

# Détermination de l'espace de travail d'un robot parallèle pour une orientation constante

Jean-Pierre MERLET

*INRIA Sophia-Antipolis*

*BP 93*

*06902 Sophia-Antipolis Cedex, France*

Résumé : L'espace de travail d'un manipulateur parallèle à 6 degrés de liberté est borné en raison des limitations sur les longueurs des segments, des limitations sur le débattement des articulations passives ainsi que par les collisions entre segments. Usuellement on suppose que l'orientation de l'organe terminal est constante et l'on cherche des coupes planes de l'espace de travail en fixant un degré de liberté en translation. Nous montrons qu'à l'aide d'une modélisation géométrique simple des débattements limites des articulations passives et de l'encombrement des segments il est possible d'obtenir de manière exacte la géométrie de la frontière de l'espace de travail en prenant en compte les limitations sur les longueurs des segments, les débattements des articulations passives ainsi que les intersections entre segments.

## 1 Introduction

### 1.1 La structure mécanique d'un robot parallèle

Considérons un robot parallèle à 6 degrés de liberté tel que celui représenté sur la figure 1. Il est constitué d'une base supposée fixe et d'un plateau mobile, reliés par 6 segments. Une extrémité de ces segments est reliée à la base par un joint de Cardan de centre  $A_i$ , l'autre extrémité étant reliée au plateau mobile par un rotule de centre  $B_i$ . Dans chacun des segments un actionneur linéaire permet de modifier la longueur  $\rho$  du segment. Par une commande appropriée de ces longueurs il est alors possible de placer un point  $C(x_c, y_c, z_c)$  du plateau mobile dans une position donnée par rapport à un référentiel  $(O, x, y, z)$  lié à la base et de fixer l'orientation de ce plateau (que l'on représentera par les 3 angles d'Euler  $\psi, \theta, \phi$  ou par la matrice de rotation  $R$ ). On commande donc les 6 degrés de liberté du plateau mobile. On obtient ainsi un manipulateur dont l'architecture mécanique est très différente de celle des robots sériels.

La réalisation de ce type de mécanisme est récente puisque le premier prototype semble pouvoir être attribué à Gough [8] en 1949. Cette architecture a connue un regain d'intérêt dans les années 60 pour la réalisation de plateforme pour les simulateurs de vol [21]. L'utilisation de cette structure en tant que robot est encore plus récente puisqu'elle remonte à 1979 [15], avec son apparition dans une cellule d'assemblage. Ici les intérêts supplémentaires qui apparaissent sont la précision de positionnement et la rigidité de la structure. Depuis, l'étude des robots parallèles est en plein développement [6, 9, 10, 11, 16, 20, 22]

Cependant une caractéristique pourtant importante n'a reçu, d'un point de vue théorique, qu'une faible attention jusqu'à maintenant : la détermination de l'espace de travail.

## 2 Complexité de représentation de l'espace de travail

Le calcul de l'espace de travail est évidemment très important dans une phase de conception. Le fait que les travaux dans ce domaine sont peu nombreux se justifie cependant par la complexité du problème. En effet, si l'on considère un robot sériel classique (à poignet découplé) la représentation de l'espace de travail est généralement basée sur l'illustration en dimension 3 de l'espace accessible par le centre de son poignet (caractéristique des translations) et par celui accessible par l'extrémité de l'organe terminal (caractéristique des orientations), ces deux zones étant découplées. Ce n'est malheureusement pas le cas pour les robots parallèles: la zone accessible par le centre du plateau mobile est dépendante de l'orientation de ce plateau. La dimension de l'espace dans lequel on doit faire la représentation est donc 6 ce qui est peu favorable.

Heureusement la majeure partie des applications de ce type de robot permet de simplifier ce problème : en effet le robot est le plus souvent utilisé soit avec une orientation constante, soit en maintenant fixe un des points du plateau mobile. On ne s'intéresse donc qu'à une restriction de l'espace total dans un espace de dimension 3. Usuellement on simplifie encore le problème en fixant un des degrés de liberté restants de façon à n'avoir à déterminer que des sections planes.

Nous nous intéressons ici au cas où l'on fixe l'orientation et un des paramètres de translation. On cherche donc à déterminer l'ensemble des positions accessibles par un point fixé du plateau mobile lorsqu'il se déplace dans un plan connu.

Les contraintes qui limitent l'évolution du robot sont de trois types:

- les limitations sur les coordonnées articulaires : les segments ont une longueur minimum et une longueur maxi-

mum.

- les butées mécaniques sur les articulations passives : joint de Cardan et rotule.
- les collisions entre segments.

Nous allons étudier successivement l'influence de ces trois facteurs sur la frontière de l'espace de travail.

### 3 L'espace de travail limité par les variables articulaires

#### 3.1 Utilisation des méthodes de discrétisation

La méthode la plus répandue pour déterminer la frontière de l'espace accessible consiste à procéder par discrétisation [4],[5]. Nous avons utilisé cette méthode [17] pour calculer les déplacements en translation dans le plan  $x - y$  du centre d'un prototype en utilisant un système de coordonnées polaire pour ces variables. Le rayon polaire est progressivement augmenté et à chaque pas les longueurs des segments sont calculées jusqu'à ce que l'on découvre l'ensemble des positions limites où au moins l'une des longueurs se trouve en dehors des bornes permises.

Cette méthode a aussi été employée par la suite en incorporant de plus une vérification des débattements des articulations [14] ou bien avec vérification de l'ensemble des contraintes [2]. Cette approche numérique est cependant lourde en temps de calcul et nécessite une implantation soignée. Si cette méthode est effectivement utilisable sur des manipulateurs de petite dimension elle ne paraît pas satisfaisante pour des mécanismes comme les simulateurs de vol. De plus une représentation graphique obtenue à partir de cette méthode est peu satisfaisante car elle ne fournit aucune information sur la géométrie de la frontière de l'espace de travail. Pour la même raison le stockage des résultats nécessite une place mémoire importante.

Une approche analytique a été proposée par différents auteurs. Elle utilise la constatation que pour un point sur la frontière de l'espace de travail les vecteurs unitaires indiquant la direction des vitesses permises ne décrivent pas une sphère complète. Une telle approche permet dans certains cas de trouver la frontière de l'espace de travail [1],[12],[13].

#### 3.2 Méthode géométrique pour les contraintes articulaires

Une approche complètement différente a été proposée par Gosselin [7]. Dans cette approche on ne prend en compte que les limitations sur les longueurs des segments et l'on cherche à déterminer la frontière de l'espace de travail lorsque

le point  $C$  du plateau mobile se déplace dans un plan connu (pour simplifier l'exposé nous supposons que ce plan est horizontal, sans perte de généralité puisque les calculs présentés restent valable quel que soit le plan de coupe).

### 3.2.1 Contraintes d'évolution sur $C$

Si l'on considère la géométrie du robot parallèle il apparaît que les contraintes articulaires imposent des contraintes sur la position des points  $B_i$ . En effet le point  $B_i$  de chacun des segments doit être compris entre les deux sphères de centre  $A_i$  et de rayon  $\rho_{min}, \rho_{max}$  respectivement longueur minimum et maximum du segment (figure 2). Ces sphères seront respectivement appelées *sphère interne* ( $S_{i_i}$ ) et *sphère externe* ( $S_{e_i}$ ). Si l'on suppose que le point  $C$  évolue dans un plan il en sera de même pour les points  $B_i$  de chacun des segments, l'orientation étant supposée constante. La définition d'un plan d'évolution  $\mathcal{P}$  pour  $C$  impose donc un plan d'évolution  $\mathcal{P}_i$  pour chacun des points  $B_i$ .

Supposons maintenant que la longueur du segment soit maximum. Le point  $B_i$  doit alors appartenir à l'intersection de la sphère externe et du plan  $\mathcal{P}_i$ . Si cette intersection est vide le point  $B_i$  ne pourra pas évoluer dans le plan et par conséquent l'espace de travail est vide. Dans le cas contraire l'intersection est un cercle, le *cercle externe de  $B_i$*  noté  $C_{e_{B_i}}$ . Le point  $B_i$  doit alors se trouver à l'intérieur ou sur la frontière de ce cercle.

Si l'on suppose maintenant que la longueur du segment est minimum un raisonnement analogue nous permet d'affirmer que si l'intersection de la sphère interne et du plan  $\mathcal{P}_i$  est non vide alors le point  $B_i$  doit être à l'extérieur ou sur la frontière d'un cercle, le *cercle interne de  $B_i$*  noté  $C_{i_{B_i}}$  (figure 3). Notons que les cercles interne et externe ont le même centre (la projection de  $A_i$  dans le plan) et que l'on peut facilement calculer leurs rayons en fonction des rayons des sphères et de la position de  $\mathcal{P}$ .

