TD: Algèbre générale: Lois, groupes, anneaux, corps

Exercice 1 (Exemples de lois)

1. Sur $E = \{$ fonctions continues : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, l'addition est elle une loi? et le produit?
2. Mêmes questions avec l'ensemble $F = \{$ fonctions continues : $\mathbb{R} \to [0;1]\}$
3. L'application suivante $T : (x;y) \to xTy = x - y$ est elle une loi sur $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}$? Est elle associative, commutative? admet-elle un élément neutre?

Exercice 2 (Savoir montrer qu'un ensemble est un groupe)

1. Les ensembles suivants sont-ils des groupes :
   (a) $(1+i)\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \quad \exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } z = (1+i)x\}$, pour l'addition dans $\mathbb{C}$
   (b) $(1+i)\mathbb{R}$, pour la multiplication dans $\mathbb{C}$
2. Soit n un entier. Montrer que $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } z^n = 1\}$ est un groupe, pour la multiplication. Et pour l'addition ?
3. Soit $G = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Soit la loi $\otimes$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par: $(x;y) \otimes (a;b) = (xa; xb + y)$. Montrer que G, muni de cette loi, est un groupe.

Exercice 3 (Les sous groupes de $\mathbb{Z}$)

Le but de l'exercice est de montrer que tous les sous groupes de $\mathbb{Z}$ (pour l'addition) sont de la forme $n\mathbb{Z}$ (n $\in \mathbb{N}$).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tq } x = np, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de $\mathbb{Z}$ (pour l'addition).
2. On va montrer la réciproque, c'est à dire que tout sous groupe de $\mathbb{Z}$ peut s'écrire sous la forme $n\mathbb{Z}$. Pour cela on fixe H, un sous groupe quelconque de $\mathbb{Z}$.
   (a) Conclure si $H = \mathbb{Z}$ ou si $H = \{0\}$.
   (b) On suppose donc $H \neq \mathbb{Z}$ et $H \neq \{0\}$. Montrer que $H \cap \mathbb{N}^*$ possède un plus petit élément. Soit n_0 ce plus petit élément.
   (c) Montrer, en utilisant la division euclidienne, que $H = n_0\mathbb{Z}$

Exercice 4 (Equations dans un groupe)

Quand on est dans un groupe, on se sent bien. Non pas parce l'air y est pur, mais pour cette raison:

1. Soit $(G, \otimes)$ un groupe. Soient $a, b \in G^2$. Montrer que l'équation $a \otimes x = b$ possède une unique solution. (même question pour l'équation $x \otimes a = b$)
2. Regardez ce qui se passe dans un endroit sordide comme (E, o), où $E = \{$ fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ et o désigne la composition.

   L'équation $foX = g$ posséde elle toujours une unique solution? (X est la fonction inconnue)

Exercice 5 (commutativité)

Soit $(G, \otimes)$ un groupe, a priori non commutatif. On note e son neutre.

1. On appelle centre de G l'ensemble $Z = \{a \in G \text{ tq } \forall x \in G, \quad a \otimes x = x \otimes a\}$. Montrer que Z est un sous groupe de G.
2. Montrer que si $\forall x \in G$, $x \otimes x = e$, alors G est commutatif.

Exercice 6 (Savoir montrer qu'un ensemble est un anneau ou un corps)

1. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib,\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib,\ \text{avec } (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$, muni de l'addition et de la multiplication, est un anneau.
   (b) Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un corps. $\mathbb{Z}[i]$ est il un corps ?
2. On note $E = \{$ fonctions continues : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Muni de l'addition et du produit, montrer que E est un anneau.
3. Est-ce un corps?
4. Mêmes questions si E est muni de l'addition et de la composition.

Exercice 7 (Morphismes)

1. Montrer que les rotations de centre 0 du plan complexe forment un groupe pour la composition. Montrer que ce groupe est isomorphe à $\mathbb{U}$
2. Soit A un anneau tel que le morphisme : $f : x \mapsto x^2$ est surjectif. Montrer que A est commutatif.
3. Soient K et L des corps. Soit Φ un morphisme de corps de K sur L. Montrer que Φ est injectif.