TD – Variables aléatoires continues

24 mars 2004

Exercice 1

La concentration d'un métabolite urinaire est représentée par la variable aléatoire X dont les valeurs x sont telles que : $0 \leq x \leq 4$. La fonction de densité de probabilité de X est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a(4-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer a.
2. Exprimer la fonction de répartition F de X. En déduire les probabilités suivantes : $P(X \geq 1)$, $P(1 \leq X < 2)$, $P(2 \leq X < 3)$, $P(X \geq 3)$.
3. Calculer l'espérance de X, $E(X)$, et l'écart-type de X, $\sigma(X)$.
4. Calculer la valeur x_0 telle que $P(X \geq x_0) = 0.1$.
5. Définir la variable centrée réduite U associée à X.

Exercice 2

Une usine fabrique des billes de diamètre nominal 8 mm. Les erreurs d'usinage provoquent une variation du diamètre qui est une variable aléatoire normale : $N(0 \text{ mm}, 0.015 \text{ mm})$. Lors du contrôle de fabrication, on met au rebut les billes qui passent à travers une bague de diamètre 7.98 mm, ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamètre 8.02 mm.

Quelle est la proportion des billes qui seront rejetées ?

Exercice 3

La durée de vie d'un atome d'un élément radioactif est une variable aléatoire continue X qui admet pour densité la fonction définie sur R par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0, \text{ où } \lambda > 0. \end{cases}$$

1. Calculer la moyenne et la variance de X.
2. On prend t en secondes et $\lambda = 0.2$. Quelle est la probabilité pour qu'un atome ait une durée de vie supérieure à 4 secondes ?
   Comprise entre 1 et 3 secondes ?

Exercice 4

A l'entrée d'une caserne militaire se trouve une guérite dans laquelle peut s'abriter la sentinelle en cas d'intempéries. Les sentinelles sont des “appelés” dont la taille est approximativement distribuée suivant une loi normale de moyenne 175 cm et d'écart-type 8 cm.

A quelle hauteur minimale doit se situer le toit de la guérite pour qu'au moins 99% des sentinelles puissent s'y tenir debout ?

Exercice 5

Virginie a rendez-vous avec Paul à la sortie de la faculté jeudi à 16h30. Mais elle ne pourra pas l'attendre plus de 5 minutes. Paul, qui suit un cours à l'autre bout de la ville estime qu'il peut arriver sur le lieu du rendez-vous à tout moment entre 16h25 et 16h40, de manière équiprobable.

Si cette hypothèse est exacte, quelle est la probabilité que Paul rencontre Virginie ?

Exercice 6

La durée de vie des ampoules *LUMINOR* est une variable aléatoire continue T dont la densité de probabilité f est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.05 \cdot e^{-0.05t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

en prenant le mois pour unité de temps.

1. Quelle est l'espérance de vie d'une telle ampoule ?
2. Déterminer la fonction de répartition de T ?
3. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une ampoule soit supérieure à 2 ans ?
4. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une ampoule dépasse 3 ans sachant qu'elle est supérieure à 1 an ?