# Géométrie Algorithmique 2000

23-27 octobre 2000

## Résumés des exposés

(ordre alphabétique sur le premier auteur)

### Le complexe de visibilité 2D dans CGAL

*Pierre Angelier*

Le complexe de visibilité d'une famille de $n$ convexes d'intérieurs disjoints dans le plan permet entre autres de répondre à des requêtes de visibilité ou de calculer des facteurs de forme. Le concept voisin de pseudo-triangulation a été utilisé pour calculer une couverture polygonale des $n$ convexes.

Nous avons implémenté le calcul du complexe de visibilité à l'aide de l'algorithme optimal en temps et en espace de Pocchiola et Vegter [PV96]. Notre exposé s'attardera plus sur les questions d'implémentation que sur l'aspect algorithmique. Le design que nous avons choisi s'inspire fortement de celui des surfaces polyhédriques 3D de CGAL.

Le prédicat principal utilisé lors de l'algorithme est celui donnant le signe du déterminant de deux vecteurs formés par deux bitangentes définies par quatres convexes. Pour des convexes polygonaux ou des cercles ce prédicat est relativement facile à évaluer de manière exacte. Mais les choses se compliquent pour des objets à peine plus compliqués comme des ellipses.

[PV96] M. Pocchiola and G. Vegter, Topologically sweeping visibility complexes via pseudo-triangulations, in *Discrete Comput. Geom.*, 1996, 16:419-453.

### Les coordonnées locales basées sur le diagramme de Voronoï pour un ensemble de points et segments de droites

*François Anton, Darka Mioc et Christopher M. Gold*

L'interpolation des voisins naturels introduite par Sibson est basée sur la quantification du voisinage du point où l'on veut interpoler une grandeur physique par rapport aux points donnés voisins. Cette quantification du voisinage est basée sur les coordonnées locales de ce point définies par rapport aux points donnés voisins. Dans le plan euclidien, la coordonnée locale d'un point par rapport à un point donné voisin est le quotient de l'aire que le point volerait à ce voisin s'il était ajouté au diagramme de Voronoï par l'aire totale qu'il volerait à tous ces voisins. La notion de voisinage sur laquelle reposent ces coordonnées locales est celle induite par le diagramme de Voronoï ordinaire (d'un ensemble de points). Les propriétés de ces coordonnées locales ont été étudiées en profondeur par Farin et Piper. Cependant, l'interpolation des voisins naturels basée sur le diagramme de Voronoï ordinaire ne permet pas de produire des discontinuités linéaires (telles que les failles en topographie). Dans cet article, nous étendons la méthode d'interpolation des voisins naturels au cas de données ponctuelles ou linéaires dans le plan euclidien. Dans ce cas, la définition du voisinage est celle induite par le diagramme de Voronoï pour l'ensemble de points et segments de droite donnés. Nous étendons les résultats connus pour l'interpolation des voisins naturels classique, en donnant les formules vectorielles pour les coordonnées locales ainsi que leur dérivées de premier et de deuxième ordres. Nous montrons les applications de cette méthode d'interpolation à la modélisation topographique.

### Les triangulations de Delaunay de points échantillonnant une surface générique sont sous-quadratiques

*Dominique Attali et Jean-Daniel Boissonnat*

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de points de $\mathbb{R}^3$ échantillonnant une surface générique $\mathcal{S}$. Nous montrons que le nombre de tétraèdres de la triangulation de Delaunay de $\mathcal{A}$ est en $\Theta(N\sqrt{(N)})$, où $N$ désigne le nombre de points de $\mathcal{A}$.

Ce résultat est important pour la reconstruction de surfaces à partir de nuages de points. Il fournit une justification supplémentaire à l'utilisation de la triangulation de Delaunay dans les méthodes de reconstruction proposées [A99,ABE98,AB99,BC00a].

Pour établir ce résultat, nous formons deux hypothèses. Nous supposons d'une part que $\mathcal{S}$ est une surface générique. Une surface générique est une surface dont les boules maximales de son complémentaire possèdent un nombre fini de points de contact avec la surface. Une surface générique ne possède ni portions de sphères, ni portions de cylindres.

D'autre part, nous empruntons à Amenta la notion de $\varepsilon$-échantillon [ABE98] et supposons que $\mathcal{A}$ est un $\kappa$-léger $\varepsilon$-échantillon de $\mathcal{S}$. Notons $\mathrm{lfs}(X)$, la distance de $X \in \mathcal{S}$ au centre de la boule maximale le plus proche de $X$. $\mathcal{A}$ est un $\kappa$-léger $\varepsilon$-échantillon de $\mathcal{S}$ si, pour tout point $X$ de $\mathcal{S}$, la boule de centre $X$ et de rayon $\varepsilon\,\mathrm{lfs}(X)$ possède au moins un point de $\mathcal{A}$ et au plus $\kappa$ points de $\mathcal{A}$.

