Compression Itérative

Frédéric Giroire

I3S, CNRS – Centre National de la Recherche Scientifique, MASCOTTE, INRIA Sophia Antipolis, Université Nice Sophia Antipolis

Journées CALM – Complexité paramétrée – 6 juin 2008

Approche paramétrisée de problèmes difficiles.

Objectif : algorithme exact, mais avec temps d'exécution exponentiel.

Approche paramétrisée : essayer de confiner l'explosion combinatoriale au paramétre k.

FPT (Fixed-Parameter Tractability) : un problème est dans FPT s'il peut être résolu en temps $O(f(k) \cdot n^{O(1)})$.

Exemple :
Vertex Cover peut être résolu en temps $O(1.2852^k + k|V|)$.
k: taille du vertex cover.

Techniques pour prouver la “FPTness”

Techniques classiques :

- Kernelizations
- Les arbres de recherche à profondeur bornée
- Programmation dynamique
- Les décompositions en arbre
- ...

Approche récente :

- Compression itérative.

Compression Itérative

Idée générale : Calculer une solution pour une instance du problème en utilisant les informations données par une solution d'une instance plus petite.

Typiquement

- problème de minimisation
- paramètre $k =$ taille de la solution.
- Si S est une solution pour $(G - v)$ alors $S \cup \{v\}$ est également solution pour G.

Phase de compression: étant une solution de taille $k + 1$, calculer une solution de taille k (si elle existe).

Applications de la Compression Itérative

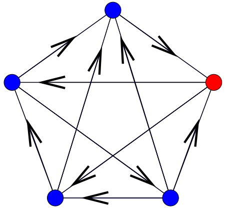
1. Arête-transverse des cycles impairs $O(2^k m^2)$
   [Guo et al. *WADS*, 2005]
2. Feedback Vertex Set $O(c^k m)$
   [Dehne et al. *COCOON*, 2005]
   [Guo et al. *WADS*, 2005]
3. Chordal deletion $O(???)$
   [Marx *WG*, 2006]
4. Feedback Vertex Set dans les Tournois $O(2^k n^2 (log n + k))$
   [Dom, Guo, Hüffner, Niedermeier, Truss, *CIAC*, 2006]
5. Transverse des cycles impairs $O(4^k mn)$
   [Reed, Smith et Vetta, *Oper. Res. Let.*: 32, 2004.]

Feedback Vertex Set dans les Tournois

Merci Hannes Moser!! Institut für Informatik
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Feedback Vertex Set dans les Tournois

Tournoi: orientation d'un graphe complet.

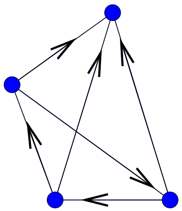


Problème:(Feedback Vertex Set dans les Tournois)
Entrée: Tournoi T.
But: Trouver le plus petit ensemble de sommets X tel que $T - X$ est acyclique?

NP-difficile [Speckenmeyer, *WG* 1989]

Feedback Vertex Set dans les Tournois

Tournoi: orientation d'un graphe complet.



Problème:(Feedback Vertex Set dans les Tournois)
Entrée: Tournoi T.
But: Trouver le plus petit ensemble de sommets X tel que $T - X$ est acyclique?

NP-difficile [Speckenmeyer, *WG* 1989]

Schéma de Compression Itérative

1. Initialisation: un tournoi vide T' et une solution vide X.
2. Pour chaque sommet de v de T:
    2.1. Ajouter v à T' et à X.
    2.2. Utiliser une phase de compression pour trouver une éventuelle solution plus petite.
    2.3. Si $|X| > k$, alors "PAS DE SOLUTION".

Invariant pendant la boucle :
X est une solution de taille au plus k pour le tournoi T'.

Phase de compression

But : Étant donné une solution X de taille $k+1$, construire une solution X' de taille k.

Remarque : C'est la partie cœur de la technique de compression itérative.

Approche : Essayez toutes des partitions de X en une partie à échanger S et une partie à garder $X-S$.

