

# Etude numérique de sensibilité d'un bilan de société d'assurance dans le cadre de contrats avec option de sortie\*

Mireille BOSSY  
INRIA  
B.P. 93, 06902  
Sophia Antipolis  
France

Nathalie PISTRE  
Groupe CERAM  
B.P. 085, 06902  
Sophia Antipolis  
et INRIA Sophia Antipolis  
France

Denis TALAY  
INRIA  
B.P. 93, 06902  
Sophia Antipolis  
France

**L'intégralité de cet article est publié dans la revue BANQUE & MARCHÉS, No.28, Mai-Juin 1997.**

## Introduction

Le but de cet article est de proposer une méthodologie pour calculer la valeur de la dette engagée par une société d'assurance vis-à-vis d'un assuré, pour un contrat garantissant à ce dernier un revenu minimum augmenté d'une participation au gain de la société sur ses placements financiers (actions et obligations). Nous nous intéressons également aux variations de cette valeur induites par des variations de certains paramètres du modèle décrivant le portefeuille financier de la société et le comportement de l'assuré, notamment en terme de retrait anticipé.

La présence d'options de retrait ne permet pas l'utilisation des méthodes de couverture habituelles (cf. Bierwag [?], Bierwag, Kaufman et Toevs [?, ?], Ingersoll, Skelton, et Weil [?], Ingersoll [?]), en dehors même des arguments sur l'inopportunité d'une mesure statique dans un modèle dynamique (Cox, Ingersoll et Ross [?]).

Pour des raisons d'ordre pédagogique, nous nous limitons à un modèle simplifié. Le portefeuille de la société est réduit à un zéro-coupon et une action, et l'assuré sort du contrat sous le seul effet de sa vision (plus ou moins élémentaire) de la rentabilité future du portefeuille. Nous supposons en outre que la composition du portefeuille n'est pas modifiée au cours du temps.

---

\*Ce travail a été effectué dans le cadre d'une collaboration entre l'INRIA et la Fédération Française des Sociétés d'Assurance. Nous remercions particulièrement François de Varenne pour avoir posé le problème et pour des conversations fructueuses. Nous remercions Henri Harfouche et Katell Savidan pour leur concours à cette étude.

Nous comparons les conséquences en terme de bilan<sup>1</sup> de la société d'assurance du comportement d'un assuré impulsif qui réagit au vu de sa rentabilité passée et d'un assuré anticipatif qui raisonne en terme d'espérance associée au processus stochastique décrivant l'évolution des placements financiers. En particulier nous montrons que les assurés anticipants ont une stratégie qui pénalise la société.

Le plan de l'article est le suivant : dans la première section, nous modélisons le contrat d'assurance-vie, le portefeuille d'investissement et le comportement de l'assuré. Nous présentons la méthode numérique utilisée (méthode de Monte Carlo et simulation de trajectoires de processus stochastiques). Dans la deuxième section, nous présentons les résultats obtenus en faisant varier les différents paramètres du modèle. La dernière section montre comment étendre la méthodologie introduite ici vers des modèles plus réalistes, et décrit les problèmes à résoudre dans cette optique.

## 1 Modélisation

Nous supposons que le client investit 1 FRF à  $t = 0$  pour une durée fixée par le contrat, ici 8 ans, comme dans un contrat d'assurance-vie standard.

### 1.1 Contrat d'assurance vie et portefeuille d'investissement

A chaque instant, si l'assuré n'est pas déjà sorti du contrat, on suppose que la dette de la société d'assurance envers son client est donnée par

$$D_t = p(t) [\exp(\rho t) + \max(0, (\alpha S_t + \beta Z_t) - \exp(\rho t))].$$

---

1. Pour une description complète des problèmes de gestion de bilan d'une banque ou d'une société d'assurance voir l'ouvrage de J. Bessy[?].

$D_t$  représente également la valeur de remboursement de la société envers son client, si celui-ci décide de sortir en  $t$ .