Pour montrer que le nombre de tétraèdres de Delaunay est sous-quadratique en le nombre de points, nous nous appuyons sur un résultat récent sur la convergence partielle du graphe de Voronoï vers l'axe médian [BC00b].

[A98] D. Attali. $r$-regular shape reconstruction from unorganized points. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 10:239–247, 1998.

[ABE98] N. Amenta, M. Bern, and D. Eppstein. The crust and the *beta*-skeleton: Combinatorial curve reconstruction. *Graphical Models and Image Processing*, 60:125–135, 1998.

[AB99] N. Amenta and M. Bern. Surface reconstruction by voronoi filtering. *Discrete Comput. Geom.*, 22(4):481–504, 1999.

[BC00a] J.-D. Boissonnat and F. Cazals. Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions. In *Proc. 16th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, 2000.

[BC00b] J.-D. Boissonnat and F. Cazals. Natural Coordinates of Points on a Surface. Technical report, INRIA, 2000.

### An Elementary Introduction to Nef Polyhedra

*Hanspeter Bieri*

Nef polyhedra have been introduced by Walter Nef in 1978. They represent a simple and natural way to generalize (non-convex) polyhedra - and in particular faces of polyhedra - to d dimensions. A Nef polyhedron is any set $P \subseteq \mathbb{R}^d$ that can be obtained by applying a finite number of set operations complement, union, and intersection to a finite number of (open) linear halfspaces in $\mathbb{R}^d$. Thus every elementary polyhedron is a Nef polyhedron, but a Nef polyhedron does neither have to be closed nor bounded. After comparing Nef polyhedra to other kinds of polyhedra, faces of Nef polyhedra will be considered, and some important operations for Nef polyhedra will be discussed. As especially Computer Science has shown to be interested in Nef polyhedra, we will finally present and compare a number of data structures for their implementation.

### Sur la reconnaissance des plans discrets

*Yamna Boukhatem, Mohammed Mostefa Mesmoudi et Isabelle Debled-Renneson*

Dans sa thése de doctorat Debeled-Rennesson fait une étude des droites et plans discrets en deux et trois dimensions. Elle construit un algorithme performant de reconnaissance de morceaux de plans discrets. Cet algorithme repose sur des conjectures qu'elle a formulé et vérifié par un nombre important d'exemples. Dans cet exposé nous donnons une démonstration mathématique de la conjecture principale de Debled et à partir de cela on peut généraliser cet algorithme à des

morceaux qui ne sont pas forcément rectangulaires.
Le probléme consiste à déterminer si un ensemble de voxels de $\mathbb{Z}^3$ est ou non un morceau de plan discret c'est à dire existe-t-il des entiers $0 \leq a \leq b \leq c$ et $\mu$ tels que $\nu$ soit l'ensemble des solutions de la double inégalité diophantienne

$$\mu \leq ax + by + cz \leq \mu + c - 1 \qquad (*)$$

Plusieurs travaux ont portés sur la résolution de ce problème. Nous citerons par exemple les travaux de J.Françon, J.M.Schramm et M.tajine, qui ont utilisés l'algorithme de Fourrier-Motzkin pour résoudre la double inégalité du type $(*)$ pour les plans et les droites discrètes. La complexité de cet algorithme est de l'ordre de $O(p^{2^n})$ où $p$ est le nombre de points de $\nu$. Y. Gérard a donné, une méthode géométrique pour reconnaître les hyperplans discrets dans $R^n$, son algorithme est de complexité $O(p^{2(n-1)})$. L'algortithme décrit par I. Debled-Rennesson pour les plans discrets présente quelques avantages par rapport à ceux décris plus haut, sa complexité est quadratique en les nombres des points de $\nu$, il est incrémentale et se base sur des notions de la géométrie euclidienne en dimension 2. Mais pour le bon déroulement de l'algorithme, il se limite à des morceaux rectangulaires. Les démonstrations que nous présentons ici font une synthèse de l'algorithme de Debled et montrent, en utilisant la géométrie qui se cache derièure, qu'on peut généraliser cet algorithme à des morceaux qui ne sont pas forcément rectangulaires. D'où l'interêt de ces démonstrations. Nous démontrons alors le théoreme suivant:
**Théoreme:***Soient $S$ un morceau reconnu du plan $P(a, b, c, \mu)$ et $M(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ un point tel que $S' = S \cup \{M\}$ soit convexe. Si $M$ est 1-extérieur à $S$ il existe alors $A, B, C, \mu' \in \mathbb{Z}^4$ avec $A \wedge B \wedge C = 1$ tels que $S' = S \cup \{M\}$ soit un morceau d'un plan $P(A, B, C, \mu')$.*

