TD – Couples de variables aléatoires

Exercice 1

L'un des résultats d'une enquête sociologique sur la violence familiale peut s'exprimer en considérant un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes où X représente la violence subie par un individu durant son enfance, mesurée par une échelle 0 / 1 / 2, et Y la violence qu'il exerce dans sa famille, mesurée par la même échelle.
Les probabilités conjointes estimées sont présentées sur le tableau ci-dessous :

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	0.86	0.04	0.00
$X=1$	0.03	0.02	0.02
$X=2$	0.01	0.01	0.01

1. Déterminer les probabilités marginales.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type des variables X et Y.

Exercice 2

Une urne contient a boules rouges et b boules vertes. On tire une boule au hasard puis on la remet dans l'urne en ajoutant c boules de la même couleur. On tire enfin une boule de l'urne dans sa nouvelle composition. On appelle X_i, $i \in 1, 2$, la variable aléatoire de Bernouilli égale à 1 si la boule tirée au i_{eme} tirage est rouge, 0 si elle est verte.

1. Dresser le tableau de la loi jointe de X_1 et de X_2, et des lois marginales.
2. Calculer les espérances et les variances.

Exercice 3

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de distribution uniforme sur $[0, 12] \times [0, 14]$.

1. Déterminer la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y).
2. Calculer la probabilité $P(X \leq 6, Y \leq 7)$.

Exercice 4

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de distribution uniforme sur $[0, 10] \times [0, 12]$.

Quelle est la probabilité que $X > Y$?

Exercice 5

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de distribution uniforme sur le domaine D décrit par :

$$D = \{(x,y) : 0 < x, 0 < y \text{ et } 9x + 11y < 99\}.$$

Calculer $E[X^2]$, l'espérance de X^2.

Exercice 6

Soit X et Y deux variables aléatoires ayant pour densité conjointe $f(x,y)$. Calculer les distributions de X et de Y dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x \cdot e^{-x(1+y)}$ pour $x, y \geq 0$, et $f(x,y) = 0$ sinon.
2. $f(x,y) = 60xy^2$ pour $x, y \geq 0$ et $x + y \leq 1$, et $f(x,y) = 0$ sinon.

Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

Exercice 7

Dans une grande surface, 60% des clients payent leurs achats avec des chèques, 30% en espèces, 10% avec une carte bancaire. On choisit 2 clients au hasard. Soit X le nombre de clients parmi les 2, qui payent avec des chèques et Y le nombre de clients parmi les 2, qui payent en espèces.

1. Calculer la loi du couple (X,Y).
2. Calculer les lois marginales.
3. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
4. Calculer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
5. Déterminer la loi de probabilité des clients payant en espèces, sachant qu'un des clients a payé avec une carte bancaire.