Predicats exacts pour l'arrangement d'arcs de cercles

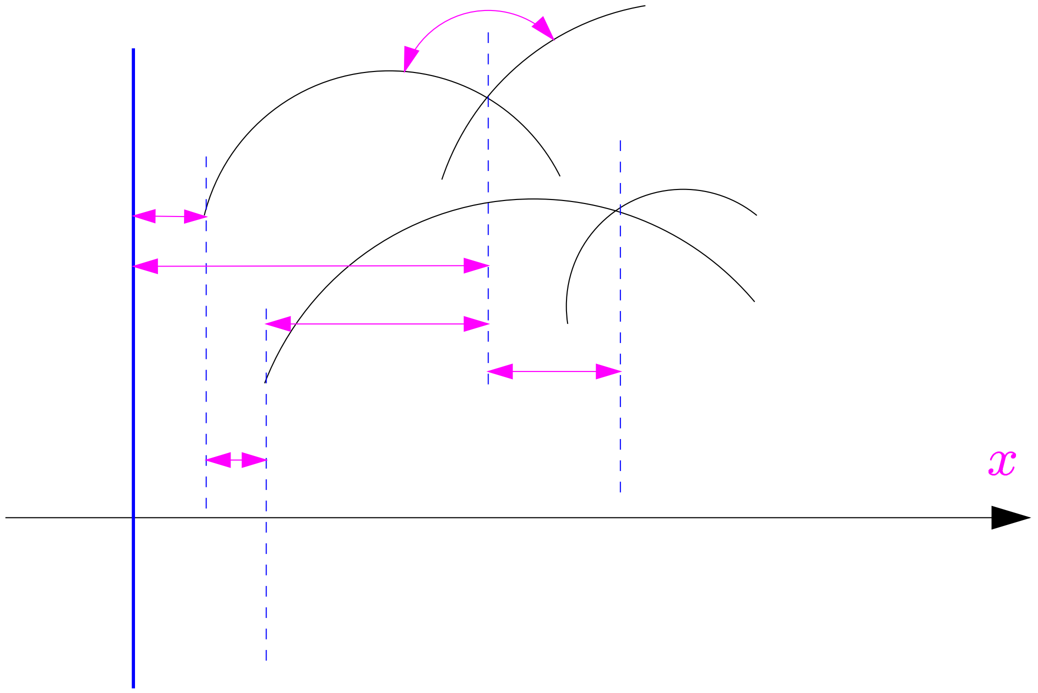
Olivier Devillers
Alexandra Fronville
Bernard Mourrain
Monique Teillaud

INRIA SOPHIA ANTIPOLIS

Algorithme de balayage

Predicats:

- comparaison des abscisses
- tests d'intersection
- comparaison d'un point et d'un arc