Ce théoreme assure l'existence du nouveau plan qui contient la surface $S'$ et dans la démonstration on s'intéresse à construire les nouvelles caractéristiques qui permette de reconnaître le morceau $S'$ puis de donné une explication géométrique qui nous permetras de deduire tout les cas possibles.
**La classification AMS:** $11D75, 68T45, 68T15$

## Optimal triangulation of polygons

*Jae-sook Cheong and Siu-Wing Cheng*

In computer graphics, most polygonal surfaces are rendered as a collection of triangles. Rendering a triangle requires the coordinates of its three vertices. Since the speed of rendering is bounded by the data rate, reducing the amount of data will make rendering faster. This can be attained by decomposing a surface patch into *triangle strip(s)* where a triangle strip is an ordered list of triangles such that two consecutive ones share an edge. To display a triangle strip, we can set up a pipeline with two vertices of the first triangle (one being the unshared vertex), and then we only need to transmit one additional vertex to render each subsequent triangle. The ideal case is that one strip suffices.

We study the problem of computing the minimum number of strips for a triangulated polygon with holes. This problem is equivalent to partitioning the dual graph of the triangulated polygon into a minimum number of paths. When the dual graph is a tree, the minimum number of paths can be computed in $O(n)$ time. For the dual graph that contains cycles, we study the special cases of deciding if the dual graph contains a Hamiltonian cycle or a Hamiltonian path. Under a special condition, we can decide in $O(n)$ time the existence of a Hamiltonian cycle, and in $O(n^3)$ time the existence of a Hamiltonian path. The cycle or path, if it exists, can be constructed in the same time bound.

## Plus lointains voisins sur un polyèdre convexe

*Otfried Cheong, Chan-Su Shin et Antoine Vigneron*

Soit $N$ un ensemble de points de $R^3$ formant les sommets d'un polyèdre convexe $P$. Soit $G(N)$ l'intersection du diagramme de Voronoi des plus lointains voisins de $N$ avec la surface de $P$.

Nous présentons un algorithme randomisé incrémental pour calculer une représentation implicite de $G(N)$ dont le temps d'exécution moyen est $O(n \log^2 n)$. Cela permet de trouver tous les plus lointains voisins dans $N$ en temps $O(n \log^2 n)$, et de calculer un 2-clustering de $N$ de diamètre minimal en temps $O(n \log^4 n)$.

### Les processus Reverse Engineering dans l'industrie et les solutions apportées par CATIA V5

*Roland Cheylac*

Description des processus industriels faisant intervenir une composante Reverse Engineering dans le cycle de conception / production.
Les différentes solutions apportées dans CATIA V5.
Le processus de traitement des nuages de points issus d'une digitalisation sera illustré avec les fonctionnalités de Digitized shape Editor application dédiée développée à DASSAULT SYSTEMES PROVENCE.
Quels sont les problèmes techniques difficiles à résoudre.
Une démonstration live sera réalisée.

### Algorithmes de Courbure Discrète

*David Coeurjolly*

Les techniques d'acquisition d'images volumiques s'affinant rapidement, l'image 3D devient une modalité très utilisée lors de l'analyse de comportements ou de propriétés physiques d'objets réels. À l'origine, ces techniques prédominaient dans le domaine médical avec des méthodes d'acquisition telles que l'imagerie par résonance magnétique ou encore le scanner X. Cependant, le champ d'applications de ce modèle est en constante expansion. Par exemple, Météo-France l'utilise dans le cadre d'une analyse d'échantillons de neige en vue d'une paramètrisation de plate-forme de modélisation d'avalanches.

En ce qui concerne l'analyse de ces images discrètes, de nombreux outils du modèle discret sont utilisés pour extraire de l'information. Parmi ces outils, les opérateurs de type différentiels (dérivée, courbure...) sont des descripteurs de forme privilégiés. Lors de la construction de ces opérateurs venant des mathématiques du continu, deux approches sont possibles :

- la première consiste à plonger les données dans le modèle continu par des processus d'approximation ou de paramétrisation d'objets continus. Une fois ce plongement effectué, nous pouvons alors appliquer les outils continus.
- la seconde consiste à redéfinir les opérateurs dans le modèle discret de manière à rester consistant avec ce modèle.

Nous proposons d'étudier des algorithmes basés sur la seconde approche. En effet, les changements de modèles, par exemple du discret au continu, introduisent des erreurs parfois inacceptables. Une réponse à ce problème dans la théorie de l'interpolation a été de proposer de nombreux algorithmes en laissant le choix à l'utilisateur de trouver l'algorithme approprié à ses données. Nous nous plaçons dans le cadre où l'outil que l'on doit fournir ne doit pas nécessiter l'ajustement de paramètres et ainsi ne pas demander à l'utilisateur d'effectuer une décision qui influerait sur le résultat.

Après avoir présenté les différentes approches existantes pour le calcul de courbure de courbes 2D et 3D, nous proposons un algorithme purement discret optimal en temps.

