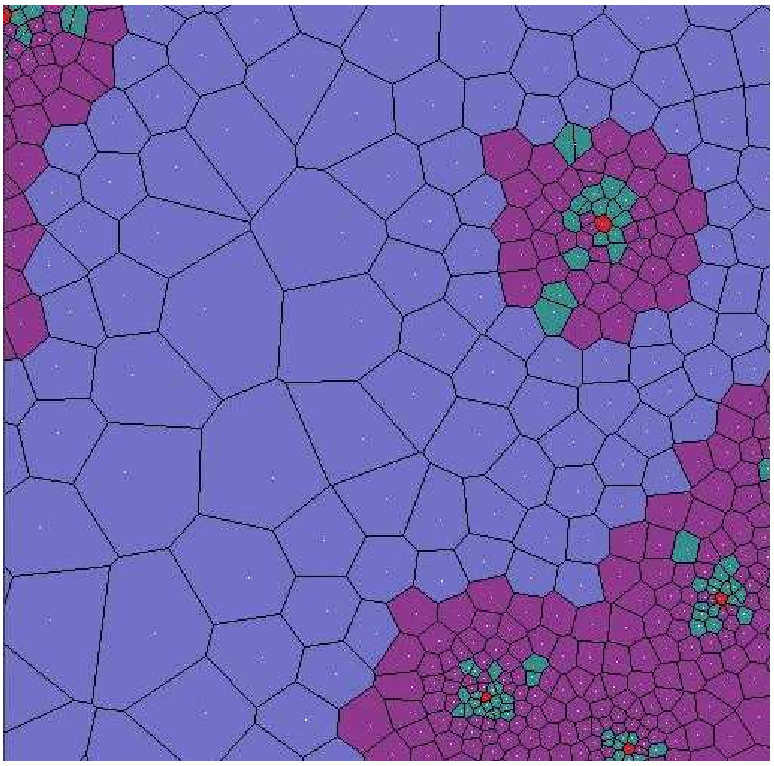
Géométrie Algorithmique et Diagrammes de Voronoï

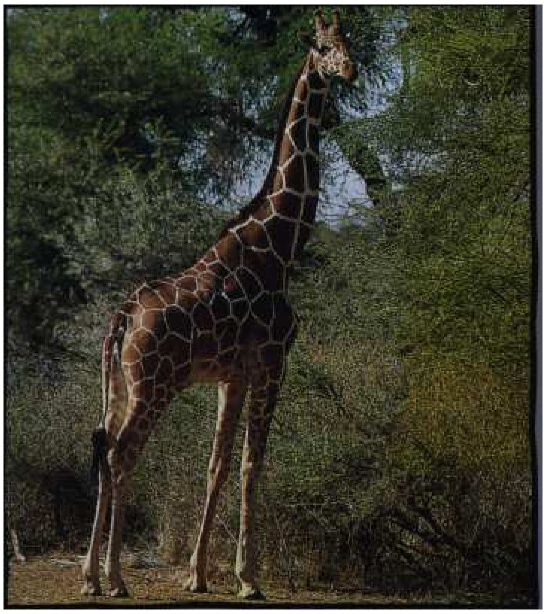


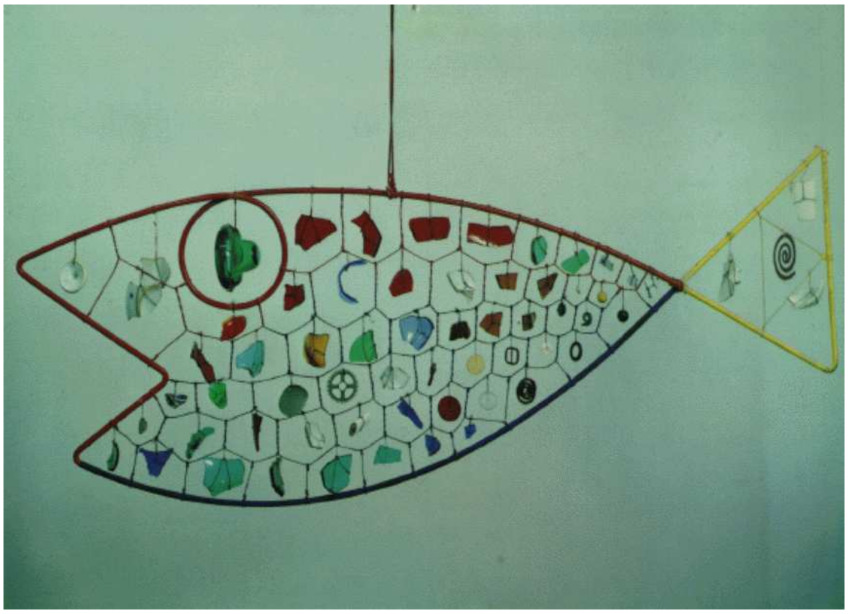
Jean-Daniel Boissonnat

INRIA Sophia-Antipolis

Une structure géométrique universelle

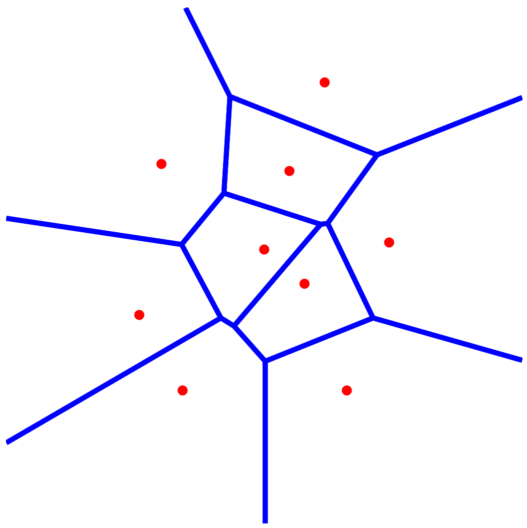
- Associée à des phénomènes de croissance
- Objet de nombreuses métamorphoses
- Redécouverte de nombreuses fois