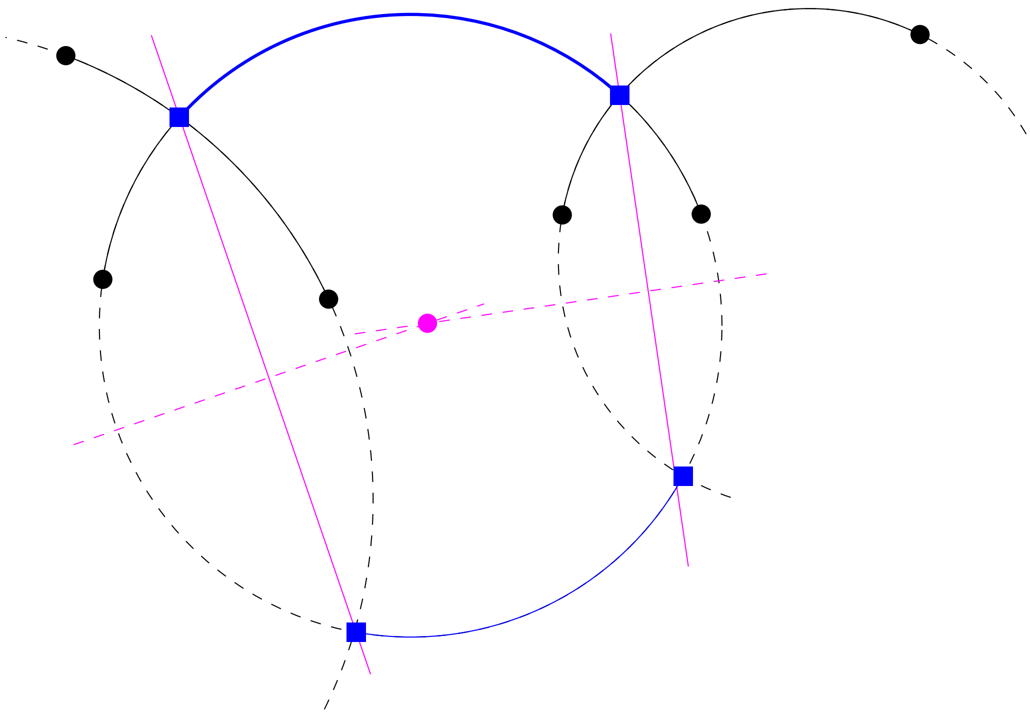


Les prédicats doivent être exacts sinon des incohérences géométriques peuvent apparaître dans l'algorithme de balayage.

Predicats pour arcs de cercles

Représentation des arcs de cercles

Représentation des
arcs de cercles :

