Calcul géométrique avec des données incertaines

André Lieutier

Dassault Système

Objectif du travail

Formaliser les spécifications d ’opérateurs géométriques travaillant sur des données incertaines

Avantages :

- modélisation adaptée (en fait on n’a pas le choix)
- Turing-calculable

Inconvénients:

- maths moins habituelles, algo plus compliqués

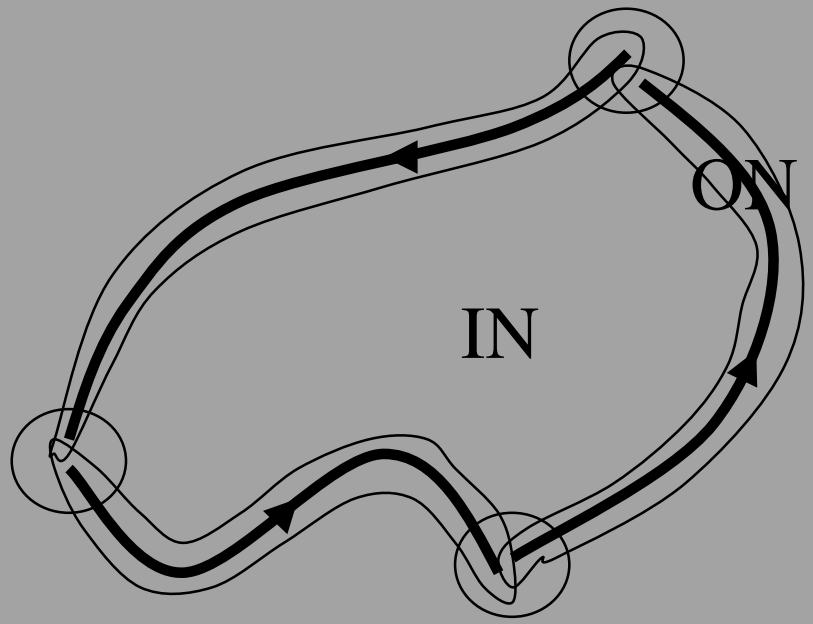
Un plan

- Modélisation et calcul
- Modèles de calcul (et modèles de machine)
- Théorie des domaines et prédicats continus
- Exemples

Modélisation géométrique

- BRep :
  - Imbrication de données numériques (géométrie) et combinatoire (topologie, graphe d ’incidence)
  - Standards d ’échanges de données
- Une entrée d’un opérateur géométrique est le plus souvent le résultat d’une mesure ou la sortie d’un autre opérateur
- On ne peut pas faire l’impasse sur les ***cas limites***