Nous verrons ensuite une extension de notre algorithme pour calculer des courbures sur des surfaces discrètes.

### Isotopies de graphes planaires avec applications à la métamorphose

*Éric Colin de Verdière*

Étant donné un graphe planaire $G$, une isotopie de $G$ est une déformation d'un plongement de $G$ en un autre plongement. Notre étude des isotopies est initialement motivée par des applications à la métamorphose (morphing).

Soient deux plongements $\Gamma$ et $\Gamma'$ de $G$ dans le plan tels que les deux faces externes sont incidentes aux mêmes sommets de $G$, ceux-ci étant situés aux mêmes positions dans les deux plongements. L'objectif est alors de donner une construction algorithmique d'une isotopie, c'est-à-dire une famille continue de plongements $\Gamma_t$, $0 \leq t \leq 1$, avec $\Gamma_0 = \Gamma$ et $\Gamma_1 = \Gamma'$.

Notre approche du problème de calcul d'une isotopie repose sur l'idée physique suivante. Fixons les sommets extérieurs de $\Gamma$, et remplaçons par la pensée les arêtes non incidentes à la face externe par des ressorts (de longueurs à vide nulles), les sommets intérieurs pouvant se déplacer en restant fixés à ces ressorts. Tutte a démontré que, dans des conditions raisonnables (graphe 3-connexe, complémentaire de la face externe convexe, constantes de raideur $> 0$), l'équilibre du système physique ainsi créé constitue un plongement : les arêtes ne se croisent pas. Maintenant, si l'on modifie petit à petit les constantes de raideur des ressorts, l'équilibre se déplace ; on peut ainsi déformer le graphe.

Nous calculons, grâce à la correspondance de Maxwell-Cremona, des constantes de raideur de ressorts ("stress") correspondant à l'équilibre $\Gamma$ (resp. $\Gamma'$). Le problème est maintenant d'interpoler les deux familles de constantes de raideur pour passer de $\Gamma$ à $\Gamma'$, sans créer de croisements d'arêtes. Cela se fait sans difficulté par interpolation linéaire si tous les coefficients sont $> 0$. Cependant, cette condition n'est pas toujours réalisable, et dans ce cas le problème n'est pas toujours résolu avec cette approche.

### Rigidity of Graphs as Bar-and-Joint Structures in General Position in $d$-dimensional Space

*Henry Crapo, Emanuela Ughi and Tiong Seng Tay*

A *generically d-isostatic graph* is a graph for which there exist distinct positions for its vertices in a space of dimension $d$, such that its edges, as rigid bars, make it *just rigid*: it is rigid, but removal of any edge permits a relative motion of its parts. Let $\beta(v, d)$ be defined by the formula

$$\beta(v, d) \;=\; dv - \binom{d+1}{2}, \text{ for } d \leq v.$$

A graph with $v$ vertices and $\beta(v, d)$ bars with $d \leq v$ is said to be *d-proper* if it has no proper subset of $v'$ vertices, for some $v'$, such that the induced subgraph has *more* than $\beta(v', d)$ edges. A generically $d$-isostatic graph on $v$ vertices in dimension $d$ is a $d$-proper graph on $\beta(v, d)$ edges. (If a graph on $v$ vertices and $\beta(v, d)$ edges were not $d$-proper, it would have an obviously overbraced subframework, and could not be generically rigid.)

Generically 1-isostatic graphs are precisely all *trees*. The generically 2-isostatic graphs were first characterized by Laman in 1970. The most convenient characterization for our purposes, called 3T2 (1989), is that such a graph has an edge-disjoint covering by three trees, such that each vertex is incident with exactly two of those trees, and with the additional property for *this one* covering, that no subset of the set of vertices is jointly spanned by the subsets induced by two of the trees. The latter condition guarantees that the graph is 2-proper.

This characterization of generic 2-isostatic graphs suggests that generically 3-isostatic graphs should be 3-proper 6T3, that is, they should have a covering by six trees, three of these trees meeting at each vertex, and 3-proper. This is certainly necessary, but far from sufficient. Already in three dimensions, one encounters problems with *hinges*. Equivalent conjectures as to how correctly to count degrees of freedom for generic structures in 3-space were made by Dress and by two of the present authors.

A *simplicial map* sends vertices to vertices, edges to edges, and preserves incidence, but does not necessarily preserve joins: the images of the two ends of an edge *can* be equal, say to a vertex $c$, but the edge still gets sent to some edge incident to $c$. A sharpened conjecture could be phrased recursively, stating that generically $d$-isostatic graphs with $v$ vertices are those $d$-proper graphs with $\beta(v,d)$ edges that have a *simplicial mapping* to the $d$-dimensional simplex such that the inverse image of any $k$-face, for $1 \leq k < d$, is generically $k$-isostatic. This property may indeed be necessary, but is still *not* sufficient.

