

Université Claude Bernard  Lyon 1

Master Statistiques, Informatique, et Techniques Numériques  
Université Claude Bernard - Lyon 1  
Avril - Juillet 2008

# Coloration des graphes planaires

Nathann COHEN

Projet MASCOTTE

I.N.R.I.A. Sophia Antipolis  
2004 route des lucioles - BP 93  
06902 Sophia Antipolis

Directeur de recherche : F. Havet  
Rapporteur universitaire : A. Perrut





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation du projet MASCOTTE</b>	<b>5</b>
1.1	Le projet MASCOTTE . . . . .	5
1.2	L'INRIA . . . . .	6
1.3	Le laboratoire I3S . . . . .	7
1.4	Contexte du stage . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Coloration de graphes planaires</b>	<b>9</b>
2.1	Définitions générales . . . . .	9
2.2	Degrés . . . . .	10
2.3	Planarité . . . . .	11
2.4	Coloration . . . . .	13
2.5	Quelques bornes . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Deux techniques de démonstration</b>	<b>17</b>
3.1	Le déchargement . . . . .	17
3.1.1	Description . . . . .	17
3.2	La méthode probabiliste . . . . .	18
3.2.1	Premier moment . . . . .	19
3.2.2	Lemme local . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Choisissabilité impropre des graphes planaires</b>	<b>23</b>
4.1	Présentation . . . . .	23
4.2	Une version duale . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Linear L-coloring</b>	<b>27</b>
5.1	Introduction . . . . .	27
5.2	Results . . . . .	28
5.3	Reducible configurations . . . . .	29
5.3.1	Linear coloring . . . . .	29
5.3.2	2-frugal coloring . . . . .	36
5.4	Proofs . . . . .	38
5.4.1	Linear coloring . . . . .	38
5.4.2	2-frugal coloring . . . . .	43
5.4.3	Conclusion . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Bilan du stage</b>	<b>47</b>

## Remerciements

Je tiens à remercier Frédéric Havet, Chargé de Recherche C.N.R.S. au projet MASCOTTE, pour m'avoir accueilli et guidé tout au long de ce stage, indifféremment de son bureau ou de l'autre bout du monde.

Je remercie de même Frédéric Giroire, Luc Hogie, Florian Huc, Julian Monteiro, et Stéphane Pérennes (s'il accorde à ce geste une valeur quelconque, venant d'un coloriste), pour m'avoir laissé m'imiscer dans leurs travaux lorsque j'abandonnais les miens quelques instants, et avoir pris le temps de m'en parler.

Je tiens également à remercier tous les membres du projet MASCOTTE avec qui j'ai eu le plaisir de travailler, pour leur bonne humeur à toute épreuve ainsi que leur regard sur la condition humaine.

# 1 Présentation du projet MASCOTTE

## 1.1 Le projet MASCOTTE



Le projet MASCOTTE (Méthodes algorithmiques, simulation, combinatoire et optimisation des télécommunications) est un projet commun entre le laboratoire I3S (Laboratoire d'Informatique, Signaux et Systèmes de Sophia-Antipolis) et l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique). Il a pour objectif de développer des méthodes et outils algorithmiques qui s'appliquent en particulier à la conception de réseaux de télécommunications. Ses axes de recherche principaux sont :

- Algorithmique, mathématiques discrètes et optimisation combinatoire.
- Algorithmique des communications.
- Dimensionnement de réseaux (optiques WDM, MPLS, embarqués, radio Wi-Fi WiMax et satellites).
- Simulation de systèmes complexes.

Ses activités l'amènent à collaborer avec équipes de recherche canadiennes, européennes et brésiliennes, ainsi que des industriels. Actuellement, le projet Mascotte est partenaire de 10 contrats de recherche.

## 1.2 L'INRIA



L'INRIA, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, placé sous la double tutelle des ministères de la recherche et de l'industrie, a pour vocation d'entreprendre des recherches fondamentales et appliquées dans les domaines des sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC).

C'est un acteur majeur dans le développement des STIC en France, accueillant 3800 personnes dans 8 centres de recherches situés à Rocquencourt, Rennes, Sophia Antipolis, Grenoble, Nancy, Bordeaux, Lille et Saclay. Sur cet effectif, 2800 sont des scientifiques de l'INRIA et d'organismes partenaires (CNRS, universités, grandes écoles) et travaillent dans plus de 150 équipes-projets de recherche communes qui accueillent un total de 1000 étudiants en thèse.

L'institut entretient d'importantes relations internationales : en Europe, l'INRIA est membre du consortium ERCIM (European Research Consortium for Informatics and Mathematics), qui regroupe des instituts de recherche de 19 pays européens. L'INRIA participe à environ 120 actions dans le cadre du 6e PCRD (Project for Conflict Resolution and Development) et 40 actions dans le cadre du 7e PCRD, essentiellement dans le domaine des STIC. À l'international, l'institut collabore avec de nombreuses institutions scientifiques et universitaires (laboratoires de recherche conjoints tels que LIAMA, équipes de recherche associées, programmes de formation et de stages, etc.).

L'objectif essentiel de l'INRIA pour les années 2008-2012 est de réaliser des percées scientifiques et technologiques dans sept domaines prioritaires :

- Modélisation, simulation et optimisation de systèmes dynamiques complexes
- Programmation : sécurité et fiabilité des systèmes informatiques
- Communication, information et calcul ubiquitaires
- Interaction avec des mondes réels ou virtuels
- Ingénierie numérique
- Sciences numériques
- Médecine numérique

## 1.3 Le laboratoire I3S



Le laboratoire I3S (Laboratoire d'Informatique, Signaux et Systèmes de Sophia-Antipolis) est une Unité Mixte de Recherche (UMR) entre l'Université de Nice-Sophia Antipolis (UNSA) et le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS). Il est composé en majorité d'enseignants-chercheurs de l'UNSA (une cinquantaine), de même que 17 chercheurs du CNRS et 8 chercheurs de l'INRIA.

Son imbrication étroite entre enseignement et recherche, au centre du dispositif des UMR, est un élément essentiel de la dynamique du laboratoire. La présence d'une centaine de doctorants atteste de l'importance de l'implication du laboratoire en terme de formation. Sa recherche se situe au cœur des Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication et recouvre de façon quasi continue l'ensemble du spectre de la Section 07 du Comité National de la Recherche Scientifique (informatique, automatique, signal et communication).

Cette large couverture nourrit en interne des actions pluridisciplinaires aux interfaces avec d'autres domaines ou en direction de secteurs applicatifs (télécommunications, sécurité, robotique, biologie, santé, . . .) ainsi que des réflexions méthodologiques plus amont, au confluent de plusieurs disciplines mais reposant sur un socle théorique commun (optimisation, modélisation, mathématiques discrètes, graphes, combinatoire, systèmes dynamiques, . . .).

Ses activités de recherche supposent la mise en œuvre d'allers-retours réguliers entre théorie et application, permettant de confronter ses résultats et ses méthodes aux problèmes du monde réel dans le cadre de partenariats avec les acteurs socio-économiques.

## 1.4 Contexte du stage

Le travail effectué pendant le stage s'est inscrit dans l'axe "Mathématiques discrètes et optimisation combinatoire" du projet Mascotte, puisque la coloration de graphes planaires avait ici pour champ d'application celui des télécommunications, et plus particulièrement les problèmes d'ordonnancement et d'allocation de fréquences.





## 2 Coloration de graphes planaires

### 2.1 Définitions générales

**Définition** (Graphe). Les *graphes* apparaissent naturellement comme un moyen de représenter des relations entre plusieurs entités. On définit un *graphe*  $G$  comme la donnée  $(V_G, E_G)$  d'un ensemble (ici, fini) de *sommets*  $V_G$  et d'un ensemble d'*arêtes* entre ces points  $E_G \subseteq [V]^2$ . Pour plus de simplicité, on notera  $uv \in E_G$  si  $\{u, v\} \in E_G$ . On notera également  $V(G) = V_G$  et  $E(G) = E_G$ .

Exemples :

- Le *chemin*  $P_n$  de longueur  $n$  est le graphe sur  $n+1$  sommets  $v_1, \dots, v_{n+1}$  ayant pour arêtes  $v_i v_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$  – cf. Fig2.1.



FIG. 2.1 – Le graphe  $P_3$

- Le *cycle*  $C_n$  de longueur  $n$  est le graphe sur  $n$  sommets  $v_1, \dots, v_n$  ayant pour arêtes  $v_i v_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$  (les additions sont faites dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) – cf. Fig2.2.

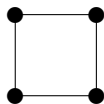


FIG. 2.2 – Le graphe  $C_4$

- Le *complet*  $K_n$  est le graphe sur  $n$  sommets  $v_1, \dots, v_n$  dans lequel tous les points sont reliés – cf. Fig2.3.

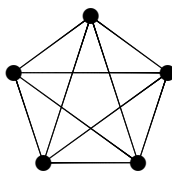
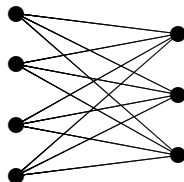


FIG. 2.3 – Le graphe  $K_5$

- Le *complet biparti*  $K_{m,n}$  est le graphe sur  $n + m$  sommets  $v_1^1, \dots, v_n^1, v_1^2, \dots, v_m^2$  dans lequel tous les points  $v_i^1 v_j^2$  sont reliés – cf. Fig2.4.

FIG. 2.4 – Le graphe  $K_{4,3}$ 

**Définition** (Graphe induit). Soit  $G$  un graphe, et  $V' \subseteq V(G)$ . On note  $G[V']$  le graphe *induit* par  $V'$  dans  $G$ , dont les sommets ceux de  $V'$  et dans lequel deux sommets sont reliés si et seulement s'ils sont reliés dans  $G$ .

**Définition** (Maille). On appelle *maille* d'un graphe  $G$ , notée  $g(G)$ , l'entier  $g(G)$  égal à la longueur du plus petit cycle contenu dans  $G$ , et  $+\infty$  si  $G$  ne contient pas de cycles.

## 2.2 Degrés

**Définition** (Degré). Soit  $G$  un graphe, et  $v \in V(G)$  un de ses sommets. On note  $d_G(v) = |\{u \in V(G) : vu \in E(G)\}|$ , ou tout simplement  $d(v)$  le *degré* d'un sommet  $v$  dans  $G$  lorsque le graphe considéré ne prête pas à confusion. De plus, on note  $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d(v)$  le *degré maximal* de  $G$  et  $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$ .

**Lemme** (Lemme des poignées de main). *Lorsque plusieurs personnes se serrent la main, le nombre de mains serrées (comptées avec multiplicité) est un nombre pair!* Pour tout graphe  $G$  on a l'égalité suivante :

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

**Définition** (Degrés moyens). On appelle *degré moyen* d'un graphe  $G$  la valeur

$$ad(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

Afin d'obtenir une notion de *degré moyen* qui soit croissante avec l'ordre naturel d'inclusion des graphes, on définit de même la notion de *degré moyen maximal*, ou "Mad"

$$Mad(G) = \max_{H \leq G} ad(H)$$

**Définition** (Dégénérescence). On appelle *dégénérescence* d'un graphe  $G$  la valeur

$$\delta^*(G) = \max_{H \subseteq G} \delta(H)$$

Ce paramètre naît d'une façon de parcourir les graphes : si  $\delta^*(G) = k$ , et en notant  $n = |V(G)|$ , il est possible de choisir  $v_1 \in V(G)$  tel que  $\deg_G(v_1) \leq k$ , puis  $v_2 \in V(G \setminus \{v_1\})$  tel que  $\deg_{G \setminus \{v_1\}}(v_2) \leq k$ , puis  $\dots$ , puis  $v_n \in V(G \setminus \{v_1, \dots, v_{n-1}\})$  tel que  $\deg_{G \setminus \{v_1, \dots, v_{n-1}\}}(v_n) \leq k$ .