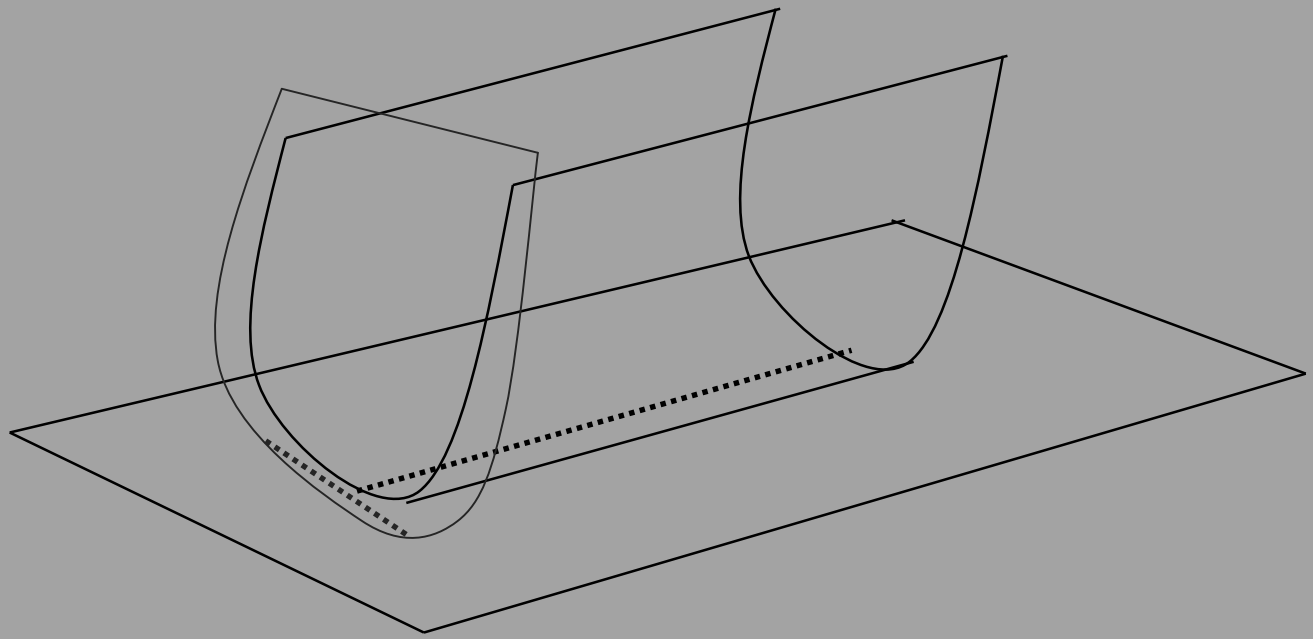
Modélisation



BRep et « tolerant modeling »

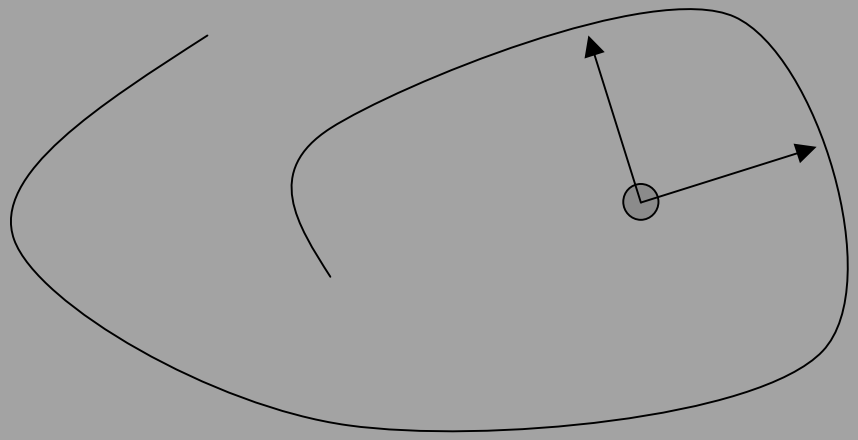
Modélisation et Calcul

- Incohérences induites par les erreurs d'arrondi
- Exemple : Opération booléennes sur les BRep



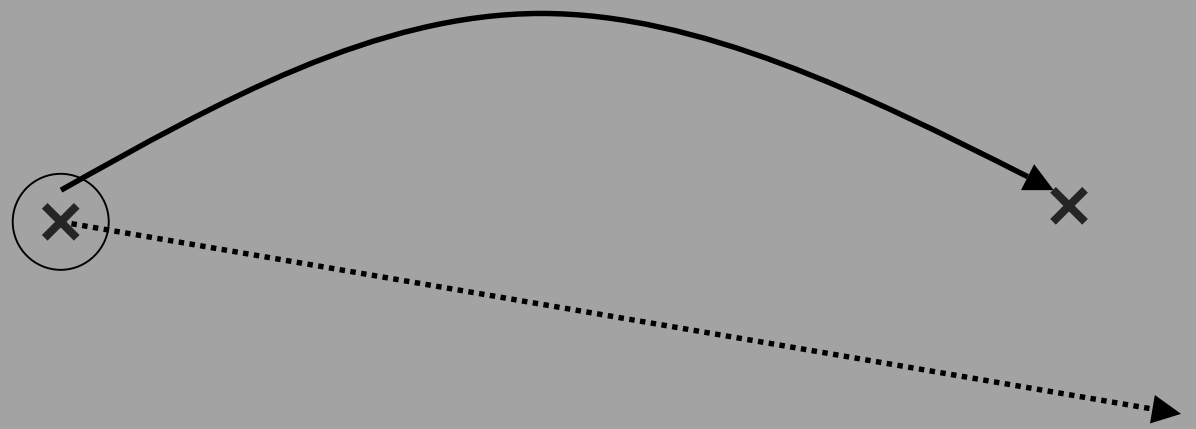
Modélisation et Calcul

- Exemple plus simple : « distance point-courbe »
  - **Entrée** : un point et une courbe
  - **Sortie** : l'ensemble des points de la courbe qui minimisent la distance



