TD – Convergences

Exercice 1

Une banque accepte de ses clients des rouleaux de pièces de 2 euros sans contrôler le nombre de pièces – en principe 25 pièces par rouleau. On suppose que 3% des rouleaux contiennent 24 pièces, 96% en contiennent 25, et 1% en contiennent 26.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces d'un rouleau. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
2. Calculer la probabilité pour que 400 rouleaux contiennent :
   - moins de 10 000 pièces,
   - moins de 9990 pièces,
   - moins de 9980 pièces.

Exercice 2

On arrondit 50 nombres à l'entier le plus proche et on effectue leur somme. Si les erreurs d'arrondi individuelles sont distribuées uniformément sur l'intervalle $[-0.5, +0.5]$, quelle est la probabilité pour que la somme obtenue ait un écart de plus de 3 par rapport à la somme exacte ?

Exercice 3

Un restaurant peut servir 75 repas. La pratique montre que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas.

1. Le restaurateur accepte 90 reservations. Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 50 clients ?
2. Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0.9 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

Exercice 4

On suppose que la durée de vie d'une ampoule électrique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.2 \times 10^{-3}$ h^{-1}. Si l'on remplace une ampoule par une ampoule semblable dès qu'elle "claque", quelle est la probabilité qu'au bout de 50 000 heures l'ampoule en fonctionnement soit au moins la dixième ?

Exercice 5

Une compagnie aérienne gère un vol de 200 passagers avec les données techniques et le modèle probabiliste suivants :

- la charge maximale autorisée, passagers + bagages, est de 18 tonnes,
- le poids d'un passager est une variable aléatoire d'espérance 65 kg et d'écart-type 15 kg,
- si le poids maximal autorisé des bagages (par passager) est M kilos, ce poids est une variable d'espérance $0.7M$ kg et d'écart-type $0.2M$ kilos,
- toutes les variables aléatoires (poids des passagers et poids des bagages) sont indépendantes.

A quelle valeur la compagnie doit-elle fixer M si elle veut avoir 95 chances sur 100 (pour un vol plein) qu'il n'y ait pas dépassement de la charge maximale autorisée, et qu'elle n'ait donc pas à refuser à l'embarquement les excédents de poids de bagages ?

Exercice 6

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face aux temps $t = 1, 2, \ldots n$. Chaque fois, A gagne 1 euro si le résultat est pile, B gagne 1 euro si le résultat est face. Les deux joueurs possèdent respectivement a euros et b euros (on notera c la plus grande des deux valeurs a et b). Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs a perdu la somme qu'il possédait.

1. On note S_n le nombre total de piles à $t = n$ et $D_n = 2S_n - n$ la différence entre le nombre de piles et le nombre de faces. On note p_n la probabilité que A ait gagné pour $t \leq n$, et q_n la probabilité que B ait gagné pour $t \leq n$. Montrer que $1 - p_n - q_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
2. On note E_n l'espérance mathématique de gain cumulé de A au temps $t = n$. Montrer que $E_n = 0$, puis donner une expression de E_n en fonction de p_n et q_n. En déduire que p_n et q_n tendent vers des limites p et q lorsque n tend vers l'infini. Donner la valeur de p en fonction du quotient $\frac{b}{a}$.