Remarquons maintenant que si  $C$  est sur la frontière de l'espace de travail due aux limitations sur les variables articulaires alors au moins un des  $B_i$  se trouve soit sur son cercle externe soit sur son cercle interne. Supposons maintenant que l'un des points  $B_i$  décrive l'un des cercles externe ou interne. Il est alors clair que le point  $C$  décrit un cercle qui sera de même rayon que le cercle décrit par  $B_i$  mais dont le centre s'obtient à partir de celui du cercle décrit par  $B_i$  par simple translation de vecteur  $\mathbf{B_iC}$ . En conséquence la contrainte sur le point  $B_i$  se transpose pour le point  $C$ : les contraintes articulaires sur le segment  $i$  imposent au point  $C$  d'être compris entre deux cercles appelés *cercle externe  $C_{e_i}$*  et *cercle interne  $C_{i_i}$* .

Chaque segment impose donc des zones possibles d'évolution de  $C$  et l'espace de travail est l'intersection de ces zones, donc l'intersection des 6 couronnes annulaires définies par les cercles internes et externes. On peut donc en déduire que l'espace de travail dans le plan sera délimité par des arcs de cercle. Nous n'exposerons pas le principe du

calcul de cette intersection mais un exemple de traitement est montré en figure 4.

La méthode exposée présente de gros avantages par rapport à la discrétisation en particulier une grande rapidité, la possibilité de calculer rapidement la surface de l'espace de travail ainsi qu'une grande facilité de stockage des résultats (une liste réduite d'arcs de cercle). Toutefois elle ne prend en compte qu'un des trois facteurs limitant l'espace de travail, les contraintes sur les variables articulaires.

## 4 Influence des débattements des articulations passives sur l'espace de travail

Nous allons proposer maintenant une méthode permettant la prise en compte des limites mécaniques sur les articulations.

### 4.1 Limitations mécaniques sur les articulations de base

Ayant affaire au monde réel il est clair que la nature de ces limitations mécaniques peut être quelconque. Notre but est donc de trouver une modélisation ouverte de ces contraintes, pour pouvoir considérer le plus grand nombre possible d'articulations réelles, mais aussi géométrique pour pouvoir trouver la topologie de la frontière de l'espace de travail.

Dans un premier temps nous allons examiner comment on peut modéliser les contraintes sur les articulations liées à la base.

#### 4.1.1 Contraintes sur les articulations de la base

Les limites mécaniques d'une articulation imposent des restrictions sur la position du segment qui s'y rattache. Ces restrictions peuvent être définies par une surface délimitant un volume à l'intérieur duquel doit se trouver le segment du manipulateur. L'articulation étant soit un joint de Cardan soit une rotule le segment ne peut que tourner autour du centre de l'articulation: le volume a donc un point singulier, le centre de l'articulation.

Dans notre système nous allons supposer que l'on peut modéliser la surface englobant le volume par un ensemble de facettes planes définissant une *pyramide*, l'opérateur définissant la pyramide selon les contraintes propres à l'articulation utilisée. Pour cela on introduit un repère  $(A_i, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r)$  lié à la pyramide (figure 5). Chacune des  $n$  facettes est alors définie complètement par le vecteur normal  $\mathbf{n}_i$  à la facette. Il faut toutefois noter que le modèle pyramide ne permet

pas de décrire un certain nombre d'articulations rotule par exemple comme celle constituée d'un joint de Cardan dont la base est montée sur une articulation rotoïde.

#### 4.1.2 Conséquence pour la position des points $B_i$

L'introduction des pyramides comme modèle pour les contraintes sur les articulations de la base permet de trouver facilement la frontière de la zone permise pour les points  $B_i$ . En effet ce point doit se trouver à l'intérieur de l'intersection de la pyramide avec le plan  $\mathcal{P}_i$  d'évolution du point  $B_i$  donc à l'intérieur d'un polygone.

La zone permise pour les points  $B_i$  est clairement l'intersection des zones permises dues aux contraintes articulaires et celles dues aux contraintes sur les articulations de base. En conséquence la frontière de la zone permise pour  $B_i$ , lorsque les deux contraintes sont prises en compte, va être l'intersection des cercles internes et externes pour  $B_i$  et du polygone. Il est clair que cette intersection va conduire à une ou des régions dont les frontières sont soit un polygone, soit un cercle, soit une entité géométrique composée d'une succession de segments et d'arcs de cercle. Nous regrouperons sous le nom de *polygonarc* l'ensemble de ces possibilités.

Nous appellerons *zone permise* le résultat du calcul de l'intersection. Une zone permise est constituée d'une ou plusieurs *zones* dont les frontières sont des polygonarcs.

#### 4.1.3 Zone permise pour $C$

De chaque zone permise pour  $B_i$  nous avons déjà vu que l'on déduisait par une simple translation de vecteur  $\mathbf{B}_i\mathbf{C}$  une zone permise pour  $C$ ,  $ZP_{C_i}$ , qui est une zone permise où les contraintes sur le segment  $i$  sont satisfaites. La zone permise pour  $C$  où toutes les contraintes sur les segments sont satisfaites est alors l'intersection des zones permises  $ZP_{C_i}$ . Comme dans le cas précédent on retrouve donc une intersection mais dans un cadre plus général puisque l'on doit procéder à l'intersection de 6 zones permises dont les zones ont une frontière externe constituée d'un polygonarc avec éventuellement des polygonarcs internes. Mais ce calcul ne présente pas de difficultés et est détaillé en [18].

## 4.2 Prise en compte des contraintes sur les articulations du plateau mobile

### 4.2.1 Définition des contraintes

Pour les contraintes sur les articulations du mobile on peut clairement adopter le même modèle que celui utilisé pour les articulations de la base. On peut ainsi définir une pyramide  $P_i$  de sommet  $B_i$  telle que si les contraintes sur l'articulation sont satisfaites alors le point  $A_i$  se trouve à l'intérieur de la pyramide (figure 6 a).

Par une simple symétrie il est alors possible de définir une *pyramide équivalente* à  $P_i, P'_i$ , de sommet  $A_i$  tel que si  $A_i$  est à l'intérieur de  $P_i$  alors  $B_i$  est à l'intérieur de  $P'_i$  (figure 6 b).

#### 4.2.2 Prise en compte des contraintes articulaires et des contraintes sur l'ensemble des articulations

A partir de la pyramide équivalente on voit qu'il est possible de calculer l'espace de travail en prenant en compte l'ensemble des contraintes articulaires et des contraintes sur les articulations. En effet la zone permise pour  $B_i$  est alors définie par l'intersection des couronnes annulaires obtenues à partir des contraintes articulaires, du polygone obtenu par intersection de la pyramide de base et du plan où se déplace  $B_i$  et enfin du polygone obtenu par intersection de ce même plan avec la pyramide équivalente de l'articulation du plateau mobile. Cette intersection est calculée par notre algorithme d'intersection des zones permises. Par simple translation de vecteur  $\mathbf{B}_i\mathbf{C}$  on obtient alors une zone permise pour le point  $C$  où les contraintes sur le segment  $i$  sont satisfaites. En faisant de même pour l'ensemble des segments on obtient ainsi 6 zones permises et l'espace de travail  $\mathcal{W}$  est obtenu comme intersection de ces zones permises, là aussi calculable par notre algorithme d'intersection des zones permises.

En conclusion nous disposons d'une méthode qui permet de calculer efficacement la frontière de l'espace de travail en prenant en compte l'ensemble des contraintes sur les variables articulaires ainsi que les limitations mécaniques sur les articulations. Des exemples de résultat sont exposés dans la dernière section. Il reste maintenant à traiter le dernier facteur limitatif de l'espace de travail, les possibilités d'intersection entre segments.

## 5 L'espace de travail limité par les intersections entre segments

### 5.1 Notion de distance entre segment

Notre but est ici de rechercher les lieux de l'espace de travail  $\mathcal{W}$  tels que la distance minimum entre tous les points appartenant à des couples de segment soit égale à une constante  $d$  non nulle appelée *distance de sécurité*, dont on supposera, pour des raisons évidentes qu'elle est inférieure au minimum des distances entre les points  $A_i, B_i$  des couples de segment considérés. La distance de sécurité a une valeur qui est associée au couple choisi de segments. Par la suite nous considérons le couple particulier de segment 1, 2 pour illustrer notre propos. Une telle approche permet de traiter le cas des intersections entre segments de type cylindrique en imposant comme distance de sécurité pour la recherche de l'intersection entre deux segments la somme des rayons de chacun des segments. Par la suite pour simplifier on dira que tous les segments sont à la distance de sécurité  $d$  pour exprimer que la distance entre tous les

couples de segments est au moins égale à leur distance de sécurité.

