TD : INTEGRATION

Exercice 1 : Utiliser les intégrales pour encadrer des suites du type $\sum f(k)$

1. Soit $n \in N^*$. En déduire un équivalent de la suite définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
2. Soit $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Calculer la limite de cette suite.

Exercice 2 : Sommes de Riemann

Calculer la limite des suites suivantes :

a) $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k^2 + n^2}$

b) $u_n = \frac{1}{n}\left(1 + \cos\left(\frac{a}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)\right)$

c) $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2}$

d) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 e^{k/n}}$

Exercice 3 :

Soit f une fonction intégrable sur [0 ;1]. On pose $I_n(f) = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. On suppose que f est continue. Montrer que $I_n(f) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2. On suppose que f est C^1, et que $f(1) \neq 0$. Donner un équivalent de $I_n(f)$ en $+\infty$.
3. Montrer que $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ est équivalent à $\frac{1}{n}$ en $+\infty$.
4. On suppose que f est C^2, que $f(1) = 0$, et que $f'(1) \neq 0$. Donner un équivalent de $I_n(f)$ en $+\infty$.
5. Montrer que $\int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$ est équivalent à $\frac{\pi}{n^2}$ en $+\infty$.

Exercice 4 :

Soit f une fonction C^1 sur [a ;b].

Montrer que la suite $u_n = \int_a^b f(t)\cos(nt)dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Exercice 5 :

Soit $x \in R$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que $e^x = \lim_{n \to +\infty}\left(x + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x}{n!}\right)$.

On note ce résultat $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 6 :

Le but de cet exercice est de montrer la formule suivante :

$$\forall x \in [0;1],\ \ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)$$

1. On pose $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ Montrer que $\forall x \in [0;1],\ f(x) = \int_0^x \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}\,dt$.
2. En déduire le résultat.
3. En déduire que $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$

Exercice 7 : Etude de limites de fonctions définies par une intégrale.

1. Soit f une fonction définie par $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ ($x \neq 0$). Calculer $\lim_{x\to 0+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0-} f(x)$
2. Soit f une fonction définie par $f(x) = \int_x^{3x} \frac{dt}{\ln(t)}$ Calculer $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Exercice 8 :

Soit la suite $u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$ $(n \neq 0)$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 9 :

Soit f une fonction : $[0;1] \to R$, continue et telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0;1]$ tq $f(x_0) = x_0$.

Exercice 10 :

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$.

Exercice 11 :

Soient a, b des réels tq 0< a < b. Montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$

Exercice 12 : Inégalité de Minkowski

Soient f et g 2 fonctions intégrables sur [a,b]

Mq $\sqrt{\int_b^a (f+g)^2} \leq \sqrt{\int_b^a f^2} + \sqrt{\int_b^a g^2}$