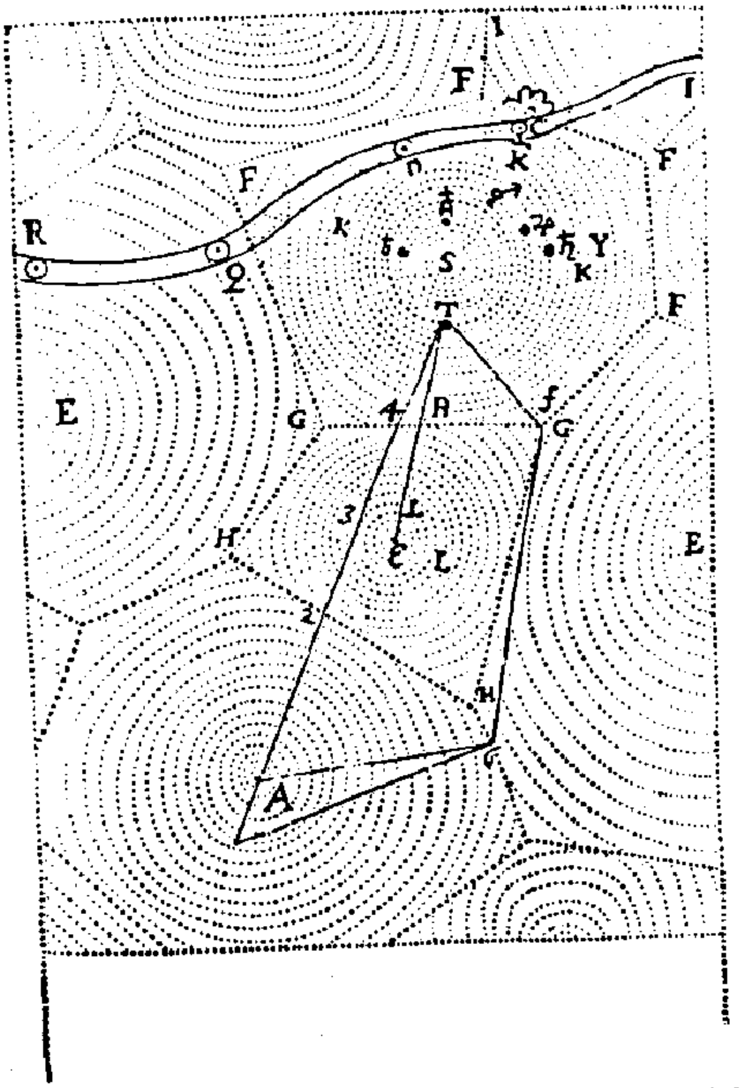


Un objet mathématique étudié depuis Descartes

- Front d'ondes
- Structure combinatoire
- Complexité et algorithmes

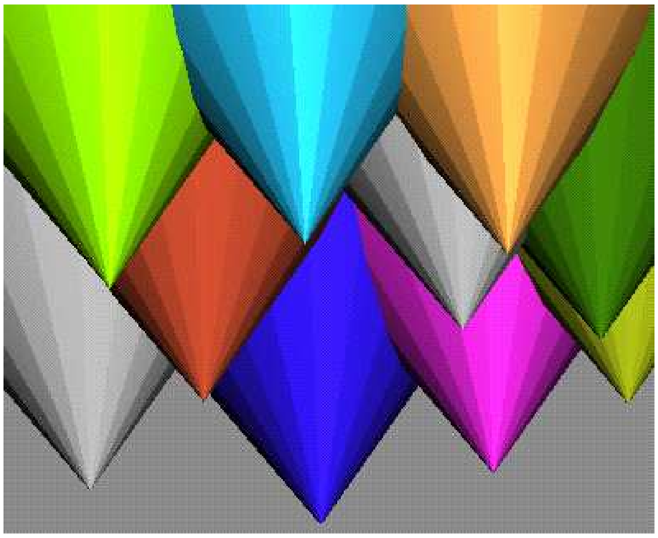
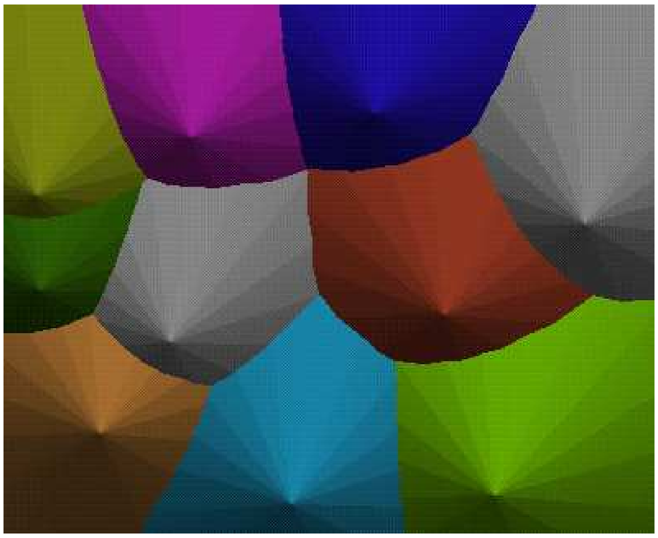
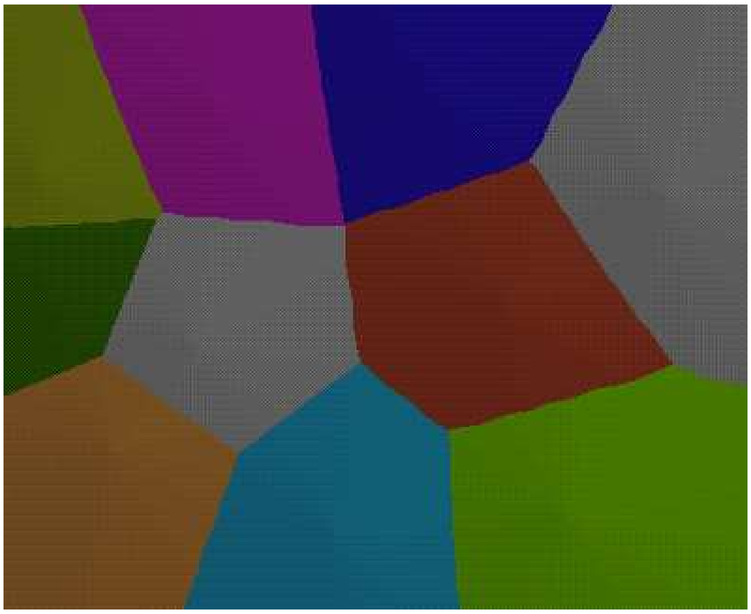


central en géométrie algorithmique



La disposition de la matière dans le système solaire et ses environs
(Descartes 1644)

Relèvement dans l'espace

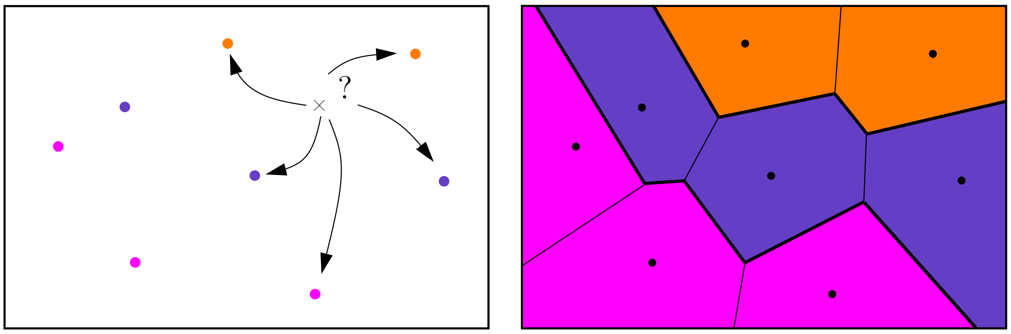




Une structure de données utile

- Recherche de plus proches voisins
- Modélisation géométrique
- Maillages pour le calcul scientifique
- Placement et déplacement d'objets

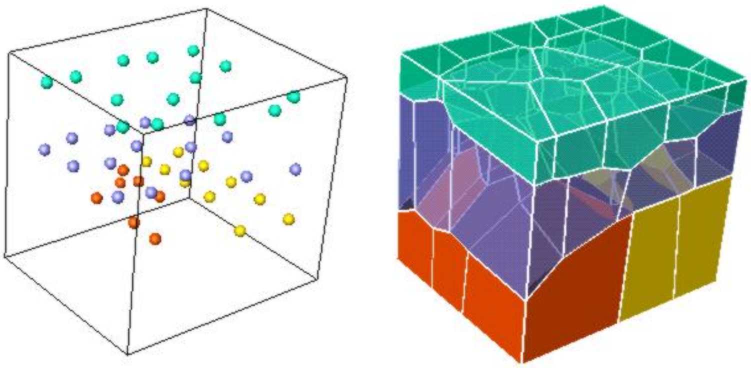
Interpolation

○ : Un point prend la couleur de la donnée la plus proche



○ Partition de l'espace par le diagramme de Voronoi

○ Fusion des cellules ayant la même couleur

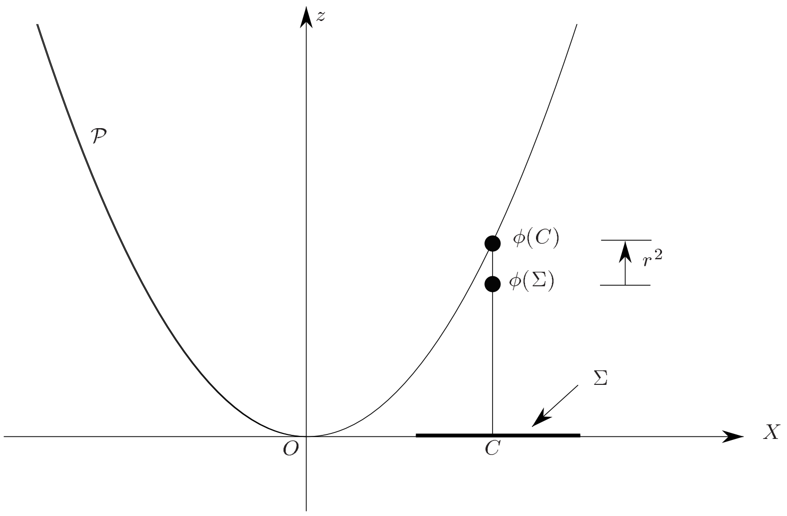


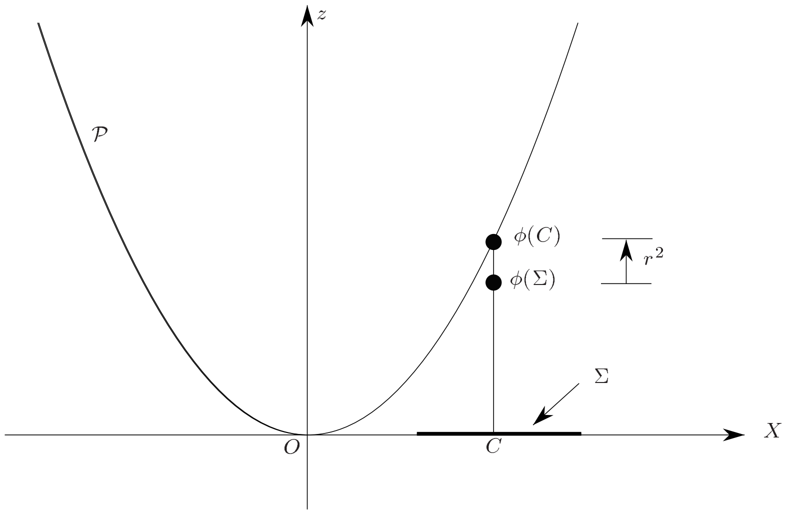
Diagrammes de Voronoï et polytopes

Un autre relèvement dans l'espace

L'espace des sphères

cercle $\Sigma(X) = XC^2 - r^2 = 0$ du plan	$\longleftrightarrow$	le **point** $(C, \Sigma(O))$ de l'espace