La distance entre deux segments 1 et 2 est définie de la manière suivante :

- soient  $D_1, D_2$  les droites associées aux segments et  $P, Q$  les points de la perpendiculaire commune à  $D_1, D_2$ . Si  $P$  appartient au segment 1 et  $Q$  appartient au segment 2 alors la distance entre les segments est la distance entre les droites  $\|\mathbf{PQ}\|$ .
- sinon soient les projections des points  $A_1, B_1$  sur la droite 2 et les projections des points  $A_2, B_2$  sur la droite 1 et soit les points dont la projection est sur le segment opposé. Si l'ensemble de ces points est non vide la distance  $d$  est alors le minimum des distances des points à leur projection, sinon la distance est définie comme le minimum des distances entre les couples de points  $(A_1, B_2), (B_1, A_2), (A_1, A_2), (B_1, B_2)$ .

On peut démontrer que la distance ainsi définie correspond bien au minimum des distances entre tout couple de points appartenant aux segments 1 et 2.

## 5.2 Lieux limites pour les droites, conique de sécurité

Considérons les deux droites associées à des segments notés arbitrairement 1 et 2 et soit  $l$  la distance entre ces droites.

On a :

$$l^2 = \frac{(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdot (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2))^2}{\|\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2\|^2} \quad (1)$$

Si l'on pose que  $l$  doit être égale à la distance de sécurité  $d$  cette équation définit une contrainte sur les inconnues  $x_c, y_c$  et l'on peut montrer que cette contrainte impose que le point  $C$  se trouve sur une conique que nous appellerons *conique de sécurité*  $C_l$ . La figure 7 en présente un exemple.

## 5.3 Premier cas: la conique de sécurité coupe $\mathcal{W}$

C'est évidemment une condition nécessaire pour que cette conique découpe l'espace de travail en zone où la distance entre les segments est strictement supérieure ou strictement inférieure à la distance de sécurité. Mais ce n'est pas suffisant car il faut de surcroît que les points de la perpendiculaire commune appartiennent aux segments. Il faut donc déterminer les portions de la conique de sécurité où c'est effectivement le cas. Pour cela il est nécessaire d'introduire une autre conique, la *conique des segments*.



### 5.3.1 Conique des segments

Pour trouver les portions de la conique de sécurité où les points de la perpendiculaire commune appartiennent aux segments considérons les 2 points  $M_1, M_2$  de cette perpendiculaire qui appartiennent aux droites 1, 2. On peut écrire:

$$\mathbf{A}_1\mathbf{M}_1 = (1 - \lambda)\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{M}_2 = (1 - \alpha)\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 \quad (3)$$

Si les points appartiennent aux segments alors  $\alpha, \lambda$  seront compris entre 0 et 1. Exprimons maintenant que les points  $M_1, M_2$  sont les points définissant la distance entre les droites et que cette distance est la distance de sécurité  $d$ . On a alors:

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = d^2 \quad (6)$$

qui constitue un système dans les 4 inconnues  $x_c, y_c, \lambda, \alpha$ . On peut alors résoudre ce système en  $x_c, y_c$  et obtenir une équation de contrainte en  $\lambda, \alpha$ . Cette équation s'écrit sous la forme:

$$b_1\lambda^2 + b_2\alpha^2 + b_3\lambda\alpha + b_4\lambda + b_5\alpha + b_6 = 0 \quad (7)$$

Dans le plan  $\lambda, \alpha$  c'est donc une conique que nous appellerons *conique des segments*,  $\mathcal{S}_s$ . Mais nous ne sommes intéressés que par les valeurs de  $\lambda, \alpha$  comprises entre 0 et 1, qui correspondent aux cas où la distance de sécurité est obtenue pour des points appartenant aux segments  $A_1B_1, A_2B_2$ . Cette contrainte définit dans le plan  $\lambda, \alpha$  un rectangle  $\mathcal{R}$  et l'on peut distinguer deux cas selon la position de ce rectangle par rapport à la conique des segments (figure 8):

- $\mathcal{R}$  n'est jamais coupé par la conique des segments. Quelle que soit la position de  $C$  la distance entre les droites sera soit toujours supérieure, soit toujours inférieure à la distance de sécurité. On prend n'importe quel point de l'espace de travail pour trouver dans quelle alternative on se trouve.
- $\mathcal{R}$  a des intersections avec la conique des segments. Les parties de la conique des segments à l'intérieur de  $\mathcal{R}$  vont définir des portions de la conique de sécurité où la distance entre les segments est la distance de sécurité.

Le premier cas est celui où pour tout point de la conique de sécurité la distance entre les segments n'est jamais la distance entre les droites et sera traité dans une section ultérieure. Dans le second cas la restriction de la conique

des segments contenue dans  $\mathcal{R}$  permet de définir une restriction sur les  $x_c, y_c$  qui correspond à une restriction sur la conique de sécurité définissant le lieu de l'espace de travail où la distance de sécurité est obtenue comme distance entre les droites.

### 5.3.2 Points et courbes critiques de la conique de sécurité

L'intersection de la conique des segments avec  $\mathcal{R}$  permet de définir sur la conique de sécurité des points particuliers que nous appellerons des *points critiques*. Pour tous les points de la conique de sécurité compris entre deux points critiques on peut affirmer que soit la distance entre les droites (égale à la distance de sécurité) est toujours obtenue pour des points appartenant aux segments ou, au contraire, jamais pour des points appartenant tous les deux aux segments. N'importe quel point pris entre les deux points critiques permet de décider entre ces deux choix. On appellera *courbe critique* toute portion de la conique de sécurité à l'intérieur de l'espace de travail et telle que la distance de sécurité est obtenue pour des points appartenant aux segments.

### 5.3.3 Détermination des courbes critiques

Supposons que nous ayons déterminé pour une conique de sécurité l'ensemble des points critiques ainsi que ses points d'intersection avec l'espace de travail  $\mathcal{W}$ . Nous appellerons *points de séparation* tout point qui est soit critique soit un point d'intersection. Ces points de séparation vont découper la conique de sécurité en portion et certaines de ces portions vont définir les courbes critiques. Pour établir ces courbes on considère toutes les portions des coniques limitées par deux points de séparation, que nous appellerons *points extrêmes*, et qui ne contiennent pas d'autre points de séparation que ces deux points, (figure 9).

On a alors plusieurs cas:

- les deux points de séparation sont des points critiques: par construction ils sont soit complètement à l'intérieur d'une zone de l'espace de travail  $(C_1, C_2)$  ou à l'opposé tous les deux sont à l'extérieur de l'espace de travail  $(C_3, C_4)$  et tous les deux du même côté de l'espace de travail. On teste l'appartenance d'un des points à l'espace de travail pour décider dans quel cas l'on se trouve. Si les points sont à l'extérieur la portion ne peut pas être une courbe critique et l'on passe à la portion suivante. S'ils sont à l'intérieur on prend leur milieu sur la conique de sécurité. Si la distance entre les segments pour ce point est la distance entre les droites alors cette portion constitue une courbe critique.

- un point de séparation est un point critique et l'autre un point d'intersection. Si le point critique est à l'extérieur de l'espace de travail  $(I_4, C_3)$  la portion ne peut pas être une courbe critique car elle est complètement en dehors de l'espace de travail. S'il est à l'intérieur  $(I_1, C_1)$  on considère le milieu de la portion et si la distance entre les segments pour ce point est la distance entre les droites alors cette portion constitue une courbe critique.
- les deux points sont des points d'intersection  $(I_3, I_4)$ : là aussi on teste leur milieu pour déterminer si la portion est une courbe critique. Ce sera le cas si ce milieu appartient à l'espace de travail et que la distance entre les segments pour ce point est égale à la distance entre les droites.

### 5.3.4 Utilisation des courbes critiques

Le cas où il n'existe pas de courbe critique pour la conique de sécurité sera étudié dans la section suivante puisqu'il sera équivalent au cas où il n'y a pas d'intersection de la conique de sécurité avec l'espace de travail. On va donc supposer que l'on a déterminé au moins une courbe critique. Deux cas se présentent : la courbe critique découpe l'espace de travail en deux zones distinctes (les points extrêmes de la courbe sont des points d'intersection) ou elle ne le découpe pas (au moins un des points extrêmes est un point critique).

Dans le premier cas (figure 10) une des deux zones est telle que la distance entre les deux droites est toujours supérieure à la distance de sécurité et, à fortiori la distance entre les deux segments le sera aussi. Par contre dans la zone où la distance entre les droites est inférieure à la distance de sécurité on ne peut pas statuer puisqu'il peut exister dans son intérieur des points où la distance entre les segments est obtenue pour des points extrêmes des segments donc supérieure à la distance entre les droites.