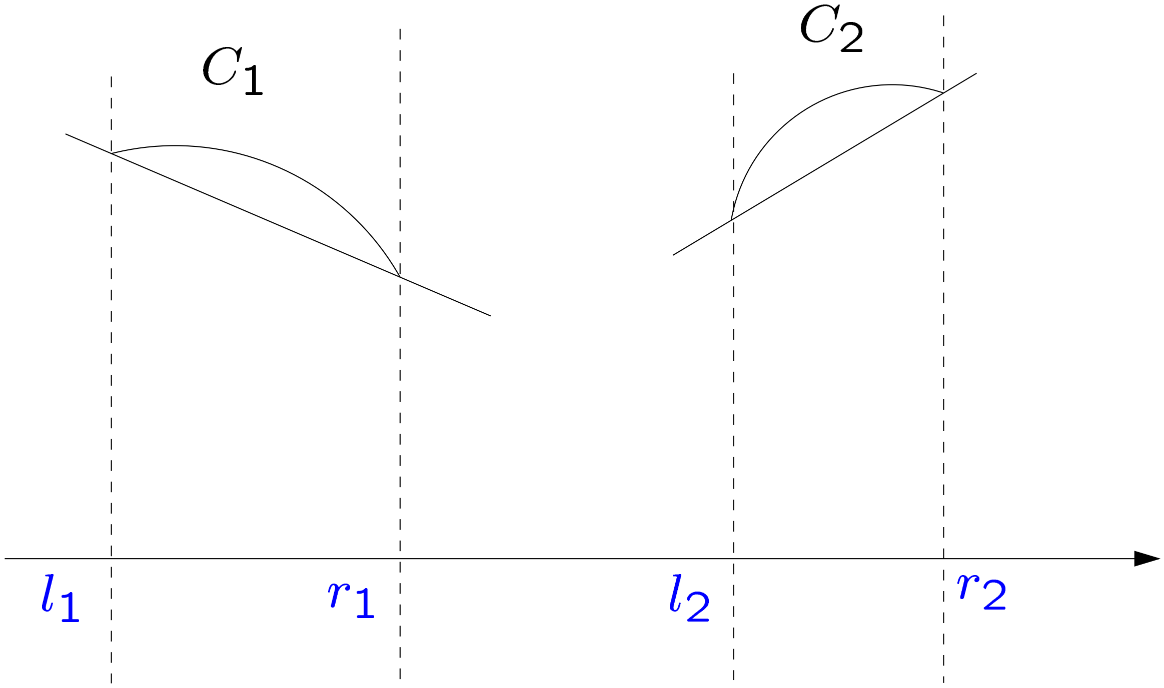


arc =
un cercle
des droites
des booléens

Predicats pour arcs de cercles

Comparaison de deux abscisses

Méthode naïve



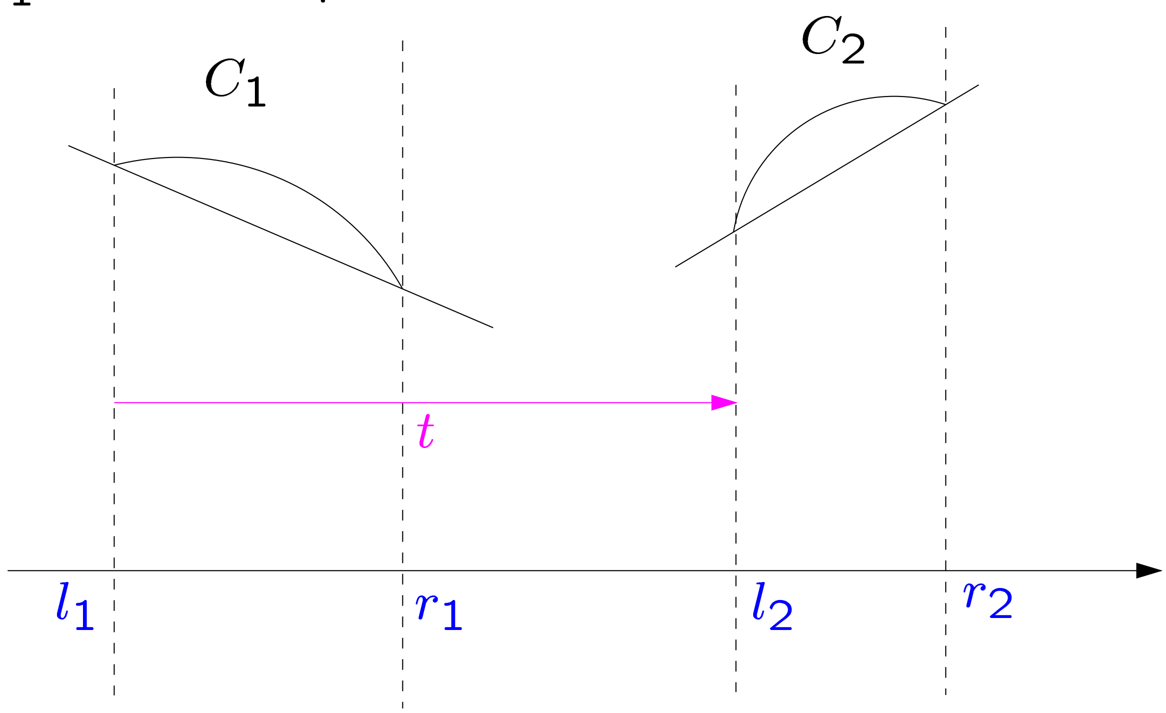
$$C_1 = (x - c_{11})^2 + (y - c_{12})^2 - r_1 = 0$$
$$C_2 = (x - c_{21})^2 + (z - c_{22})^2 - r_2 = 0$$
$$L_1 = p_1.x + q_1.y + s_1 = 0$$
$$L_2 = p_2.x + q_2.z + s_2 = 0$$

On trouve l_i et r_i $(i = 1, 2)$ en résolvant une équation du second degré. Puis on compare deux extrémités.

Ces expressions contiennent des radicaux, on ne peut pas utiliser les techniques de filtres statique, semi-statique. Ce n'est pas non plus généralisable à d'autres arcs de courbes.

Comparaison de deux abscisses

C_1 translaté par t



t tel que les abscisses coïncident

signe de t $\longrightarrow$ comparaison

t tel que

$$C_1 = (x + t - c_{11})^2 + (y - c_{12})^2 - r_1 = 0$$
$$C_2 = (x - c_{21})^2 + (z - c_{22})^2 - r_2 = 0$$
$$L_1 = p_1.(x + t) + q_1.y + s_1 = 0$$
$$L_2 = p_2.x + q_2.z + s_2 = 0$$

Le résultant de deux polynômes

Soient deux polynômes $f, g \in \mathbb{R}[x]$ de degré positif :

$f = a_0 x^l + ... + a_l$, $a_0 \neq 0$, $l > 0$
$g = b_0 x^m + ... + b_m$, $b_0 \neq 0$, $m > 0$.

Alors le résultant de f et g, noté $Res(f,g)$ est le déterminant de la matrice $(l+m) \times (l+m)$:

$$Res(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ a_2 & a_1 & \ddots & & b_2 & b_1 & \ddots & \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_0 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 \\ a_l & \vdots & \ddots & a_1 & b_m & \vdots & \ddots & b_1 \\ & a_l & & a_2 & & b_m & & b_2 \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_l & & & & b_m \end{vmatrix}$$

Propriétés du résultant

$Res(f,g)$ est un polynôme en les coefficients de f et g.
$Res(f,g) = 0$ ssi f et g ont un facteur commun dans $\mathbb{R}[x]$

Predicats pour arcs de cercles

Outil algebrique : "Bézoutien"

$f_0, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[x_0, \ldots, x_n]$ homogènes.