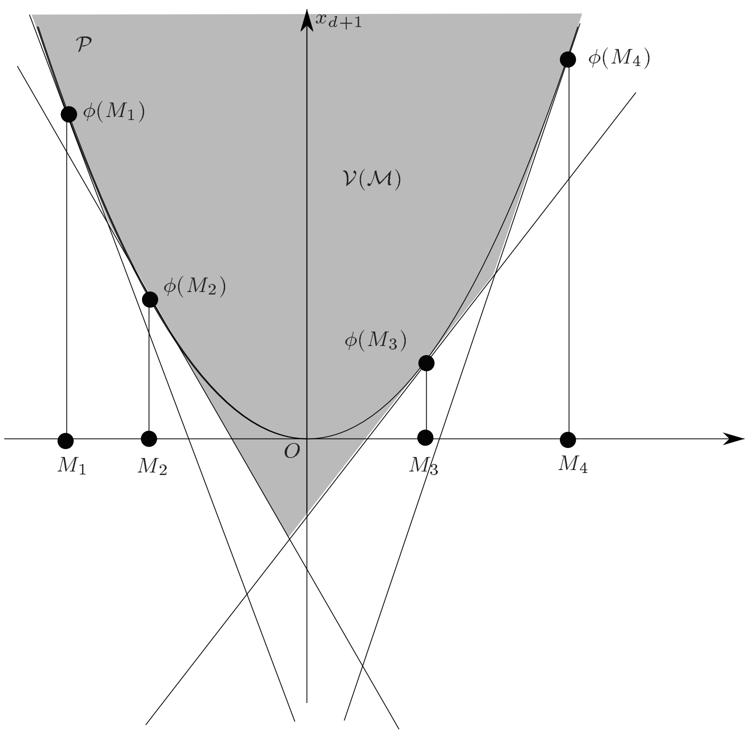


- Cercles de rayon nul $\longleftrightarrow$ paraboloïde de révolution $\mathcal{P}$
  $z = x^2 + y^2$

- Cercles passant par M_0 $\longleftrightarrow$ plan Π_0
  tangent en $\phi(M_0)$ à $\mathcal{P}$

- M_0 à l'intérieur de Σ $\longleftrightarrow$ $\phi(\Sigma)$ au dessous de Π_0

- Diagramme de Voronoï $\longleftrightarrow$ polytope



La construction s'étend en dimensions supérieures

Complexité des diagrammes de Voronoï

dans le plan : $|Vor(n)| = O(n)$

On déduit de la formule d'Euler

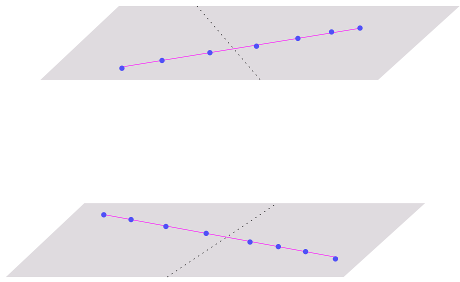
$$s - a + f = 1$$

et du nombre d'incidences sommets-arêtes

$$3s \leq 2a$$

\# sommets $\leq 2n$
\# arêtes $\leq 3n - 1$
une face a en moyenne ≈ 6 côtés

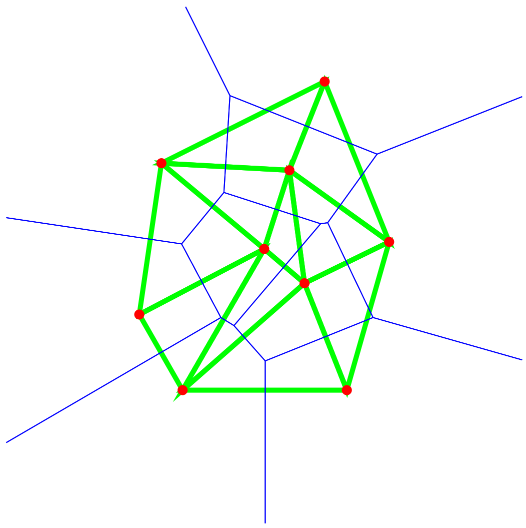
- $d = 3$: $|Vor(n)| = O(n^2)$



Par le théorème sur la borne supérieure des polytopes
(Mc Mullen 1970)

- $d \geq 2$: $|Vor(n)| = O(n^{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor})$

Triangulation de Delaunay

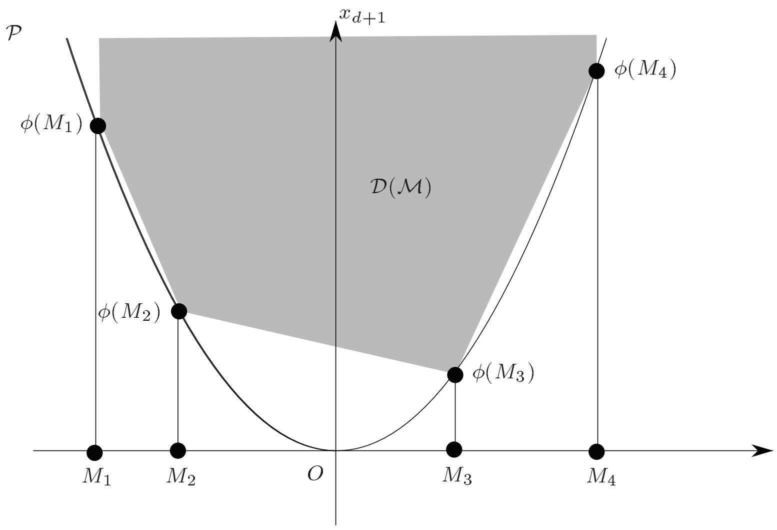


Dual du diagramme de Voronoï

Dans l'espace des sphères

$\mathcal{D}(\mathcal{M})$ = enveloppe convexe de $\phi(\mathcal{M})$

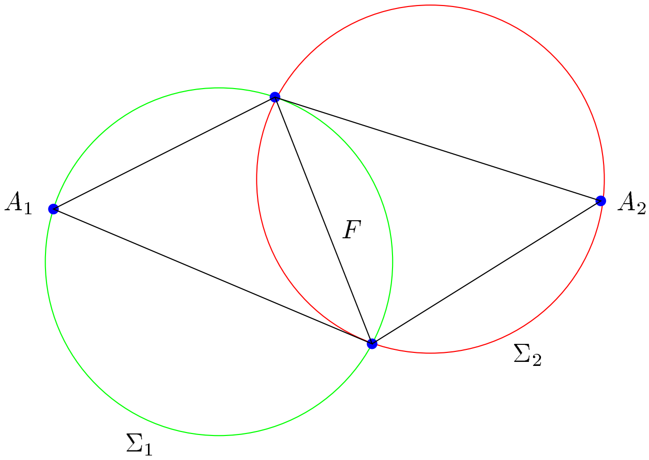
dual de $\mathcal{V}(\mathcal{M})$



Propriété caractéristique :

L'intérieur de chaque cercle circonscrit à un triangle ne contient pas de site

Régularité locale :



$\Sigma_1(A_2) > 0$

$\Sigma_2(A_1) > 0$

Caractérisation locale :

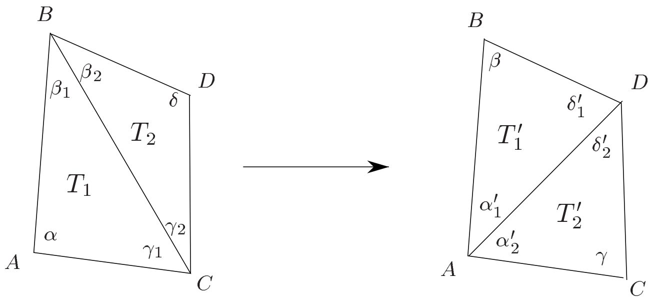
Toutes les paires de triangles adjacents de $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ sont régulières si et seulement si $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ est une Triangulation de Delaunay de $\mathcal{M}$

Une triangulation optimale

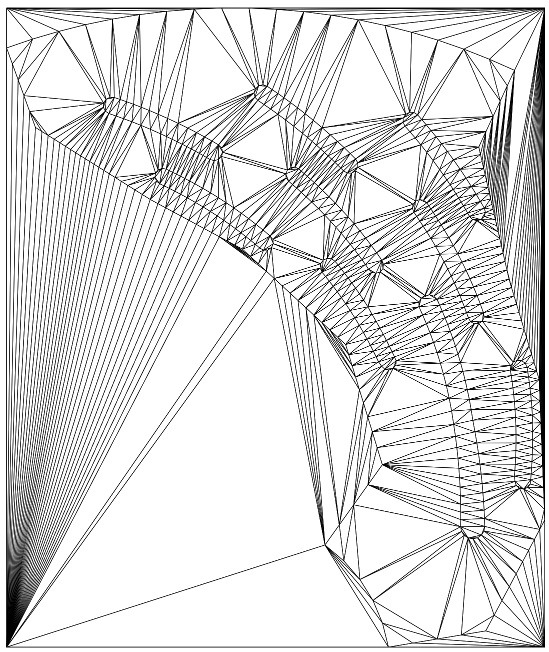
$\mathcal{D}el(\mathcal{M})$ est, parmi toutes les triangulations $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}$, celle qui maximise

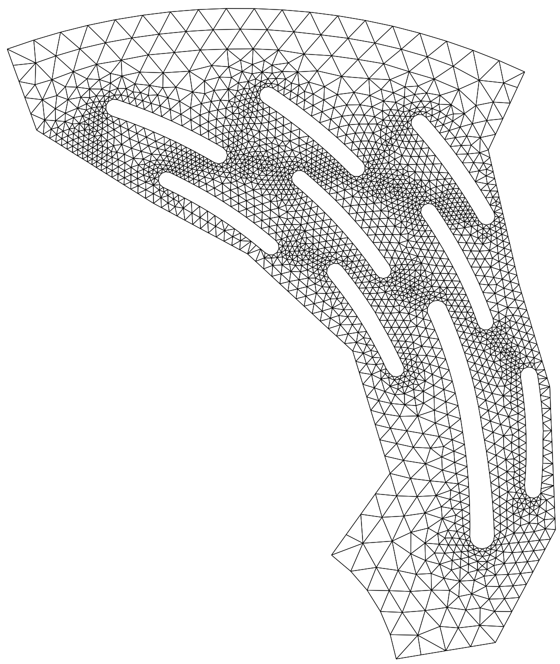
$$Q(\mathcal{T}(\mathcal{M})) = (\alpha_1, ..., \alpha_{3t}) \text{ avec } \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{3t}$$

