TD : POLYNOMES

Exercice 1 : Du calcul,

1. Faire la division euclidienne de $X^3 - 4X^2 + 1$ par $X^2 + X + 3$, de $X^5 + X^3 + X$ par $X^3 + 5$
2. Faire la division euclidienne de $X^2 + 2iX + 1$ par $X + 1 + i$

Exercice 2 : du calcul,

1. Faire la division selon les puissances croissantes de $X^3 + 5X + 3$ par $X + 1$ à l'ordre 2
2. Faire la division selon les puissances croissantes de $X^3 + X^2 + 3X$ par $X^3 + 1$ à l'ordre 3

Exercice 3 : toujours du calcul.

Décomposer en produits de polynômes irréductibles sur R[X].

a) $X^4 + 1$

b) $2X^3 + 3X^2 - 12X + 5$

c) $X^4 - 1$

d) $X^6 + 2X^4 + 2X^4 + 1$

e) $1 + X + X^2 + X^3$

f) $(1 - X)^3 - 8X^3$

Exercice 4 :

Soient P et Q 2 polynômes de K[X]. Montrer que $P|Q \Rightarrow P^2|P'Q - PQ'$

Exercice 5 : Les polynômes de Lagrange.

Voici le problème : Un physicien étudie une grandeur G dépendant de x. D'après ses expériences, il connaît les valeurs de G en $n+1$ valeurs $x_0, x_1, ..., x_n$.
On pose $G(x_0) = \alpha_0, ..., G(x_n) = \alpha_n$. Le physicien aimerait, à partir de ces valeurs, avoir une idée de la forme de G. Il se demande alors si il existe une fonction polynomiale P qui aurait le bon goût de vérifier $P(x_0) = \alpha_0, ..., P(x_n) = \alpha_n$, ie de passer par les mêmes points que G. Le physicien aimerait avoir si possible le polynôme le plus simple, c'est-à-dire de degré le plus petit possible. Il se tourne donc vers le matheux du bureau d'a côté.

Le but de cet exercice est donc de résoudre la question suivante : étant donné n+1 points $(x_0, \alpha_0), ..., (x_n, \alpha_n)$, existe il un polynôme de degré n passant par ces points ?

1. Montrer que si un tel polynôme P existe, il est unique.
2. Soit $i \in \{0,..,n\}$. Montrer qu'il existe un polynôme L_i tq $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 1, \ \forall j \neq i$

(On le calculera.)

3. Trouver P, à l'aide des polynômes L_i.

Ces Polynômes sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange.

Exercice 6 :

Soient a et b deux réels. Soit $P \in R[X]$. Exprimer le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$.

Exercice 7 :

En utilisant les fonctions symétriques des racines, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{23}{3} \\ xyz = 2 \\ xy + yz + zt = \dfrac{-16}{3} \end{cases}$$

Exercice 8 :

Soit $n \in N^*$. Soit $a \in R$

Calculer le reste de la division euclidienne de $(X\sin(a)+\cos(a))^n$ par X^2+1

Exercice 9 : Des PGCD

Calculer le pgcd de $A=(X-1)^2$ et de $B=X^3+2X^2-X-2$. Trouver U, V dans R[X] tq AU+BV=...

Exercice 10 :

Soit $n \in N^*$. Trouver a et b tq $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1}+bX^n+1$ dans Z[X].

Exercice 11 :

Soient $(P,Q) \in R[X]^2$ non nuls tq PQ est un monôme. Montrer que P et Q sont nécessairement des monômes.

Exercice 12 :

Soit (P_n) une suite de fonctions qui vérifie :

1) $P_{n+1}(X)=P_n(X)+\frac{1}{2}\left(X^2-P_n(X)^2\right),\ \forall n \in N,\ \forall X \in [-1;1]$

2) $P_0=0$

1. Montrer que $\forall n \in N,\ P_n$ est un polynôme à coefficients réels, que $\forall n \in N, P_n(0)=0$.
2. Montrer que $\forall n \in N, \forall x \in [-1;1]\ P_n(x) \le |x|$, que $\forall n \in N, 0 \le P_n(x) \le P_{n+1}(x)$.
3. Soit $x \in [-1;1]$. Montrer que $P_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{x}$.

Exercice 13 : On considère les applications suivantes :

$$f : K[X] \to K[X] \quad P \mapsto P' \qquad \text{et} \qquad g : K[X] \to K[X] \quad a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n \mapsto a_0X+\frac{a_1}{2}X^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}X^{n+1}$$

1. f et g sont elles bijectives ?
2. Calculer fog. A-t-on gof=id ? (on ne fera pas de calcul.)
3. Quelle est la morale de cet exercice ?

Exercice 14 :

Résoudre les équations dans R[X]:

1. $(X^2+1)P'+P^2+(1-2X)P=X$
2. $(1-X)P'-P=X^n$ ($n \in N^*$ fixé)
3. $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$

Exercice 15 :

Soit (P_n) une suite de polynômes qui vérifie:

1) $P_{n+1}(X)=XP_n(X)-P_{n-1},\ \forall n \in N$

2) $P_0=0$

1. Calculer deg (P_n) et val(P_n)
2. Mq $\forall n \in N,\ P_{n+1}^2-P_{n+2}P_n=1$

Exercice 16 :

Trouver a et b pour que X^3-2X+1 divise $X^5+X^4+aX^3+bX^2+5X-2$