$f_0 = \ldots = f_n = 0$ a une solution dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$
ssi leur résultant $= 0$.

Bézoutien de $f_0, f_1, \ldots, f_n$:

$$\Theta_{f_0,f_1,\ldots,f_n}(u,v) = \begin{vmatrix} f_0(u) & \Theta_1(f_0)(u,v) & \ldots & \Theta_n(f_0)(u,v) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(u) & \Theta_1(f_n)(u,v) & \ldots & \Theta_n(f_n)(u,v) \end{vmatrix}$$

$$\Theta_i(f_j)(u,v) = \frac{f_j(v_0,\ldots,v_{i-1},u_i,\ldots,u_n) - f_j(v_0,\ldots,v_i,u_{i+1},\ldots,u_n)}{u_i - v_i}$$

$\Theta_{f_0,\ldots,f_n}(u,v)$ se reécrit $\sum_{\alpha,\beta} \lambda_{\alpha,\beta}\ u^\alpha v^\beta$.

Le déterminant $\left|\lambda_{\alpha,\beta}\right|_{\{\alpha,\beta\}}$
est un multiple du resultant.

Comparaison d'arcs de cercles

Application du Bézoutien au système

$$
\begin{aligned}
C_1 &= (x+t-c_{11})^2 + (y-c_{12})^2 - r_1 = 0 \\
C_2 &= (x-c_{21})^2 + (z-c_{22})^2 - r_2 = 0 \\
L_1 &= p_1.(x+t) + q_1.y + s_1 = 0 \\
L_2 &= p_2.x + q_2.z + s_2 = 0
\end{aligned}
$$

dans $\mathbb{R}[x, y, z]$

Résultant = polynôme en t

$$P(t) = P_0.t^4 + P_1.t^3 + P_2.t^2 + P_3.t + P_4$$

P_0 degré 8
P_1 degré 9
P_2 degré 10
P_3 degré 11
P_4 degré 12

$P(t) = 0$ *ssi* deux abscisses sont égales
Signe des racines t
$\longrightarrow$ position relative des arcs

Comparaison d'arcs de cercles

$P_0 := A2^2A1^2$
$P_1 := 2A2A1(A2B1 - A1B2)$
$P_2 := (A2B1 - A1B2)^2 + 2A1A2(C1A2 - 1/2B1B2 + A1C2)$
$P_3 := 2(A2B1 - A1B2)(C1A2 - 1/2B1B2 + A1C2)$
$P_4 := 4(A2B1 - A1B2)(B1C2 - C1B2) + (C2A1 - A2C1)^2$

où :
$A1 := (p1^2 + q1^2)$
$A2 := (q2^2 + p2^2)$
$B1 := 2(s1p1 + p1C12q1 - q1^2C11)$
$B2 := 2(s2p2 + q2p2C22 - C21q2^2)$
$C1 := (s1^2 + 2q1C12s1 - q1^2(r1 - C12^2 - C11^2))$
$C2 := (s2^2 + 2q2C22s2 - q2^2(r2 + C21^2 + C22^2))$

L'algèbre des invariants est engendrée par 4 polynômes :
$(C1A2 - 1/2B1B2 + A1C2), (B2^2 - 4A2C2), (B1^2 - 4A1C1) et (A2B1 - A1B2)$