**Proposition.** Dans tout graphe  $G$  on a l'inégalité

$$\delta^*(G) \leq Mad(G) \leq 2\delta^*$$

*Démonstration.* Un graphe de degré moyen  $ad(G)$  contient trivialement un sommet de degré inférieur ou égal à  $ad(G)$ . D'autre part, le parcours d'un graphe dégénéré fournit une partition de  $E(G)$  en  $|V(G)|$  ensembles de moins de  $\delta^*(G)$  éléments. Par conséquent :

$$ad(G) \leq \frac{2\delta^*(G)|V(G)|}{|V(G)|} = 2\delta^*(G)$$

Comme la  $\delta^*(G)$ -dégénérescence de  $G$  entraîne la  $\delta^*(G)$ -dégénérescence de tous ses sous-graphes, ces inégalités s'étendent au  $Mad$ .  $\square$

## 2.3 Planarité

**Définition** (Graphe planaire). Un graphe est appelé *planaire* s'il peut être dessiné dans le plan sans que deux arêtes ne s'intersectent. Par exemple, le graphe  $K_4$  est un graphe *planaire* :

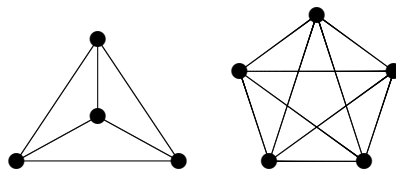


FIG. 2.5 –  $K_4$ , graphe planaire et  $K_5$ , graphe non planaire

**Définition** (Graphe dual). Les graphes planaires se prêtent à la définition d'un graphe *dual*, noté  $G^*$ , dans lequel l'ensemble des sommets est en bijection avec l'ensemble des faces d'un plongement de  $G$  dans le plan (on remarque donc en fait que le *dual* dépend d'une *représentation* de  $G$  mais n'est pas dans le cadre général défini pour la simple donnée de graphe), et où deux sommets sont reliés si et seulement si leurs faces correspondantes sont adjacentes.

**Définition** (Graphe outerplanaire). *Un graphe est appelé outerplanaire s'il admet un plongement dans le plan tel que tous les sommets soient situés sur un cercle, et les arêtes uniquement dans le disque induit.*

Exemple : si  $G$  est un graphe planaire, et  $v \in G$ , alors le graphe induit par l'ensemble des voisins de  $v$  est un graphe outerplanaire.

**Théorème** (Inégalité d'Euler). Tout graphe planaire  $G$  vérifie l'égalité d'Euler :

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$$

où  $|F(G)|$  désigne le nombre de faces de  $G$  dans une représentation de  $G$  sur le plan.

**Définition** (Graphe triangulé). On dit qu'un graphe planaire  $G$  est *triangulé* si toutes ses faces sont des triangles. Puisqu'il est toujours possible de transformer un graphe planaire  $G$  en un graphe *triangulé* en rajoutant des arêtes entre deux sommets non adjacents d'une même face, on dit que  $G'$  est une *triangulation* de  $G$  si  $G$  est contenu dans  $G'$  et  $G'$  est *triangulé*.

**Proposition.** Un graphe  $G$  triangulé sur  $n$  sommets possède  $3n - 6$  arêtes.

*Démonstration.* Dans un graphe  $G$  triangulé on a trivialement  $3|F(G)| = 2|E(G)|$ . A l'aide de l'inégalité d'Euler, on obtient :

$$\begin{aligned} 2 &= |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| \\ &= |V(G)| - \frac{1}{3}|E(G)| + |F(G)| \\ &= |V(G)| - \frac{1}{3}|E(G)| \\ |E(G)| &= 3|V(G)| - 6 \end{aligned}$$

□

**Proposition.** Si  $G$  est un graphe planaire, alors  $Mad(G) < 6$

*Démonstration.* Il suffit de démontrer la relation pour les triangulations, étant donné que le  $Mad$  est croissant sur les graphes pour l'ordre d'inclusion et que tout graphe peut être triangulé. Puisque pour tout graphe triangulé nous avons  $|E(G)| = 3|V(G)| - 6$ , alors

$$ad(G) = 6 - \frac{12}{|V(G)|} < 6$$

Tout sous-graphe d'un graphe planaire étant lui-même planaire, nous obtenons le résultat de la proposition. □

**Proposition.** Pour tout graphe planaire  $G$ .

$$Mad(G) < \frac{2g(G)}{2 - g(G)}$$

*Démonstration.* Puisque tout face est de longueur au moins  $g(G)$ , on minore le nombre d'arêtes par  $g(G)|F(G)| \leq 2|E(G)|$ . Par injection dans la formule d'Euler :

$$\begin{aligned}
2 &= |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| \\
&\leq |V(G)| + \frac{2 - g(G)}{g(G)} |E(G)| \\
0 &\leq \frac{1}{|V(G)|} \left( 2(|V(G)| - 2) + \frac{2 - g(G)}{g(G)} 2|E(G)| \right) \\
0 &\leq 2 - \frac{4}{|V(G)|} + \frac{2 - g(G)}{g(G)} ad(G) \\
ad(G) &\leq \frac{g(G)}{2 - g(G)} \left( 2 - \frac{4}{|V(G)|} \right) \\
ad(G) &< \frac{2g(G)}{2 - g(G)}
\end{aligned}$$

La girth étant décroissante pour l'ordre d'inclusion sur les graphes, on obtient le résultat annoncé.  $\square$

## 2.4 Coloration

**Définition** (Coloration). Si  $G$  est un graphe sur un ensemble  $V$  de sommets, on appelle *coloration* de  $G$  une fonction  $c : V \mapsto \mathbb{N}^*$ . Une *coloration propre* vérifie de plus la condition

$$\forall uv \in E(G), c(u) \neq c(v)$$

- Si tout sommet  $v \in V$  possède au plus  $k$  voisins  $v_1, \dots, v_k$  dans  $G$  tels que  $c(v) = c(v_i)$ , on dit que  $c$  est une coloration *k-impropre* de  $G$ .
- Si  $c : G \mapsto \{1, \dots, l\}$  est une coloration de  $G$ , on dit que  $c$  est une *l-coloration*.
- S'il existe pour un graphe  $G$  une *l-coloration*  $c$  qui soit *k-impropre*, on dit que  $G$  est *k-improprement l-colorable*. On dira simplement '*l-colorable*' si  $G$  est proprement *l-colorable*.

**Définition** (Nombre chromatique). Pour tout graphe  $G$ , et par extension pour toute famille  $\mathcal{F}$  de graphes, on définit la fonction  $\chi$  suivante, appelée *nombre chromatique* :

$$\chi_i(G) = \min\{m : G \text{ est } i\text{-improprement } m\text{-colorable}\}$$

$$\chi_i(\mathcal{F}) = \max_{G \in \mathcal{F}} \chi_i(G)$$

Comme précédemment, on omet parfois de préciser l'impropreté lorsqu'il s'agit de coloration propre : on note alors  $\chi = \chi_0$

Il arrive cependant que dans certains problèmes pratiques on souhaite avoir plus de contrôle sur les couleurs prises par un sommet, suite à des contraintes techniques. On développe alors le concept de coloration par liste.

**Définition** (Coloration par liste). Si  $G$  est un graphe sur un ensemble  $V$  de sommets, et  $L : V \mapsto 2^{\mathbb{N}}$  une fonction sur  $V$ , on dit que  $c$  une coloration de  $G$  est une  $L$ -coloration de  $G$  si  $\forall v \in V, c(v) \in L(v)$ .

- Si pour un graphe  $G$ , et une fonction  $L : V \mapsto 2^{\mathbb{N}}$ , il existe  $c$  une  $L$ -coloration de  $G$ , on dit que  $G$  est  $L$ -colorable.
- Si pour toute fonction  $L : V \mapsto 2^{\mathbb{N}}$  sur un graphe  $G$  d'ensemble de sommets  $V$  vérifiant  $\forall v \in V, |L(v)| \leq m$ , il existe  $c$  une  $L$ -coloration de  $G$ , on dit que  $G$  est  $m$ -choisissable.

La notion de *choisissabilité* a été introduite par Vizing en 1976 [22], et par Erdős, Rubin, et Taylor en 1979 [9]. Cette généralisation de la notion de coloration a été appliquée à de nombreux problèmes, et notamment à la coloration sous contraintes (*choisissabilité* acyclique [5],  $(a, b)$ -*choisissabilité* [21], *choisissabilité*  $k$ -impropre [18])

**Définition** (Nombre de choisissabilité). Comme pour la coloration simple, on définit la fonction  $ch$  suivante :

$$ch_i(G) = \min\{m : G \text{ est } i\text{-improprement } m\text{-choisissable}\}$$

$$ch_i(\mathcal{F}) = \max_{G \in \mathcal{F}} ch_i(G)$$

Cette fonction donne lieu à une simplification d'écriture similaire :  $ch = ch_0$

## 2.5 Quelques bornes

**Définition** (Coloration gloutonne). Colorier de façon gloutonne un graphe  $G$  revient à sélectionner les sommets de  $G$  les uns après les autres et à colorer chacun d'entre eux avec la plus petite couleur disponible qui ne soit pas déjà celle d'un voisin.

Le nombre chromatique d'un graphe peut être facilement borné à l'aide du degré maximal.

**Proposition.** *Pour tout graphe  $G$*

$$\chi(G) \leq ch(G) \leq \Delta(G) + 1$$

*Cette majoration est optimale, par exemple dans le cas des graphes complets  $K_n$ .*

*Démonstration.* Il suffit de colorier de façon gloutonne le graphe  $G$ , en notant qu'à chaque étape au plus  $\Delta$  couleurs sont interdites.  $\square$

En utilisant la dégénérescence, il est cependant possible de mieux faire.

**Proposition.** *Pour tout graphe  $G$*

$$\chi(G) \leq ch(G) \leq \delta^*(G) + 1$$

*Démonstration.* Il suffit de colorier de façon gloutonne le graphe  $G$ , dans l'ordre donné par la dégénérescence, en notant qu'à chaque étape au plus  $\delta^*(G)$  couleurs sont interdites.  $\square$

Cette inégalité fournit implicitement un lien entre  $\chi(G)$  et  $Mad(G)$  par la relation  $\delta(G) \leq Mad(G)$ . Cependant, par exemple dans le cas des graphes bipartis, le  $Mad$  peut devenir un outil plus efficace.

**Theorème 1** (N. Alon et M. Tarsi [2]). Pour tout graphe biparti  $G$  on a l'inégalité

$$ch(G) \leq \left\lceil \frac{Mad(G)}{2} \right\rceil + 1$$

*(Ce résultat améliore strictement la borne obtenue par la coloration de graphe dégénéré)*

Dans le cas plus particulier de la coloration impropre, il existe aussi une généralisation de la majoration par le degré maximal.

**Proposition** (Borne de Lovász).

$$\chi_i(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)}{i} \right\rceil$$

*Démonstration.* On obtient cette borne de la façon suivante : soit  $\lambda$  une  $\lfloor \frac{\Delta(G)}{i} \rfloor$ -coloration impropre de  $G$  qui minimise le nombre d'arêtes entre deux sommets de même couleur. S'il existe  $v \in G$  tel que  $v$  a strictement plus de  $i$  voisins de même couleur, il existe une classe de couleur dans laquelle  $v$  possède moins de  $i$  voisins, car dans l'alternative  $v$  aurait plus de  $(i + 1) \lfloor \frac{\Delta(G)}{i} \rfloor > \Delta$  voisins. Par conséquent, en recolorant  $v$  de cette seconde couleur, on supprime plus de  $i + 1$  arêtes impropres pour en créer au plus  $i$  nouvelles, et la coloration obtenue est strictement meilleure que la première, supposée minimale. La borne de Lovász est vérifiée.  $\square$





## 3 Deux techniques de démonstration

Dans cette section sont présentées deux techniques de démonstration qui interviennent fréquemment en théorie des graphes, et plus particulièrement en coloration.

### 3.1 Le déchargement

La méthode de déchargement est apparue pour la première fois en 1904 afin de prouver un résultat concernant les graphes planaires, et c'est sur ces mêmes graphes planaires qu'elle continue à être utilisée la plupart du temps. Son application la plus célèbre est très probablement la démonstration du Théorème des Quatre Couleurs [3] [4], dans laquelle son rôle est fondamental. De plus, et ce détail à son importance, son principe s'explique en quelques mots.

#### 3.1.1 Description

Une démonstration reposant sur la méthode de déchargement se déroule en deux étapes. La première étant justifiée par la seconde, ne commençons pas, pour une fois, par le commencement.