Dans le cas où la courbe critique ne découpe pas l'espace de travail en zone on peut simplement dire qu'il va exister deux zones admettant la courbe critique comme élément de frontière où la distance entre segment sera respectivement supérieure et inférieure à la distance de sécurité. Pour statuer dans les cas indécis il est nécessaire de s'occuper des cas où la distance entre les segments est obtenue pour des points extrêmes des segments ce qui est équivalent au cas où la conique de sécurité ne coupe pas l'espace de travail.

## 5.4 Deuxième cas: la conique de sécurité ne coupe pas $\mathcal{W}$

Dans cette situation seuls deux cas peuvent se présenter pour les points de l'espace de travail:

- la distance entre droites est toujours supérieure à la distance de sécurité

- la distance entre droites est toujours inférieure à la distance de sécurité.

Pour déterminer dans quel cas l'on se trouve il suffit de prendre n'importe quel point de l'espace de travail, de calculer la distance entre les droites et de voir si cette distance est supérieure ou inférieure à la distance de sécurité. Si l'on se trouve dans le premier cas la distance entre les segments sera toujours supérieure à la distance de sécurité. Par contre on ne peut pas conclure pour le second cas car la distance entre les segments est obtenue pour un des points extrêmes d'un segment et est donc toujours supérieure à la distance entre les droites. On va introduire un autre concept qui nous permettra de lever l'ambiguïté.

#### 5.4.1 Conique des points

Pour chacun des points  $A_1, A_2, B_1, B_2$  on peut écrire une relation sur les coordonnées  $x_c, y_c$  qui indique que la distance du point à la droite est la distance de sécurité. Ainsi pour exprimer que le point  $A_1$  se trouve à la distance  $d$  de la droite 2 on écrit:

$$d = \frac{\|\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2\|}{\|\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2\|} \quad (8)$$

Après développement de cette équation on obtient alors que le point  $C$  se trouve sur une conique que l'on va appeler la *conique des points*. On parlera ainsi de conique des  $A_1$ , conique des  $A_2$  etc..soit 4 coniques.

Si aucune de ces 4 coniques ne coupe l'espace de travail on peut déjà conclure que pour tout point de l'espace de travail la distance entre segment sera placée toujours de la même manière par rapport à la distance de sécurité, c'est-à-dire toujours inférieure ou toujours supérieure. Pour déterminer dans quel cas on se trouve il suffit de prendre un point particulier de l'espace de travail et de calculer la distance entre les segments.

Supposons maintenant qu'au moins une des coniques des points coupe la zone de travail. Nous allons supposer que c'est la conique de  $A_1$ . Par analogie avec la conique de sécurité nous appellerons point critique les points de la conique des points où la projection de  $A_1$  sur la droite est un des points extrêmes du segment 2 c'est-à-dire  $A_2$  ou  $B_2$ . Si  $M$  est la projection de  $A_1$  sur 2 on a :

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{M} = \frac{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2}{\|\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2\|^2} \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \quad (9)$$

Pour obtenir la position des points critiques il suffit de poser dans l'équation précédente  $M = A_2$  ou  $M = B_2$  pour obtenir une équation dans les inconnues  $x_c, y_c$ . Si  $M = A_2$  on obtient une équation linéaire dans les inconnues et l'on recherche donc l'intersection d'une droite avec la conique des points. Si  $M = B_2$  l'équation amène à une conique et l'on va donc rechercher l'intersection de cette conique avec la conique des points.

Pour toute position de  $C$  sur la conique des points, comprise entre deux points critiques, la projection de  $A_1$  va toujours se trouver soit entre  $A_2, B_2$  soit à l'extérieur du segment.

Comme pour la conique de sécurité on a donc des points de séparation sur les coniques des points qui sont soit des points critiques soit des points d'intersection. Les coniques des points vont donc se trouver découpées en portions délimitées par les points de séparation. Après calcul des points de séparation on détermine l'ensemble des portions de cette conique et l'on rejete les portions qui ne sont pas dans l'espace de travail, ce que l'on détermine en testant l'appartenance du milieu de la portion à l'espace de travail.

Dans les portions restantes on élimine celles qui correspondent au cas où la projection de  $A_1$  n'est pas sur le segment  $A_2, B_2$  (là aussi on teste le point milieu de la portion). Après ces éliminations on obtient des portions qui ne peuvent pas être traversées par le point  $C$  donc les courbes critiques associées aux coniques des points.

Ce sont ces courbes critiques qui vont compléter les courbes critiques obtenues pour la conique de sécurité pour nous permettre de statuer sur les cas ambigus. Des exemples de coniques des points et de courbes critiques associées sont présentés en figure 11.

## 5.5 Partage de l'espace de travail

On dispose maintenant de l'ensemble des courbes critiques obtenues à partir des coniques de sécurité et des coniques des points. On peut alors montrer que l'ensemble des courbes critiques permet de définir une zone fermée, la *zone de sécurité*  $\mathcal{S}_W$ , éventuellement vide, où la distance entre les segments sera toujours supérieure à la distance de sécurité [18]. La figure 12 présente différents cas.

## 5.6 Cas particulier, $d = 0$

Dans cette section nous supposons que la distance de sécurité est nulle c'est-à-dire que l'on recherche les intersections entre segments géométriques. Dans ce cas particulier il n'existe plus de conique des points. La zone de sécurité  $\mathcal{S}_W$  est alors simplement définie par les courbes critiques de la conique de sécurité (qui dans ce cas se réduit à une droite) et l'on peut alors montrer que ces courbes critiques ne définissent pas forcément une zone fermée.

Les courbes critiques sont donc des *segments interdits* pour lesquels un couple de segments se coupent. Si les points extrêmes d'un segment interdit sont des points d'intersections alors l'espace de travail est découpé en deux zones et l'on ne peut passer d'une zone à l'autre par simple translation dans le plan. Par contre si un segment interdit ne coupe que partiellement une des zones de la zone permise l'espace de travail n'est alors pas découpé en zone. On pourra alors

toujours trouver une trajectoire permettant de relier deux points de l'espace de travail au prix parfois d'un "détour".

La figure 13 présente quelques cas de calcul de segment interdit.

## 6 Exemples d'espace de travail

Les temps de calcul présentés dans les exemples ont été établis sur une station de travail SUN IPX.

### 6.1 Micro-manipulateur

Il s'agit d'un manipulateur développé au MEL par Arai [3] avec des actionneurs piézo-électriques permettant des variations maxima de longueur des segments de  $8 \mu\text{m}$ . Ici le seul facteur limitatif de l'espace de travail est les longueurs articulaires, les débattements des articulations de la base et du mobile ne jouant pas de rôle.

La position des points d'articulation (en  $\mu\text{m}$ ) ainsi que les longueurs limite des segments sont données dans la Table 1

	1	2	3	4	5	6
x	13982.5	-7597.22	-6385.29	-6385.29	-7597.22	13982.5
y	699.708	11759.3	-12459.1	12459.1	-11759.3	-699.708
z	0	0	0	0	0	0
$x_b$	4341.27	-7990.0	3648.74	3648.74	-7990.0	4341.27
$y_b$	6719.63	399.833	-7119.46	7119.46	-399.833	-6719.63
$z_b$	20000	20000	20000	20000	20000	20000
$\rho$ maximum	23012.2	23012.2	23012.2	23012.2	23012.2	23012.2
$\rho$ minimum	23004.2	23004.2	23004.2	23004.2	23004.2	23004.2

Table 1: Position des points d'articulation de la base et du mobile, longueurs limites des segments pour un micro-manipulateur (en  $\mu\text{m}$ ).

Nous présentons une vue 3D de l'espace de travail de ce manipulateur (figure 14). Pour des raisons de clarté les dimensions en z sont multipliées par 1.5.

## 6.2 Un prototype pour l'assemblage

Dans ce prototype les articulations de base se trouvent en dessous de la base, les segments passant par un orifice carré. On peut donc modéliser les contraintes sur les articulations de la base par des pyramides à 4 faces orientées vers le centre de la base. Nous présentons ici des vues de l'espace de travail avec prise en compte des seules limitations articulaires, puis, pour la même orientation, avec prise en compte des contraintes sur les articulations de base (figure 15). On pourra constater que les contraintes sur les articulations influent sensiblement sur l'espace de travail. On peut remarquer que les articulations présentent une disposition croisée qui, si elle favorise l'espace de travail en orientation, implique un plus grand risque d'intersection entre segments. La figure 16 montre ainsi que pour une distance de sécurité de 8 mm l'espace de travail se trouve réduit par les collisions entre segments.