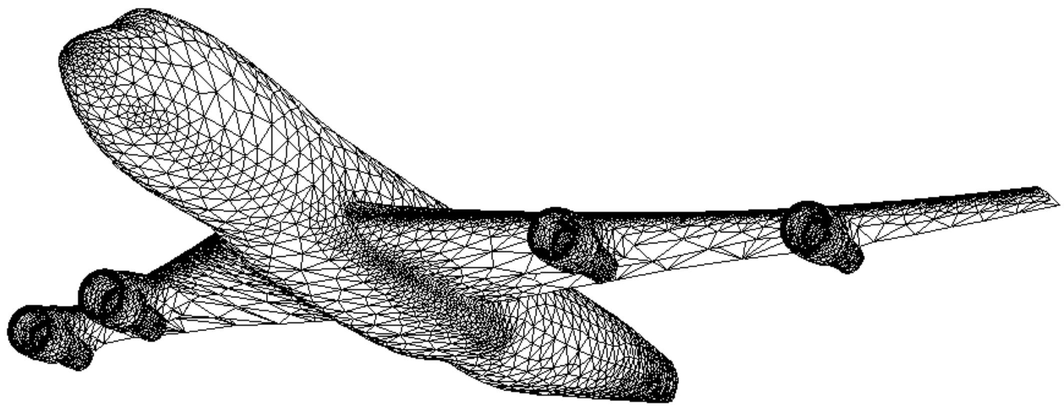
où les α_i sont les angles des t triangles de $\mathcal{T}(\mathcal{M})$.

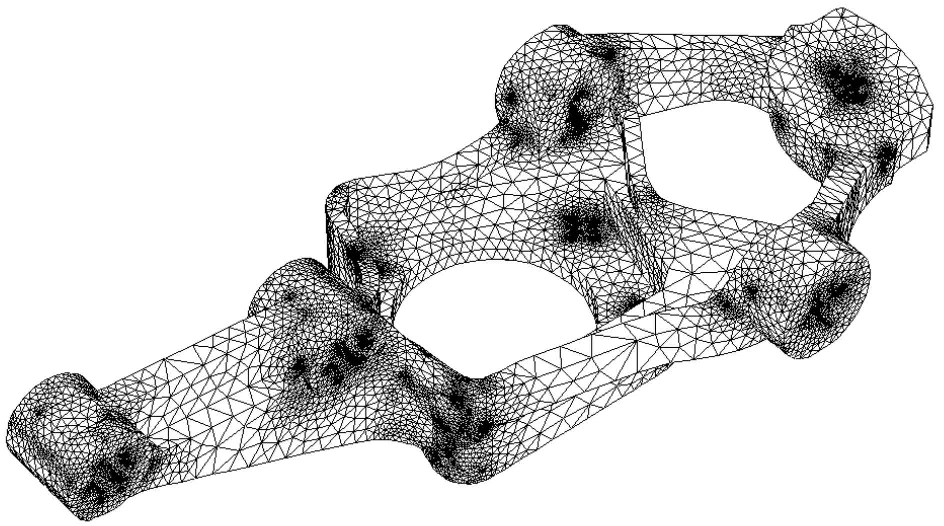


Maillages









Modèles de complexité

dans l'antiquité

le modèle de Platon de la règle et du compas

et à l'heure des ordinateurs

la machine réelle à accès aléatoire

Algorithmes de construction

Un algorithme peu efficace

pour $i = 1, \ldots, n$ {
    pour $j = i + 1, \ldots, n$ {
        pour $k = j + 1, \ldots, n$ {
            $l := 1;$
            tant que $A_l \notin$ cercle$(A_i A_j A_k)$ et $l \leq n$ {
                $l := l + 1;$
            }
        }
    }
}

Complexité : $O(n^4)$

Temps de calcul : pour $10\,000$ points : $10^5 - 10^9\ s \gg$ 1 jour
pour $100\,000$ points $10^8 - 10^{13}\ s \gg$ 3 ans

Quelques paradigmes algorithmiques

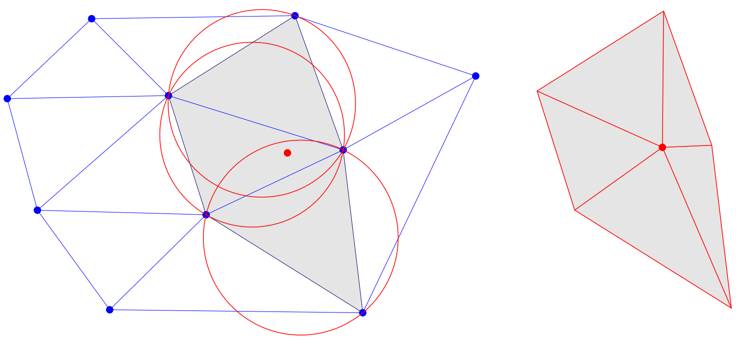
Déterministes	Probabilistes (randomisés)
Statiques	Dynamiques
Evalués au pire	pour des distributions particulières des entrées
	en fonction de la taille réelle de la sortie

Algorithme incrémental

Insertion d'un nouveau point M_i

1. **Localisation :** trouver tous les triangles en conflit avec M_i

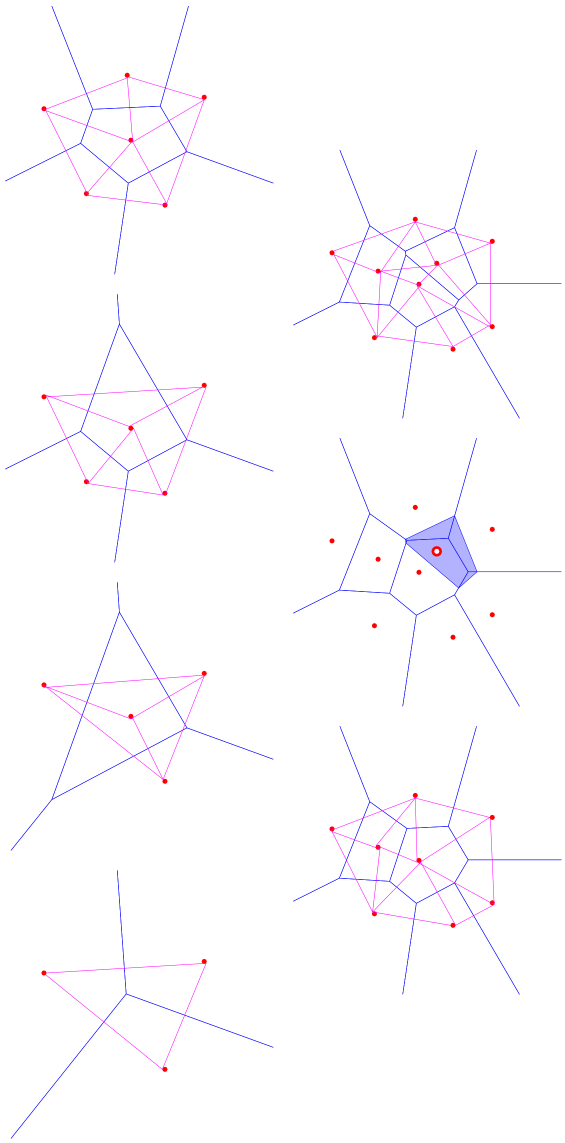
2. **Mise à jour :** construire les nouveaux triangles



◁ Très simple

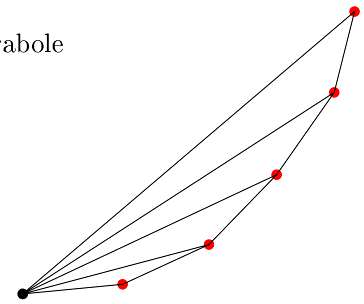
◁ N'utilise que le prédicat `incircle` évaluable à la règle et au compas

◁ Se généralise en toutes dimensions

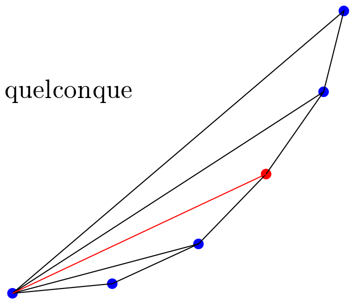


Analyse dans le cas le pire

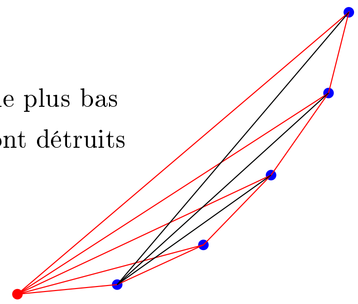
n points sur une parabole



insertion d'un point quelconque
un triangle détruit



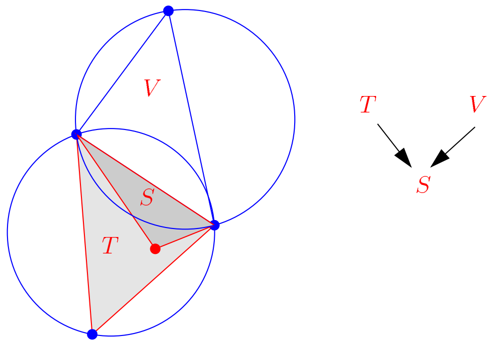
insertion du point le plus bas
tous les triangles sont détruits