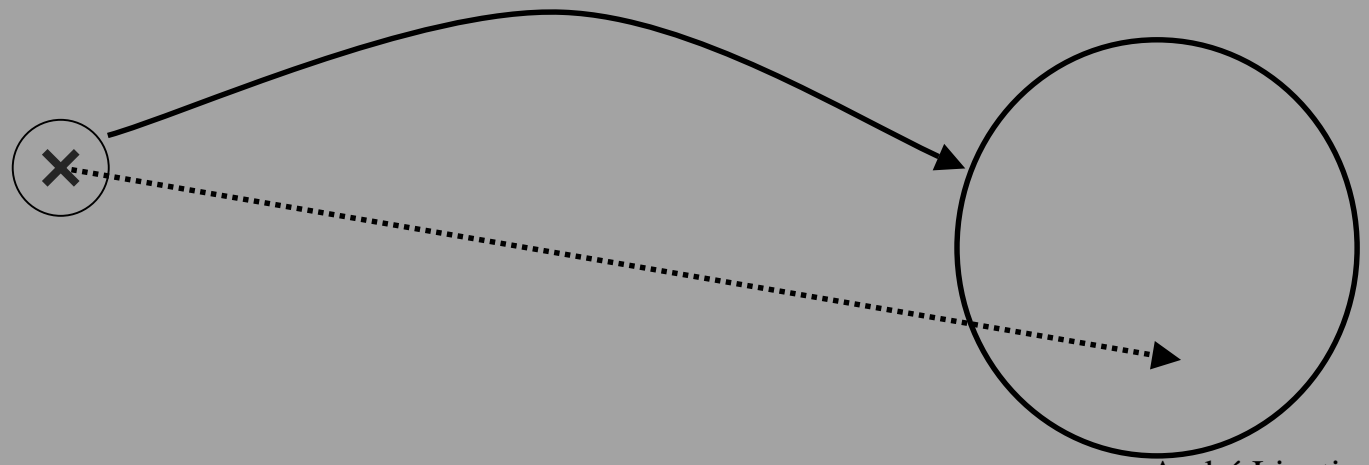
Modélisation et Calcul

- Dans certaines situations il suffit de calculer le résultat *d'une* entrée voisine (triangulation, enveloppe convexe)



Modélisation et Calcul

- En modélisation géométrique il faut (il faudrait) souvent calculer l'ensemble des résultats correspondant aux entrées voisines (i.e. situées dans le « voisinage d 'incertitude »)



Modélisation et Calcul

- Les problèmes évoqués ici sont toujours rencontrés sur les **discontinuités des opérateurs** (pour la topologie de la « carte » choisie)
- Dans les cas continus, le problème se ramène à une étude de conditionnement.

Modèles de calcul (et de machine)

- « Real RAM » (ou modèle BSS)
- machine de Turing (ou équivalent, cf.. « feasible real RAM »):

Modèles de calcul (et de machine)

Turing-calculabilité :

- Ensembles dénombrables (-> calcul exact)
- Ensemble non dénombrables (-> calcul en précision arbitraire, notion d ’approximation, donc de topologie)

Modèles de calcul (et de machine)

L'analyse récursive étudie la **Turing-calculabilité** (et la complexité) d'opérateurs sur des ensembles non dénombrables.

Dans ce contexte, les entrées et les sorties sont représentées par des séquence infinies d'approximation : **approximation pour une métrique ou une topologie donnée**.

Modèles de calcul (et de machine)

Un opérateur *f* est dit calculable si il existe un programme capable de calculer une approximation arbitraire de *f(x)* en utilisant une approximation suffisante de *x*. Il en résulte que :

Calculable => Continu

Théorie des domaines

Un domaine est une structure mathématique bien adapté a la représentation d'informations incomplètes (ou incertaines).

C'est un ordre partiel $(D, \leq)$:

"$A \leq B$" signifie :

« l'information représentée par ***A*** est contenue dans celle représentée par ***B*** ».

Théorie des domaines

Un domaine est muni de la topologie de Scott :

O est un ouvert de ***D*** ssi.:

- $A \in O$ et $A \leq B \Rightarrow B \in O$
- **Pour toute chaîne X, sup(X)** $\in O \Rightarrow X \cap O$ **non vide**

Une fonction entre domaines est Scott continue ssi:

- elle est croissante:

$$A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$$

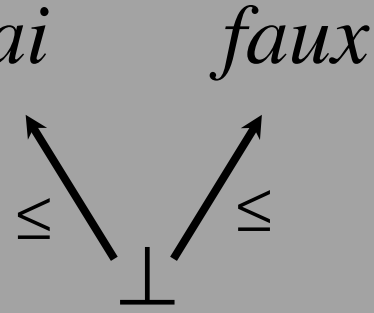
- elle préserve les bornes supérieures :

$$\sup(f(A_i)) = f(\sup(A_i))$$

Théorie des domaines

Un exemple important est le **domaine booléen** :

{vrai, faux, ⊥ } , où ⊥ (“bottom”) signifie “aucune information”.