## 7 Conclusion

La méthode de calcul géométrique de l'espace de travail que nous avons proposé permet de prendre en compte l'ensemble des contraintes exerçant une influence effective sur l'espace de travail: limitations articulaires, débattements des articulations passives et intersections entre segments. Elle repose principalement sur des procédures géométriques peu coûteuses en temps de calcul et donne un résultat exact dans la mesure où les éléments physiques intervenant dans le manipulateur entrent dans le cadre de la modélisation proposée: contraintes sur les articulations pouvant être décrites par des pyramides et segments de type cylindrique.

Il pourrait être concevable de proposer non plus des coupes mais directement le volume par extension de notre méthode. On aurait ainsi à calculer des intersections de sphères, polyèdres et de surfaces d'ordre 2 pour ce qui concerne les distances entre segments, qui, si elles sont plus complexes, sont néanmoins calculables.

Après avoir traité le problème de l'espace de travail à orientation constante nous avons entrepris une démarche du même type lorsque le centre du plateau mobile occupe une position fixe et que son orientation est quelconque. On peut alors représenter l'espace de travail en orientation en illustrant les déplacements possibles d'un vecteur unitaire lié au plateau mobile [19].

**Remerciements:** Le travail présenté dans ce rapport a bénéficié largement de nombreuses discussions avec C. Gosselin, T. Arai et R. Stoughton. Les aspects géométriques ont pu être traités grâce à l'aide précieuse des membres du projet PRISME, principalement J-D. Boissonnat, Mariette Yvinec et Jacqueline Duquesne.

## References

- [1] Agrawal S.K. Workspace boundaries of in-parallel manipulator systems. In *ICAR*, pages 1147–1152, Pise, 19-22 Juin 1991.
- [2] Arai T., Cleary K., et al. Design, analysis and construction of a prototype parallel link manipulator. In *IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, volume 1, pages 205–212, Ibaraki, Japan, 3-6 Juillet 1990.
- [3] Arai T., Stoughton R., et Jaya Y.M. Micro hand module using parallel link mechanism. In *Japan/USA Symp. on Flexible Automation*, pages 163–168, San Francisco, 13-15 Juillet 1993.
- [4] Cleary K. et Arai T. A prototype parallel manipulator: kinematics construction, software, workspace results and singularity analysis. In *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pages 566–571, Sacramento, 11-14 Avril 1991.
- [5] Fichter E.F. A Stewart platform based manipulator: general theory and practical construction. *Int. J. of Robotics Research*, 5(2):157–181, Été 1986.
- [6] Gosselin C. *Kinematic analysis optimization and programming of parallel robotic manipulators*. Thèse de doctorat, McGill University, Montréal, 15 Juin 1988.
- [7] Gosselin C. Determination of the workspace of 6-dof parallel manipulators. *ASME J. of Mechanical Design*, 112(3):331–336, Septembre 1990.
- [8] Gough V.E. Contribution to discussion of papers on research in automobile stability, control and tyre performance, 1956-1957. Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng.
- [9] Hervé J-M. et Sparacino F. Structural synthesis of parallel robots generating spatial translation. In *ICAR*, pages 808–813, Pise, 19-22 Juin 1991.
- [10] Hunt K.H. Structural kinematics of in parallel actuated robot arms. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 105:705–712, Mars 1983.
- [11] Inoue H., Tsusaka Y., et Fukuizumi T. Parallel manipulator. In *Proc. 3rd ISRR*, pages 321–327, Gouvieux, France, 7-11 Octobre 1985.



- [12] Jo D.Y. et Haug E.J. Workspace analysis of closed loop mechanisms with unilateral constraints. In *ASME Design Automation Conf.*, pages 53–60, Montréal, 17-20 Septembre 1989.
- [13] Landsberger S.E. et Shanmugasundram A.P. Workspace of parallel link crane. In *IMACS/SICE Int. Symp. on Robotics, Mechatronics, and Manufacturing Systems*, pages 479–486, Kobe, 16-20 Septembre 1992.
- [14] Lee K-M. et Shah D.K. Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator. *IEEE J. of Robotics and Automation*, 4(3):354–360, Juin 1988.
- [15] McCallion H. et Pham D.T. The analysis of a six degrees of freedom work station for mechanized assembly. In *Proc. 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, pages 611–616, Montréal, Juillet 1979.
- [16] Merlet J-P. *Les Robots parallèles*. Hermès, Paris, 1990.
- [17] Merlet J-P. Parallel manipulators, Part 1, theory. Rapport de Recherche 646, INRIA, Mars 1987.
- [18] Merlet J-P. Manipulateurs parallèles, 5eme partie : Détermination de l'espace de travail à orientation constante. Rapport de Recherche 1645, INRIA, Mars 1992.
- [19] Merlet J-P. Manipulateurs parallèles, 6eme partie : Détermination des espaces de travail en orientation. Rapport de Recherche 1921, INRIA, Mai 1993.
- [20] Reboulet C. et Berthomieu T. Dynamic model of a six degree of freedom parallel manipulator. In *ICAR*, pages 1153–1157, Pise, 19-22 Juin 1991.
- [21] Stewart D. A platform with 6 degrees of freedom. *Proc. of the Institution of mechanical engineers*, 180(Part 1, 15):371–386, 1965.
- [22] Zamanov V.B et Sotirov Z.M. Structures and kinematics of parallel topology manipulating systems. In *Proc. Int. Symp. on Design and Synthesis*, pages 453–458, Tokyo, 11-13 Juillet 1984.

### **Determination of the workspace of a parallel manipulator for a fixed orientation**

Jean-Pierre MERLET

Abstract: The workspace of a 6 d.o.f. parallel manipulator is bounded because of the limitations on the links lengths, the mechanical limits on the passive joints and links interference. We consider here a general 6 d.o.f. parallel manipulator with extensible links and assume that the orientation of the end-effector is constant. We propose a geometrical method to determine exactly the boundary of planar cross-sections of the workspace. We assume that the mechanical limits on the passive joints can be described by a pyramid with planar faces which define the border of the volume reachable by the link connected to the joint and that the links are cylinder of known radius. Under this assumption it is shown that the workspace is the intersection of various geometrical objects (circles, polygons, conics) and we show how to compute these intersections. Various examples are provided.

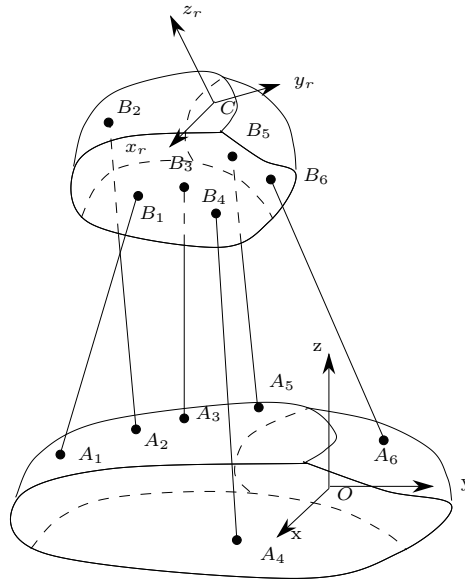


Figure 1: Un robot parallèle à 6 degrés de liberté.

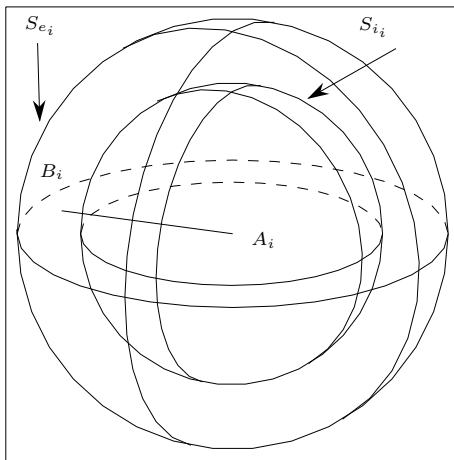


Figure 2: Les contraintes articulaires imposent au point  $B_i$  d'être dans la zone comprise entre deux sphères de centre  $A_i$  et de rayon égale aux longueurs minimum et maximum des segments.