Dans l'égalité précédente,  $\rho$  est le taux minimal garanti par le contrat et  $\exp(\rho t)$  représente à chaque instant la valeur minimale garantie du contrat;  $S_t$  (respectivement  $Z_t$ ) est la valeur du portefeuille d'actions (respectivement d'obligations) acheté à la date  $t = 0$  et dé tenu par la société; les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont les proportions investies en actions et en obligations respectivement ( $\alpha$  et  $\beta$  sont positifs et  $\alpha + \beta = 1$ ). Enfin  $p(t)$  est la *fonction de pénalisation* qui décrit la façon dont le contrat pénalise l'assuré en cas de sortie anticipée. Dans notre modèle, si le client sort avant l'échéance de 8 ans, il ne reçoit que 95% de son capital. La fonction de pénalisation est donc donnée par

$$p(t) = 95\% \mathbb{1}_{[0,8\text{ans}]}(t) + \mathbb{1}_{[8\text{ans},+\infty]}(t).$$

Le portefeuille représente l'actif de la société d'assurance et on désigne par

$$A_t = \alpha S_t + \beta Z_t$$

sa valeur.

Sauf en cas de sortie anticipée, l'égalité (1) montre que le contrat que nous considérons ici est supposé verser la totalité des bénéfices éventuels du portefeuille (et non un pourcentage). Cette hypothèse simplificatrice entraîne généralement un passif toujours supérieur ou égal à l'actif, en raison de l'effet option du contrat et de la valeur minimale qu'il garantit.

Pour simplifier la simulation numérique, nous avons considéré que la partie obligations du portefeuille n'est constituée que de zéro-coupons achetés à la date  $t = 0$  et d'échéance 8 ans.

A chaque instant  $t$  entre 0 et 8 ans,  $Z_t$  représente la valeur de marché d'un portefeuille de  $N_0$  zéro-coupons. Chaque zéro-coupon verse 1 FRF à son échéance de 8 ans. Pour simuler l'évolution dans le temps de  $Z_t$ , il faut déterminer la quantité  $N_0$  de zéro-coupons à acheter à la date 0, correspondant à un investissement initial de 1 FRF, et se donner un modèle pour l'évolution du prix des zéro-coupons. Pour cela, nous avons choisi le modèle simple de Vasicek [?] qui, à partir de la modélisation de l'évolution du taux à court terme, fournit l'évolution du prix d'un zéro-coupon. Plus précisément, soit  $r_t$  la valeur du taux court à l'instant  $t$ . Alors, dans le modèle de Vasicek,  $(r_t)$  est un processus aléatoire qui a pour équation d'évolution

$$\begin{cases} dr_t = C(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^1 \\ r_{t=0} = r_0, \end{cases} \quad (1)$$

où  $r_0$  est la valeur du taux court en  $t = 0$ ;  $C, \theta, \sigma_r$  sont les paramètres du modèle:  $\theta$  représente la valeur

moyenne autour de laquelle le taux  $r_t$  oscille,  $C$  est la force de rappel vers  $\theta$  et  $\sigma_r$  est la volatilité du taux.  $(W_t^1)$  est un mouvement brownien.

Le modèle de Vasicek permet d'obtenir la valeur du taux d'intérêt long (sur une période donnée) à partir du taux court  $r_t$ . Pour  $C, \theta$  et  $\sigma_r$  fixés, on définit  $R(t, r)$  par

$$R(t, r) = R_\infty - \frac{1}{tC} [(R_\infty - r)(1 - \exp(-Ct)) - \frac{\sigma_r^2}{4C^2} (1 - \exp(-Ct))^2], \quad (2)$$

avec

$$R_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t, r) = \theta - \frac{\sigma_r^2}{2C}.$$

$R(T - t, r_t)$  est le taux d'intérêt sur la période  $[t, T]$  coté à l'instant  $t$ . Le taux  $R_\infty$  s'interprète comme un taux à très long terme. Le prix de marché à l'instant  $t$  d'un zéro-coupon versant 1 FRF à l'échéance  $T$  est donné par

$$P(t, T) = \exp(-(T - t)R(T - t, r_t)). \quad (3)$$

Ainsi, la quantité de zéro-coupons d'échéance 8 ans à acheter à la date  $t = 0$  et correspondant à un investissement initial de 1 FRF est

$$N_0 = \frac{1}{P(0, 8)} = \exp(8R(8, r_0)), \quad (4)$$

et à chaque instant  $t \in [0, 8]$ ,

$$Z_t = N_0 \times P(t, 8) \quad (5)$$

avec

$$Z_0 = 1, \quad Z_8 = N_0. \quad (6)$$

A chaque instant  $t$  entre 0 et 8 ans,  $S_t$  représente la valeur de marché ou prix d'un portefeuille d'actions. La valeur initiale de ce portefeuille est de  $S_0 = 1$  FRF. Pour simplifier la modélisation, nous supposons que le portefeuille d'actions est investi dans une unique action et nous prenons comme modèle d'évolution du prix un mouvement brownien géométrique:  $(S_t)$  est un processus aléatoire dont l'équation d'évolution est

