# TD : DEVELOPPEMENTS LIMITES

Exercice 1 : Pour maîtriser un peu mieux équivalents et petits o.

Montrer que :

a) $en + \infty,\ \frac{1}{x^a} = o(\frac{1}{\ln(x)})\quad (a > 0)$

b) en $0^+$, $x = o(x \ln(x))$

c) $en + \infty,\ e^x = o(x^x)$

d) $en\ \ + \infty,\ \ln(x)\cos(x) = o(x)$

Trouver des équivalents des fonctions suivantes :

e) en 0, $\frac{\cos(x)\ln(x+1)}{\sin x}(e^x - 1)$

f) en 1, $\frac{(\cos(x)-2)(\ln(x)+x)}{\ln(x)+1}$

g) $en\ \ + \infty,\ x + \ln(x)$

h) en 0, $x + \ln(x)$

Exercice 2:

Calculer les développements limités en 0 des fonctions suivantes, à l'ordre indiqué.

a) $\frac{\cos(x)ch(x) - 1}{x}$ à l'ordre 4

b) $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 3

c) $\frac{x}{e^x - 1}$ à l'ordre 3

d) $\sqrt{1+\sin(x)}$ à l'ordre 3

e) tan(x) à l'ordre 3

f) $(1+\mathrm{x})^{\frac{1}{\mathrm{x}}}$ à l'ordre 3

Exercice 3 :

Calculer les développements limités en $+\infty$ des fonctions suivantes, à l'ordre indiqué.

a) $\ln(x^2 + 2x + 3) - \ln(x^2 + x + 1)$ à l'ordre 3

b) $\cos(\ln(x+1) - \ln(x))$ à l'ordre 3

UTILISATION DES DL POUR CALCULER DES LIMITES

Exercice 4: Calculez :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x) - sh(x)}{x(\cos(x) - ch(x))}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\arctan(2\sin(x)) - \frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin(x))}{x^3}$

UTILISATION DES DL POUR CALCULER DES EQUIVALENTS

Exercice 5 : Calculer un équivalent de f(x) dans chacun des cas suivants :

f(x)=

a) $\arctan(1+x) - \frac{\pi}{4}$ en 0

b) $\frac{1}{1+\sin(x)} - 1$ en 0

UTILISATION DES DL POUR ETUDIER DES FONCTIONS

Exercice 6 :

Soit la fonction $f$ définie sur $R^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

Montrer que l'on peut prolonger $f$ en une fonction dérivable sur R.

Exercice 7 :

Cherchez les asymptotes obliques à la courbe représentative de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

b) $f(x) = x^2\left(\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)\right)$ ( a paramètre réel )

Etudiez ensuite la position relative de la courbe par rapport aux asymptotes.

UTILISATION DES DL EN PHYSIQUE

Exercice 8 :

Soient des charges électriques $q_1,...,q_n$ placées en des points $A_1,...,A_n$. On note alors $a_i = OA_i$, $\theta_i = \left(\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OM}\right)$, où O est une origine.

Le potentiel créé par les charges en un point M vaut $\mathrm{V(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$.

On considère le point M très éloigné de la distribution. On pose OM= r. Calculer le développement limité en $\frac{1}{r}$ à l'ordre 3 de V(M).

TROUVER DES DL PAR DES METHODES UN PEU ORIGINALES

Exercice 9 :

Soit $f$ définie par $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

1. $f$ admet-elle un DL en 0 à tout ordre ?
2. Comment pourrait on calculer le DL de $f$ en 0 ?
3. Former une équation liant $f$ et $f'$.
4. En déduire les coefficients de la partie principale du DL de $f$ en 0

Exercice 10 :

Soit $f$ définie par $f(x) = e^x \sin(x)$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ sur un intervalle à préciser.
2. Montrer que $f^{-1}$ admet un DL en 0 à tout ordre.
3. Que vaut $f^{-1}(0)$ ? Calculer ensuite le DL en 0 de $f^{-1}$ à l'ordre 3.