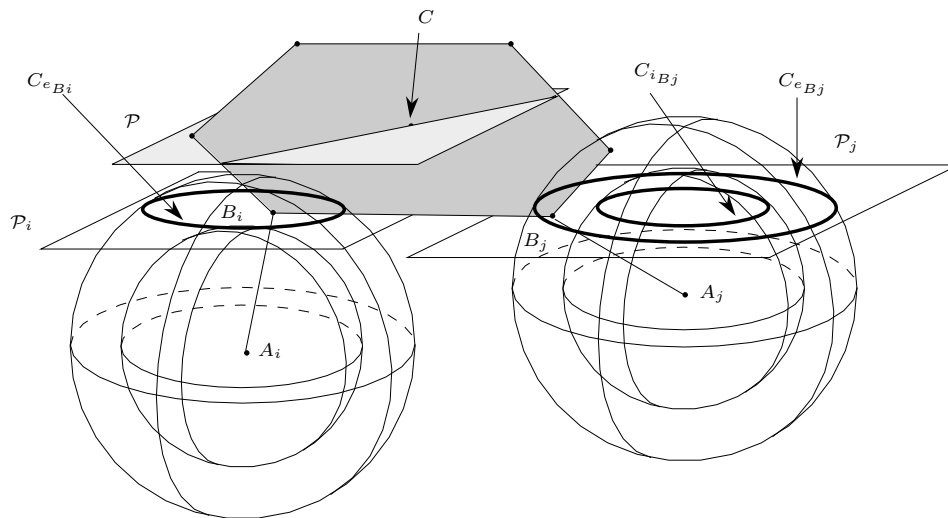


Figure 3: Les contraintes articulaires imposent que lorsque  $C$  se déplace dans un plan  $\mathcal{P}$  les points  $B_i$  soient à l'intérieur des cercles  $C_{e_{B_i}}$  et à l'extérieur des cercles  $C_{i_{B_i}}$  obtenus par intersection des sphères avec le plan  $\mathcal{P}_i$ .

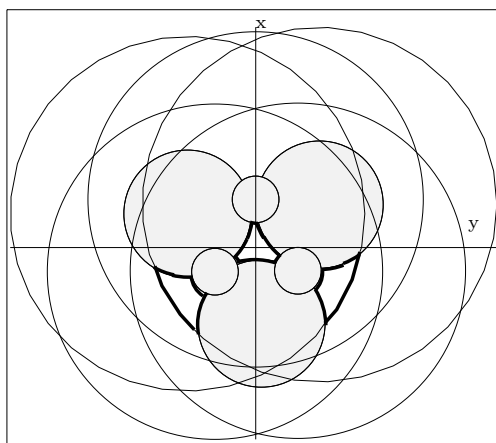


Figure 4: Un exemple de calcul d'intersection. En grisé les cercles intérieurs, en traits épais la frontière de l'espace de travail. On peut remarquer que l'on obtient 3 zones distinctes.

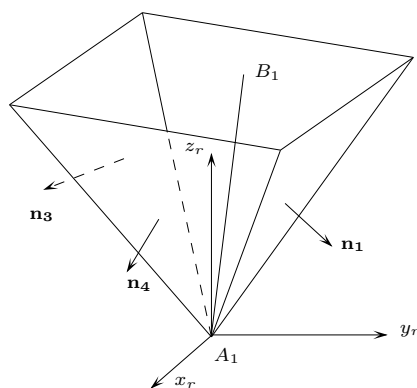


Figure 5: La définition d'une pyramide. Ici une pyramide à 4 facettes. Chaque facette  $i$  est complètement définie par le vecteur normal à la facette  $\mathbf{n}_i$ , lui-même défini dans un repère  $A_1, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r$ . Pour définir complètement la pyramide il suffit alors de définir l'orientation du repère de la pyramide par rapport au référentiel absolu par 3 angles d'Euler. Le segment  $A_1B_1$  doit alors être contenu à l'intérieur de la pyramide.

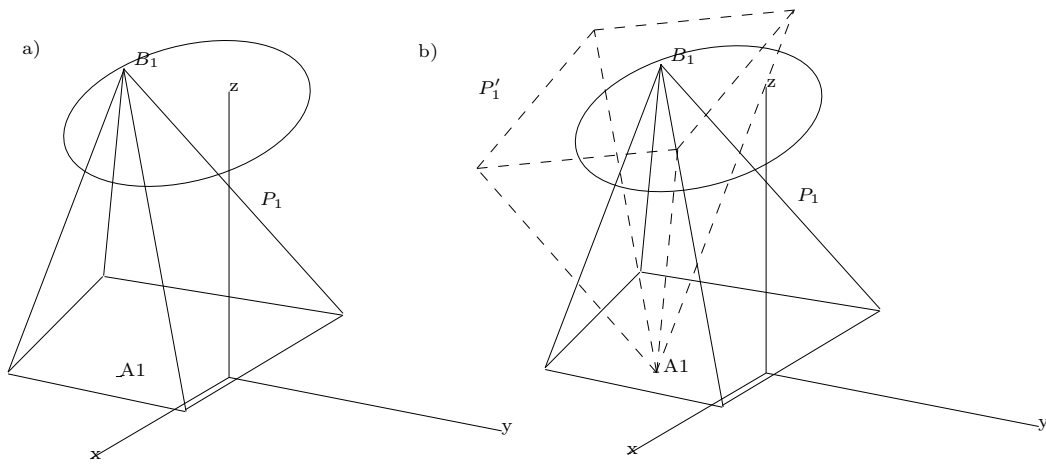


Figure 6: A gauche définition de la pyramide  $P_1$  caractérisant les contraintes sur l'articulation du plateau mobile. Le point  $A_1$  se trouve à l'intérieur de la pyramide si les contraintes sont satisfaites. A droite définition de la pyramide équivalente caractérisant les contraintes sur l'articulation du plateau mobile. A partir de  $P_1$  on peut construire  $P'_1$  tel que si les contraintes sur l'articulation du plateau mobile sont satisfaites alors le point  $B_1$  se trouve à l'intérieur de  $P'_1$ .

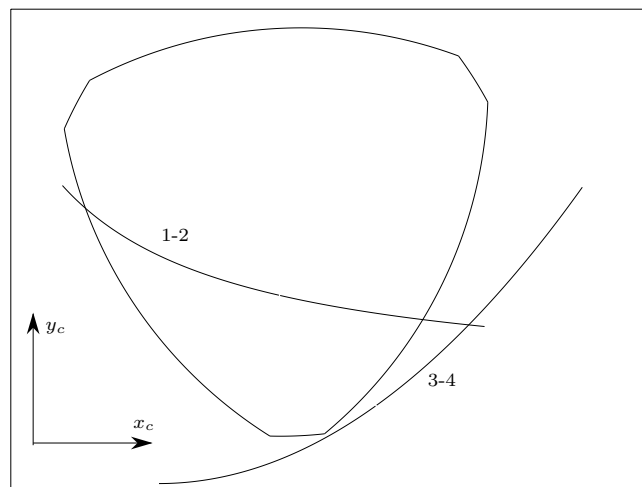


Figure 7: Deux exemples de conique de sécurité. Lorsque les droites associées aux segments 1-2, 3-4 se trouve à une distance fixée l'une de l'autre alors le point  $C$  se déplace sur une conique (ici une hyperbole pour 1-2 et une parabole pour 3-4).

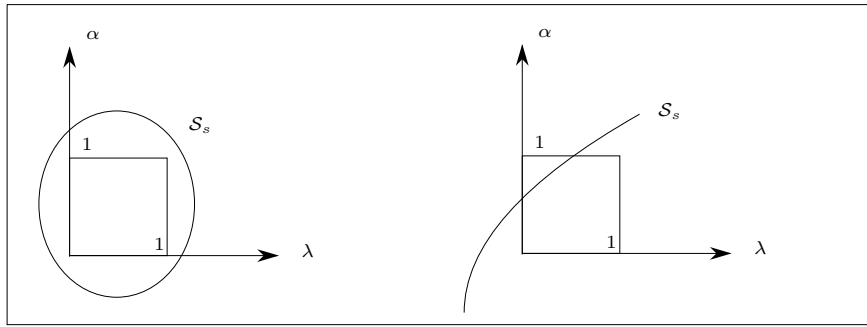


Figure 8: Dans le plan  $\lambda, \alpha$  l'intersection de la conique des segments  $\mathcal{S}_s$  avec le rectangle défini par  $\lambda, \alpha$  compris entre 0 et 1 permet de déterminer si les segments peuvent être ou non à la distance de sécurité. Si il n'y a pas d'intersection alors quelle que soit la position les droites associées aux segments sont toujours à une distance soit supérieure soit inférieure à la distance de sécurité.

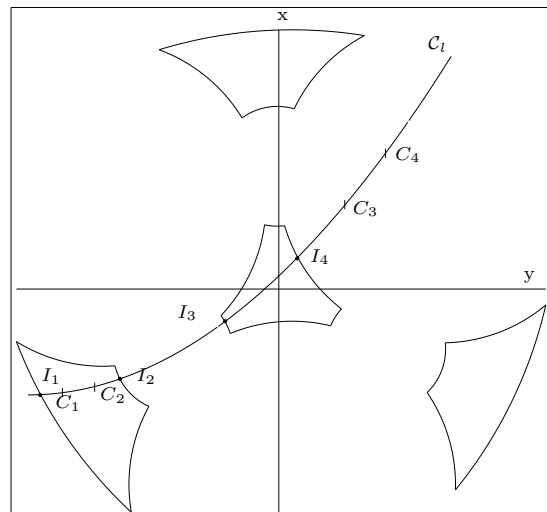


Figure 9: Exemple de séparation de la conique de sécurité en courbe critique. Les points critiques et les points d'intersection déterminent des portions de la conique dont on peut déterminer si elles sont des courbes critiques.