Tout ouvert contenant ⊥ contient l ’ensemble complet ***{vrai, faux, ⊥ }***

Théorie des domaines

Un autre exemple est le domaine des intervalles I[0,1] des intervalles de réels [a, b] avec $\boldsymbol{0 \leq a \leq b \leq 1}$

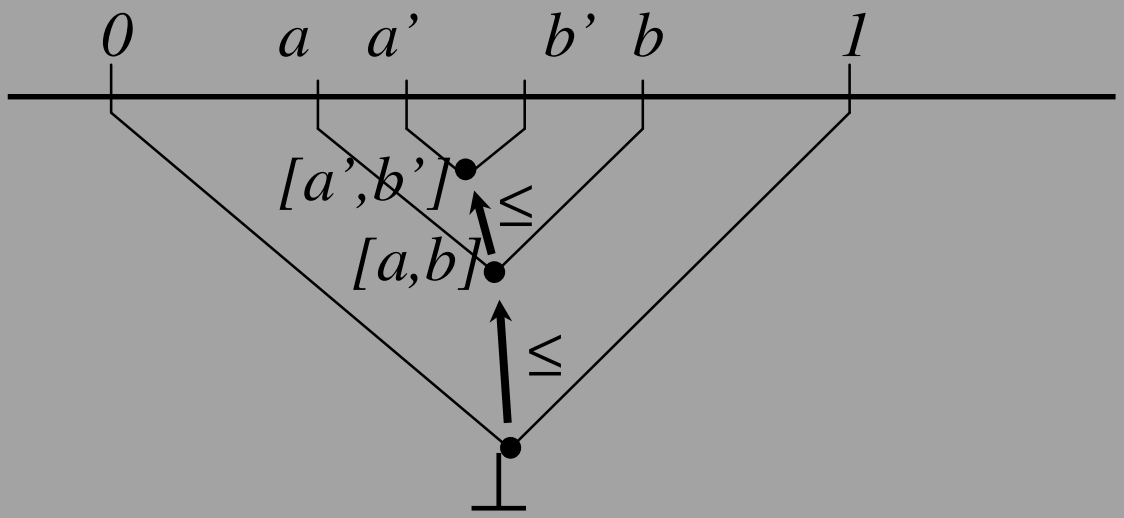
Avec l'ordre d 'information inverse de l 'inclusion :

$$\boldsymbol{[a,b] \leq [a',b'] \Leftrightarrow [a,b] \supset [a',b']}$$

[a,b] représente une information sur un réel $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{a \leq x \leq b}$$

Théorie des domaines



Les éléments maximaux du domaine sont de la forme [x,x] et peuvent être identifiés aux réels de [0,1]

Théorie des domaines

Dans de nombreuses situations, les structures de domaines peuvent servir à définir des approximations continues d'opérateurs discontinus.

Ex1: Neg : [-1,1] ------> {Vrai, Faux}

x ------> (x<=0)

Ex2: [] : R ----------> Z

x----------> [x]

