TD : FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice1 : Décomposer en éléments simples sur R(X) :

a) $F = \dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ b) $F = \dfrac{(X+3)X^2}{(X+4)(X^2-2X-3)}$ c) $F = \dfrac{X^2+4}{(X+1)(X+2)(X-3)}$

d) $F = \dfrac{X^2+5X}{(X+1)(X-2)^3}$ e) $F = \dfrac{1}{(X-4)^2(X+2)^3}$ f) $F = \dfrac{X^2+1}{(X+1)^2(X-2)^2(X-3)^2}$

g) $F = \dfrac{2X-3}{(X+4)^3X}$ h) $F = \dfrac{X^8+1}{X^3(X-1)^4}$ i) $F = \dfrac{2}{(X^2-1)^2}$

Exercice 2 : Décomposer en éléments simples sur R(X) :

a) $F = \dfrac{X^2+2X}{(X^2+X+1)(X-1)}$ b) $F = \dfrac{2X^2+1}{(X^2+X+3)}$ c) $F = \dfrac{X^5}{(X^2+X+1)^3}$

d) $F = \dfrac{X^2-3X+1}{(X^2+X+1)(X+1)^3}$ e) $F = \dfrac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$

Exercice 3 : Décomposer en éléments simples sur C(X)

a) $F = \dfrac{X^2+2X}{(X^2+1)(X-i)}$ b) $F = \dfrac{2X+1}{(X+i)(X+3)^3}$

Exercice 4 : Outre l'intégration, voici quelques applications :

1. La décomposition en éléments simples permet de calculer quelques sommes en faisant apparaître des sommes télescopiques là où apparemment il n'y en a pas (Magie, magie.)

Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{k^2(k-1)}$ $(n \geq 1)$ b) $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{3k^2-1}{k^2(k-1)^2(k+1)^2}$ $(n \geq 2)$

2. Comme son nom l'indique, la décomposition en éléments simples transforme une créature plutôt compliquée en qq chose de plus simple. Certaines opérations, comme la dérivation, vont donc s'en trouver simplifiées.

Calculer : $\left(\dfrac{1}{X^2-X-2}\right)^{(n)}$ $(n \in N)$

3. Elle permet parfois une étude de fonctions plus simple.

Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{-3x^2+7}{(x^2+2x-3)(x-2)}$ est croissante.