Ordre défavorable $\longrightarrow$ coût $\Theta(n^2)$

Localisation : l'arbre de Delaunay

Mémorise l'historique de la construction



Les conflits sont trouvés par un parcours de l'arbre de Delaunay

Analyse randomisée

Hypothèse sur l'ordre d'insertion : toutes les permutations des points sont supposées équiprobables

en revanche, **aucune** hypothèse n'est faite sur la distribution spatiale des points

L'algorithme est **déterministe** et calcule la triangulation de Delaunay des points donnés

Seul le temps de calcul dépend des choix aléatoires et sera analysé **en moyenne**

L'algorithme randomisé construit la triangulation de Delaunay de n points du plan en temps $O(n \log n)$ et utilise un espace mémoire $O(n)$, ce qui est optimal

Coût des mises à jours et taille de l'arbre de Delaunay

$$\begin{aligned} \text{E(\# triangles créés à l'étape } k) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_k} \text{proba } (T \text{ créé à l'étape } k) \\ &= \frac{3}{k} |\mathcal{T}_k| \\ &\leq 6 \end{aligned}$$

\# triangles supprimés à l'étape k = # triangles créés -2

E(# total triangles créés et supprimés) $= O(n)$

E(# nombre d'arcs de l'arbre) $= O(n)$

Coût des localisations dans l'arbre de Delaunay

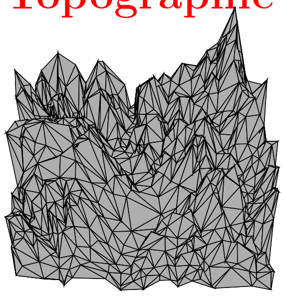
E(# triangles créés à l'étape k en conflit avec le n-ième site)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_k} \text{proba } (T \text{ créé à l'étape } k) \times \text{proba } (M_n \in \Sigma_T)\\
&= \sum_{T\in\mathcal{T}_k} \text{proba } (T \text{ créé à l'étape } k) \times \text{proba } (M_{k+1} \in \Sigma_T)\\
&= \tfrac{3}{k}\ \text{E}(\#\text{ triangles détruits à l'étape } k+1)\\
&= \tfrac{3}{k}\tfrac{3}{k+1}|\mathcal{T}_{k+1}|\\
&= O(\tfrac{1}{k})
\end{aligned}
$$

Coût de la localisation du n-ième site $= O(\log n)$

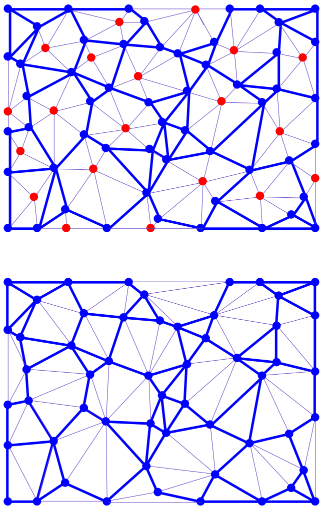
En pratique : pour $100\,000$ points : 10 s

Topographie multi-échelle



Un réseau triangulé irrégulier de terrain

Hiérarchie de représentations.

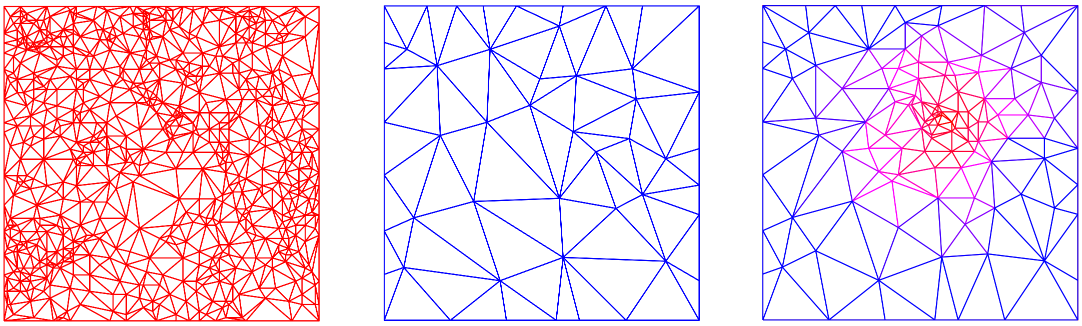


Triangulations de Delaunay

∘ Triangulation initiale : niveau le plus détaillé

∘ Niveau suivant : suppression de points retriangulation

Combinaison de différents niveaux :

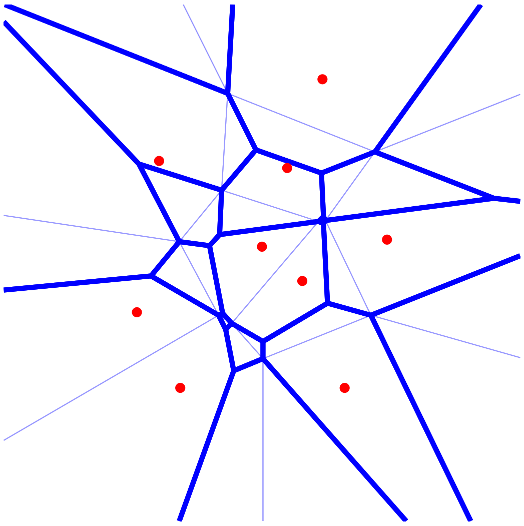


Généralisations des diagrammes de Voronoï

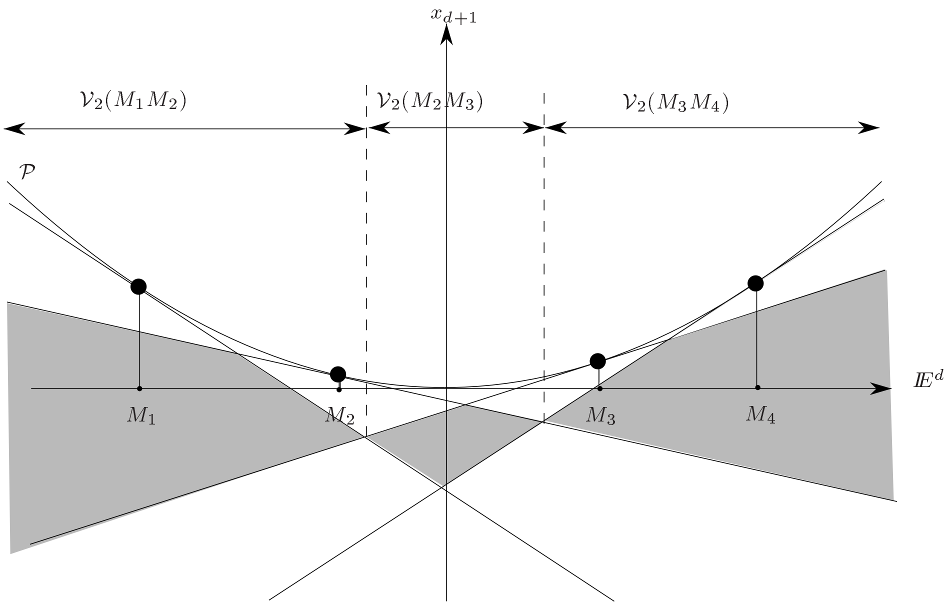
Variations sur
- le nombre de voisins
- la métrique
- les objets