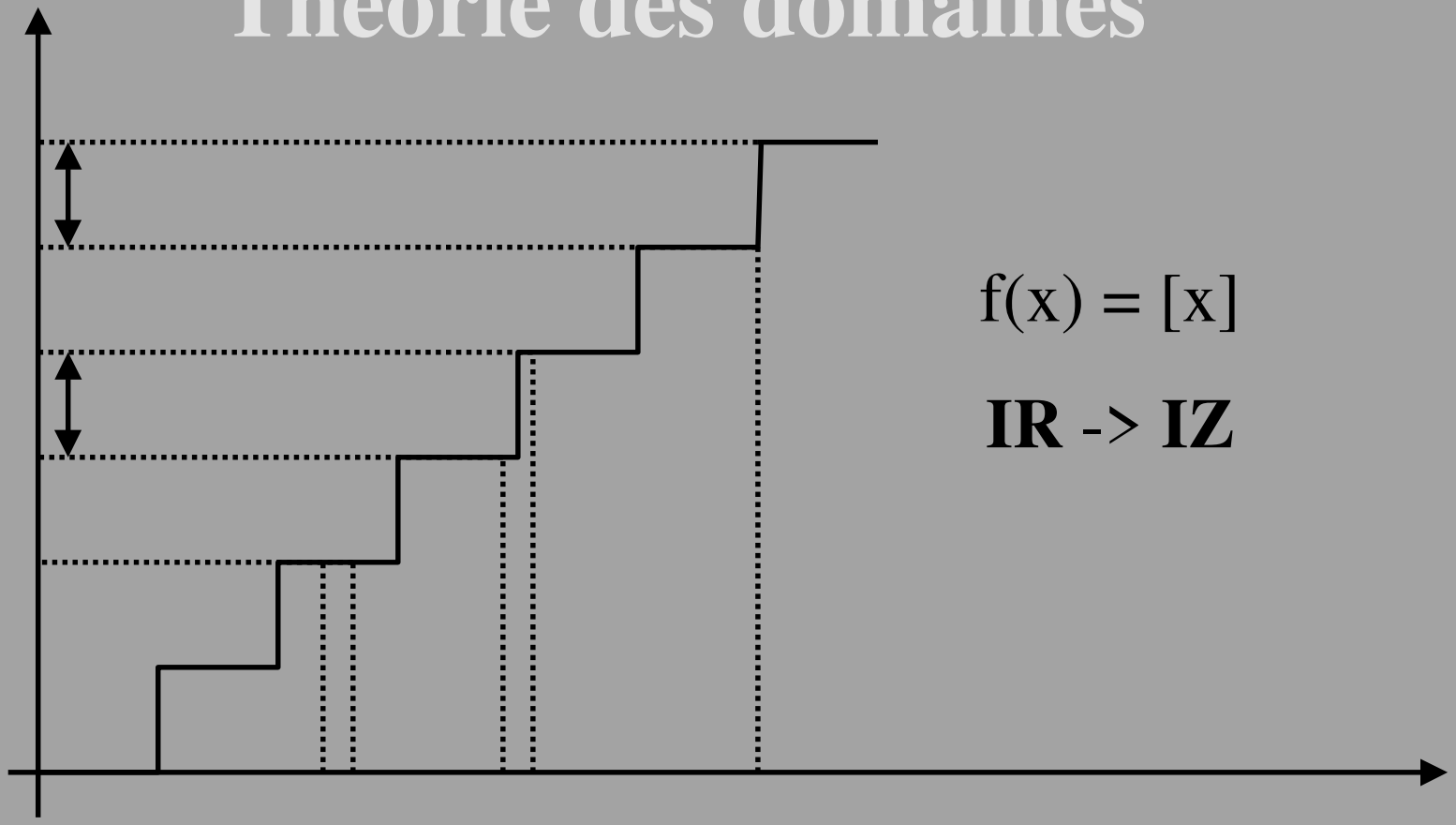
Théorie des domaines

$$Neg : I[-1,1] \rightarrow \{vrai, faux, \perp\}$$

$$Neg([a,b]) = \begin{cases} faux & \text{si } a > 0 \\ vrai & \text{si } b < 0 \\ \perp & \text{si } 0 \in [a, b] \end{cases}$$

Prédicat de comparaison continue

Théorie des domaines



$f(x) = [x]$

IR -> IZ

Fonction «partie entière» continue

Arithmétiques et domaine

Les arithmétiques par intervalles ou les arithmétiques « exactes » sur les réels calculent en général sur des intervalles de nombres dyadiques, qui forment une ***base*** dénombrables du domaine des intervalles.

On calcule sur des ***propriétés*** concernant les objets.

On peut étendre ce principe de calcul sur des éléments d ’autres domaines non dénombrables.

Un Schéma général

Soit une fonction ***f*** de *I* vers ***O***, *I* et ***O*** étant les ensembles d ’éléments maximaux de domaines ***DI*** et ***DO***.

Il est possible de définir ***F*** sur les domaines ***DI*** et ***DO***, plus grand minorant continu de f.

$F \in C(\boldsymbol{DI}, \boldsymbol{DO})$

$F = \sup \{ g \in C(\boldsymbol{DI}, \boldsymbol{DO}) \; g|I \leq f \}$

Exemples

- tri de trois réels
- intersection droite-polygone
- index