##### **Etape 2**

Soit  $G$  un graphe dont nous aimerions exhiber une propriété. Il nous est possible d'associer aux éléments de ce graphe (le plus souvent à ses arêtes ou à ses faces) un poids, qui vérifiera une certaine inégalité. Par exemple, si  $G$  est planaire, et si nous associons à chaque sommet de  $G$  un poids égal à son degré, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que le poids moyen des sommets de  $G$  est inférieur à 6, puisque le degré moyen d'un graphe planaire vérifie cette même inégalité.

L'idée du déchargement est de définir comment ces poids vont être échangés entre les différents éléments de notre graphe, de telle façon que la somme totale des poids ne devra pas être modifiée. Par exemple, il nous est possible d'imposer à tous les sommets de degré 8 de donner un poids de 1 à chacun de leurs voisins de degré

inférieur. Ici, toutes les possibilités sont ouvertes sur la définition des règles, dont le but est de mettre en valeur la caractéristique que l'on cherche à étudier.

### Étape 1

Une fois ces règles définies, on cherche à évaluer une seconde fois l'inégalité évoquée précédemment, et qui portait (exemple arbitraire) sur le degré moyen de  $G$ . Le graphe que nous avons choisi d'étudier n'est habituellement pas un graphe totalement inconnu, c'est un graphe qui souvent répond à une condition quelconque de minimalité, il peut aussi s'agir dans une démonstration par l'absurde d'un contre-exemple à une conjecture, etc... En bref, il est très souvent possible d'obtenir quantité d'informations locales sur ce graphe, qui permettront de mener à bien le déchargement.

Explication : la fonction que nous cherchons à évaluer est une fonction globale, c'est-à-dire qui porte sur le graphe en sa totalité. Les règles que nous avons définies sont, elles, locales. Par exemple, si nous pouvions affirmer que dans le graphe  $G$  que nous étudions, un sommet de degré 8 a au maximum 2 voisins de degré inférieur, il restera à ce sommet après la phase d'échange un poids plus grand que 6. De même, si les sommets de degré inférieur à 8 ont tous au moins 3 voisins de degré 8, ils posséderont après la phase d'échange une masse au moins égale à 8.

De cette façon, alors que seuls des *échanges* de masse ont eu lieu, on peut remarquer que tous les sommets ont une charge finale au moins égale à 8, et donc que le degré moyen est supérieur à 8, ce qui contredit notre hypothèse initiale. Par conséquent, le graphe  $G$  que nous avons choisi d'étudier et qui vérifiait un certain ensemble de propriétés ne peut pas exister.

### En résumé ...

La méthode du déchargement repose sur la connaissance de configuration plus ou moins locales, et permet d'obtenir des informations sur le graphe dans sa globalité. Bien que les démonstrations commencent logiquement par l'étude des configurations locales, et se terminent par leur utilisation dans la phase de déchargement, il est cependant clair que les règles d'échange constituent le seul lien logique entre les caractéristiques du graphe et la propriété que l'on souhaite démontrer. On commence donc souvent par réfléchir aux règles, pour n'étudier que par la suite les configurations locales qui permettront de faire aboutir la démonstration.

*Des illustrations de la méthode de déchargement se trouvent dans la section 5*

## 3.2 La méthode probabiliste

La méthode probabiliste permet en théorie des graphes et en combinatoire d'obtenir des résultats d'existence en utilisant pour cela des résultats probabilistes. Cette technique, qui comme tout le reste à l'exception seule du Ciel, de la Terre et des Etoiles, a été initialement développée de Paul Erdős, se décrit bien plus facilement par un exemple que des détours.

### 3.2.1 Premier moment

Le résultat suivant illustre à la fois la puissance de la méthode probabiliste et le fait que la coloration propre soit une notion globale, et pas uniquement locale.

**Définition.** On définit l'espace de probabilité  $G(n, p)$  comme l'ensemble des graphes à  $n$  sommets dans lequel chaque couple de points à une probabilité  $p$  d'être relié par une arête. Si  $H$  est un graphe d'ordre  $n$  et  $G \sim G(n, p)$ , on a donc :

$$P[G = H] = p^{|E(H)|} (1 - p)^{\frac{n^2 - n}{2} - |E(H)|}$$

**Théorème 2** (Erdős [7]). *Pour tout  $k$  il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $n$  assez grand, il existe un graphe  $G$  d'ordre  $n$  tel que  $\chi(G) > k$  et  $\chi(G|_S) \leq 3$  pour tout ensemble  $S \subseteq G$  d'ordre au plus  $\epsilon n$*

*Démonstration.* Pour un  $k$  donné, choisissons  $c, \epsilon > 0$  vérifiant :

$$\begin{aligned} c &> 2k^2 H(1/k) \ln 2 \\ \epsilon &< e^{-5} 3^3 c^{-3} \end{aligned}$$

où  $H(x) = -x \log_2(x) - (1 - x) \log_2(1 - x)$ . Soit  $p = c/n$ , et  $G \sim G(n, p)$ . Montrons que  $G$  vérifie presque sûrement les conditions du théorème.

Si  $\chi(G) \leq k$ , il existe donc dans  $G$  un ensemble stable de taille  $n/k$ . L'espérance du nombre de tels ensembles se calcule :

$$\binom{n}{n/k} (1 - p)^{\binom{n/k}{2}} < 2^{n(H(1/k) + o(1))} e^{-cn/2k^2(1+o(1))}$$

qui est de la forme  $o(1)$  considérant les hypothèses sur  $c$ . Par conséquent on a presque sûrement  $\chi(G) > k$

Supposons qu'un sensemble  $S$  d'ordre  $t \leq \epsilon n$  ait pour nombre chromatique  $\chi(S) \geq 4$ . Cet ensemble contiendrait donc un sous-ensemble minimal  $S'$  vérifiant la même condition. Soit  $v \in S'$ , il existerait donc une 3-coloration de  $S' - v$ , qui pourrait être étendue à  $S'$  dans le cas où  $\deg_S(v) \leq 2$ . Par conséquent, pour tout  $v \in S'$ ,  $\deg_S(v) \geq 3$  et  $S'$  a au moins  $3|S'|/2$  arêtes. La probabilité qu'un tel ensemble existe est inférieure à :

$$\sum_{t \leq \epsilon n} \binom{n}{t} \binom{\binom{t}{2}}{3t/2} \left(\frac{c}{n}\right)^{3t/2}$$

Si  $t = O(1)$ , les termes sont négligeables. Sinon, on majore chaque terme par

$$\left[ \frac{ne}{t} \left(\frac{te}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{c}{n}\right)^{3/2} \right]^t \leq \left[ e^{5/2} 3^{-3/2} c^{3/2} \sqrt{t/n} \right]^t$$

Puisque  $t \leq \epsilon n$  les termes valent au plus  $e^{5/2} 3^{-3/2} c^{3/2} \epsilon^{1/2} \leq 1$  de par la condition sur  $\epsilon$ . La somme totale est  $o(1)$ , et donc presque sûrement il n'existe pas de tel ensemble  $S'$ .  $\square$

### 3.2.2 Lemme local

#### Explication

S'il est clair qu'il existe une probabilité non nulle pour que 100 tirages successifs à 'pile ou face' renvoient tous le même résultat, il est beaucoup plus difficile d'obtenir une conclusion similaire si la loi du  $i$ ème tirage dépend de certains des résultats précédents. Dans une certaine mesure, c'est là tout le sujet du lemme local : démontrer l'existence d'un tirage particulier déterminé par plusieurs tirages aléatoires qui dépendent les uns des autres. Dans sa forme la plus générale, le Lemme Local de Lovász s'énonce de la façon suivante :

**Lemme 1** (Lemme local [8]). *Soient  $A_1, \dots, A_n$  des évènements dans un espace de probabilité. Un graphe dirigé  $D = (V, E)$  sur les sommets  $V = [n]$  est appelé digraphe de dépendance si pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , l'évènement  $A_i$  est mutuellement indépendant des évènements  $\{A_j, ij \notin E\}$ . Soit  $D$  le digraphe de dépendance des évènements  $A_1, \dots, A_n$  et supposons qu'il existe des réels  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $0 \leq x_i < 1$  et*

$$P(A_i) \leq x_i \prod_{ij \in E} (1 - x_j), \forall 1 \leq i \leq n$$

Alors

$$P\left(\bigwedge_{i=1}^n \bar{A}_i\right) > \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

En particulier, avec une probabilité non nulle aucun des évènements  $A_i$  ne se réalise.

Il n'est toutefois que très rarement facile de résoudre cette équation en fonction des variables  $x_i$ , et le lemme local trouve d'autres expressions, plus pratiques mais cependant plus faibles. Citons l'une des plus courantes :

**Lemme 2** (Lemme local (version symétrique)). *Soient  $A_1, \dots, A_n$  des évènements dans un espace de probabilité. Soit  $D$  le digraphe de dépendance des évènements  $A_1, \dots, A_n$ . Si de plus  $\forall i, P(A_i) \leq p$  et  $ep(\Delta(D) + 1) \leq 1$ , alors*

$$P\left(\bigwedge_{i=1}^n \bar{A}_i\right) > 0$$

Avec une probabilité non nulle aucun des évènements  $A_i$  ne se réalise.

#### Exemple

Pour illustrer l'utilisation du lemme local, nous allons démontrer un résultat portant sur la coloration des hypergraphes.

**Définition** (Hypergraphe). L'*hypergraphe* est une généralisation du graphe dans le sens où les arêtes ne sont plus représentées par un trait (une relation binaire), mais

par “quelque chose de plus grand” : une hyper-arête, qui n’est alors plus un ensemble de 2, mais ‘d’au moins un’ élément. Formellement, un *hypergraphe*  $G$  sur un ensemble  $V \neq \emptyset$  est un couple  $G = (V, E)$  où  $E \subseteq 2^V$ . Un *hypergraphe* est appelé  $k$ -uniforme si  $\forall e \in E(H), |e| = k$ . Un graphe est donc un *hypergraphe* 2-uniforme.

On appelle coloration (propre) d’un hypergraphe  $H$  une coloration de ses sommets telle qu’aucune arête n’est monochromatique.

**Proposition.** *Si chaque arête d’un hypergraphe  $k$ -uniforme  $H$  intersecte au plus  $2^{k-3}$  hyperarêtes, alors  $H$  est 2-colorable.*

*Démonstration.* Soient  $n$  le nombre d’arêtes de  $H$  et  $M_1$  (resp.  $M_2, \dots$ ) l’évènement “L’arête 1 est monochromatique” (resp. “L’arête 2 est monochromatique”, ...). Si chaque sommet est coloré de façon équiprobable 0 ou 1, la probabilité qu’une arête soit monochromatique est égale à  $1/2^{k-1}$ . De plus, puisque chaque arête intersecte au plus  $2^{k-3}$  clauses différentes, le digraphe de dépendance associé au problème est de degré maximal  $2^{k-3} - 1$ . Puisque

$$e \frac{1}{2^{k-1}} 2^{k-3} = e/4 \leq 1$$

le Lemme Local affirme que

$$P\left(\bigwedge_{i=1}^n \bar{M}_i\right) > 0$$

Et  $H$  est donc 2-colorable. □



# 4 Choississabilité impropre des graphes planaires

## 4.1 Présentation

Le résultat le plus célèbre de la théorie des graphes est indiscutablement le Théorème des quatre couleurs, qui s'énonce de la façon suivante :

**Théorème** (des 4 couleurs [3] [4]). *Les graphes planaires sont 4-colorables.*

Ce résultat établi, des recherches se sont ensuite orientées vers l'étude (en particulier pour les graphes planaires) de renforcements ou d'affaiblissements de la notion de coloration. En 1979, Erdős, Rubin et Taylor formulent les deux conjectures suivantes [10] :

- Il existe des graphes planaires qui ne sont pas 4-choississables
- Les graphes planaires sont 5-choississables

Ces conjectures ont depuis été démontrées. La première preuve, parue en 1993, est de Margit Voigt et exhibe une famille de graphes planaires qui ne sont pas 3-colorables (le plus petit compte tout de même 238 sommets!) [23]. La seconde, de Carsten Thomassen, prouve la relation  $ch(\mathcal{P}) = 5$  [20].

De façon indépendante, R.Škrekovski [18] et N.Eaton et T.Hull [6] ont prouvé en 1999 la relation  $ch_2(\mathcal{P}) = 3$ , mais aussi qu'il existait pour tout  $k$  des graphes planaires qui ne sont pas  $k$ -improprement 2-colorables. Au-delà de 2, il est donc inutile d'augmenter l'impropreté pour tenter de réduire le nombre de couleurs.

