

TD : FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1 : Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$\text{a) } F = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$$

$$\text{b) } F = \frac{(X+3)X^2}{(X+4)(X^2 - 2X - 3)}$$

$$\text{c) } F = \frac{X^2 + 4}{(X+1)(X+2)(X-3)}$$

$$\text{d) } F = \frac{X^2 + 5X}{(X+1)(X-2)^3}$$

$$\text{e) } F = \frac{1}{(X-4)^2(X+2)^3}$$

$$\text{f) } F = \frac{X^2 + 1}{(X+1)^2(X-2)^2(X-3)^2}$$

$$\text{g) } F = \frac{2X - 3}{(X+4)^3 X}$$

$$\text{h) } F = \frac{X^8 + 1}{X^3(X-1)^4}$$

$$\text{i) } F = \frac{2}{(X^2 - 1)^2}$$

Exercice 2 : Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$:

$$\text{a) } F = \frac{X^2 + 2X}{(X^2 + X + 1)(X-1)}$$

$$\text{b) } F = \frac{2X^2 + 1}{(X^2 + X + 3)}$$

$$\text{c) } F = \frac{X^5}{(X^2 + X + 1)^3}$$

$$\text{d) } F = \frac{X^2 - 3X + 1}{(X^2 + X + 1)(X+1)^3}$$

$$\text{e) } F = \frac{X^6 + 1}{X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1}$$

Exercice 3 : Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$

$$\text{a) } F = \frac{X^2 + 2X}{(X^2 + 1)(X - i)}$$

$$\text{b) } F = \frac{2X + 1}{(X + i)(X + 3)^3}$$

Exercice 4 : Outre l'intégration, voici quelques applications :

1. La décomposition en éléments simples permet de calculer quelques sommes en faisant apparaître des sommes télescopiques là où apparemment il n'y en a pas (Magie, magie.)

Calculer les sommes suivantes :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{k^2(k-1)} \quad (n \geq 1)$$

$$\text{b) } \sum_{k=2}^n \frac{3k^2-1}{k^2(k-1)^2(k+1)^2} \quad (n \geq 2)$$

2. Comme son nom l'indique, la décomposition en éléments simples transforme une créature plutôt compliquée en qq chose de plus simple. Certaines opérations, comme la dérivation, vont donc s'en trouver simplifiées.

$$\text{Calculer : } \left(\frac{1}{X^2 - X - 2} \right)^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

3. Elle permet parfois une étude de fonctions plus simple.

Montrer que la fonction $f(x) = \frac{-3x^2 + 7}{(x^2 + 2x - 3)(x - 2)}$ est croissante.