TD : MATRICES

Exercice 1 : Savoir calculer la matrice d'une application linéaire.

On vérifiera avant de calculer les matrices que les applications proposées sont bien linéaires.

a) Soit $\begin{array}{l} f : R^3 \to R^3 \\ (x, y, z) \mapsto \left(2x - y, y, \frac{z}{2}\right) \end{array}$. Soit B la base de R^3 : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Soit C la base canonique de R^3.

Calculer $A = Mat_B^C(f)$.

b) Soit $\begin{array}{l} f : R_2[X] \to R_4[X] \\ P \mapsto XP + (X^2 + X)P \end{array}$. Soit B la base de $R_2[X] : (1, X, X^2)$.

Soit C la base de $R_4[X] : \left(\frac{1}{2}, 3X, X^2, X^3, X^4\right)$. Calculer $A = Mat_B^C(f)$.

Exercice 2 : A partir d'une matrice, savoir retrouver l'application linéaire

Soit B la base de $R_2[X] : (1, X, X^2)$. Soit C la base de $R_3[X] : \left(\frac{1}{2}, 3X, X^2 - X, X^3 + X + X^2\right)$.

Soit $f : R_2[X] \to R_3[X]$ l'application linéaire tq $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = Mat_B^C(f)$.

Soit $P = 2X^2 + 1$ Calculer le polynôme $f(P)$.

Exercice 3 : Faire des produits de matrices

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer AB, CD, BA

Exercice 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note B la base canonique de R^3.

Soit u l'endomorphisme de R^3 tq $A = Mat_B^B u$. Calculer Ker u, dim (Ker u) , Im u, rg(u).

Exercice 5 :

Soit $\begin{array}{l} f : R^3 \to R^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x \\ z+y \end{pmatrix} \end{array}$. Soit $\begin{array}{l} g : R^2 \to R^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \\ x+y \end{pmatrix} \end{array}$. Soit B la base canonique de R^2, et C la base canonique de R^3. Calculer $A = Mat_C^C f$, $B = Mat_B^C g$, puis $Mat_B^C(fog)$. Vérifier la formule $Mat_B^C(fog) = AB$.

Exercice 6 : calculer le rang de matrices

1. Soit A une matrice $n \times p$ de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou de la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{11} & * & * \\ 0 & 0 & ..... & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{pk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer le rang de telles matrices.
2. Une opération élémentaire (addition de lignes, ou multiplication par un scalaire) ne change pas le rang d'une matrice. Comme on connaît de manière simple le rang de matrices de la forme triangulaire du 1), on va transformer la matrice dont on cherche le rang en une matrice de la forme ci-dessus.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -8 & 10 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : Calculer des inverses de matrices.

Calculer les inverses de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : Matrices nilpotentes

Une facon d'inverser les matrices.

Soit $A \in M_{n \times n}(K)$. Elle est dite nilpotente si elle est telle que $\exists p \in N^*$ tq $A^p = 0$.

1. Montrer que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes.
2. Soit A nilpotente. Montrer que $I_n = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{n-1})$. En déduire que $I_n - A$ est inversible.
3. Application : Montrer que $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 9 :

Soit $A \in M_{n \times n}(K)$. On suppose que commute avec toutes les matrices. (ie $\forall B \in M_{n \times n}(K), AB = BA$)
Déterminer la forme de A.

Exercice 10 :

Soit $a \in R$. Soit B la base canonique de R^3.

Soit f_a l'endomorphisme de R^3 tq $\begin{pmatrix} -3a-4 & a+1 & a+1 \\ -9a+6 & 3a-1 & 3a-3 \\ -3a-18 & a+4 & a+6 \end{pmatrix} = Mat_B^B(f_a)$.

Trouver les valeurs de a tq f_a est un automorphisme.

Exercice 11 :

Soit n un entier non nul. Montrer qu'il est impossible de trouver A et B tq $AB - BA = I_n$