We describe the progress to date on improving the conjecture.

### Enveloppe convexe et triangulation d'une extension des systémes CC

*Christophe Delpias*

Un système CC est un ensemble de triplets de points satisfaisant cinq axiomes simples. Toute configuration de points du plan en position générale permet de définir un tel système, qualifié alors de réalisable, via le signe d'un déterminant. Un système CC est en fait équivalent à un matroïde orienté uniforme et acyclique de rang 3. À ce titre, ils ne sont pas tous réalisables. Néanmoins, il est possible de définir dans tous les cas leur enveloppe convexe, qui pour un système réalisable coïncide avec celle d'une réalisation, et de la calculer en temps $n \log n$ pour un système sur $n$ points.

Nous nous intéressons à la résolution de ce problème pour des systèmes de rang $r$. Nous proposons une axiomatique pour des $r$-uplets équivalente à celle des matroïdes orientés uniformes et acycliques de rang $r$. Nous montrons que l'enveloppe convexe d'un ensemble de ces $r$-uplets existe, et que l'on peut le trianguler.

### Analyse randomisée des algorithmes en ligne dépendant de l'ordre d'insertion

*Olivier Devillers et Philippe Guigue*

Les méthodes de randomisation ont eu un grand succès en géométrie algorithmique car elles conduisent fréquemment à des algorithmes plus simples à programmer et parfois plus efficaces que leurs équivalents déterministes. Un algorithme est randomisé lorsque celui-ci effectue des choix aléatoires pour parvenir à ses fins, pour la catégorie des algorithmes incrémentaux à laquelle nous nous intéressons, le hasard intervient, par exemple, dans l'ordre d'insertion des données. L'analyse de tels algorithmes est alors faite en moyenne sur les différents ordres possibles. Cependant, choisir un ordre d'insertion aléatoire nécessite d'attendre l'ensemble des données avant de les insérer, ce qui fait que l'algorithme n'est plus en ligne. Une solution possible consiste, cependant, à intercaler un tampon mélangeur de taille $k$ entre le processus qui fournit les données et l'entrée de l'algorithme afin d'effectuer un mélange local de l'ordre initial nous permettant ainsi d'introduire assez de randomisation pour nous garantir une amélioration de la complexité moyenne d'algorithmes en ligne dépendant de l'ordre d'insertion. Ainsi après avoir illustré ce type de technique sur le problème du tri, nous donnons quelques résultats obtenus pour des problèmes plus géométriques tels que la triangulation de Delaunay ou le cloisonnement vertical de segments pour lesquels il existe des algorithmes incrémentaux. Typiquement, pour un algorithme randomisé en $O(n \log n)$ ou $O(n)$, le cas le pire est au moins quadratique et l'utilisation des stratégies proposées permet d'obtenir une complexité $O(\frac{n^2 \log k}{k})$.

### Cylindres de révolution passant par 4 ou 5 points

*Olivier Devillers, Bernard Mourrain, Franco P. Preparata et Philippe Trébuchet*

Nous étudierons dans cet expose quelques propriétés algébriques liées a des contraintes d'appartenance de points à des cylindres de révolution. Dans un premier temps nous nous concentrerons sur l'étude de la famille de cylindre de révolution passant par 4 points et nous établierons les équations algebriques traduisant l'appartenance des 4 points de départ aux cylindres de la famille. Ensuite nous nous attacherons a un probleme de dénombrement, à savoir trouver le nombre de cylindres passant par 5 points donnés. Afin de parvenir a ce resultat nous irons même jusqu'a les calculer explicitement.

## Vers un calcul certifié de l'intersection de deux quadriques

*Laurent Dupont, Sylvain Lazard et Sylvain Petitjean*

La modélisation géométrique est généralement plus naturelle lorsqu'elle est pensée en terme d'union et d'intersection de volumes élémentaires. Le modèle obtenu est alors appelé modèle CSG (pour Constructive Solid Geometry). Cependant, de nombreuses opérations comme la visualisation et le rendu sont plus aisés avec un modèle surfacique appelé BRep (Boundary Representation) qui ne décrit que le bord des objets modélisés. Nous sommes donc amené à transformer des modèles CSG en modèles BRep. Nous nous intéressons en particulier au cas où les primitives de base dans les modèles CSG sont des volumes bornés par des quadriques, c'est-à-dire des surfaces algébriques de degré deux. Pour passer d'un modèle CSG à un modèle BRep, nous devons déterminer les courbes d'intersection entre les différentes surfaces composant le modèle.