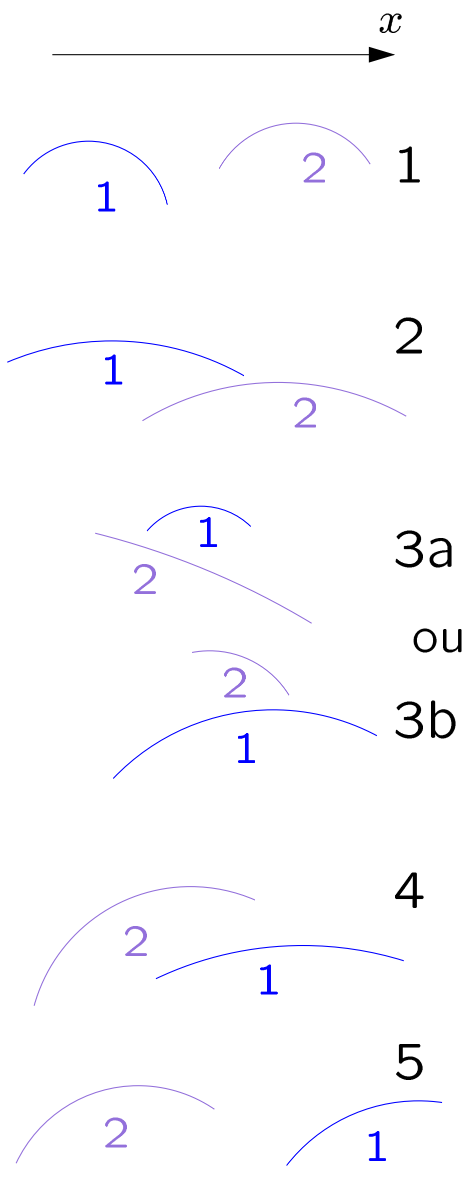
P_0 toujours positif
P_1 terme positif $*(dg5)$
P_2 signe d'un terme de dg 6 positif sinon dg 10
P_3 $(dg5) * (dg6)$ (determiné par les calculs précédents)
P_4 dg 7 de même signe que (dg 5) sinon dg 12

Predicats pour arcs de cercles

Comparaison d'arcs de cercles

Le nombre de racines positives est égal au nombre de changement de signe des coefficients du polynôme P(t) (théorème de Sturm)

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	chg	case
+	+	+	+	+	0	1
+	+	+	+	−	1	2
+	+	−	−	−	1	2
+	+	+	−	−	1	2
+	+	+	−	+	2	3
+	+	−	−	+	2	3
+	−	−	+	+	2	3
+	−	+	+	+	2	3
+	−	+	−	−	3	4
+	−	−	+	−	3	4
+	−	+	+	−	3	4
+	−	+	−	+	4	5



Pour distinguer 3a et 3b : calcul d'un polynôme (deg 7)

Predicats pour arcs de cercles

Comparaison d'arcs de cercles

- Le signe des racines est déterminé par le nombre de changement de signe de $A_0, \ldots, A_4$
- Les signes des A_i ne doivent pas tous être déterminés
- Déterminer la configuration n'est pas toujours nécéssaire pour comparer les extrémités

degré	5	6	10	7	12	cas
	$\oplus$	$\oplus$				1 ou 2
		$\ominus$	$\oplus$			2 ou 3
			$\ominus$	$\oplus$		3
				$\ominus$	$\oplus$	3
					$\ominus$	2

Predicats pour arcs de cercles

Filtres

Les entrées sont codées sur 24 bits, les calculs se font sur 53 bits.
$erreur(a+b) \leq erreur(a) + erreur(b) + (a+b)2^{-54}$
$erreur(a*b) \leq a\, erreur(b) + b\, erreur(a) + (a.b)2^{-54}$

Predicats pour arcs de cercles

Calcul du signe de $P_0, \ldots, P_4$

Filtre arithmétique

statique :

on connait une borne supérieur sur les entrées et on calcule une borne $E[i]$ pour chaque polynôme. Le filtre échoue lorsque $P[i] \leq P[i]$.

semi-dynamique :

pour chaque entrée, une formule simple permet de calculer une borne $E[i]$ pour chaque polynôme. Le filtre échoue lorsque $P[i] \leq P[i]$.

dynamique (arithmetique d'intervalles)

Le calcul de $E[i]$ se fait parallélement à celui de $P[i]$. A chaque opération, une borne sur l'erreur est donnée.

Calcul exact avec les leda-real.

Benchs

Data	Discriminant		
	double	interval arithmetic	
	time (μ s)	time (μ s)	%
1	2.0	28.8	0
2	1.9	28.2	0
3	1.9	28.1	0
4	1.8	2750.0	100

Data	Polynomials							
	double	Interval arithmetic + exact		statique + semi dynamique + interval arithmetic + exact				
	time (μ s)	time (μ s)	%	time (μ s)	static %	semi-dyn. %	interv. %	exact %
1	1.6	17.6	0	5.20	87	0	13	0
2	1.5	18.1	0	6.2	78.6	4.4	17	0
3	1.5	17.8	0	7.8	3.3	83.2	13.5	0
4	1.9	2264.2	100	2306	0	0	0	100

Predicats pour arcs de cercles

Futur

- Arcs de coniques

- Complément de Schur
  de la matrice de Macaulay

  calcul de valeurs propres
  et borne sur l'erreur

- Calcul de déterminant fiable