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_a dW_t^2) \\ S_{t=0} = S_0 = 1; \end{cases}$$

$\mu$  représente la rentabilité instantanée de l'action et  $\sigma_a$  sa volatilité;  $(W_t^2)$  est un mouvement brownien indépendant de  $(W_t^1)$ . Il est bien connu que ce modèle admet une solution explicite donnée par

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_a^2\right)t + \sigma_a W_t^2\right)$$

et à chaque instant  $t$ , le prix à l'instant final 8 ans se déduit du prix spot par

$$S_8 = S_t \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma_a^2 \right) (8 - t) + \sigma_a (W_8^2 - W_t^2) \right). \quad (7)$$

$S_t$  et  $Z_t$  étant des quantités aléatoires, la dette de la société d'assurance envers son client, donnée par (1) est elle aussi une quantité aléatoire.

Si  $R(t, r_0)$  est le taux d'intérêt sur la période  $[0, t]$ , (donnée par la formule de Vasicek (2)), à chaque instant  $t$ , la valeur actualisée en 0 de la dette  $D_t$  est

$$D_t^0 = D_t \times \exp(-tR(t, r_0)).$$

De même, on note  $A_t^0$  la valeur actualisée du portefeuille. Si le client reste dans le contrat jusqu'à son échéance, la simulation d'un grand nombre de scénarios d'évolution des variables aléatoires  $S_t$  et  $r_t$  (et donc de la variable aléatoire  $Z_t$  par les formules (3) et (5)), permet de calculer l'espérance de la dette à l'échéance (notée  $\mathbb{E}D_8$ ) et l'espérance de la dette actualisée (notée  $\mathbb{E}D_8^0$ ).

L'investisseur possède de facto, en sus de la valeur garantie  $p(t) \exp(\rho t)$ , une option "cachée" de prix d'exercice non constant,  $p(t) \exp(\rho t)$  et de sous-jacent  $p(t)A(t)$ . Cette option est américaine dans sa structure, puisque le client apprécie le moment de sa sortie. On pourrait donc valoriser cette option par un modèle traditionnel d'option américaine, ce qui conduirait à effectuer un calcul sous la probabilité neutre au risque. Cette option pourrait être couverte (au sens où le actifs  $S$  et  $Z$  sont négociables), mais il est important de remarquer qu'elle ne peut elle-même être librement négociée. En effet le client, s'il veut "déboucler" sa position ne peut qu'exercer son droit optionnel; il ne peut en aucun cas revendre ce dernier. C'est d'ailleurs un droit qu'il n'a pas non plus acheté. Le prix théorique de l'option ne correspond donc à aucun flux monétaire au moment du retrait du client, en particulier pour la société d'assurance. En raison du même argument, il n'y a pas de frontière optimale d'exercice au sens traditionnel du terme: le comportement de la valeur temps de l'option n'a pas d'impact direct sur la décision du client, puisqu'il ne peut en aucune manière percevoir cette dernière.

La décision du client est formalisée de la façon suivante: il compare le produit du placement au taux spot du flux qu'il reçoit en cas de retrait anticipé à l'espérance subjective du flux final s'il reste dans le contrat, avec une latence plus ou moins grande. Les décisions du client sont donc prises à partir de calculs effectués dans la probabilité "physique".

Les conséquences en terme de richesse pour la société d'assurance sont donc dues à ces retraits et non

pas à l'encaissement du prix d'une option; les calculs en terme de flux de passif sont donc effectués également dans la probabilité physique: nous calculons l'espérance du flux de sortie pour la société en tenant compte du temps de sortie aléatoire du client, et ce pour différents comportements. Pour les mêmes raisons, le temps de sortie du client anticipatif (qui connaît les paramètres du portefeuille) dépend du paramètre de tendance du portefeuille d'actions, puisque celui-ci détermine l'espérance du flux final pour le client.

En d'autres termes, si cette option était négociable, son prix serait celui d'un marché complet, mais comme elle ne l'est pas, les décisions et conséquences pour le client et la société sont déconnectées du prix théorique de l'option.

Nous détaillons maintenant la modélisation de la décision de sortie du contrat de l'assuré.