Sachant que de plus il existe des graphes planaires qui ne sont pas 1-improprement 3-choississables, on obtient les résultats rassemblés dans la Fig.4.1.

Dans les mêmes articles de 1999, R.Škrekovski, N.Eaton et T.Hull ont de plus conjecturé  $ch(\mathcal{P}) = 4$ . Des résultats partiels ont d'ailleurs été obtenus par R.Škrekovski la même année, puisqu'il démontre que les graphes planaires de maille supérieure à 4 (c'est-à-dire sans 3-cycle) sont 1-improprement 3-choississables [17].

Sur le chemin de la coloration impropre, un autre cas reste à étudier : la 2-coloration. On sait en effet qu'il n'existe pas d'entier  $k$  tel que tous les graphes

Impropreté	Choissabilité
0	5
1	4 ou 5
$\geq 2$	3

FIG. 4.1 – Choissabilité impropre des graphes planaires

planaires soient  $k$ -improprement 2-colorables, mais il serait agréable d'obtenir une caractérisation de ceux des graphes planaires qui sont  $k$ -improprement 2-colorables.

Le cas des graphes outerplanaires est complètement résolu puisque deux résultats concernant la 2-choissabilité de ces graphes sont publiés en 1999 par Eaton et Hull :

**Proposition.** (*N.Eaton et T.Hull [6]*) *Les graphes outerplanaires sont 2-improprement 2-choissables*

Ce résultat est ensuite renforcé dans un cas particulier :

**Proposition.** (*N.Eaton et T.Hull [6]*) *Les graphes outerplanaires triangle-free sont 1-improprement 2-choissables*

La 2-coloration  $k$ -impropre des graphes planaires à été étudiée en fonction de la maille par R.Škrekovski dans deux articles de 1999 [17] [18] dont voici les résultats principaux :

**Définition.** *On note  $g_d^1$  (resp.  $g_d^2$ ) les deux entiers tels que tout graphe planaire de maille supérieure ou égale à  $g_d^1$  (resp.  $g_d^2$ ) est  $d$ -improprement 2-colorable (resp.  $d$ -improprement 2-choissable). Ces valeurs sont possiblement infinies.*

**Proposition.** (*R.Škrekovski [18]*)  $6 \leq g_1^1 \leq g_1^2 \leq 12$  et  $5 \leq g_d^1 \leq g_d^2 \leq 8$  pour  $d \geq 2$ .

Ces résultats sont améliorés dans le second article

**Proposition.** (*R.Škrekovski [17]*)  $6 \leq g_1^1 \leq g_1^2 \leq 9$ ,  $5 \leq g_2^1 \leq g_2^2 \leq 7$ ,  $5 \leq g_3^1 \leq g_3^2 \leq 6$ , et  $g_d^1 = g_d^2 = 5$  pour  $d \geq 4$ .

Dans un article de 2004, F. Havet et J-S. Sereni améliorent ces résultats pour la coloration 1-impropre et 2-impropre, en utilisant pour cela une méthode de déchargement basée le Mad :

**Proposition.** (*F. Havet et J-S. Sereni [12]*)  $6 \leq g_1^1 \leq g_1^2 \leq 8$  et  $5 \leq g_2^1 \leq g_2^2 \leq 6$



## 4.2 Une version duale

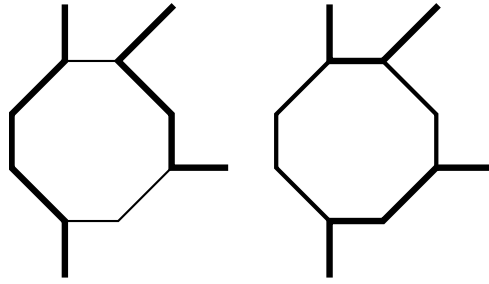
Les graphes qui sont 2-colorables sont précisément les graphes bipartis. De façon équivalente, un graphe est biparti si et seulement s'il possède une bipartition en deux ensembles stables. De ce point de vue, on peut dire que les graphes  $k$ -improprement 2-colorable sont 'presque bipartis', c'est à dire qu'ils possèdent une bipartition  $V = V_1 \sqcup V_2$  de l'ensemble de leurs sommets telle que les graphes  $G[V_1]$  et  $G[V_2]$  sont de degré maximal  $k$ . De plus, si dans le cas général les graphes bipartis sont de façon équivalente ceux qui ne possèdent pas de cycle de longueur impaire, dans le cas planaire être biparti est équivalent à n'avoir que des faces de degré pair.

Lorsqu'entre deux faces impaires partageant une arête  $e$ , on supprime du graphe cette arête, on obtient une nouvelle face de degré – cette fois – paire. On cherche donc par ce biais à faire fusionner deux faces impaires, potentiellement éloignées l'une de l'autre, par la suppression successive d'arêtes de certaines faces situées sur un chemin entre les deux faces impaires. Dans le graphe dual, ceci revient à trouver pour deux sommets de degré impair un chemin défini par ses arêtes rejoignant l'un à l'autre.

Pour colorier un graphe planaire  $G$ , on observe donc son dual  $G^*$ , et on cherche à créer des "path-matching" entre les points impairs. Ce problème a déjà été étudié sous le nom de "Edge Disjoint Paths", mais sous deux contraintes différentes :

1. Dans le problème dit EDP, on cherche à coupler des points en imposant les couples, ce qui n'est pas le cas ici. De plus, on cherche ici à coupler tous les sommets de degré impair, et pas un ensemble arbitraire.
2. Le problème EDP vise à minimiser la somme de la longueur des chemins, ce qui n'a ici pas de sens. On cherche à minimiser une autre notion : soit  $\mathcal{F}$  une famille de chemins répondant à la description précédente. On peut lui associer un entier  $imp(\mathcal{F}) = k$ , égal au nombre maximal d'arêtes appartenant à  $\mathcal{F}$  situées sur une même face de  $G^*$  (pour une représentation définie de ce graphe)

La borne de Lovász pour l'impropreté d'une 2-coloration est :  $k \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$ . On la retrouve de la façon suivante par cette construction : soit une famille  $\mathcal{F}$  qui minimise non pas l'impropreté définie plus haut, mais la somme des arêtes impropres. On considère une face telle que plus de la moitié des arêtes de sa frontière sont prises par des chemins de la famille  $\mathcal{F}$ . On procède alors pour toutes les arêtes de la face à une 'inversion', pour obtenir de nouveaux d'autres chemins ( on a échangé les extrémités de chacun ). On obtient donc une famille utilisant strictement moins d'arêtes impropres, ce qui est absurde.



C'est de cette opération d'inversion qu'il est question. Soit  $\mathcal{F}$  une famille de chemins potentielle, et  $\mathcal{F}_{min}$  une famille d'impropreté minimale. Le graphe  $(\cup \mathcal{F}) \Delta (\cup \mathcal{F}_{min})$  ne contient que des points de degré pair, il s'agit donc d'une union de cycles disjoints ( on parle ici de cycle au sens des arêtes : un cycle peut passer plusieurs fois par le même sommet, mais une seule fois par une arête ). On peut donc passer d'une famille quelconque à une famille optimale en opérant une inversion sur un ensemble de cycles disjoints.

# 5 Linear L-coloring

## 5.1 Introduction

La notion de coloration acyclique à été introduite par Grünbaum en 1973 [13] : une coloration  $c$  d'un graphe  $G$  est dite acyclique si elle est propre et si le graphe  $G$  ne contient pas de cycle bicoloré (le sous-graphe induit par l'union de deux couleurs ne contient pas de cycle).

D'autre part, une coloration  $c$  de  $G$  telle que  $\forall v \in V(G)$ , aucune couleur n'apparaît plus  $k$  fois dans le voisinage de  $v$  est appelée  $k$ -frugale. La notion de frugalité à été introduite par Hind, Molloy, et Reed en 1997 [14].

Yuster combina ces deux notions en 1998 [24], en introduisant le concept de coloration linéaire, qui est une coloration acyclique et 2-frugale. On peut aussi la voir comme une coloration telle que le sous-graphe induit par l'union de deux couleurs est une forêt de chemins. Cet article établit que le nombre de couleurs nécessaires pour colorier linéairement un graphe de degré maximal  $\Delta$  est inférieur à  $\lceil \max(50\Delta^{4/3}, 10\Delta^{3/2}) \rceil$ , utilisant pour cela la méthode probabiliste dans sa version développée en 1991 par N. Alon, C. J. H. McDiarmid, et B. Reed [1].

Ces concepts peuvent naturellement être généralisés à la coloration par liste. On notera donc pour tout graphe  $G$  :

$$\Lambda^l(G) = \min\{k \mid G \text{ est linéairement } k\text{-choisissable}\}$$

de même que

$$\Phi_2^l(G) = \min\{k \mid G \text{ est 2-frugalement } k\text{-choisissable}\}$$

Dans un article de 2007, Louis Esperet, Mickaël Montassier, et André Raspaud démontrent les résultats suivants sur la coloration linéaire par liste :

**Theorème 3** (Louis Esperet, Mickaël Montassier, et André Raspaud [11]). *Soit  $G$  un graphe de degré maximum  $\Delta$ .*

1. Si  $\Delta \geq 3$  et  $Mad(G) < \frac{16}{7}$ , alors  $\Lambda^l(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ .
2. Si  $Mad(G) < \frac{5}{2}$ , alors  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 2$ .

3. Si  $\text{Mad}(G) < \frac{8}{3}$ , alors  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3$ .

La méthode de déchargement est utilisée dans la preuve de ces 3 résultats. Le premier d'entre eux est moralement l'inégalité  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ , qui devient une égalité puisque  $\Lambda^l(G) \geq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$  pour tout graphe. En effet, tout sommet de degré  $\Delta$  possède au minimum  $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$  couleurs distinctes dans son voisinage (à cause de la 3-frugalité), et doit lui-même avoir une couleur différente (+1).

Dans le cas plus particulier des graphes planaires, A.Raspaud et W.Wang obtiennent des résultats renforcés [16] :

**Theorème 4** (A.Raspaud, W.Wang [16]). *Tout graphe planaire  $G$  vérifie  $\Lambda^l(G) = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$  si l'une des quatre conditions suivantes est respectée :*

1. Si  $\Delta(G) \geq 13$  et  $g(G) \geq 7$
2. Si  $\Delta(G) \geq 7$  et  $g(G) \geq 9$
3. Si  $\Delta(G) \geq 5$  et  $g(G) \geq 11$
4. Si  $\Delta(G) \geq 3$  et  $g(G) \geq 13$

**Theorème 5** (A.Raspaud, W.Wang [16]). *Soit  $G$  un graphe planaire :*

1. Si  $g(G) \geq 6$ , alors  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 4$
2. Si  $g(G) \geq 5$ , alors  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 14$

En utilisant la méthode du déchargement et en allant plus loin dans l'étude de configurations interdites, il nous a été possible d'améliorer certains des résultats de [11] et d'en obtenir de plus fins dans des cas particuliers. Les résultats publiés par A.Raspaud et W.Wang et portant sur les graphes planaires ont de plus permis d'établir une relation similaire dans les graphes généraux, toujours à l'aide du Mad.

*Le texte qui suit ayant été rédigé de façon à constituer un article, il est ici rapporté en anglais.*

## 5.2 Results

In this article, we show the following.

**Theorème 6.** *Let  $G$  be a graph with maximum degree (at most)  $\Delta$  :*

1. If  $\Delta \geq 5$  and  $\text{mad}(G) < \frac{12}{5}$ , then  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ .
2. If  $\Delta \geq 7$  and  $\text{mad}(G) < \frac{48}{19} \approx 2.526$ , then  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ .

3. If  $\Delta \geq 13$  and  $\text{mad}(G) < \frac{39}{14} \approx 2.785$ , then  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ .
4. If  $\Delta \geq 5$  and  $\text{mad}(G) < \frac{60}{23} \approx 2.60869$ , then  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 2$ .
5. If  $\text{mad}(G) < \frac{14}{5}$ , then  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3$ .
6. If  $\text{mad}(G) < 3$ . Then  $\Lambda^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 4$ .

We also investigate 2-frugal choosability of graphs with small maximum average degree.