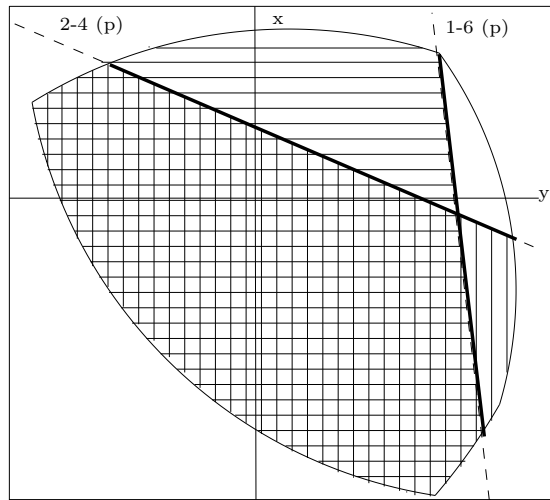


Figure 10: Exemple de séparation de la conique de sécurité en courbe critique. Les deux coniques (en pointillé) sont des paraboles dont les points critiques sont de part et d'autre de l'espace de travail. Les portions entre les deux points d'intersections sont des courbes critiques (en trait épais) qui sépare l'espace en deux zones. Dans les zones hachurées la distance entre les droites est toujours supérieure à la distance de sécurité et par conséquent la distance entre les segments aussi. Par contre dans la zone non hachurée on ne peut pas statuer.

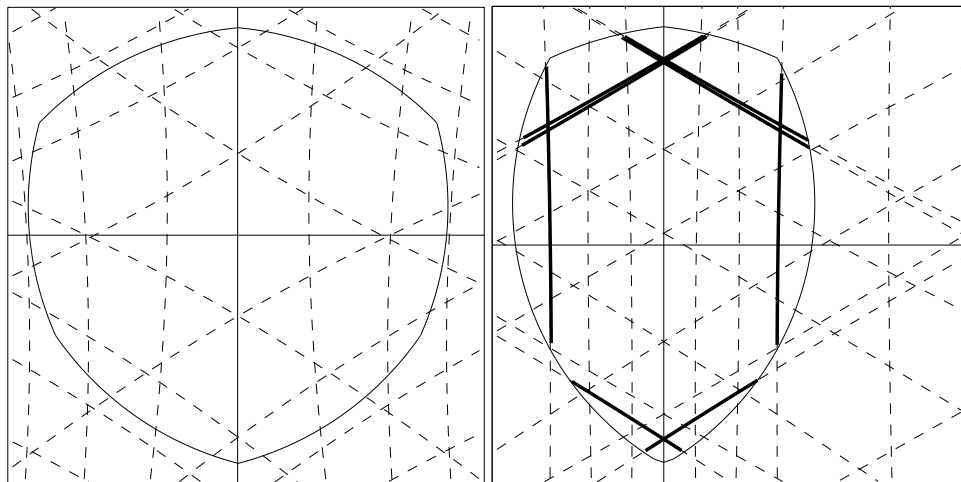


Figure 11: Exemples de conique des points (en trait pointillé) et de courbes critiques associées (en trait épais). A gauche pas de courbe critique, à droite un ensemble de courbes critiques. L'espace de travail  $\mathcal{W}$  est représenté en trait fin.

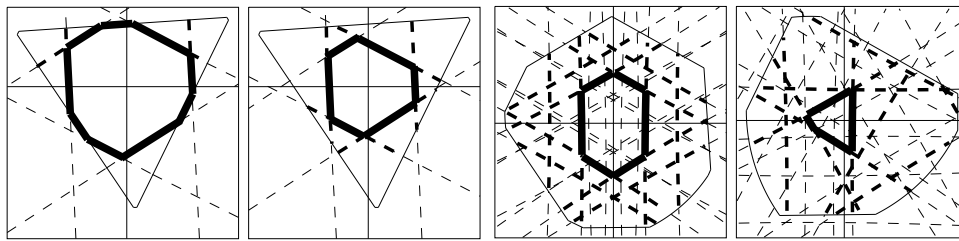


Figure 12: Exemple de détermination de la zone de sécurité  $\mathcal{S}_W$ . A l'intérieur de cette zone tous les couples de segments respectent leur distance de sécurité. Les courbes critiques sont en pointillé épais, l'espace de travail  $\mathcal{W}$  en trait fin et la zone de sécurité en trait épais.

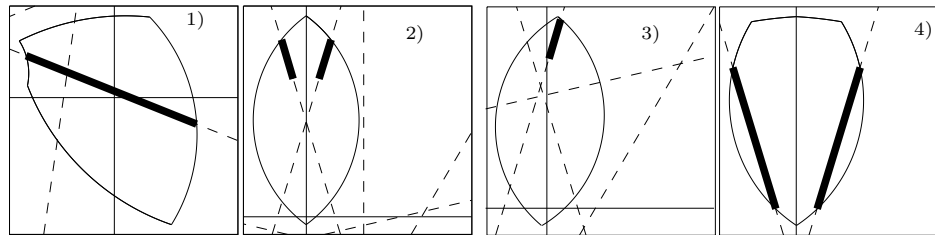


Figure 13: Exemple de calcul de segments interdits (en trait épais). Deux segments se coupent si  $C$  se trouve sur un segment interdit.

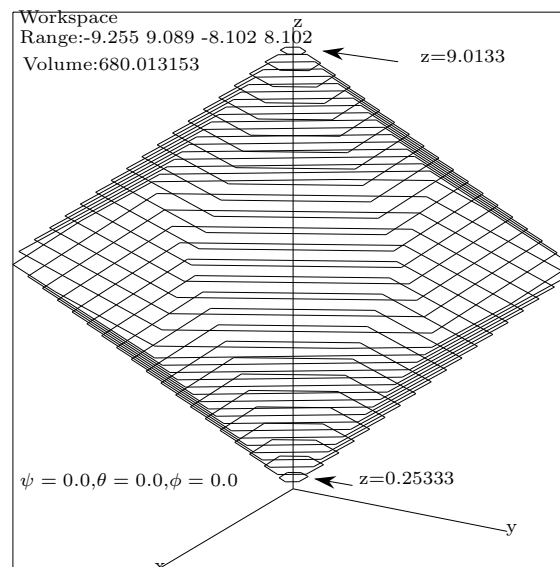


Figure 14: Vue perspective de l'espace de travail du micro-manipulateur, orientation  $\psi = \theta = \phi = 0$  (dimensions en  $\mu\text{m}$ , 30 coupes, temps de calcul: 1066 ms).



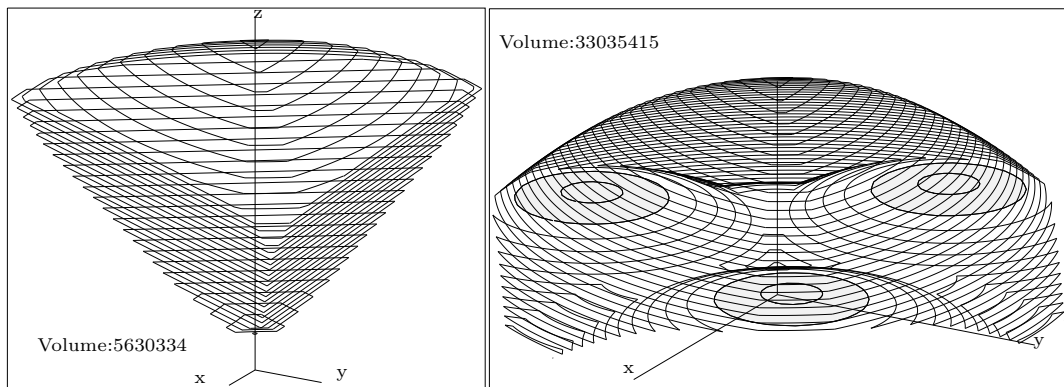


Figure 15: Vue perspective de l'espace de travail du prototype, orientation  $\psi = \theta = \phi = 0$  (dimensions en mm, les parties grisées sont des zones interdites). A gauche les contraintes sont les limites sur les longueurs sur les segments et les contraintes sur les articulations de base, à droite on ne prend pas en compte les contraintes sur les articulations de base : le volume de l'espace de travail est alors multiplié par 5.8 (40 coupes, temps de calcul: 7250 ms et 1350 ms).