Nous présentons un algorithme robuste pour le calcul de l'intersection de deux quadriques. Cet algorithme est fortement inspiré d'une méthode présentée par J. Levin en 1976. Nous avons traité les cas dégénérés et rendu l'algorithme robuste grâce à une technique combinant une arithmétique d'intervalles et des calculs algébriques simples. Nous avons également introduit l'utilisation d'une méthode de Gauss pour la diagonalisation des formes quadratiques, ce qui nous permet de simplifier la forme des expressions non rationnelles apparaissant dans les calculs. Ces simplifications devraient nous permettre, à terme, d'obtenir un algorithme certifiant la topologie des courbes d'intersection de deux quadriques.

## Implicitization approchee de courbes et surfaces

*André Galligo*

Il s'agit, etant donnee une portion de courbe (ou d'une surface) V de $R^3$ donnee par une parametrisation (spline, NURBS), definie sur un domaine compact D, de produire une equation implicite, de petit degre, de courbe ou d'une surface qui approche V.

J'exposerai et je commenteraila methode developpe par T. Dokken de SINTEF (Oslo, Norvege) avec qui nous participons au projet europeen GAIA.

Je presenterai aussi brievement ce projet qui vise des applications en CAO : recherche de lignes de singularites sur une surface et auto-intersections.

## Approximation polygonale des convexes plans

*François Gannaz et Bernard Lacolle*

L'approximation d'un convexe par des polytopes intervient dans différents contextes d'application. Nous considèrerons ici le problème de l'approximation asymptotique par rapport au nombre de sommets ou de facettes. Le critère utilisé sera la distance de Hausdorff sur les compacts de $\mathbb{R}^n$, ce qui nous amènera à présenter brièvement la notion de métrique riemannienne ainsi que le recouvrement optimal d'une surface par des disques.

Le contexte et les principaux résultats étant alors fixés, nous nous intéresserons à des processus permettant d'obtenir une approximation explicite d'un objet convexe de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ en fonction de ses caractéristiques géométriques (normale, courbures...). Si une méthode naïve permet d'atteindre aisément l'ordre de grandeur minimal, la recherche d'une convergence proche de l'optimal nécessite d'autres approches. Enfin ce formalisme sera appliqué au "geometric probing" qui consiste à reconstruire un convexe inconnu par sondages successifs.

1. Gruber, P.M., Aspects of approximation of convex bodies. in *Handbook of convex geometry*, P.M. Gruber & J.M. Wills (eds), Elsevier Science Publ., 1993, 319-1345.

2. Leibon, G. & Letscher,D., Delaunay Triangulations and Voronoï Diagrams for Riemannian Manifolds. *Comp. Geom. 2000*, Hong Kong, China.

3. McClure, D. & Vitale, R., Polygonal approximation of plane convex bodies. *J. Math. Anal. Appl.* **51**, 326-358.

4. Skiena, S.S. Geometric Probing. in *Ph. D. Thesis, Departement of Comput er Science, University of Illinois at Urbana Champaign*, Tech. Report No UIUCDCS-R-88-1425, April, 1988.

### Maillage des courbes implicites

*Pascal Frey, Jérome Turatello*

On rencontre les courbes implicites dans de nombreuses applications. Il est donc intéressant d'en déduire une approximation rapide et précise, par exemple au moyen d'une approximation linéaire par morceaux (*i.e.*, un maillage). Le problème qu'on se pose ici est de partitionner une courbe implicite en segments, de manière à répondre à certains critères spécifiques (longueur du segment proprotionnelle à la courbure locale, contrôle de la variation de taille entre segments adjacents, etc.).

Plusieurs techniques d'approximation des courbes implicites ont été proposées, souvent coûteuses (en temps et/ou en mémoire) et, dans certains cas, imprécises. Nous proposons ici une méthode de "suivi adaptatif" de la courbe. À partir d'un point de départ (dont le choix obéit à certains critères), une case est définie dont un des côtés contient ce point. L'analyse des valeurs aux sommets de la case permet d'identifier le côté par lequel la courbe ressort de la case. Les éventuels cas d'ambiguité géométrique sont résolus en appliquant une rotation d'angle $\theta < 90$ degrés à la case. Il faut noter que la dimension des cases n'est pas arbitraire (sous peine de conduire à un maillage uniforme), elle est liée à la courbure locale de la courbe et à la précision souhaitée et par conséquent cette taille varie sur le domaine. De même l'orientation des cases est dictée par la tangente à la courbe au point considéré. Cette méthode conduit à construire des maillages contrôlés de courbes implicites, en combinant les avantages des méthodes de suivi de contour et d'adaptation locale (vitesse et qualité de l'approximation géométrique).