**Theorème 7.** *Let  $G$  be a graph with maximum degree (at most)  $\Delta$  :*

1. If  $\Delta \geq 7$  and  $\text{mad}(G) < \frac{5}{2}$ , then  $\Phi_2^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ .
2. If  $\text{mad}(G) < 3$ , then  $\Phi_2^l(G) \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3$ .

The proofs of these two theorems are similar. We consider a graph which is  $k$ -linear or  $k$ -frugal minimal for the appropriate  $k$ . A graph  $H$  is  $k$ -frugal-minimal (resp.  $k$ -linear-minimal, if it is not 2-frugally  $k$ -choosable (resp. linear  $k$ -choosable) and each of its proper subgraphs is. We first show Section 5.3 that some configurations called *reducible* may not appear in such a graph. We then use in Section 5.4 the discharging method to show that under the assumptions of the theorem no subgraph of  $G$  may be  $k$ -minimal so proving that  $G$  is linearly or frugally  $k$ -colorable.

## 5.3 Reducible configurations

Before establishing some lemmas, let us define some useful notions.

Let  $k$  be a non-negative integer.

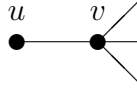
A  $k$ -vertex (resp.  $(\geq k)$ -vertex,  $(\leq k)$ -vertex) is a vertex of degree exactly  $k$  (resp. at least  $k$ , at most  $k$ ).

A  $k$ -thread in a graph  $G$  is an induced path of  $G$  of length (number of edges)  $k + 1$ . In other words, it is a path of length  $k + 1$  whose internal vertices have degree 2. We call  $(p_1, \dots, p_k)$ -vertex a  $k$ -vertex whose  $k$  incident threads  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  have respective length  $p_i + 1$ .

Note that a  $k$ -frugal-minimal or  $k$ -linear-minimal graph is connected and in particular has no 0-vertex. We will sometimes use this easy fact without referring explicitly to it.

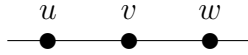
### 5.3.1 Linear coloring

**Lemme 3.** *Let  $H$  be a  $k$ -linear-minimal graph. If  $k \geq \left\lceil \frac{\Delta(H)}{2} \right\rceil + 1$ , then  $H$  has no 1-vertex.*



*Démonstration.* Suppose by way of contradiction that  $H$  contains a 1-vertex  $u$ . Let  $c$  be a linear  $L$ -coloring of  $H - u$ . We now extend  $c$  to  $u$  : the neighbour  $v$  of  $u$  forbids one color ; we also have to preserve the 2-frugality of  $v$  : among its  $d$  already colored neighbours ( $d \leq \Delta - 1$ ), there are at most  $\lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor$  pairs of vertices having the same color. At most  $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$  colors in total are forbidden to  $u$ . Thus  $u$  can be colored with a remaining color in its list  $L(u)$ , and the coloring obtained is a linear  $L$ -coloring of  $H$ , which is a contradiction.  $\square$

**Lemme 4.** *Let  $k \geq 3$ . A  $k$ -linear-minimal graph  $H$  contains no 3-thread.*



*Démonstration.* If  $H$  contains a 2-vertex  $v$  adjacent to two 2-vertices  $u$  and  $w$ , we linearly  $L$ -color the graph  $H - v$  (it is possible by the minimality of  $H$ ). If  $u$  and  $w$  have distinct colors, we assign  $v$  a color distinct from the colors of its neighbours, and it is impossible to create a bicolored cycle. If  $u$  and  $w$  have the same color, we forbid it to  $v$ , as well as the color of the second neighbour of  $u$ . This prevent the creation of any bicolored cycle. There are at most two forbidden colors, and this enables us to color  $v$  since  $k \geq 3$ , which leads to a contradiction.  $\square$

**Lemme 5.** *Let  $k \geq 4$ . A  $k$ -linear-minimal graph  $H$  contains no 3-vertex incident to a 2-thread.*

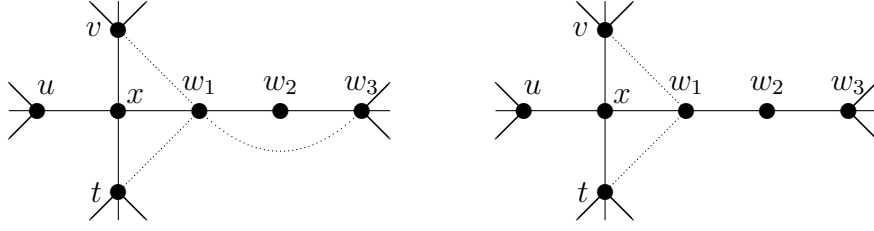


*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists a linear  $L$ -coloring  $c$  of  $H \setminus v$ . We now color  $v$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. If  $c(u_1) = c(u_2)$ , we color  $v$  with  $c(v) \in L(v) \setminus \{c(u), c(w), c(u_1)\}$ . There can be no bicolored cycle, as  $c(v)$  is different from both  $c(u_1)$  and  $c(u_2)$ , and the 2-frugality of  $u$  is preserved.
2. If  $c(u_1) \neq c(u_2)$ , we color  $v$  with  $c(v) \in L(v) \setminus \{c(u), c(w), c(x)\}$ . There can be no bicolored cycle, as  $c(v)$  is different from  $c(x)$ , and  $u$  is 2-frugal.

$\square$

**Lemme 6.** *Let  $k \geq 5$ . In a  $k$ -linear-minimal graph, no 4-vertex is incident to a 2-thread.*

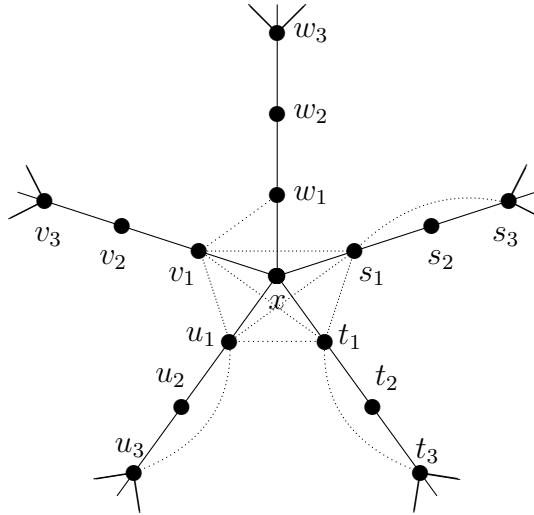


*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a linear  $L$ -coloring of  $H \setminus \{w_1\}$ . We will now color  $w_1$  to extend this linear  $L$ -coloring :

- If  $c(w_2) = c(x)$ , then we color  $c(w_1)$  with  $c(w_1) \in L(w_1) \setminus \{c(x), c(w_3), c(v), c(t)\}$ . There can be no bicolored cycle as  $c(w_1) \neq c(w_3)$ , and the 2-frugality of  $x$  is preserved.
- If  $c(w_2) \neq c(x)$ , then we color  $c(w_1)$  with  $c(w_1) \in L(w_1) \setminus \{c(x), c(w_2), c(v), c(t)\}$ . There can be no bicolored cycle as  $c(w_2) \neq c(x)$ , and the 2-frugality of  $x$  is preserved.

□

**Lemme 7.** *If  $H$  is  $k$ -linear-minimal,  $k \geq 5$ , it does not contain a 5-vertex adjacent to five 2-threads.*



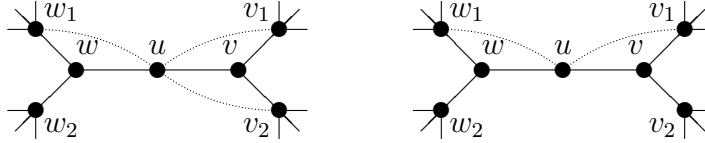
*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a linear  $L$ -coloring of  $H \setminus \{x, s_1, t_1, u_1, v_1, w_1\}$ . We will now color  $x, s_1, t_1, u_1, v_1$ , and  $w_1$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. We color  $s_1$  with  $c(s_1) \in L(s_1) \setminus \{c(s_2), c(s_3)\}$
2. We color  $t_1$  with  $c(t_1) \in L(t_1) \setminus \{c(t_2), c(t_3), c(s_1)\}$
3. We color  $u_1$  with  $c(u_1) \in L(u_1) \setminus \{c(u_2), c(u_3), c(s_1), c(t_1)\}$

4. We color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1) \setminus \{c(v_2), c(u_1), c(t_1), c(s_1)\}$
5. We color  $x$  with  $c(x) \in L(x) \setminus \{c(s_1), c(t_1), c(u_1), c(v_1)\}$
6. We color  $w$  with  $c(w) \in L(w) \setminus \{c(w_2), c(x), c(v_1)\}$

The 2-frugality of  $x$  is preserved as 4 colors appear on the vertices  $s_1, t_1, u_1, v_1$ , and there can be no cycles going through  $s_1s_3, t_1t_3$ , or  $u_1u_3$ , and none through  $w_1v_1$ .  $\square$

**Lemme 8.** *Let  $k \geq 5$ . In a  $k$ -linear-minimal graph  $H$ , a 2-vertex has at most one 3-neighbour.*

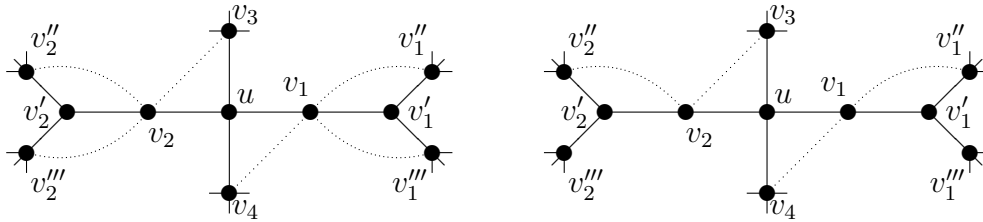


*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a linear  $L$ -coloring of  $H \setminus \{u\}$ . We will now color  $u$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. If  $c(v) = c(w)$ , we color  $u$  with  $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v), c(v_1), c(v_2), c(w_1)\}$ , to prevent the formation of a bicolored cycle and preserve  $w$ 's and  $v$ 's 2-frugality.
2. If  $c(v) \neq c(w)$ , we color  $u$  with  $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v), c(v_1), c(w_1), c(w)\}$ , to preserve  $w$ 's and  $v$ 's 2-frugality (there can be no bicolored cycles as  $c(v) \neq c(w)$ ).

$\square$

**Lemme 9.** *Let  $k \geq 5$ . In a  $k$ -linear-minimal graph  $H$ , a 4-vertex is not adjacent to two 2-vertices having each a 3-neighbour.*



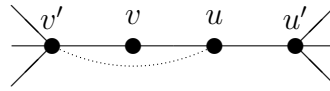
*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a linear  $L$ -coloring of  $H \setminus \{v_1, v_2\}$ . We will now color  $v_1$  and  $v_2$  to extend this linear  $L$ -coloring :



1. If  $c(v'_1) = c(u)$ , we color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1) \setminus \{c(u), c(v''_1), c(v'''_1), c(v_4)\}$ . There can be no cycle through  $v_1$  as it is different from both  $v''_1$  and  $v'''_1$ , and the 2-frugality of  $v'_1$  is preserved.
2. If  $c(v'_1) \neq c(u)$ , we color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1) \setminus \{c(u), c(v'_1), c(v''_1), c(v_4)\}$ . There can be no cycle through  $v_1$  as  $c(v'_1) \neq c(u)$ , and the 2-frugality of  $v'_1$  is preserved.