Temps d'exécution total

Consommation de temps :

- n itérations de la phase de compression ;
- 2k+1 partitions par itération;
- temps $O(n \cdot k)$ pour détruire les triangles, temps $O(nlogn)$ pour trier les sommets et trouver la plus longue sous-séquence commune.

Temps d'exécution pour résoudre Feedback Vertex Set pour les Tournois :

$$O(2k \cdot n2(logn + k))$$

Transverse des cycles impairs

Transverse des cycles impairs

Quelles est la taille minimale d'un ensemble de sommets qui intersecte tous les cycles de longueur impaire ?

Algorithme brute force : $O(mN^k)$
- pour tous les sous-ensembles de taille k: $\binom{n}{k} = O(n^k)$
- tester tous les cycles $O(m)$

Algorithme OddCycleCover(k)
Input: un graphe G
Output: soit un ensemble Y, $|Y| \leq k$ ou soit information pas de solution.
Running time: $O(4^k kmn)$.

Algorithme OddCycleCover(k)

Algorithme récursif :
Choisir au hasard $v \in V(G)$. Lancer l'algorithme OddCycleCover(k) sur $G - v$.

- Si pas de solution, pas de solution pour G.
- Si solution X', on considère $X = X' + v$.
  - si $|X| \leq k$, renvoie X
  - sinon phase de compression de X.

Algorithme OddCycleCover(k)

Algorithme récursif :
Choisir au hasard $v \in V(G)$. Lancer l'algorithme OddCycleCover(k) sur $G - v$ $O(n)$.

- Si pas de solution, pas de solution pour G.
- Si solution X', on considère $X = X' + v$.
  - si $|X| \leq k$, renvoie X
  - sinon phase de compression de X $O(4^k km)$.

Procédure de compression

Soit X une traverse des cycles impairs.
$\rightarrow$ Il existe une partition de $G - X$ en deux stables S_1, S_2.

On construit un graphe biparti auxiliaire G'.
Sommets :

$$V(G') = V(G) - X + \{x_1, x_2 : x \in X\}.$$

Arêtes:

- arêtes de $G - X \rightarrow$ même arête
- arêtes de $G - X$ à X ($y \in G - X$ et $x \in X$) $\rightarrow$ arête de $y \in S_1$ à x_2 ou $y \in S_2$ à x_1.
- arêtes de X ($x, y \in X$) $\rightarrow$ $x_1\ y_2$ ou $x_2\ y_1$.

Partition valide (Y_A, Y_B) : Pour un $Y \subseteq X$, une partition de $Y' = \{y_1, y_2 : y \in Y\}$, telle que $\forall y \in Y$, soit $y_1 \in Y_A$, soit $y_2 \in Y_A$.

Lemma

Une traverse est minimale ssi $\forall Y \subseteq X$, $\forall (Y_A, Y_B)$ valide, il y a $|Y|$ chemins disjoints en sommets joignant Y_A et Y_B dans $G' - \{x_1, x_2 : x \in X - Y\}$.

Complexité de la routine de compression : $O(4^k km)$

Pour tous $Y \subseteq X$ $2^{|X|} = 2^{k+1}$

- Pour toutes partitions de Y : Y_A, Y_B $2^{|Y|} \leq 2^{k+1}$.
  - Résoudre un problème de flot maximum avec demande k sur un graphe avec m arêtes 0(km)

Discussion sur la compression itérative

Avantages

- Le problème devient plus facile: on améliore une solution existante au lieu de trouver une solution optimale directement.

Limitations

- "Bottleneck" 2^k
- La conception de la routine de compression peut être difficile.

Travaux futurs

- Caractériser les problèmes susceptibles dont les solutions peuvent être compressées.
- Comment combiner la compression itérative avec d'autres techniques ?
- Application à des problèmes de maximisation. [Fomin,Gaspers,Kratsch,Liedloff,Saurabh, *Iterative Compression and Exact Algorithms*]