### Implémentation d'un algorithme de calcul de couverture polygonale

*Xavier Goaoc*

En géométrie algorithmique, il est souvent nécessaire d'exclure certaines configurations dégénérées pour exposer un résultat de manière claire et concise. A l'opposé, une implémentation robuste exige un traitement de tous les cas pouvant se présenter. De nombreux problèmes d'implémentation naissent de cet écart entre le cadre générique dans lequel l'article est écrit et le cadre plus général dans lequel il doit être implémenté. Ce sont ces difficultés que nous allons étudier sur l'exemple de l'algorithme de calcul de couverture polygonale proposé dans [PV]. Nous généralisons cet algorithme défini sur une famille d'objets lisses en position générique au cas des polygones en position générale. Nous considérons les deux approches classiques qui sont d'une part le calcul d'une perturbation ramenant le problème général au problème générique et d'autre part le traitement au cas par cas des dégénérescences. Nous montrons que l'approche par perturbation conduit à des problèmes plus complexe que le calcul de couverture polygonale, mais guide néanmoins l'intuition de manière déterminante pour l'approche au cas par cas.

[PV] M. Pocchiola and G. Vegter. On polygonal covers. In B. Chazelle, J. Goodman and R. Pollack (Proceedings of the 1996 AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, Discrete and Computational Geometry: ten Years Later, July 14–18, 1996, Mount Holyoke College, South Hadley, Massachusetts), editor, *Advances in Discrete and Computational Geometry*, volume 223 of *Contemporary Mathematics*, pages 257–268. AMS, Providence, 1999.

### La construction du diagramme de Delaunay par réduction de lobes

*Pierre Kauffmann et Jean-Claude Spehner*

La réduction de lobes est un algorithme de balayage qui construit le diagramme de Delaunay d'un polygone convexe et qui transforme une triangulation quelconque en celle de Delaunay. Un lobe $l$ d'une ligne polygonale $L$ est une section de sites cocycliques de $L$ telle que les sites voisins des extrémités de $l$ (s'ils existent) ne sont pas dans le disque fermé circonscrit à $l$. Les côtés illégaux d'une triangulation quelconque $T$ peuvent être regroupés en des ensembles convexes appelés nids de côtés illégaux et, en leur appliquant l'algorithme précédent, on transforme $T$ en un diagramme de Delaunay. Si $n$ est le nombre de sites, la complexité de l'algorithme est en $O(n^2)$ mais ses performances pratiques sont très bonnes.

### Découpages et patrons de surfaces triangulées

*Francis Lazarus, Michel Pocchiola, Gert Vegter et Anne Verroust*

Un résultat classique de topologie des surfaces dit que toute surface compacte peut être obtenue en identifiant deux à deux, d'une manière adéquate, les côtés d'un polygone. Ce polygone joue ainsi le rôle de patron de la surface. Pour une surface donnée il est possible de choisir ce patron avec un nombre minimal de côtés et d'effectuer l'identification dans un ordre bien particulier. On parle alors du schéma polygonal canonique de la surface. En considérant le découpage comme l'opération inverse de l'identification il est donc possible de découper toute surface pour obtenir un unique morceau pouvant servir de schéma polygonal canonique. L'intérêt d'un tel découpage réside entre autre dans la possibilité d'établir pratiquement un homéomorphisme entre deux surfaces de même topologie.

Nous présentons deux algorithmes de découpage de surfaces triangulées dans le cas orientable:
- le premier s'inspire directement d'un algorithme de Brahana de 1922. On commence par construire un schéma polygonal minimal que l'on rend ensuite canonique par une suite d'opérations du type couper/coller.
- le second algorithme consiste à découper une à une les poignées de la surface lors d'un parcours récursif de cette dernière. Chaque poignée ainsi découpée contribue à quatre côtés du schéma polygonal. Le polygone est directement obtenu sous forme canonique.

Si n est la complexité de la surface et g son nombre de poignées, ces deux algorithmes calculent un raffinement optimal de taille $O(gn)$ en temps $O(gn)$ de la surface de sorte que le découpage en schéma polygonal canonique puisse s'effectuer le long des arêtes du raffinement. Ces deux algorithmes sont optimaux dans le cas le pire.

### Standards d'échanges de données géométriques et modèle de calcul

*André Lieutier*

Les normes definissant les formats standards d'echanges de donnees en CAO (IGES ou STEP par exemple) definissent sans ambiguite les notions de topologies et de geometries valides. Un seul "flou" subsiste, la notion de tolerance, indispensable en pratique a cause de la precision finie des donnees et des calculs numeriques. Les dificultees pratiques rencontrees dans les echanges de modeles B.Rep., extremement couteuses, refletent en fait cette abscence de specification precise associee a cette notion de tolerance et pose aussi le probleme des specification internes des modeleurs concernant la gestion d'informations geometriques approchees. On presente ici les concepts heuristiques de "tolerant modelling" utilises a cet effet dans l'indiustrie.

Ce probleme est aborde en general sous l'angle de l'implementation, sans remettre en question le modele mathematique classique des B.Rep, qui suppose le calcul exact et la comparaison des reels et des fonctions reelles.

