Probabilités conditionnelles, Indépendance

Exercice 1 :

Dans le cas du lancé d'un dé, considérons les deux événements : $A = \{1,4,5\}$ et $B = \{3,5\}$. Quelle est la probabilité d'avoir A ? d'avoir B ? d'avoir $A \cap B$?

Exercice 2 :

Une urne U_1 contient 3 boules noires et 7 boules blanches. Une urne U_2 contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules avec remise, dans l'urne choisie. On note : B_1 = « Obtenir une boule blanche au 1^{er} tirage » et B_2 = « Obtenir une boule blanche au second tirage ». Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 3 :

On jette 2 dés équilibrés. On note A_1 l'événement : « Le résultat du premier dé est impair », A_2 : « Le résultat du second dé est impair » et A_3 : « La somme des deux résultats est impaire ».

a) Calculer la probabilité de chaque événement.

b) A_1, A_2 et A_3 sont-ils indépendants deux à deux ?

c) A_1, A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Exercice 4 :

On jette 3 pièces équilibrées. On note A l'événement : « On a obtenu au plus un pile », et B : « On a obtenu au moins une fois pile et une fois face ».

a) Quelles sont les probabilités de A et de B ?

b) A et B sont-ils indépendants ?

c) A et B sont-ils indépendants si on jette 4 pièces ?

Exercice 5 :

1) On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les deux résultats sont différents ?

2) On choisit 3 cartes au hasard et sans remise dans un jeu ordinaire de 52 cartes. Calculer la probabilité pour que la $1^{ère}$ carte tirée soit un pique, sachant que les deux dernières en sont.

Exercice 6 :

On admet que 5% des hommes et 0.25% des femmes sont daltoniens. On sélectionne une personne daltonienne au hasard.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'un homme, en admettant que les hommes sont aussi nombreux que les femmes ?

b) Si au contraire il y avait 2 fois plus d'hommes que de femmes, que deviendrait le résultat ?

Exercice 7 :

On considère 3 cartes à jouer de même forme. Cependant, les 2 faces de la $1^{ère}$ ont été colorées en noir, les 2 faces de la $2^{ème}$ en rouge, tandis que la $3^{ème}$ porte une face noire et l'autre rouge. On mélange les 3 cartes au fond d'un chapeau, puis une carte est tirée au hasard et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Exercice 8 :

Deux bourses U et V contiennent des pièces d'or et des pièces d'argent. La composition de ces bourses est la suivante : la bourse U contient 2 pièces d'or et 3 pièces d'argent, et la bourse V contient 4 pièces d'or et 1 pièce d'argent. On tire de l'une des bourses, choisie au hasard, une pièce, et on la remet dans cette bourse. Si la pièce tirée est en or, on recommence le tirage dans la même bourse. Si la pièce tirée est en argent, on recommence le tirage dans l'autre bourse. Déterminer les probabilités pour que :

a) Les 3 premiers tirages soient faits dans la bourse U.

b) Le $2^{\text{ème}}$ tirage se fasse dans la bourse U.

c) Au $2^{\text{ème}}$ tirage, on tire une pièce d'argent.

d) Le 1^{er} tirage ait été fait dans U, sachant que l'on a tiré une pièce d'or au $2^{\text{ème}}$ tirage.

Exercice 9 :

On suppose que l'on a dans un magasin des machines provenant de deux usines différentes A et B. 70% viennent de l'usine A, et 30% viennent de l'usine B. Parmi celles qui viennent de A, 20% présentent un défaut ; parmi celles qui viennent de B, 10% présentent un défaut.

a) Déterminer le pourcentage de machines dans le magasin présentant un défaut.

b) Une machine donnée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B ?

Exercice 10 :

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune des boules blanches et des boules noires, dans les proportions p_1 et q_1 pour U_1 et p_2 et q_2 pour U_2. Après chaque tirage dans chaque urne la boule tirée est remise. Les tirages sont faits suivant la règle suivante : on choisit au hasard l'une des deux urnes pour le premier tirage ; ensuite on tire dans U_1 si la première boule tirée est blanche, dans U_2 si la première boule tirée est noire ; de même la $n^{\text{ième}}$ boule est tirée dans U_1 ou U_2 suivant que la $(n-1)^{\text{ième}}$ boule tirée est blanche ou noire.

1) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au 1^{er} coup ? au $2^{\text{ème}}$? au $3^{\text{ème}}$?

2) Soit π_n, La probabilité de tirer une boule blanche au $n^{\text{ième}}$ coup. Trouver une relation entre π_n et π_{n-1}.

3) Montrer que π_n tend vers une limite lorsque $n \to +\infty$, et calculer cette limite.

Exercice 11 :

Pour dépister une maladie, on applique un test. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais il se peut aussi que le résultat du test soit positif alors que le patient est en bonne santé, et ceci se produit dans 2% des cas. Sachant qu'en moyenne 1 patient sur 1000 est atteint de la maladie à dépister, calculer la probabilité pour qu'un patient soit atteint sachant que sont test a été positif. Comment améliorer ce résultat ?