal{F}$.

L'inégaité (1) se généralise aux familles de paires d'ensembles.

$$\nu(\mathcal{F}) \leq \tau(\mathcal{F}). \tag{2}$$

Nous allons voir que pour certaines familles de paires d'ensemble, les familles bi-supermodulaires, il y a en fait égalité.

Deux paires (A,B) et (A',B') de $\mathcal{F}$ sont *comparables* si $A \subseteq A'$ et $B' \subseteq B$, et *non croisées* si elles sont comparables ou indépendantes. La famille $\mathcal{F}$ est dite *sans croisement* si toutes ses paires sont deux à deux non-croisées. Elle est dite *bi-supermodulaire* si pour toutes paires (A,B) et (A',B') de $\mathcal{F}$ qui se croisent alors les paires $(A \cap A', B \cup B')$ et $(A \cup A', B \cap B')$ sont aussi dans $\mathcal{F}$. Voir Figure **??**. Observons que les paires $(A \cap A', B \cup B')$ et $(A \cup A', B \cap B')$ sont comparables.

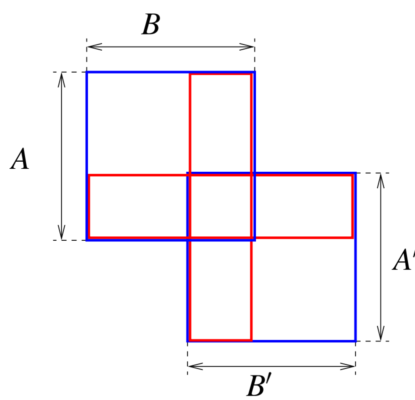

Figure 2: Bi-supermodularité pour une famille $\mathcal{F}$ de rectangles : Si les rectangles bleus sont dans $\mathcal{F}$, alors les rouges le sont aussi.

Théorème 5 (Frank et Jordan [1])**.** *Si $\mathcal{F}$ est bi-supermodulaire, alors $\nu(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{F})$.*

Remarque 6. Le Théorème 5 s'étend en une version pondérée où un poids $p(A,B)$ est affecté à chaque paire (A,B). La condition de bi-supermodularité est alors remplacée par la condition plus générale $p(A,B) + p(A',B') \leq p(A \cap A', B \cup B') + p(A \cup A', B \cap B')$.

Preuve du Théorème 5. Par récurrence sur la taille de $\mathcal{F}$.

Soit (A,B) une paire de $\mathcal{F}$.

Pour tout point $p = (a,b)$ qui couvre (A,B), on note $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des paires de $\mathcal{F}$ qui ne sont pas couvertes par p:

$$\mathcal{F}_p = \{(X,Y) \mid p \text{ ne couvre pas } (X,Y)\}.$$

Clairement, $\tau(\mathcal{F}) \leq \tau(\mathcal{F}_p)+1$, car toute couverture de $\mathcal{F}_p$ augmentée de p est une couverture de $\mathcal{F}$. De plus, par hypothèse de récurrence, $\nu(\mathcal{F}_p) = \tau(\mathcal{F}_p)$.

S'il existe un point p tel que $\nu(\mathcal{F}_p) \leq \nu(\mathcal{F})-1$, alors on aurait le résultat. En effet, on aurait

$$\tau(\mathcal{F}) \leq \tau(\mathcal{F}_p)+1 = \nu(\mathcal{F}_p)+1 \leq \nu(\mathcal{F}).$$

Nous allons montrer par l'absurde qu'il existe un tel point p. Supposons donc que pour tout sommet p, $\nu(\mathcal{F}_p) = \nu(\mathcal{F})$.

Montrons qu'il existe une fonction $w : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ qui vérifient les deux inégalités suivantes avec $m = |A| \cdot |B|$.

$$\begin{aligned} \sum_{(X,Y)\in\mathcal{F}} w(X,Y) &= m\cdot\nu(\mathcal{F})+1 && (3)\\ \sum_{(X,Y) \text{ couvert par } p} w(X,Y) &\leq m \quad \text{pour tout point } p && (4) \end{aligned}$$

Pour tout point $p \in (A,B)$, on prend I_p un indépendant de $\mathcal{F}_p$ de taille $\nu(\mathcal{F})$ et on définit w_p par $w_p(X,Y) = 1$ si $(X,Y) \in I_p$ et $w_p(X,Y) = 0$ sinon. On définit également w_0 par $w_0(X,Y) = 1$ si $(X,Y) = (A,B)$ et $w_0(X,Y) = 0$ sinon. Finalement, on pose

$$\tilde{w} = \sum w_0 + \sum_{p\in(A,B)} w_p.$$

Ainsi si $(X,Y) \neq (A,B)$ alors $\tilde{w}(X,Y)$ est le nombre de fois où la paire (X,Y) apparait dans un I_p et $\tilde{w}(A,B) = 1$. Comme chacun des m indépendants I_p est de taille $\nu(\mathcal{F})$, la fonction $\tilde{w}$ vérifie bien (3). L'inégalité (4) est aussi vérifiée car $w_p(A,B) = 0$ pour tout $p \in (A,B)$ et $w_0(X,Y) = 0$ pour tout $(X,Y) \neq (A,B)$.

Parmi toutes les fonctions vérifiant (3) et (4), on prend celle qui minimise $S(w) = \sum_{(X,Y)\in\mathcal{F}} w(X,Y)\cdot|X|\cdot|Y|$. Soit $\mathcal{F}' = \{(X,Y) \mid w(X,Y) > 0\}$.