Diagrammes de Voronoï d'ordres supérieurs

Ordre 2

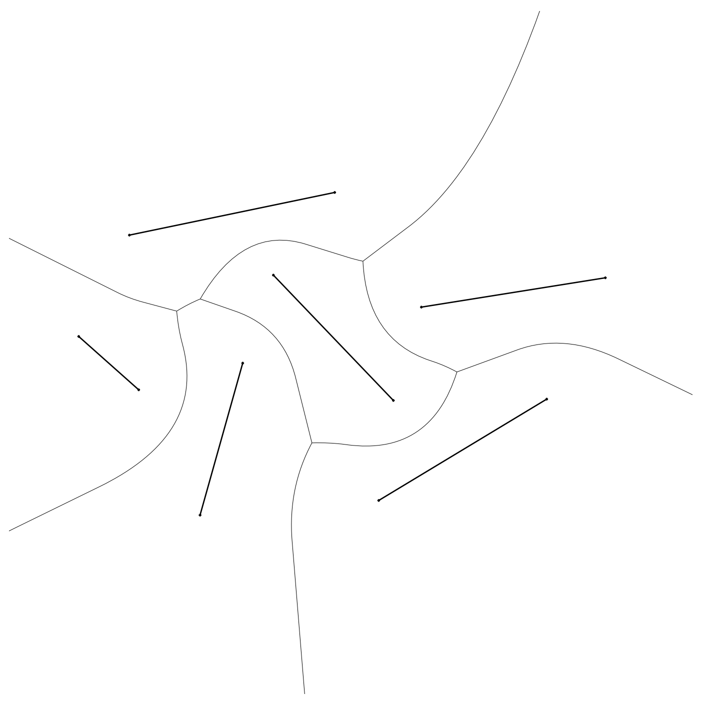


Dans l'espace des sphères

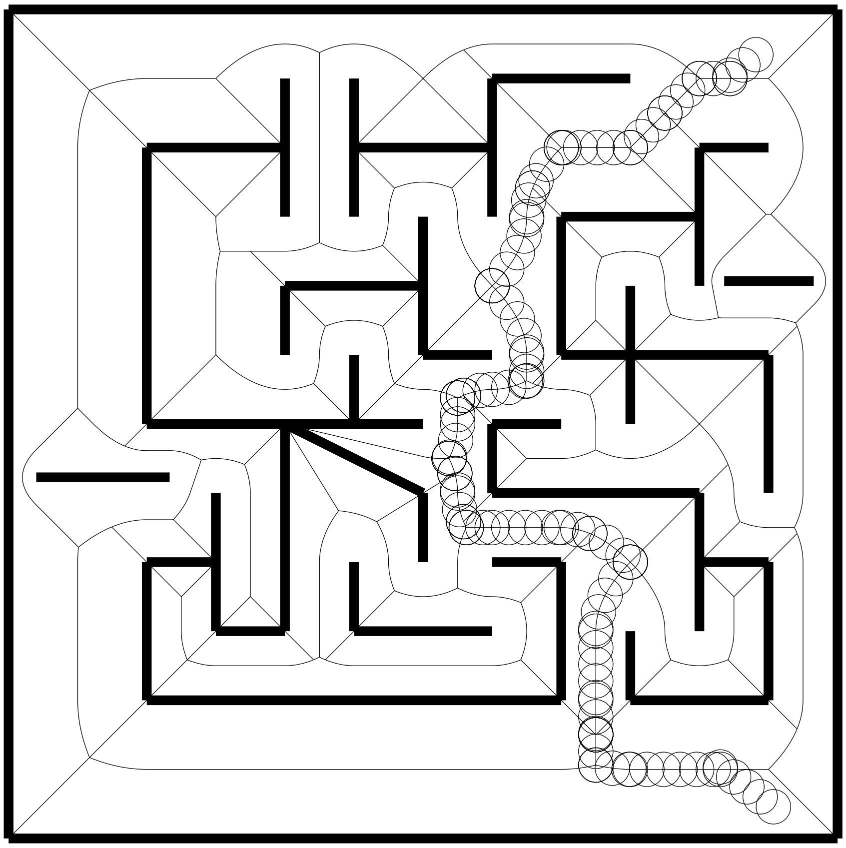


Les cellules du diagramme d'ordre k sont les projections des cellules de niveau k de l'arrangement des hyperplans tangents au paraboloïde

Diagrammes de Voronoï de segments de droite

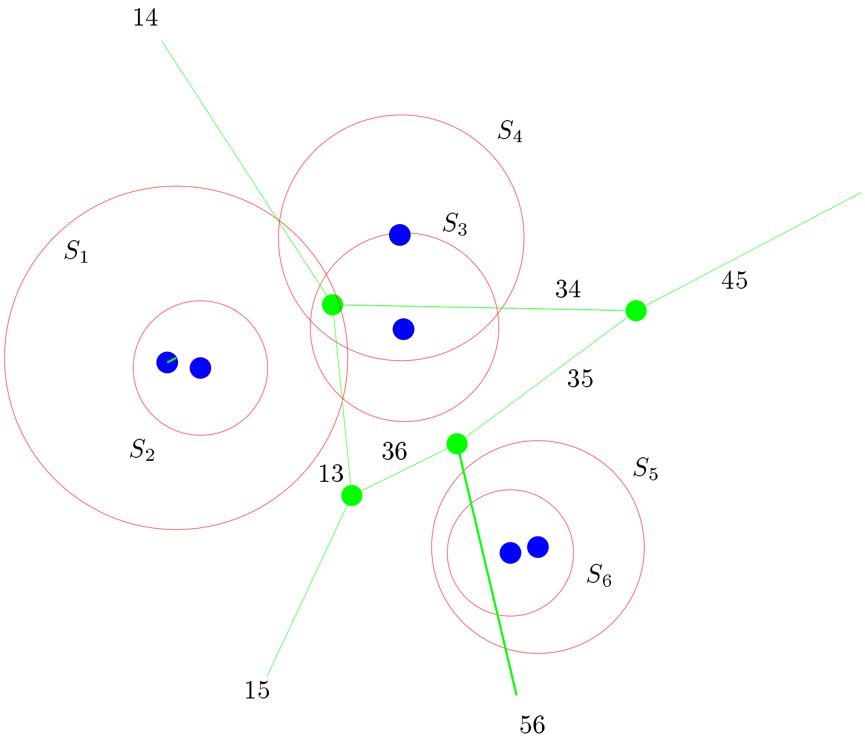


Application à la planification de trajectoires : déplacement d'un disque



Diagrammes de puissance

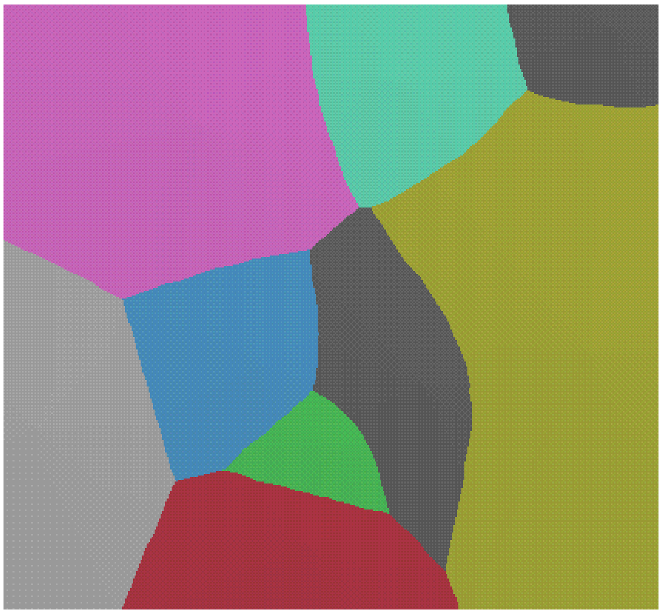
$$\text{Puissance}(M, \Sigma) = MC^2 - r^2$$



Théorème : *Tout diagramme affine est le diagramme de puissance d'un ensemble de sphères*

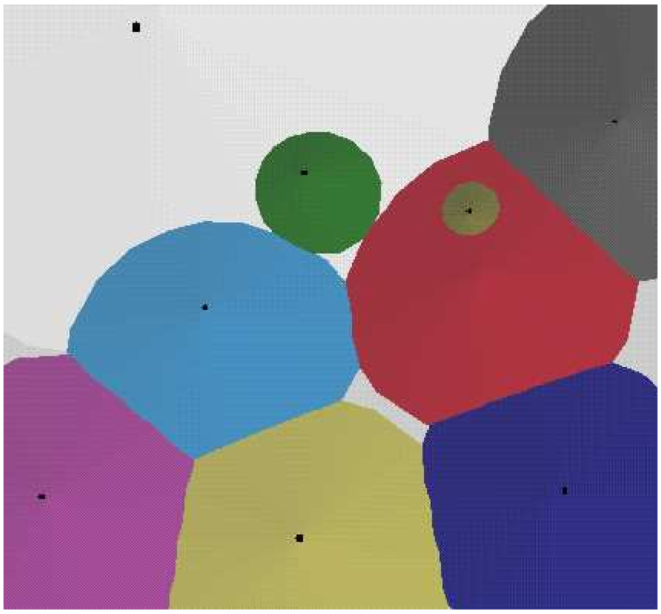
Diagrammes à poids additifs

$$\delta_+(X, M_i) = \|XM_i\| - r_i$$

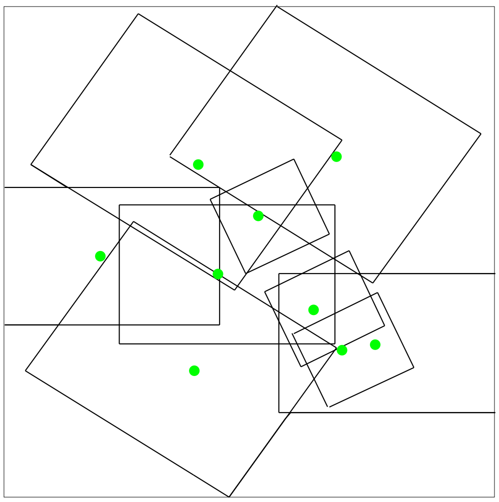


Diagrammes à poids multiplicatifs

$$\delta_*(X, M_i) = p(M_i)\,\|XM_i\|$$

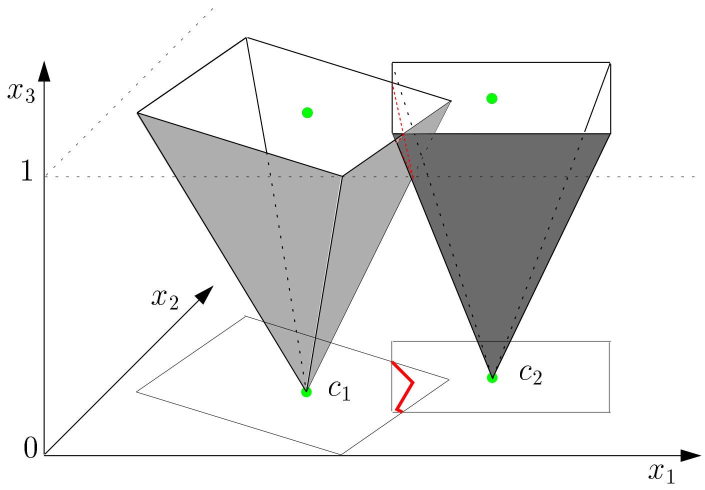


Mosaïques d'images



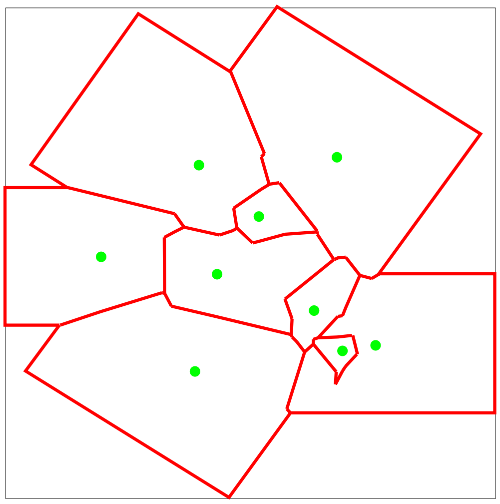
Ensemble d'images (aériennes, satellite)

