TD Applications linéaires

Exercice1 : Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $\begin{aligned} f : R[X] &\to R[X] \\ P &\mapsto XP \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g : R[X] &\to R[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$ Calculer le noyau et l'image de ces applications.

2. $\begin{aligned} f : R[X] &\to R[X] \\ P &\mapsto P(X) - P(X+1) \end{aligned}$ Calculer Ker f

3. $\begin{aligned} f : R^3 &\to R^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x \\ z + y \end{pmatrix} \end{aligned}$ Donner une base du noyau et de l'image.

Exercice 2 :

1. Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire
2. Soit $f : R^3 \to R^3$ linéaire. On pose $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Pourquoi suffit il de connaître

   $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$ pour connaître entièrement f ?

a) On suppose que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $f(\vec{k}) = \vec{i}$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de R^3. Calculer f(u).

A retenir dans cet exercice : pour connaître f(u) $\forall u$ on a juste besoin de connaître $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$

b) Calculer Ker f, donner une base de Ker f. Calculer rg(f)

Exercice 3 :

Montrer que dans l'ex1, question1, f est injective, g est surjective mais que ni f ni g ne sont bijectives.

Que peut on alors dire de la dimension de R[X] ?

Exercice 4 :

Soit E un R-ev, soient f, g deux applications linéaires de E dans E tq fog = gof.

Montrer que Ker f et Im f sont stables par f.

Exercice 5 : Les polynômes de Lagrange

Soient n+1 réels $x_0, x_1, ..., x_n$ distincts. Soient n+1 réels $\alpha_0, ..., \alpha_n$

Le but de cet exercice est de résoudre la question suivante : étant donné n+1 points $(x_0, \alpha_0), ..., (x_n, \alpha_n)$, existe il un polynôme de degré n passant par ces points ? Si oui, est il unique ?

On a déjà répondu par l'affirmative à cette question en CONSTRUISANT explicitement le polynôme qui répondait à la question.

On va trouver une autre manière de répondre à cette question, sans pour autant trouver le polynôme qui répond à la question.

Soit $\begin{array}{l} \varphi : R_n[X] \to R^{n+1} \\ P \mapsto (P(x_0),...,P(x_n)) \end{array}$.

1. Montrer que $R_n[X]$ *et* R^{n+1} sont des R-ev de même dimension.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Montrer que répondre à la question revient à montrer que φ est surjective et injective
4. Montrer que φ est injective.
5. Conclure.

Exercice 6 :

Soit $f : E \to E$ une application linéaire. On note $f^n = \underbrace{fofo...of}_{n\ fois}$.

On note $K_n = Ker\ f^n$ et $I_n = \mathrm{Im}\ f^n$

a) Montrer que $\forall n > 0,\ K_n \subset K_{n+1}$ et $I_n \supset I_{n+1}$
b) Montrer que $K_n = K_{n+1} \Rightarrow \forall k \geq 0, K_n = K_{n+1} = ... = K_{n+k}$
c) Montrer que $I_n = I_{n+1} \Rightarrow \forall k \geq 0, I_n = I_{n+1} = ... = I_{n+k}$

Exercice 7 :

On considère R^3, muni de la base canonique $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$. Rappel : Pour connaître une application linéaire f , il suffit de connaître l'image par f de la base de R^3 $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On pose $f(\vec{i}) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$, $f(\vec{j}) = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, $f(\vec{k}) = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}$

1. Montrer que f est une projection
2. Déterminer une base de ses éléments caractéristiques (Ker f et Im f)

Exercice 8 :

Mêmes questions qu'à l'ex précédent avec

$f(\vec{i}) = -\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{i} + \vec{j}$, $f(\vec{k}) = -\vec{k}$

Exercice 9 :

On se place ici dans R^3.

Soit A le sev de R^3 défini par $A = \left\{(x;y;z) \in R^3\ tq\ x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\right\}$

Soit B le sev de R^3 défini par $B = \{(x;y;z) \in R^3\ tq\ x + y + z = 0\}$.

1. Vérifier que A et B sont bien des sev de R^3.
2. Montrer que A et B sont bien des sev supplémentaires.
3. On pose f = la projection sur A parallèlement à B. Soit $u = (x;y;z)$ un vecteur quelconque de R^3. Calculer f(u).