Il est possible de reformuler ces notions dans un cadre mathematique rigoureux coherent a la fois avec un modele de calcul realiste et avec la modelisation du monde physique. Afin d'illustrer la generalite de ce cadre theorique, on montrera le pendant, en theorie des domaines, du theoreme classique de Cauchy-Picard sur l'existence locale de la solution d'une equation differentielle. Cette versoin du theoreme admet des hypothese beaucoup plus faible que son homologue classique et sa demonstration constitue un algorithme realiste, c'est a dire implementable par des calculs sur des informations finies (i.e. des calcul approches).

**Un algorithme pour décider le problème de l'homèomorphisme pour certaines surfaces non compactes sans bord**

*Olivier Ly*

On s'intéresse à une famille de surfaces sans bord non compactes constructives qui généralise strictement la famille des surfaces compactes et celles des surfaces pointées. Ces surfaces sont données par des triangulations infinies, elles-même données comme limites inductives de suites de triangulations finies définies en termes de grammaires de graphes. A cet égard, on établit un algorithme pour décider si deux telles surfaces sont homéomorphes.

Ly, Olivier - "On effective decidability of the homeomorphism problem for non-compact surfaces" - Groups, languages and geometry (South Hadley, MA, 1998), 89–112, Contemp. Math. 250, Amer. Math. Soc.

**Introduction à l'Algèbre de Grassmann-Cayley Application à l'algorithmique en Géométrie Projective**

*Pierre Macé*

L'Algèbre de Grassmann-Cayley est de plus en plus utilisée en stéréo-vision alors qu'elle est presque inconnue en image de synthèse, malgré son intérêt :

- généralité, simplicité de formulation (on peut la pratiquer de façon efficace tout en faisant l'impasse sur la théorie),
- formalisme permettant aussi bien le calcul symbolique que numérique et facilitant la modélisation du raisonnement et donc son automatisation.

Il est possible de définir simplement les opérateurs de cette *algèbre double (join* et *meet)* à partir d'un *crochet* (forme multilinéaire alternée) et en utilisant ce dernier pour introduire une équivalence entre deux *p-vecteurs.* On montre vite que ces opérateurs *duaux* permettent respectivement des sommes directes et des intersections de sous-espaces vectoriels. L'application à la géométrie projective est triviale : le *join* d'un point et d'une droite est le plan qu'ils déterminent, le *meet* d'une doite et d'un plan est leur point d'intersection.

Un certain nombre de résultats concernant la génération ou l'intersection de droites et de plans sont exposés, et il est montré comment l'introduction du plan à l'infini et de la pseudo-orthogonalité permettent de résoudre les constructions élémentaires classiques et de les exprimer en une demi-ligne. On montre enfin, sur des exemples, comment ce formalisme permet de générer automatiquement des algorithmes de construction.

**Tracé de courbes et surfaces implicites**

*Yves Papegay et Mathieu Racois*

Les logiciels de visualisation de courbes et de surfaces traitent en général assez mal le cas des courbes et des surfaces définies implicitement par des systèmes d'équations polynômiales. Parmi les problèmes à résoudre efficacement pour faire mieux, il y en a trois qui sont prépondérants:
- quels points à calculer pour une interpolation facile et fidèle ?
- comment résoudre les équations polynômiales et calculer ces points ?
- comment relier ces points ?

Après quelques expérimentations, nous avons implémenté un petit outil de visualisation qui utilise pour aborder ces trois problèmes, respectivement, des algorithmes de maillage naïfs, une méthode semi-numérique de résolution d'équations dite d'"exclusion", et un outil pour relier les points basé sur le concept de "voisins naturels". Nous présenterons ce petit outil qui produit des tracés encourageants et commenterons ses succès et ses échecs.

**Modeleur géométrique, topologie, robustesse**
*Vladimir Popescu*

La presentation que j'ai l'intention de faire c'est un point de vue sur une methode de prise de decision combinatoire en presence de petites incertitudes numeriques, toujours presentes dans les algorithmes geometriques.

L'idee centrale c'est que toutes les proprietes geometriques doivent etre memorisees d'une maniere combinatoire (explicite) et pas seulement contenues dans la representation numerique de l'objet geometrique, et que ces proprietes doivent etre exploitees d'une maniere complete lors de la mise en oeuvre des algorithmes geometriques.

Domaine concerne: Programmation de logiciels de CAO. Domaines d'application: Modeleur geometrique, Transfer de donnees geometriques.

**CGAL in a nutshell**
*Mariette Yvinec*

CGAL est une bibliothèque de programmes géométriques développée par un consortium de sept équipes de recherches européennes. Le but est de fournir une implementation robuste, efficace et souple des principaux algorithmes et structures de données géométriques afin de favoriser leur diffusion dans les milieux industriels et applicatifs. L'exposé s'efforcera de présenter CGAL, de faire le point sur les nouveautés de la derniere version publique (2.2) et de montrer quelques exemples d'applications développées avec l'aide de CGAL.