Extraire la "meilleure" information (meilleure au centre d'une image)



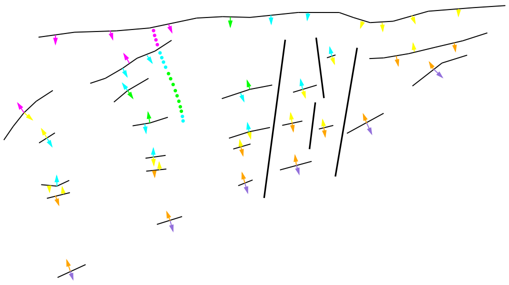
cône dans $\mathbb{R}^3$

- *sommet au centre*
- *hauteur 1 au bord*

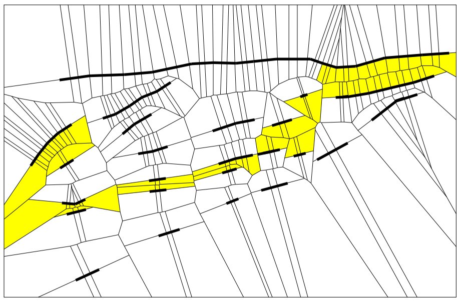


carte recherchée = projection de l'enveloppe inférieure des cônes

Reconstruction de structures géologiques

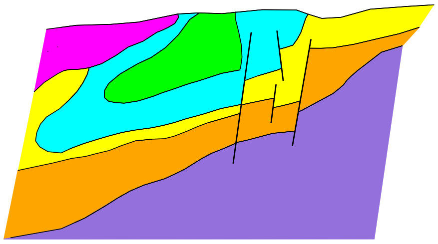


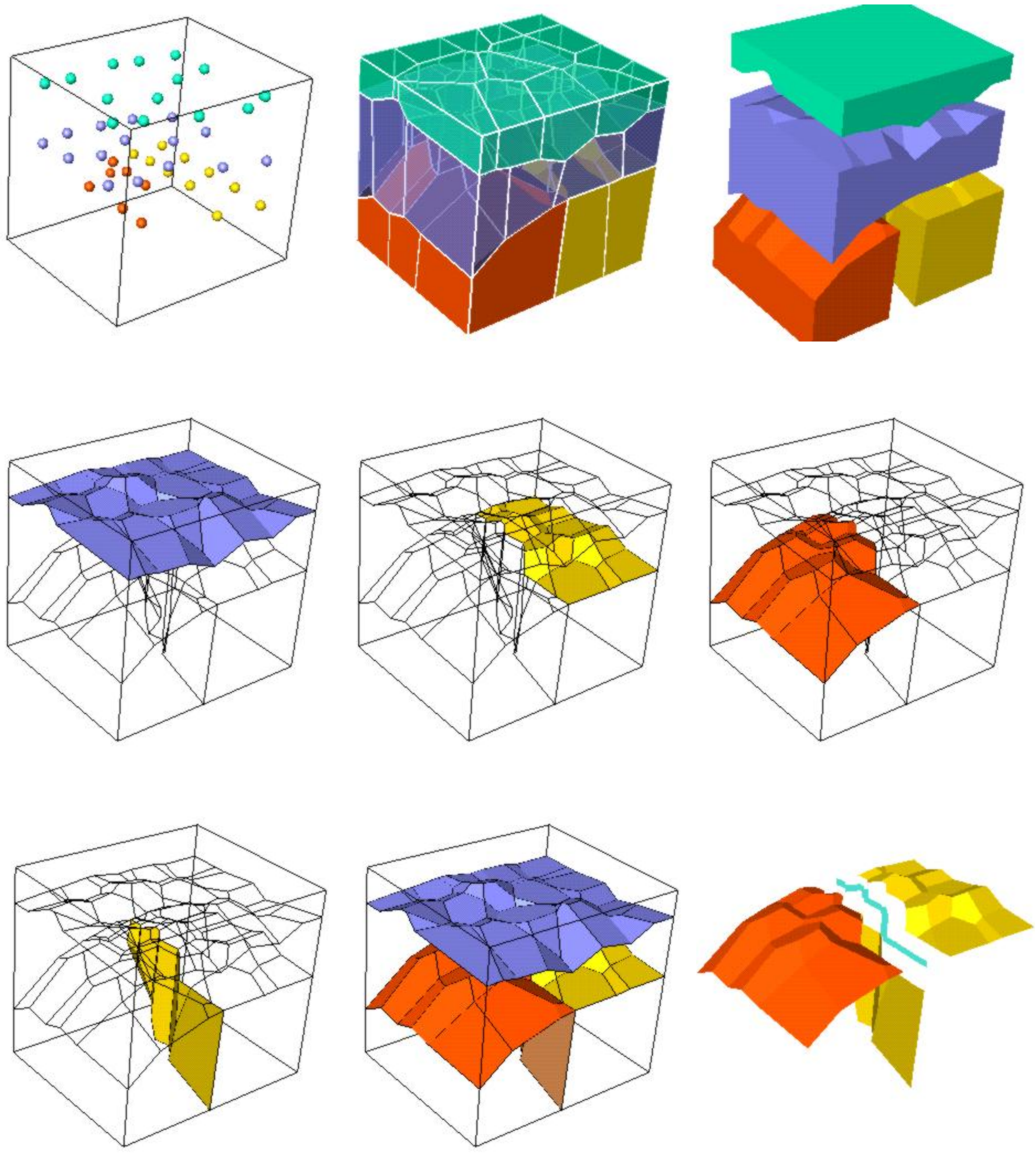
Données géologiques incomplètes et hétérogènes (carte géologique, sondages, données sismiques,...)