Using symmetry, we color  $v_2$  with the same rules, replacing  $v_4$  by  $v_3$ . This way,  $u$ 's 2-frugality is assured as  $c(v_4) \neq c(v_1)$  and  $c(v_3) \neq c(v_2)$   $\square$

**Lemme 10.** *If  $H$  is  $(\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 2)$ -linear-minimal, it does not have adjacent 2-vertices*

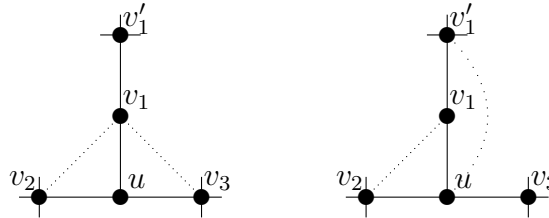


*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a linear  $L$ -coloring of  $H \setminus \{u\}$ . We will now color  $u$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. If  $c(u') = c(v)$ , we color  $u$  with  $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v), c(v')\}$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $u'$ . There can be no bicolored cycle as  $c(u) \neq c(v')$
2. If  $c(u') \neq c(v)$ , we color  $u$  with  $c(u) \in L(u) \setminus \{c(u'), c(v)\}$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $u'$ . There can be no bicolored cycle as  $c(u') \neq c(v)$

Then  $H$  is linearly  $L$ -colorable – contradiction.  $\square$

**Lemme 11.** *If  $H$  is  $(\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3)$ -linear-minimal, it does not have any 3-vertex adjacent to a 2-vertex.*



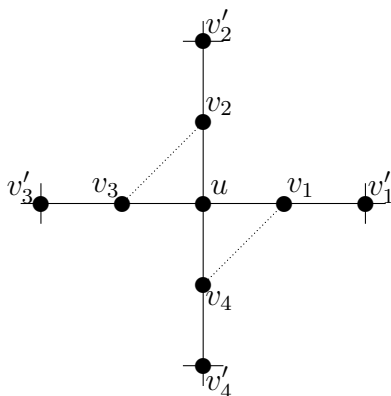
*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a linear  $L$ -coloring of  $H \setminus v_1$ .

1. If  $c(u) = c(v'_1)$ , we color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1)$  such that  $c(v_1)$  is different from  $c(u)$ , the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_1$  (at most  $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil - 1$ ), in order to preserve its 2-frugality, and the two vertices  $c(v_2)$  and  $c(v_3)$  to prevent the apparition of bicolored cycles.

2. If  $c(u) \neq c(v'_1)$ , we color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1)$  such that  $c(v_1)$  is different from  $c(u), c(v'_1)$ , the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_1$  (at most  $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil - 1$ ), in order to preserve its 2-frugality, and  $c(v_2)$  to preserve  $u$ 's 2-frugality. There can be no bicolored cycles as  $c(u) \neq c(v'_1)$ .

In both cases,  $H$  is linearly  $L$ -colorable – contradiction.  $\square$

**Lemme 12.** *If  $H$  is  $(\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3)$ -linear-minimal, it does not have any 4-vertex adjacent to four 2-vertices.*

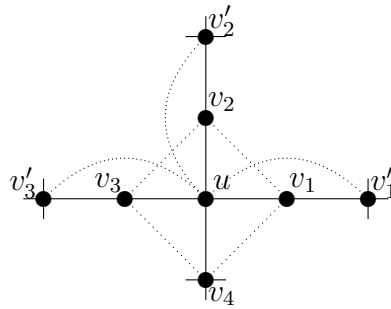


*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a linear  $L$ -coloring of  $H \setminus \{u, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . We will now color  $u, v_1, v_2, v_3$  and  $v_4$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. We color  $u$  with  $c(u) \in L(u)$  such that  $c(u)$  is different  $c(v'_1), c(v'_2), c(v'_3)$ , and  $c(v'_4)$ , to prevent the apparition of bicolored cycles.
2. We color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1)$  different from  $c(u), c(v'_1)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_1$ .
3. We color  $v_2$  with  $c(v_2) \in L(v_2)$  different from  $c(u), c(v'_2)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_2$ .
4. We color  $v_3$  with  $c(v_3) \in L(v_3)$  different from  $c(u), c(v'_3), c(v_2)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_3$ .
5. We color  $v_4$  with  $c(v_4) \in L(v_4)$  different from  $c(u), c(v'_4), c(v_1)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_4$ .

There can be no bicolored cycle with this coloring of  $H$ , and  $u$ 's 2-frugality is assured, as 3 vertices among  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  cannot share the same color. Then  $H$  is linearly  $L$ -colorable – contradiction.  $\square$

**Lemme 13.** *If  $H$  is  $(\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 4)$ -linear-minimal, it does not have any 4-vertex adjacent to three 2-vertices.*

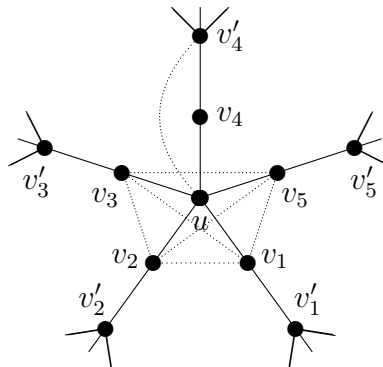


*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a linear  $L$ -coloring of  $H \setminus \{u, v_1, v_2, v_3\}$ . We will now color  $u, v_1, v_2$ , and  $v_3$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. We color  $u$  with  $c(u) \in L(u)$  such that  $c(u)$  is different  $c(v_4), c(v'_1), c(v'_2), c(v'_3)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v_4$ .
2. We color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1)$  different from  $c(u), c(v'_1), c(v_4)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_1$ .
3. We color  $v_3$  with  $c(v_3) \in L(v_3)$  different from  $c(u), c(v'_3), c(v_4)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_3$ .
4. We color  $v_2$  with  $c(v_2) \in L(v_2)$  different from  $c(u), c(v'_2), c(v_3), c(v_1)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_2$ .

There can be no bicolored cycle with this coloring of  $H$ , as there can be no bicolored cycle using the central vertex :  $c(u)$  is different from  $c(v'_1), c(v'_2)$ , and  $c(v'_3)$ . Besides,  $u$ 's 2-frugality is assured, as 3 vertices among  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  cannot share the same color. Then  $H$  is linearly  $L$ -colorable – contradiction.  $\square$

**Lemme 14.** *If  $H$  is  $\max(6, \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 4)$ -linear-minimal, it does not have any 5-vertex adjacent to five 2-vertices.*



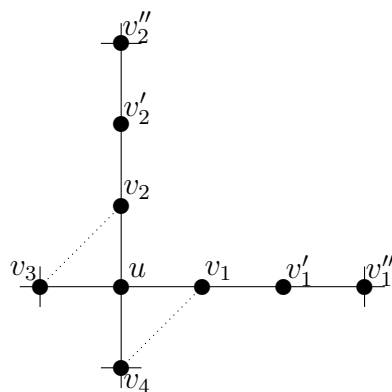
*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a linear  $L$ -coloring of  $H \setminus \{u, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . We will now color  $u, v_1, v_2, v_3, v_4$  and  $v_5$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. We color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1)$  different from  $c(v'_1)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_1$ .
2. We color  $v_2$  with  $c(v_2) \in L(v_2)$  different from  $c(v'_2), c(v_1)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_2$ .
3. We color  $v_3$  with  $c(v_3) \in L(v_3)$  different from  $c(v'_3), c(v_1), c(v_2)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_3$ .
4. We color  $v_5$  with  $c(v_5) \in L(v_5)$  different from  $c(v'_5), c(v_1), c(v_2), c(v_3)$  and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_5$ .
5. We color  $u$  with  $c(u) \in L(u)$  different from  $c(v_1), c(v_2), c(v_3), c(v_5)$ , and  $c(v'_4)$ .
6. We color  $v_4$  with  $c(v_4) \in L(v_4)$  different from  $c(v'_4), c(u)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_4$ .

There can be no bicolored cycle with this coloring of  $H$ , as (first) there can be no bicolored cycle using  $v'_4$  ( $c(v'_4)$  is different  $c(u)$ ). Secondly, there can be no bicolored cycle using both  $v_i$  and  $v_j$ ,  $i < j$  and  $i, j \in \{1, 2, 3, 5\}$  as  $c(v_1), c(v_2), c(v_3)$ , and  $c(v_5)$  are all pairwise different. For the same reason,  $u$ 's 2-frugality is assured. Then  $H$  is linearly  $L$ -colorable – contradiction.  $\square$

### 5.3.2 2-frugal coloring

**Lemme 15.** *If  $H$  is 4-frugal-minimal, it does not have any 4-vertex adjacent to two 2-threads.*

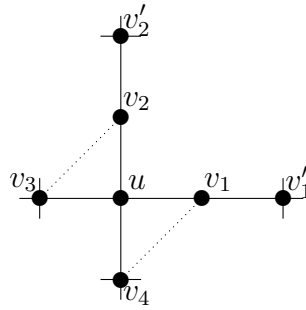


*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a 2-frugal  $L$ -coloring of  $H \setminus \{v_1, v_2\}$ . We will now color  $v_1$ , and  $v_2$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. We color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1)$  different from  $c(u), c(v_4), c(v'_1)$ .
2. We color  $v_2$  with  $c(v_2) \in L(v_2)$  different from  $c(u), c(v_3), c(v'_2)$ .

$u$  is 2-frugal, given that  $c(v_1) \neq c(v_4)$  and  $c(v_2) \neq c(v_3)$ . Then  $H$  is 2-frugally  $L$ -colorable – contradiction.  $\square$

**Lemme 16.** *In a  $(\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3)$ -frugal-minimal graph  $H$ , a 4-vertex has at most one 2-neighbour.*

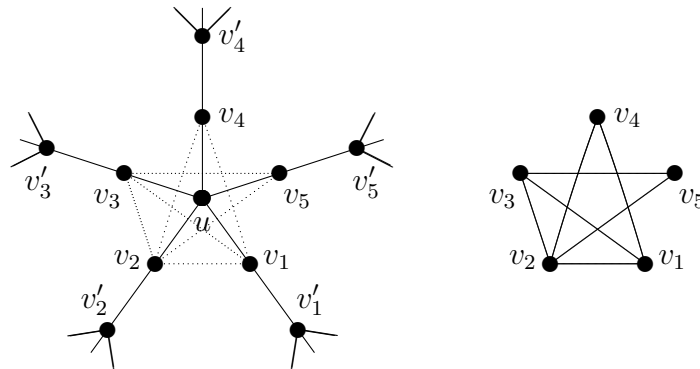


*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a 2-frugal  $L$ -coloring of  $H \setminus \{v_1, v_2\}$ . We will now color  $v_1$ , and  $v_2$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. We color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1)$  different from  $c(u), c(v_4), c(v'_1)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_1$ .
2. We color  $v_2$  with  $c(v_2) \in L(v_2)$  different from  $c(u), c(v_3), c(v'_2)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_2$ .

$u$  is 2-frugal, given that  $c(v_1) \neq c(v_4)$  and  $c(v_2) \neq c(v_3)$ . Then  $H$  is 2-frugally  $L$ -colorable – contradiction.  $\square$

**Lemme 17.** *If  $H$  is  $\max(6, \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3)$ -frugal-minimal, it does not have any 5-vertex adjacent to five 2-vertices.*



*Démonstration.* If there is such a configuration, by the minimality of  $H$  there exists  $c$  a 2-frugal  $L$ -coloring of  $H \setminus \{u, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . We will now color  $u, v_1, v_2, v_3, v_4$  and  $v_5$  to extend this linear  $L$ -coloring :

1. We color  $v_1$  with  $c(v_1) \in L(v_1)$  different from  $c(v'_1)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_1$ .
2. We color  $v_2$  with  $c(v_2) \in L(v_2)$  different from  $c(v'_2), c(v_1)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_2$ .
3. We color  $v_3$  with  $c(v_3) \in L(v_3)$  different from  $c(v'_3), c(v_1), c(v_2)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_3$ .
4. We color  $v_4$  with  $c(v_4) \in L(v_4)$  different from  $c(v'_4), c(v_1), c(v_2)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_4$ .
5. We color  $v_5$  with  $c(v_5) \in L(v_5)$  different from  $c(v'_5), c(v_2), c(v_3)$ , and the colors appearing twice in the neighbourhood of  $v'_5$ .
6. We color  $u$  with  $c(u) \in L(u)$  different from  $c(v_1), c(v_2), c(v_3), c(v_4)$ , and  $c(v_5)$ .

Each vertex's color having been chosen different from its neighbours', we only have to check  $u$ 's 2-frugality, which is preserved as no three vertices of  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  can share the same color (there is no stable 3-set on the second picture). Then  $H$  is 2-frugal  $L$ -colorable – contradiction.  $\square$

## 5.4 Proofs

### 5.4.1 Linear coloring

In this subsection we prove Theorem 6.

1. Let us first prove the first assertion of this theorem. Let  $G$  be a graph with maximum degree  $\Delta \geq 5$  such that  $Mad(G) < \frac{12}{5}$ . Set  $k_1 = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ . Suppose by way of contradiction that  $\Lambda^l(G) > k_1$ . Then  $G$  has a subgraph  $H$  which is  $k_1$ -linear-minimal.

