TD : ARITHMETIQUE

Exercice 1 : Calculer pgcd(a,b) et (u;v) tq au + bv =1

a) a = 374 ; b = 541 b) a = 778 b = - 253

Exercice 2 :

1. Décomposer en facteurs premiers les nombres suivants : 238 ; 195 ; 311
2. En déduire pgcd (238,311) , pgcd (195,311, 238), ppcm(195, 311).

Exercice 3 :

Calculer la fraction : $\frac{1}{94}+\frac{2}{132}$

Exercice 4 :

Soient a, b, q dans Z. Démontrer le résultat du cours : pgcd (a,b) = pgcd (b, a-bq).

Exercice 5 :

Le but de cet exercice est de prouver un petit résultat très utile qui permet de déterminer les racines rationnelles d'un polynôme.

Soit $n \in N^*$. Soit P un polynôme de degré n : $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_0$

1. Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel $\left((a,b) \in Z^2\right)$.

Prouver qu'il existe p et q dans Z tq $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ et tq pgcd (p, q) =1

2. Soient p et q dans Z premiers entre eux tq $\frac{p}{q}$ est racine de P. On a donc $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.
   a) En écrivant $a_n p^n$ en fonction de p, q et des nombres a_i, $i \in \{0,1,...,n-1\}$, montrer que q divise a_n. (On pensera au th de Gauss)
   b) Par une méthode similaire, montrer que p divise a_0.

3. (Question de logique) Ecrire en termes de logique ce qu'on a montré.
Est-ce un critère suffisant ou nécessaire pour l'existence de racines rationnelles ?

APPLICATION : Factoriser le polynôme $3x^3 + 11x^2 - 19x + 5$.

Exercice 6 : Le petit théorème de Fermat.

Soit p un nombre premier. Soit $k \in \{1,.., p-1\}$

1. Montrer que p est premier avec $k!$
2. Montrer que p divise $k! C_p^k$
3. En déduire que p divise C_p^k.
4. Soit n un entier non nul . Montrer que $n^p - n$ est divisible par p.

Exercice 7 :

Voici une méthode de calcul que la tradition attribue aux empereurs chinois de l'antiquité qui comptaient leurs immenses armées. (cf photo les 6400 statuettes grandeur nature retrouvées dans la tombe de l'empereur Qin Shi Huangdi (221-210 av. J.-C.))

Notre empereur décide de compter un régiment de son armée ; ce régiment a moins de 1000 hommes.
Il fait grouper les hommes par paquets de 7 ; il reste 2 hommes qui ne peuvent former un paquet de 7.
En les groupant par 13, il reste 3 hommes ; en les groupant par 11, il reste 10 hommes.

Il demande à ses mathématiciens de lui annoncer l'effectif du régiment. Sûrs d'eux et de leurs bouliers, ils lui répondent sans problème.

Un puissant théorème d'algèbre se cache derrière cette méthode : le théorème des restes chinois.

1. Trouver u_1 et u_2 tq $7u_1 + 11u_2 = 1$
2. On pose $Z = 2u_2 11 + 10u_1 7$. Montrer (sans calcul explicite) que 7 divise Z – 2 , que 11 divise Z-10
3. Trouver $u_1^{'}$ et $u_2^{'}$ tq $7*11u_1^{'} + 13u_2^{'} = 1$
4. On pose $Z' = Zu_2^{'} 13 + 3u_1^{'} 7*11$ Montrer (sans calcul explicite) que 77 divise Z' – Z , que 13 divise Z' – 3
5. Le théorème annonce alors qu'il existe $k \in Z$ tel que le chiffre recherché est égal à Z' +k7*11*13.

Trouver le nombre d'hommes.