

## TD – Couples de variables aléatoires

### Exercice 1

L'un des résultats d'une enquête sociologique sur la violence familiale peut s'exprimer en considérant un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires discrètes où  $X$  représente la violence subie par un individu durant son enfance, mesurée par une échelle 0 / 1 / 2, et  $Y$  la violence qu'il exerce dans sa famille, mesurée par la même échelle.

Les probabilités conjointes estimées sont présentées sur le tableau ci-dessous :

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0.86	0.04	0.00
$X = 1$	0.03	0.02	0.02
$X = 2$	0.01	0.01	0.01

1. Déterminer les probabilités marginales.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type des variables  $X$  et  $Y$ .

### Exercice 2

Une urne contient  $a$  boules rouges et  $b$  boules vertes. On tire une boule au hasard puis on la remet dans l'urne en ajoutant  $c$  boules de la même couleur. On tire enfin une boule de l'urne dans sa nouvelle composition. On appelle  $X_i$ ,  $i \in 1, 2$ , la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si la boule tirée au  $i_{eme}$  tirage est rouge, 0 si elle est verte.

1. Dresser le tableau de la loi jointe de  $X_1$  et de  $X_2$ , et des lois marginales.
2. Calculer les espérances et les variances.

### Exercice 3

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires de distribution uniforme sur  $[0, 12] \times [0, 14]$ .

1. Déterminer la loi de probabilité conjointe du couple  $(X, Y)$ .
2. Calculer la probabilité  $P(X \leq 6, Y \leq 7)$ .

### Exercice 4

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires de distribution uniforme sur  $[0, 10] \times [0, 12]$ .

Quelle est la probabilité que  $X > Y$  ?

**Exercice 5**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires de distribution uniforme sur le domaine  $D$  décrit par :

$$D = \{(x, y) : 0 < x, 0 < y \text{ et } 9x + 11y < 99\}.$$

Calculer  $E[X^2]$ , l'espérance de  $X^2$ .

**Exercice 6**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires ayant pour densité conjointe  $f(x, y)$ . Calculer les distributions de  $X$  et de  $Y$  dans les cas suivants :

1.  $f(x, y) = x \cdot e^{-x(1+y)}$  pour  $x, y \geq 0$ , et  $f(x, y) = 0$  sinon.
2.  $f(x, y) = 60xy^2$  pour  $x, y \geq 0$  et  $x + y \leq 1$ , et  $f(x, y) = 0$  sinon.

Est-ce que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes ?

**Exercice 7**

Dans une grande surface, 60% des clients payent leurs achats avec des chèques, 30% en espèces, 10% avec une carte bancaire. On choisit 2 clients au hasard. Soit  $X$  le nombre de clients parmi les 2, qui payent avec des chèques et  $Y$  le nombre de clients parmi les 2, qui payent en espèces.

1. Calculer la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Calculer les lois marginales.
3. Calculer  $E(X)$  et  $E(Y)$ .
4. Calculer  $\sigma(X)$  et  $\sigma(Y)$ .
5. Déterminer la loi de probabilité des clients payant en espèces, sachant qu'un des clients a payé avec une carte bancaire.