Let us assign to every vertex of  $H$  an initial charge  $w(v) = d_H(v)$ . Then  $\sum_{v \in V(H)} w(v) = \sum_{v \in V(H)} d(v) = Ad(H) \cdot |V(H)|$ . We now apply the following discharging rules.

**Rule 1.** A 3-vertex sends  $\frac{1}{5}$  to each of its 2-neighbours.

**Rule 2.** A ( $\geq 4$ )-vertex sends  $\frac{2}{5}$  to each of its 2-neighbours.

Let us now prove that the final charge  $w^*(v)$  of every vertex  $v$  of  $H$  is at least  $\frac{12}{5}$ .

As there are no  $(\leq 1)$ -vertices by Lemma 3), let us examine the final charge of a  $(\geq 2)$ -vertex  $v$ .

- If  $v$  is a 2-vertex then by Lemmas 4 and 5 it has either two 3-neighbours or a  $(\geq 4)$ -neighbour. In each case it receives at least  $2/5$  and thus  $w^*(v) \geq 2 + 2/5 = 12/5$ .
- If  $v$  is a 3-vertex it sends at most  $3/5$  ( $1/5$  to each neighbour). o  $w^*(v) \geq 3 - 3/5 = 12/5$ .
- If  $v$  is a  $k$ -vertex with  $k \geq 4$ , it sends at most  $2/5$  to each neighbour. Thus  $w^*(v) \geq k - 2k/5 \geq 12/5$ .

Therefore

$$Ad(H) = \frac{\sum_{v \in V(H)} w(v)}{|V(H)|} = \frac{\sum_{v \in V(H)} w^*(v)}{|V(H)|} \geq \frac{12}{5}$$

which contradicts  $Mad(G) < \frac{12}{5}$ .

2. Let  $G$  be a graph with maximum degree  $\Delta \geq 7$  such that  $Mad(G) < \frac{48}{19}$ . Set  $k_1 = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ . Suppose by way of contradiction that  $\Lambda^l(G) > k_1$ . Then  $G$  has a subgraph  $H$  which is  $k_1$ -linear-minimal.

Let us assign to every vertex of  $H$  an initial charge  $w(v) = d_H(v)$  and apply the following discharging rules.

**Rule 1.** A 3-vertex sends  $\frac{3}{19}$  to each of its 2-neighbours.

**Rule 2.** A  $(\geq 4)$ -vertex sends  $\frac{10}{19}$  to its 2-neighbours which are in a 2-thread and  $\frac{7}{19}$  to the other 2-neighbours. .

Let us now prove that the final charge  $w^*(v)$  of every vertex  $v$  of  $H$  is at least  $\frac{48}{19}$ . Again there are no  $(\leq 1)$ -vertices by Lemma 3.

- Suppose that  $v$  is a 2-vertex. Then by Lemma 4 it has at most one 2-neighbour. If  $v$  has one 2-neighbour then, by Lemma 5, it has a  $(\geq 4)$ -neighbour from which it receives  $10/19$ . Hence  $w^*(v) = 2 + 10/19 = 48/19$ . If  $v$  has no 2-neighbour then, by Lemma 8, it has a  $(\geq 4)$ -neighbour from which it receives  $7/19$ . Its other neighbour is a  $(\geq 3)$ -neighbour sending at least  $3/19$ . Hence  $w^*(v) \geq 2 + 7/19 + 3/19 = 48/19$ .
- If  $v$  is a 3-vertex it sends at most  $3/19$  to each neighbour. So  $w^*(v) \geq 3 - 9/19 = 48/19$ .
- If  $v$  is a 4-vertex then by Lemma 6, it is incident to no 2-thread. Hence  $w^*(v) \geq 4 - 4 \times \frac{7}{19} = 48/19$ .
- If  $v$  is a 5-vertex then by Lemma 7, it is incident to at most four 2-thread. Hence  $w^*(v) \geq 5 - 4 \times \frac{10}{19} - \frac{7}{19} = \frac{48}{19}$ .

- If  $v$  is a  $k$ -vertex with  $k \geq 6$ , it sends at most  $10/19$  to each neighbour. Thus  $w^*(v) \geq k - 10k/19 \geq \frac{54}{19}$ .

Hence  $Ad(H) \geq \frac{48}{19}$ . This contradicts  $Mad(G) < 48/19$ .

3. Let  $G$  be a graph with maximum degree  $\Delta \geq 13$  such that  $Mad(G) < \frac{39}{14}$ . Set  $k_1 = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ . Suppose by way of contradiction that  $\Lambda^l(G) > k_1$ . Then  $G$  has a subgraph  $H$  which is  $k_1$ -linear-minimal.

Let us assign to every vertex of  $H$  an initial charge  $w(v) = d_H(v)$ . Then  $\sum_{v \in V(H)} w(v) = \sum_{v \in V(H)} d(v) = Ad(H) \cdot |V(H)|$ . We now apply the following discharging rules.

**Rule 1.** A 3-vertex sends  $\frac{3}{77}$  to each of its 2-neighbours.

**Rule 2.** A 4-vertex sends  $\frac{17}{56}$  to each of its 2-neighbours.

**Rule 3.** A  $k$ -vertex,  $5 \leq k \leq 8$ , sends  $\frac{11}{28}$  to each of its 2-neighbours.

**Rule 4.** A  $k$ -vertex,  $9 \leq k \leq 10$ , sends  $\frac{27}{56}$  to each of its 2-neighbours.

**Rule 5.** A  $k$ -vertex,  $11 \leq k \leq 12$ , sends  $\frac{115}{154}$  to each of its 2-neighbours.

**Rule 6.** A  $\geq 13$ -vertex, sends  $\frac{11}{14}$  to each of its 2-neighbours.

Let us now prove that the final charge  $w^*(v)$  of every vertex  $v$  of  $H$  is at least  $\frac{39}{14}$ .

As there are no ( $\leq 1$ )-vertices by Lemma 3, let us examine the final charge of a ( $\geq 2$ )-vertex  $v$ .

- If  $v$  is a 2-vertex then by a trivial extension to non-planar graphs of Lemma 5 from [5], we know that :
  - If  $v$  has a 2-neighbour, it has a  $\geq 13$ -neighbour.
  - If  $v$  has a 3-neighbour, it has a  $\geq 11$ -neighbour.
  - If  $v$  has a 4-neighbour, it has a  $\geq 9$ -neighbour.

Hence,  $w^*(v) \geq \min(2 + \frac{11}{14}, 2 + \frac{115}{154} + \frac{3}{77}, 2 + \frac{27}{56} + \frac{17}{56}, 2 + 2\frac{11}{28}) = \frac{39}{14}$ .

- If  $v$  is a 3-vertex it sends at most  $3\frac{3}{77}$ . So  $w^*(v) \geq 3 - 3\frac{3}{77} = \frac{222}{77} > \frac{39}{14}$ .
- If  $v$  is a 4-vertex it sends at most  $4\frac{17}{56}$ . So  $w^*(v) \geq 4 - 4\frac{17}{56} = \frac{39}{14}$ .
- If  $v$  is a  $k$ -vertex, with  $5 \leq k \leq 8$ , it sends at most  $\frac{11}{28}$  to each neighbour. Thus  $w^*(v) \geq 5 - 5\frac{11}{28} = \frac{85}{28} > \frac{39}{14}$ .
- If  $v$  is a  $k$ -vertex, with  $9 \leq k \leq 10$ , it sends at most  $\frac{27}{56}$  to each neighbour. Thus  $w^*(v) \geq 9 - 9\frac{27}{56} = \frac{261}{56} > \frac{39}{14}$ .
- If  $v$  is a  $k$ -vertex, with  $11 \leq k \leq 12$ , it sends at most  $\frac{115}{154}$  to each neighbour.



Thus  $w^*(v) \geq 11 - 11 \frac{115}{154} = \frac{39}{14}$ .

- If  $v$  is a  $\geq 13$ -vertex, it sends at most  $\frac{11}{14}$  to each neighbour. Thus  $w^*(v) \geq 13 - 13 \frac{11}{14} = \frac{39}{14}$ .

Therefore

$$Ad(H) = \frac{\sum_{v \in V(H)} w(v)}{|V(H)|} = \frac{\sum_{v \in V(H)} w^*(v)}{|V(H)|} \geq \frac{12}{5}$$

which contradicts  $Mad(G) < \frac{39}{14}$ .

4. Let  $G$  be a graph with maximum degree  $\Delta \geq 5$  such that  $Mad(G) < \frac{60}{23}$ . Set  $k_2 = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 2$ . Suppose by way of contradiction that  $\Lambda^l(G) > k_2$ . Then  $G$  has a subgraph  $H$  which is  $k_2$ -linear-minimal.

Let us assign to every vertex of  $H$  an initial charge  $w(v) = d_H(v)$  and apply the following discharging rules.

**Rule 1.** A 3-vertex sends  $\frac{3}{23}$  to each of its 2-neighbours

**Rule 2.** A ( $\geq 4$ )-vertex sends  $\frac{7}{23}$  to each of its 2-neighbours having no ( $\leq 3$ )-neighbour.

**Rule 3.** A ( $\geq 4$ )-vertex sends  $\frac{11}{23}$  to each of its 2-neighbours having a 3-neighbour.

Let us now prove that the final charge  $w^*(v)$  of every vertex  $v$  of  $H$  is at least  $\frac{60}{23}$ .

- If  $v$  is a 2-vertex then it has no 2-neighbour by Lemma 10. If it has a 3-neighbour its other neighbour is a ( $\geq 4$ )-neighbour according to Lemma 8. Hence  $w^*(v) = 2 + \frac{3}{23} + \frac{11}{23} = \frac{60}{23}$ . If  $v$  has no 3-neighbour, then  $w^*(v) = 2 + 2 \cdot \frac{7}{23} = \frac{60}{23}$ .
- If  $v$  is a 3-vertex it sends at most  $3/23$  to each neighbour. So  $w^*(v) \geq 3 - 9/23 = 60/23$ .
- If  $v$  is a 4-vertex then by Lemma 9, it has at most one 2-neighbour that has a 3-neighbour. Hence  $w^*(v) \geq 4 - \frac{11}{23} - 3 \cdot \frac{7}{23} = \frac{60}{23}$ .
- If  $v$  is a  $k$ -vertex with  $k \geq 5$ , it sends at most  $11/23$  to each neighbour. Thus  $w^*(v) \geq k - 11k/23 \geq \frac{60}{23}$ .

Hence  $Ad(H) \geq \frac{60}{23}$ . This contradicts  $Mad(G) < 60/23$ .

5. Let  $G$  be a graph such that  $Mad(G) < \frac{14}{5}$ . Set  $k_3 = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3$ . Suppose by way of contradiction that  $\Lambda^l(G) > k_3$ . Then  $\Delta \geq 3$ , as every graph with maximum degree at most 2 is linearly 3-choosable. Moreover  $G$  has a subgraph  $H$  which is  $k_3$ -linear-minimal.

Let us assign to every vertex of  $H$  an initial charge  $w(v) = d_H(v)$  and apply the following discharging rule.

**Rule 1.** A  $(\geq 4)$ -vertex sends  $2/5$  to each of its 2-neighbours

Let us now prove that the final charge  $w^*(v)$  of every vertex  $v$  of  $H$  is at least  $\frac{14}{5}$ .

- If  $v$  is a 2-vertex then it has no  $(\leq 3)$ -neighbour by Lemmas 4, 10 and 11. Hence  $w^*(v) = 2 + 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{5}$ .
- If  $v$  is a 3-vertex then  $w^*(v) = w(v) = 3$ .
- If  $v$  is a 4-vertex then by Lemma 12, it has at most three 2-neighbours. Hence  $w^*(v) \geq 4 - 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{5}$ .
- If  $v$  is a  $k$ -vertex with  $k \geq 5$ , it sends at most  $2/5$  to each neighbour. Thus  $w^*(v) \geq k - 2k/5 \geq 3$ .

Hence  $Ad(H) \geq \frac{14}{5}$ . This contradicts  $Mad(G) < 14/5$ .