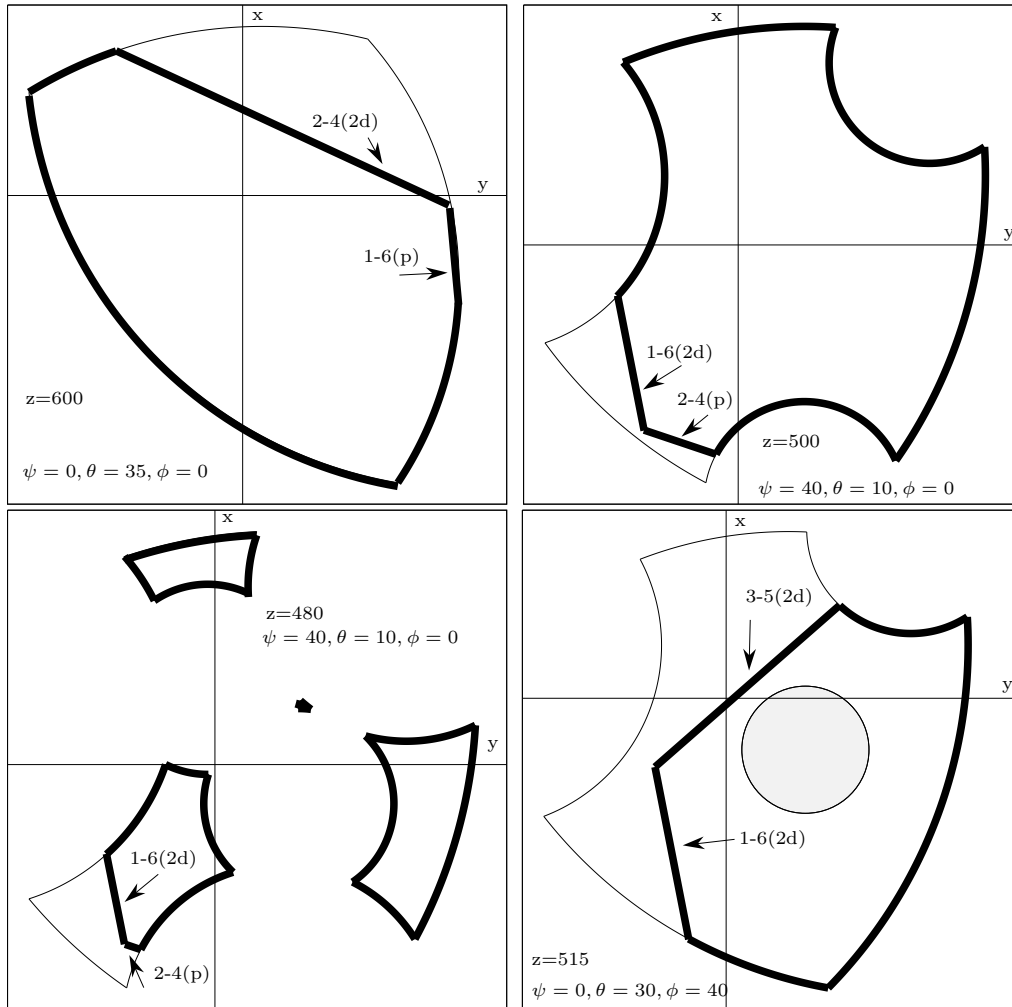


Figure 16: Réduction de l'espace de travail en raison des collisions entre segments. La frontière de la zone permise est indiquée en trait épais alors que la zone permise en ne prenant en compte que les limitations articulaires est en traits fins (distance de sécurité: 8mm, dimensions en mm, temps de calcul: 403 ms, 110 ms, 120 ms).

# List of Figures

1	Un robot parallèle à 6 degrés de liberté. . . . .	18
2	Les contraintes articulaires imposent au point $B_i$ d'être dans la zone comprise entre deux sphères de centre $A_i$ et de rayon égale aux longueurs minimum et maximum des segments. . . . .	19
3	Les contraintes articulaires imposent que lorsque $C$ se déplace dans un plan $\mathcal{P}$ les points $B_i$ soient à l'intérieur des cercles $C_{e_{B_i}}$ et à l'extérieur des cercles $C_{i_{B_i}}$ obtenus par intersection des sphères avec le plan $\mathcal{P}_i$ . . . . .	19
4	Un exemple de calcul d'intersection. En grisé les cercles intérieurs, en traits épais la frontière de l'espace de travail. On peut remarquer que l'on obtient 3 zones distinctes. . . . .	20
5	La définition d'une pyramide. Ici une pyramide à 4 facettes. Chaque facette $i$ est complètement définie par le vecteur normal à la facette $\mathbf{n}_i$ , lui même défini dans un repère $A_1, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_r, \mathbf{z}_r$ . Pour définir complètement la pyramide il suffit alors de définir l'orientation du repère de la pyramide par rapport au référentiel absolu par 3 angles d'Euler. Le segment $A_1B_1$ doit alors être contenu à l'intérieur de la pyramide. . . . .	20
6	A gauche définition de la pyramide $P_1$ caractérisant les contraintes sur l'articulation du plateau mobile. Le point $A_1$ se trouve à l'intérieur de la pyramide si les contraintes sont satisfaites. A droite définition de la pyramide équivalente caractérisant les contraintes sur l'articulation du plateau mobile. A partir de $P_1$ on peut construire $P'_1$ tel que si les contraintes sur l'articulation du plateau mobile sont satisfaites alors le point $B_1$ se trouve à l'intérieur de $P'_1$ . . . . .	21
7	Deux exemples de conique de sécurité. Lorsque les droites associées aux segments 1-2, 3-4 se trouve à une distance fixée l'une de l'autre alors le point $C$ se déplace sur une conique (ici une hyperbole pour 1-2 et une parabole pour 3-4). . . . .	21
8	Dans le plan $\lambda, \alpha$ l'intersection de la conique des segments $\mathcal{S}_s$ avec le rectangle défini par $\lambda, \alpha$ compris entre 0 et 1 permet de déterminer si les segments peuvent être ou non à la distance de sécurité. Si il n'y a pas d'intersection alors quelle que soit la position les droites associées aux segments sont toujours à une distance soit supérieure soit inférieure à la distance de sécurité. . . . .	22

9	Exemple de séparation de la conique de sécurité en courbe critique. Les points critiques et les points d'intersection déterminent des portions de la conique dont on peut déterminer si elles sont des courbes critiques. . . . .	22
10	Exemple de séparation de la conique de sécurité en courbe critique. Les deux coniques (en pointillé) sont des paraboles dont les points critiques sont de part et d'autre de l'espace de travail. Les portions entre les deux points d'intersections sont des courbes critiques (en trait épais) qui sépare l'espace en deux zones. Dans les zones hachurées la distance entre les droites est toujours supérieure à la distance de sécurité et par conséquent la distance entre les segments aussi. Par contre dans la zone non hachurée on ne peut pas statuer. . . . .	23
11	Exemples de conique des points (en trait pointillé) et de courbes critiques associées (en trait épais). A gauche pas de courbe critique, à droite un ensemble de courbes critiques. L'espace de travail $\mathcal{W}$ est représenté en trait fin. . . . .	23
12	Exemple de détermination de la zone de sécurité $\mathcal{S}_{\mathcal{W}}$ . A l'intérieur de cette zone tous les couples de segments respectent leur distance de sécurité. Les courbes critiques sont en pointillé épais, l'espace de travail $\mathcal{W}$ en trait fin et la zone de sécurité en trait épais. . . . .	24
13	Exemple de calcul de segments interdits (en trait épais). Deux segments se coupent si $C$ se trouve sur un segment interdit. . . . .	24
14	Vue perspective de l'espace de travail du micro-manipulateur, orientation $\psi = \theta = \phi = 0$ (dimensions en $\mu\text{m}$ , 30 coupes, temps de calcul: 1066 ms). . . . .	24
15	Vue perspective de l'espace de travail du prototype, orientation $\psi = \theta = \phi = 0$ (dimensions en mm, les parties grisées sont des zones interdites). A gauche les contraintes sont les limites sur les longueurs sur les segments et les contraintes sur les articulations de base, à droite on ne prend pas en compte les contraintes sur les articulations de base : le volume de l'espace de travail est alors multiplié par 5.8 (40 coupes, temps de calcul: 7250 ms et 1350 ms). . . . .	25
16	Réduction de l'espace de travail en raison des collisions entre segments. La frontière de la zone permise est indiquée en trait épais alors que la zone permise en ne prenant en compte que les limitations articulaires est en traits fins (distance de sécurité: 8mm, dimensions en mm, temps de calcul: 403 ms, 110 ms, 120 ms). . . . .	26