TD : GROUPES-ANNEAUX-CORPS

Exercice 1 : Exemples de groupes.

1. Les ensembles suivants sont-ils des groupes :
   a) (1+i)R$=\{z\in C\ tq\ \exists a\in R\ tq\ z=(1+i)a\}$, pour l'addition dans C
   b) (1+i)R$=\{z\in C\ tq\ \exists a\in R\ tq\ z=(1+i)a\}$, pour la multiplication dans C

2. Montrer que $U=\{z\in C\ tq\ |z|=1\}$ est un groupe, pour la multiplication. Et pour l'addition ?
3. Soit n un entier. Montrer que $U_n=\{z\in C\ tq\ z^n=1\}$ est un groupe, pour la multiplication. Et pour l'addition ?
4. Soit G = $R^{+*}\times R$. Soit la loi $\otimes$:définie par $(x;y)\otimes(x';y')=(xx';xy'+y)$. Montrer que G, muni de cette loi, est un groupe.

Exercice 2 : démontrons qq résultats du cours.

1. Démontrer que l'intersection de sous groupes d'un groupe G est un ss groupe de G. Et pour l'union ?
2. Soient $G_1\ et\ G_2$ 2 groupes. Soit φ un morphisme de groupe $\varphi:\ G_1\mapsto G_2$.

a) Soit H_1 un ss groupe de G_1. Montrer que $\varphi(H_1)$ est un ss groupe de G_2.
b) Soit H_2 un ss groupe de G_2. Montrer que $\varphi^{-1}(H_2)$ est un ss groupe de G_1.

3. Montrer que $Ker\ \varphi$ est un ss groupe de G_1, et que $\mathrm{Im}\ \varphi$ est un ss groupe de G_2
4. Montrer que la composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupe.

Exercice 3 : les sous groupes de Z

Le but de l'exercice est de montrer que tous les ss groupes additifs de Z sont de la forme : nZ ($n\in N$)

1. Soit $n\in N$. Montrer que $nZ=\{n*q,\ \ q\in Z\}$est un ss groupe de (Z, +)
2. On s'intéresse à la réciproque. Soit H un ss groupe de Z (on prend $H\neq Z\ et\ H\neq\{0\}$)

a) Montrer que $H\cap N^*$ a un plus petit élément. Soit n ce plus petit élément
b) Montrer que H = nZ (ind : on utilisera la division euclidienne.)

Exercice 4 : Equations dans un groupe.

1. Soit $(G,\otimes)$ un groupe. Soient a et b deux éléments de ce groupe. Montrer que l'équation $a\otimes x=b$ (1) admet toujours une unique solution dans G. Même question pour l'équation $x\otimes a=b$ (2)

2. Montrer que la réciproque est vraie : Soit G un ensemble muni d'une loi associative. On suppose que toutes les équations du type (1) et (2) ont une unique solution. Montrer que G est un groupe.

Exercice 5 : Commutativité.

Soit $(G,\otimes)$ un groupe, a priori non commutatif. On note e son élément neutre.

1. On appelle centre de G l'ensemble $Z=\{a\in G\ tq\ \forall x\in G,\ \ ax=xa\}$. Montrer que Z est un ss groupe de G.
2. Montrer que si $\forall a\in G,\ \ a^2(=a\otimes a)=e$, alors G est commutatif.
3. Soient a et b deux éléments de G. Soit n un entier. Montrer que si $(a\otimes b)^n=e$, alors on a aussi $(b\otimes a)^n=e$.

Exercice 6 : Des exemples d'anneaux et de corps.

On note $Z[i]=\{a+ib,\ a\in Z,\ b\in Z\}$ et $Q[i]=\{a+ib,\ a\in Q,\ b\in Q\}$.

1. Montrer que $Z[i]$, muni de l'addition et de la multiplication, est un anneau sur C. Montrer que Q[i] est un corps.
2. $Z[i]$ est-il un corps ?
3. R[X], Z[X],Q[X], sont-ils des anneaux ? des corps ?

Exercice 7 : Calculs dans un anneau

1. Soit A un anneau, a un élément nilpotent de cet anneau. ($ie\ \exists p\in N\ tq\ a^p=0$). Montrer que 1_A-a est un élément inversible. (qui admet un inverse.)
2. Soient a et b deux éléments de A tq ab est nilpotent. Montrer que ba et (a+b) sont aussi nilpotents.

Exercice 8 : Un peu de morphismes.

1. Montrer que les rotations du plan complexe forment un groupe pour la composition. Montrer que ce groupe est isomorphe à U (cf ex 1)
2. Soit A un anneau tel que le morphisme suivant $\begin{array}{c} f: A\to A \\ x\mapsto x^2 \end{array}$ soit surjectif. Montrer que A est commutatif.
3. Soient K et L des corps. Soit f un morphisme de corps de K sur L. Montrer que f est injectif.