6. Let  $G$  be a graph such that  $Mad(G) < 3$ . Set  $k_4 = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 4$ . Suppose by way of contradiction that  $\Lambda^l(G) > k_4$ . Then  $\Delta \geq 3$ , as every graph with maximum degree at most 2 is linearly 3-choosable. Moreover  $G$  has a subgraph  $H$  which is  $k_4$ -linear-minimal.

Let us assign to every vertex of  $H$  an initial charge  $w(v) = d_H(v)$  and apply the following discharging rule.

**Rule 1.** A  $(\geq 4)$ -vertex sends  $1/2$  to each of its 2-neighbours

Let us now prove that the final charge  $w^*(v)$  of every vertex  $v$  of  $H$  is at least 3.

- If  $v$  is a 2-vertex then it has no  $(\leq 3)$ -neighbour by Lemmas 4, 10 and 11. Hence  $w^*(v) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$ .
- If  $v$  is a 3-vertex then  $w^*(v) = w(v) = 3$ .
- If  $v$  is a 4-vertex then by Lemma 13, it has at most two 2-neighbours. Hence  $w^*(v) \geq 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$ .
- If  $v$  is a 5-vertex then by Lemma 14, it has at most four 2-neighbours. Hence  $w^*(v) \geq 5 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$ .
- If  $v$  is a  $k$ -vertex with  $k \geq 6$ , it sends at most  $1/6$  to each neighbour. Thus  $w^*(v) \geq k - k/2 \geq 3$ .

Hence  $Ad(H) \geq 3$ . This contradicts  $Mad(G) < 3$ .

### 5.4.2 2-frugal coloring

In this subsection we prove Theorem 7.

1. Let us first prove the first assertion of this theorem. Let  $G$  be a graph with maximum degree  $\Delta \geq 7$  such that  $Mad(G) < \frac{5}{2}$ . Set  $k_1 = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$ . Suppose by way of contradiction that  $\Phi_2^l(G) > k_1$ . Then  $G$  has a subgraph  $H$  which is  $k_1$ -frugal-minimal.

Let us assign to every vertex of  $H$  an initial charge  $w(v) = d_H(v)$ . Then  $\sum_{v \in V(H)} w(v) = \sum_{v \in V(H)} d(v) = Ad(H) \cdot |V(H)|$ . Let us call ‘bad’ a 2-vertex in case it has a 2-neighbour, and ‘good’ otherwise. We now apply the following discharging rules.

**Rule 1.** 3-vertices give  $\frac{1}{6}$  to each of their 2-neighbours.

**Rule 2.**  $\geq 4$ -vertices give  $\frac{1}{3}$  to each of their good 2-neighbours.

**Rule 3.**  $\geq 4$ -vertices give  $\frac{1}{2}$  to each of their bad 2-neighbours.

Let us now prove that the final charge  $w^*(v)$  of every vertex  $v$  of  $H$  is at least  $\frac{5}{2}$ .

- There are no 1-vertices (cf. Lemma 3).
- If  $v$  is a 2-vertex then by Lemma 4 it does not have two 2-neighbours. Besides by Lemma 5, no bad vertex can have a 3-neighbour, and by Lemma 8 none can have two 3-neighbours. Hence  $w^*(v) \geq 2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ .
- If  $v$  is a 3-vertex,  $w^*(v) \geq 3 - 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$ .
- If  $v$  is a 4-vertex, then by Lemma 15 it has at most one bad neighbour. Hence  $w^*(v) \geq 4 - \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{2}$ .
- If  $v$  is a  $k$ -vertex with  $k \geq 5$ ,  $w^*(v) \geq 5 - 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ .

Hence  $Ad(H) \geq \frac{5}{2}$ . This contradicts  $Mad(G) < \frac{5}{2}$ .

2. Let  $G$  be a graph such that  $Mad(G) < 3$ . Set  $k_3 = \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3$ . Suppose by way of contradiction that  $\Phi_2^l(G) > k_3$ . Then  $G$  has a subgraph  $H$  which is  $k_1$ -frugal-minimal.

Let us assign to every vertex of  $H$  an initial charge  $w(v) = d_H(v)$ . Then  $\sum_{v \in V(H)} w(v) = \sum_{v \in V(H)} d(v) = Ad(H) \cdot |V(H)|$ . We now apply the following discharging rules.

**Rule 1.**  $\geq 4$ -vertices give  $\frac{1}{2}$  to each of their 2-neighbours.

Let us now prove that the final charge  $w^*(v)$  of every vertex  $v$  of  $H$  is at least 3.

- There are no 1-vertices (cf. Lemma 3).
- If  $v$  is a 2-vertex, by Lemma 10 it does not have 2-neighbours, and by Lemma 11 it can not have any 3-neighbour either. Hence  $w^*(v) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$ .

- If  $v$  is a 3-vertex,  $w^*(v) = 3$ .
  - If  $v$  is a 4-vertex, by Lemma 16 it has at most one 2-neighbour. Hence  $w^*(v) \geq 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ .
  - If  $v$  is a 5-vertex, by Lemma 17 it has at most four 2-neighbours. Hence  $w^*(v) \geq 5 - 4\frac{1}{2} = 3$ .
  - If  $v$  is a  $k$ -vertex with  $k \geq 6$ ,  $w^*(v) \geq 6 - 6\frac{1}{2} = 3$ .
- Hence  $Ad(H) \geq 3$ . This contradicts  $Mad(G) < 3$ .

### 5.4.3 Conclusion

The results obtained in this paper, added to those proved by L. Esperet et al [1] which have not been improved, can be summarized in the following table :

$mad(G)$	$\Lambda^l(G)$	$\Delta$	
$< \frac{16}{7} \approx 2.285$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$	$\geq 3$	L. Esperet et al
$< \frac{12}{5} = 2.4$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$	$\geq 5$	
$< \frac{48}{19} \approx 2.526$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$	$\geq 7$	
$< \frac{39}{14} \approx 2.785$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$	$\geq 13$	
$< \frac{5}{2}$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 2$		L. Esperet et al
$< \frac{60}{23} \approx 2.60869$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 2$	$\geq 5$	
$< \frac{14}{5} = 2.8$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3$		
$< 3$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 4$		
$mad(G)$	$\Phi_2^l(G)$	$\Delta$	
$< \frac{5}{2}$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$	$\geq 7$	
$< 3$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3$		

Alternatively, for planar graphs, one can rephrase them in term of the girth of a graph to obtain :

girth	$\Lambda^l(G)$	$\Delta$	
$\geq 16$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$	$\geq 3$	L. Esperet et al
$\geq 7$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$	$\geq 13$	A. Raspaud, W. Wang[5]
$\geq 8$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$		
$\geq 10$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 2$		L. Esperet et al
$\geq 9$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 2$	$\geq 5$	
$\geq 7$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3$		
$\geq 6$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 4$		
$\geq 5$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 14$		A. Raspaud, W. Wang[5]
	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 26$	$\geq 12$	L. Esperet et al
girth	$\Phi_2^l(G)$	$\Delta$	
$\geq 6$	$\leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 3$		

# Bibliographie

- [1] L. Esperet, M. Montassier and A. Raspaud. Linear choosability of graphs. *Discrete Math.*
- [2] B. Grünbaum, Acyclic colorings of planar graphs. *Israel J. Math.*14 :390–408, 1973.
- [3] H. Hind, M. Molloy, and B. Reed. Colouring a graph frugally. *Combinatorica* 17 :469–482, 1997.
- [4] R. Yuster. Linear coloring of graphs. *Discrete Math.* 185 :293–297, 1998.
- [5] A. Raspaud, W.Wang, Linear coloring of planar graphs with large girth. *Discrete Math.*, 2008.



## 6 Bilan du stage

Durant mon stage au sein du projet MASCOTTE, j'ai pu découvrir les aspects de la recherche qui font tout son intérêt : la nécessité de ne jamais se concentrer sur un unique sujet et de se tenir au courant de ce qui est réalisé ailleurs, d'échanger en permanence les uns avec les autres (un œil neuf sur un sujet étant capable de débloquer bien des situations), ainsi que d'entretenir l'idée paranoïaque que les solutions à tous les problèmes sont toujours à portée de main, en dépit des preuves du contraire.

La majeure partie de mon travail aura consisté pendant ce stage à me documenter sur l'état de l'art autour de la coloration de graphes, afin de discerner les différents chemins menant aux mêmes problèmes. Cette somme de temps investi me profitera d'ailleurs dès le mois d'octobre, date à laquelle je commencerai au sein du même projet MASCOTTE une thèse portant sur un sujet connexe, puisqu'il s'agira d'étudier le problème d'allocation de fréquence en utilisant le formalisme de la coloration de graphes.

# Index

$C_n$ , 11  
 $G^*$ , 14  
 $K_n$ , 11  
 $K_{m,n}$ , 11  
 $P_n$ , 11  
 $\Lambda^l(G)$ , 31  
 $\chi(G)$  (Nombre chromatique), 17

ch(G), 18  
coloration, 17  
    choisissabilité, 18  
    impropre, 17  
    par liste, 17  
    propre, 17

degré, 12  
déchargement, 21

$E(G)$ , 11

graphe  
    dual, 14  
    dégénéré, 13  
    induit, 11  
    outerplanaire, 14  
    planaire, 13

hypergraphe, 12

I3S, 8  
INRIA, 8  
inégalité d'Euler, 14

maille, 12  
MASCOTTE, 7  
mineur, 16  
    topologique, 16

probabiliste (méthode), 22

$V(G)$ , 11



# Bibliographie

- [1] N. Alon, C. McDiarmid, and B. Reed. Acyclic Coloring of Graphs. *Random Structures and Algorithms*, 2(3) :277–288, 1991.
- [2] N. Alon and M. Tarsi. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*, 12(2) :125–134, 1992.
- [3] K. Appel and W. Haken. Every planar map is four colorable. Part I. Discharging. *Illinois J. Math*, 21(3) :429–490, 1977.
- [4] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable. II. Reducibility. *Illinois J. Math*, 21(3) :491–567, 1977.
- [5] O. Borodin, D. Fon-Der-Flass, A. Kostochka, A. Raspaud, and E. Sopena. Acyclic list 7-coloring of planar graphs. *Journal of Graph Theory*, 40(2) :83–90, 2002.
- [6] N. Eaton and T. Hull. Defective list colorings of planar graphs. *Bull. Inst. Combin. Appl*, 25(79-87) :40, 1999.
- [7] P. Erdos. On circuits and subgraphs of chromatic graphs. *Mathematika*, (9) :170–175, 1962.
- [8] P. Erdős and L. Lovász. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. *Infinite finite Sets, Colloq. Honour Paul Erdős, Keszthely*, 1973.
- [9] P. Erdos, A. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. *Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium*, 26 :125–157, 1979.
- [10] P. Erdos, A. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. *Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium*, 26 :125–157, 1979.
- [11] L. Esperet, M. Montassier, and A. Raspaud. Linear choosability of graphs. *Discrete Mathematics*, 2007.
- [12] J.-S. S. Frédéric Havet. Improper choosability of graphs and maximum average degree. *Journal of Graph Theory*, 52(3) :181–199, 2006.
- [13] B. Grünbaum. Acyclic colorings of planar graphs. *Israel Journal of Mathematics*, 14(4) :390–408, 1973.
- [14] H. Hind, M. Molloy, and B. Reed. Colouring a graph frugally. *Combinatorica*, 17(4) :469–482, 1997.

- [15] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 :271–283, 1930.
- [16] A. Raspaud and W. Wang. Linear coloring of planar graphs with large girth. *Discrete Mathematics*, 2008.
- [17] R. Škrekovski. A Grötzsch-Type Theorem for List Colourings with Improperity One. *Combinatorics, Probability and Computing*, 8(05) :493–507, 1999.
- [18] R. Škrekovski. List Improper Colourings of Planar Graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 8(03) :293–299, 1999.
- [19] R. Thomas. Graph Planarity and Related Topics. *Proceedings of the 7th International Symposium on Graph Drawing*, pages 137–144, 1999.
- [20] C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 62(1) :180–181, 1994.
- [21] Z. Tuza. Graph colorings with local constraints - a survey. *Discuss. Math. Graph Theory*, 17(2) :161–228, 1997.
- [22] V. Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. *Diskret. Anal.*, 29 :3–10, 1976.
- [23] M. Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 120(1-3) :215–219, 1993.
- [24] R. Yuster. Linear coloring of graphs. *Discrete Mathematics*, 185(1) :293–297, 1998.