Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 :

On jette n pièces identiques. Supposons que lors de chaque jet, le probabilité d'obtenir pile est p, où $p \in [0,1]$. Les résultats des jets sont supposés indépendants.

a) Donner la distribution de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de piles obtenus.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 :

Une urne contient 12 boules rouges et 5 boules blanches. On tire les boules avec remise. Quelle est la probabilité de tirer au $10^{ième}$ tirage la $3^{ième}$ boule rouge ?

Exercice 3 :

On sait que les vis fabriquées par une certaine société sont affectées d'un défault avec probabilité 0.1. L'état d'une vis est indépendant de celui des autres. Or, la société accepte de rembourser les paquets de 15 vis qu'elle vend si plus de 2 vis présente un default.

Quelle proportion des paquets vendus la société s'expose t-elle à devoir rembourser ?

Exercice 4 :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	9/a	4/a	8/a	5/a	1/a	2/a	2/a	5/a	9/a	5/a	9/a

Soit X une variable aléatoire discrète admettant la distribution ci-dessus ou a est un paramètre réel positif.

a) Calculer la constante a.

b) Calculer l'espérance et la variance de cette distribution.

Exercice 5 :

Deux joueurs, Luc et Matthieu, jouent avec un dé. Luc commence. Le gagnant est le premier jouer à obtenir l'as. Déterminer la probabilité de victoire de chaque joueur.

Exercice 6 :

Guy est très distrait : quand il s'arrête pour prendre de l'essence, il y a une chance sur dix pour qu'il reparte sans sa passagère, descendue pour visiter les lieux. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'étapes que Guy a parcouru en compagnie de sa passagère, avant de repartir sans elle.

a) Etablir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

b) Quel est le nombre maximum d'étapes que peut comporter le voyage pour que la passagère arrive à destination dans la voiture de Guy avec une probabilité supérieure à 0,5 ?

Exercice 7 :

Sur une règle graduée de $-n$ à n ($n \in$ N*), un point lumineux initialement positionné au point O de la règle se déplace à chaque seconde d'une unité vers la droite ou vers la gauche avec des probabilités respectives p et $q = 1 - p$. On appelle X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite (respectivement vers la gauche) au cours de n secondes, et X la variable égale à l'abscisse du point lumineux au bout des n déplacements.

Déterminer les lois et les espérances de X_1, X_2 et X.

Exercice 8 :

Un central téléphonique possède L lignes. On estime à 1200 le nombre de personnes susceptibles d'appeler le standard sur une journée de 8 heures, la durée des appels étant de deux minutes en moyenne.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes en train de téléphoner à un instant donné.

a) Montrer que l'on est en droit d'approcher la distribution de X par une loi de Poisson.

b) On suppose L = 3. Calculer la probabilité d'encombrement à un instant donné, à savoir Prob(X > L).

c) Quelle doit être la valeur minimale de L pour qu'à un instant donné, la probabilité d'encombrement ne dépasse pas 0,1.

Exercice 9 :

On suppose que les probabilités de naissance d'une fille ou d'un garçon sont les mêmes (en fait, un peu plus de garçons : 52%) et qu'il y a indépendance des sexes d'une naissance à l'autre.

Dans une famille de quatre enfants, quelle est la probabilité qu'il y ait deux filles et deux garçons ?

Exercice 10 :

On a répertorié dans une usine le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel dans une journée de travail sur une période de 200 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1

a) Quel est le nombre moyen d'accidents par jour ? Interpréter concrètement le résultat trouvé.

b) On ajuste cette distribution par une loi de Poisson. Justifier cette décision et préciser cette loi.

c) Quel est le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents ? Comparer avec la réalité.