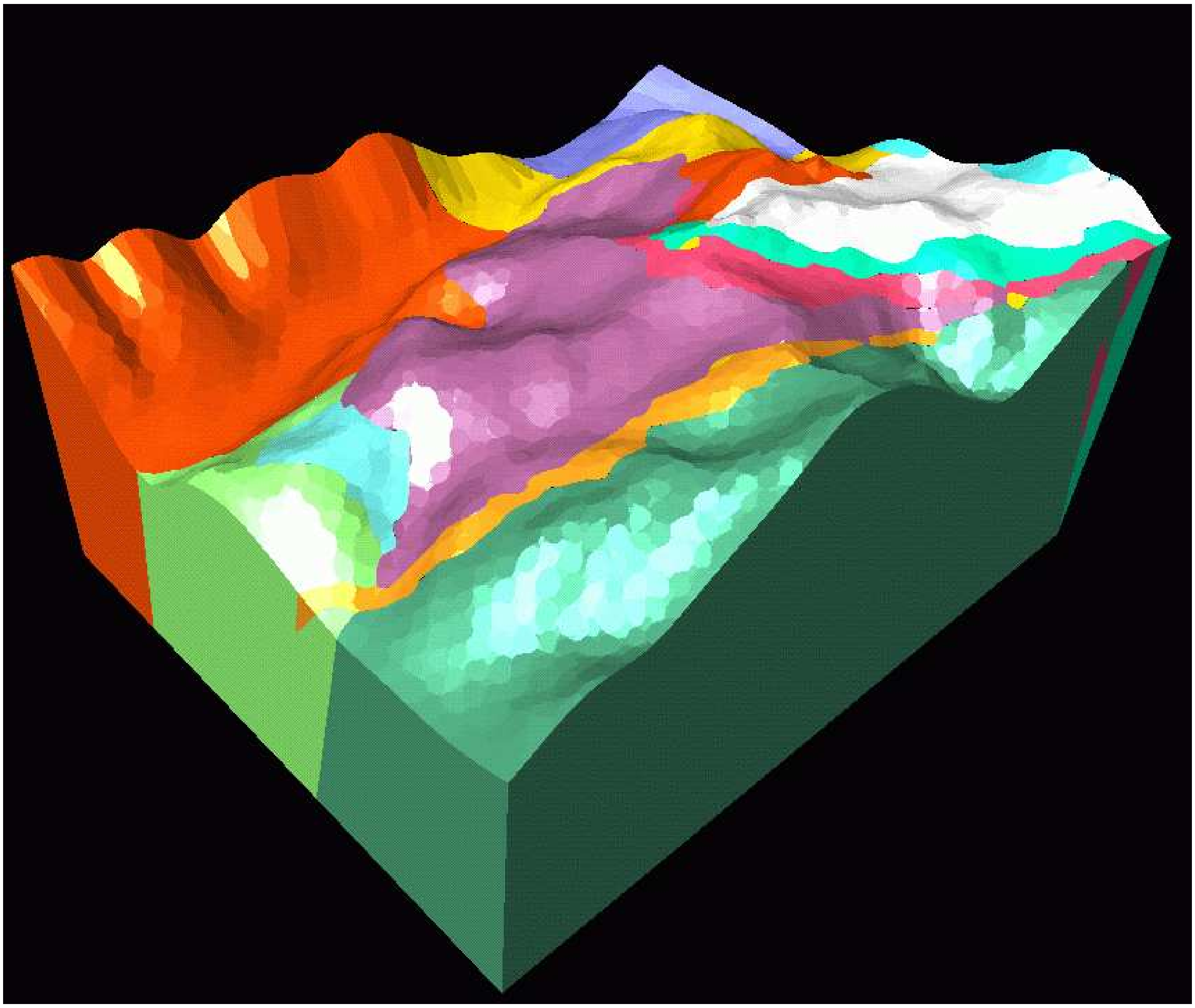


Pour chaque formation

- *Diagramme de Voronoï*
- *Lissage*
- *Insertion des failles*





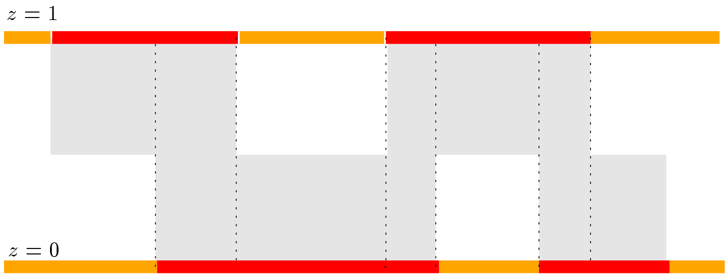


Images médicales

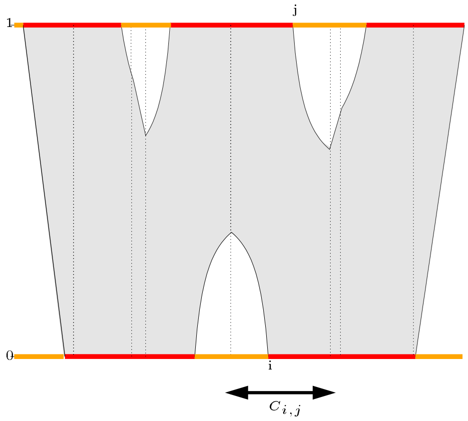
Interpolation de formes à partir de sections

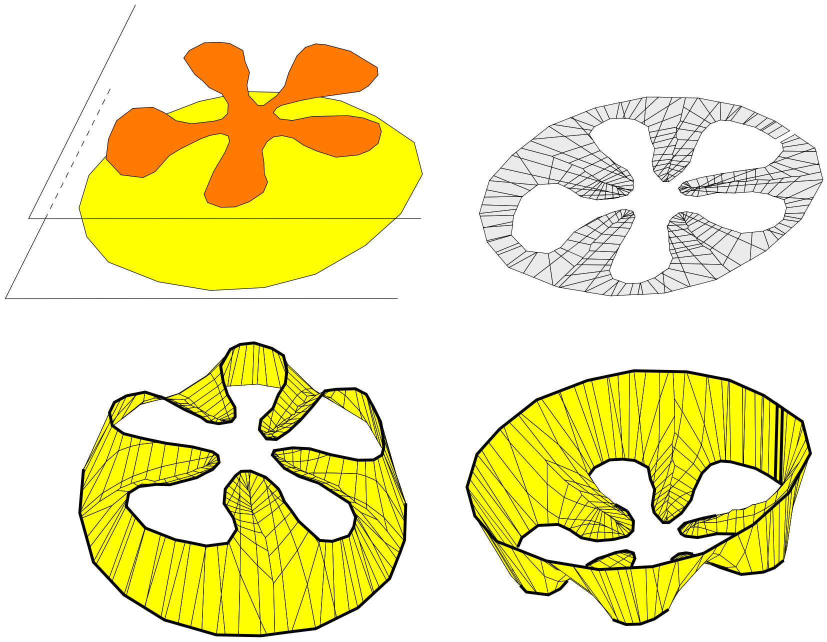
$$f_\rho(X,z) = f_\rho(X,1)\,(z - z_0) + f_\rho(X,0)\,(z_1 - z)$$

Interpolation de la fonction caractéristique

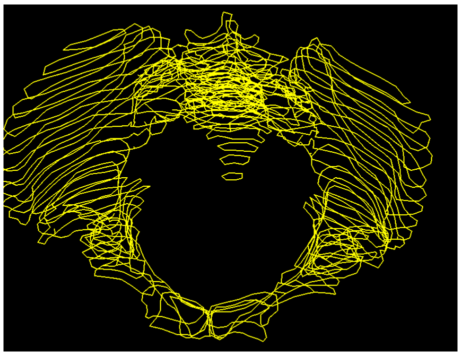


Interpolation de la fonction d'étanchéité (distance aux contours)

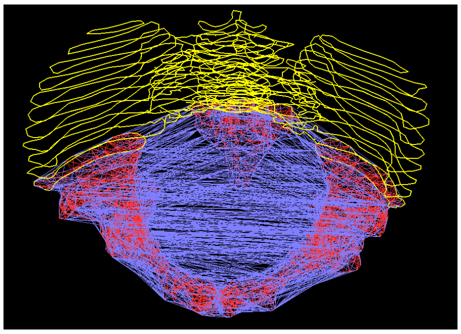




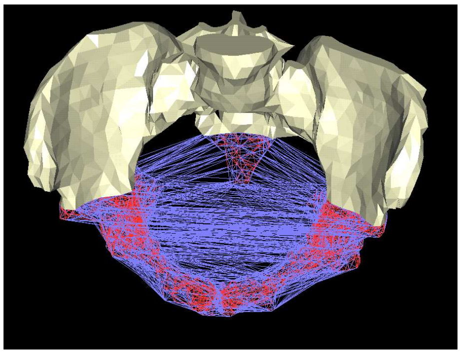
Données (contours), superposition des diagrammes de Voronoï et relèvement



⟵ *Extraction des contours*

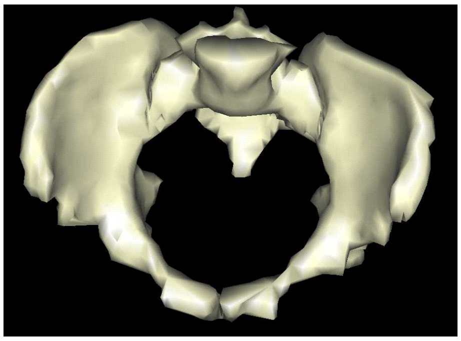


Interpolation des sections



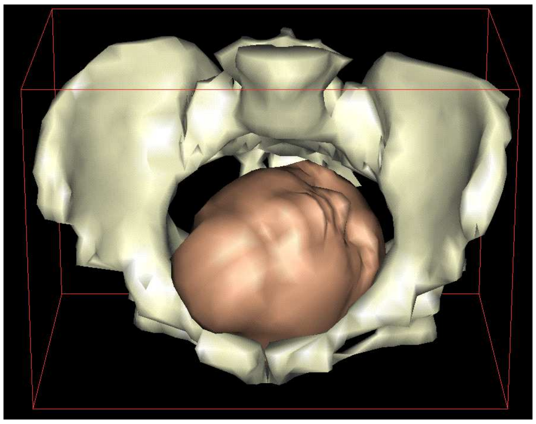
⟵ *Visualisation de l'objet reconstruit*

Lissage ⟶

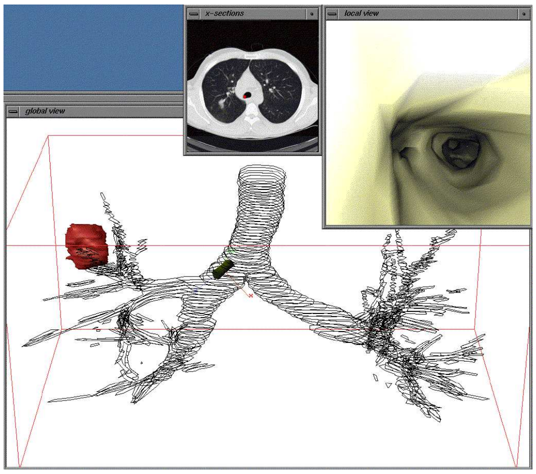


Exemples d'applications

Simulation d'un accouchement



Simulation d'une endoscopie



Bibliographie

Spatial tesselations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams
A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara
John Wiley & Sons, 1992

Voronoi diagrams: a survey of a fundamental geometric data structure
F. Aurenhammer
ACM Computing Surveys, vol.23, 1991

Computing in Euclidean Geometry
chapitres 2 (Bern et Eppstein) et 6 (Fortune)
Lecture Notes Series on Computing, Vol. 1, World Scientific, 1995

Handbook of Discrete and Computational Geometry
chapitre de Fortune
Goodman et O'Rourke, Ed., CRC Press LLC 1997

Géométrie algorithmique
J-D. Boissonnat & M. Yvinec
Ediscience International 1995

Triangulation de Delaunay et maillage
P-L. George & H. Borouchaki
Hermès 1997

On growth and form
D'Arcy Thompson
Cambridge university Press 1917
Edition abrégée en français, Le Seuil, 1994