Assertion 1. *$\mathcal{F}'$ est non croisée.*

Proof. Supposons que (A,B) et (A',B') soient croisées. Alors on définit w' par $w'(A,B) = w(A,B)-1$, $w'(A',B') = w(A',B')-1$, $w'(A\cap A', B\cup B') = w(A\cap A', B\cup B')+1$, $w'(A\cup A', B\cap B') = w(A\cup A', B\cap B')+1$ et $w'(X,Y) = w(X,Y)$ pour toute autre paire (X,Y).

On vérifie que w' vérifie (3) et (4) et que $S(w') < S(w)$, une contradiction. □

Comme $\mathcal{F}'$ est non croisée alors ses éléments sont deux à deux comparables ou indépendants. On peut donc considérer l'ordre partiel correspondant sur $\mathcal{F}'$ utiliser le Théorème de Dilworth pondéré: *le poids maximum d'une chaîne est égale au nombre minimum d'antichaînes pour couvrir $w(s)$ fois chaque élément s.*

Or le poids maximum d'une chaîne est au plus m car w vérifie (4). On peut donc couvrir $\mathcal{F}'$ par au plus m antichaînes $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_m$, i.e. ensembles indépendants. On alors $\sum_{i=1}^m |\mathcal{A}_i| \geq \sum_{(X,Y)\in\mathcal{F}} w(X,Y) = m\cdot\nu(\mathcal{F})+1$, car w vérifie (3). Il existe donc i tel que $|\mathcal{A}_i| > \nu(\mathcal{F})$. Ceci est une contradiction car $\mathcal{A}_i$ est un ensemble indépendant. □

4 Familles séparables

Une famille $\mathcal{F}$ de rectangles est séparable s'il existe une courbe polygonale monotone γ qui sépare les coins inférieurs gauche des coins supérieurs droits.

dessin

Théorème 7 (Chepoi et Felsner)**.** *Soit $\mathcal{F}$ une famille séparable de rectangles.*

$$\tau(\mathcal{F}) \leq 8 \cdot \nu(\mathcal{F}).$$

Preuve. Commençons par partitionner $\mathcal{F}$ en quatre ensembles en fonction de leur intersection avec γ.

Soit $\mathcal{F}_{h,b}$ (resp. $\mathcal{F}_{g,d}$, $\mathcal{F}_{h,d}$, $\mathcal{F}_{g,b}$), l'ensemble des rectangles de $\mathcal{F}$ qui intersectent γ sur leurs côtés haut et bas, (resp. gauche et droit, haut et droit, gauche et bas).

Clairement,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{h,b} \cup \mathcal{F}_{g,d} \cup \mathcal{F}_{h,d} \cup \mathcal{F}_{g,b}.$$

Nous allons montrer les relations suivantes:

(i) $\tau(\mathcal{F}_{h,b}) = \nu(\mathcal{F}_{h,b})$ et $\tau(\mathcal{F}_{g,d}) = \nu(\mathcal{F}_{g,d})$;

(ii) $\tau(\mathcal{F}_{h,d}) \leq 3 \cdot \nu(\mathcal{F}_{h,d})$ et $\tau(\mathcal{F}_{g,b}) \leq 3 \cdot \nu(\mathcal{F}_{g,b})$.

Ces deux assertions impliquent le résultat. En effet,

$$\tau(\mathcal{F}) \leq \tau(\mathcal{F}_{h,b}) + \tau(\mathcal{F}_{g,d}) + \tau(\mathcal{F}_{h,d}) + \tau(\mathcal{F}_{g,b}) \leq \nu(\mathcal{F}_{h,b}) + \nu(\mathcal{F}_{g,d}) + 3 \cdot \nu(\mathcal{F}_{h,d}) + 3 \cdot \nu(\mathcal{F}_{g,b}) \leq 8 \cdot \nu(\mathcal{F}).$$

Montrons tout d'abord (i). Soient R_1 et R_2 deux rectangles de $\mathcal{F}_{h,b}$. Si R_1 et R_2 s'intersectent, alors γ intersecte $R_1 \cap R_2$. Ainsi une couverture de $I_{h,b} = \{R \cap \gamma \mid R \in \mathcal{F}\}$ est une couverture de $\mathcal{F}_{h,b}$ et les indépendants de $I_{h,b}$ sont en bijection avec ceux de $\mathcal{F}_{h,b}$. Donc $\tau(\mathcal{F}_{h,b}) = \tau(I_{h,b})$ et $\nu(\mathcal{F}_{h,b}) = \nu(I_{h,b})$.

Or $I_{h,b}$ est une famille d'intervalles sur γ et donc, d'après la Proposition 4, $\tau(I_{h,b}) = \nu(I_{h,b})$. D'où $\tau(\mathcal{F}_{h,b}) = \nu(\mathcal{F}_{h,b})$.

De même, on prouve que $\tau(\mathcal{F}_{g,d}) = \nu(\mathcal{F}_{g,d})$.

Montrons maintenant (ii). Pour cela, nous allons donner un algorithme qui prenant en entrée $\mathcal{F}_{h,d}$ renvoie une partition $(\mathcal{F}'_{h,d}, \mathcal{F}''_{h,d})$ de $\mathcal{F}_{h,d}$, des couvertures $T' \cup T^0$ de $\mathcal{F}'_{h,d}$ et T'' de $\mathcal{F}''_{h,d}$ et des indépendants $I' \subset \mathcal{F}'_{h,d}$ et $I'' \subset \mathcal{F}''_{h,d}$, tels que $|T^0| \leq |T'| = |I'|$ et $|T''| = |I''|$. On aura ainsi

$$\tau(\mathcal{F}_{h,d}) \leq |T^0| + |T'| + |T''| \leq 2 \cdot |I'| + |I''| \leq 3 \cdot \nu(\mathcal{F}_{h,d})$$

.

□

References

[1] A. Frank et T. Jordán. Minimal edge-coverings of pairs of sets. *J. Combinatorial Theory, Ser. B* 65:73–110, 1995.