## 1.2 Modélisation du comportement de l'assuré.

Nous supposons qu'à chaque instant le client évalue un critère de sortie en fonction de la valeur de remboursement  $D_t$  du contrat.

Nous supposons de plus que les individus ne sont pas tous aussi rationnels dans leur application du critère de sortie et y sont plus ou moins sensibles. Pour modéliser cette sensibilité, nous introduisons un coefficient  $\lambda$  que nous appellerons la latence de l'individu.

Nous avons examiné deux critères de sortie.

**Un critère "historique": l'assuré évalue une rentabilité historique de son contrat.** Le client qui applique ce critère est un client qui ne connaît pas la composition de l'actif de la société ( $\alpha S_t + \beta Z_t$ ), ou qui s'il la connaît, ne sait pas exploiter cette information. En particulier, il ne connaît pas  $\mu, \sigma_a, C, \theta$  et  $\sigma_r$  qui lui permettraient d'anticiper (en espérance) l'évolution du marché, mais il connaît la valeur de son contrat qui dans notre modèle correspond exactement à  $D_t/p(t)$  (i.e. la valeur de remboursement non pénalisé du contrat). Il calcule alors  $\gamma_t$ , le taux de rendement moyen historique annuel de son contrat, qui vérifie

$$\frac{D_t}{p(t)} = D_0 \times \exp(t\gamma_t).$$

Son critère de sortie est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'assuré sort à la date } \tau, \text{ où } \tau \text{ est} \\ \text{le premier instant entre 0 et 8 tel que} \\ D_\tau \exp((8 - \tau)R(8 - \tau, r_\tau)) \\ > \lambda \frac{D_\tau}{p(\tau)} \exp((8 - \tau)\gamma_\tau). \end{array} \right. \quad (8)$$

Avec ce critère, l'individu compare la valeur de son capital pénalisé placé au taux courant sur la période  $[\tau, 8\text{ans}]$  ( $D_\tau \exp((8 - \tau)R(8 - \tau, r_\tau))$ ) avec sa prévision de la valeur du contrat à l'échéance, estimée à l'aide de son rendement historique :

$$D_\tau/p(\tau) \exp((8 - \tau)\gamma_\tau).$$

Cette valeur est multipliée par le coefficient de latence  $\lambda \geq 1$ . Lorsque  $\lambda = 1$ , l'individu réagit de façon brutale à une prévision pessimiste. Lorsque  $\lambda > 1$ , l'individu se donne une marge d'erreur sur sa prévision ou un temps de réaction par rapport au critère  $\lambda = 1$ .

**Un critère "futuriste": l'assuré évalue l'espérance de la valeur future de son contrat.** Ce critère de sortie, beaucoup plus sophistiqué que le critère précédent, est utilisé par un individu qui est supposé connaître la composition du portefeuille de l'actif de la société d'assurance et qui connaît également suffisamment bien le marché (en particulier, les paramètres  $\mu, \sigma_a, C, \theta$  et  $\sigma_\tau$  qui vont lui permettre d'anticiper l'évolution future en espérance de la valeur du portefeuille de la société). Connaissant les données du marché jusqu'à l'instant  $t$  (en particulier le prix spot  $S_t$  et les paramètres du marché), l'assuré estime l'espérance de la valeur du contrat à l'échéance. En termes mathématiques, l'individu calcule l'espérance de  $D_8$ , connaissant toutes les valeurs passées des variables aléatoires qui composent  $D_t$  jusqu'à l'instant  $t$  compris, ce qui est noté  $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[D_8]$ . Ce calcul est très similaire à l'évaluation du prix d'une option européenne d'achat ou de vente dans le cadre du modèle de Black et Scholes, mais il s'effectue ici sous la probabilité physique pour les raisons déjà évoquées plus haut.

Le critère de sortie de l'assuré est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'assuré sort à la date } \tau, \text{ où } \tau \text{ est} \\ \text{le premier instant entre 0 et 8 tel que} \\ D_\tau \exp((8 - \tau)R(8 - \tau, r_\tau)) > \lambda \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}[D_8]. \end{array} \right. \quad (9)$$

Comme pour le critère historique, l'individu compare la valeur de son capital pénalisé placé au taux courant sur la période  $[\tau, 8\text{ans}]$  avec son anticipation de la valeur du contrat à l'échéance. Mais les outils pour l'estimation de la valeur de  $D_8$  sont très différents. Pour les essais numériques, nous associerons un coefficient de latence  $\lambda = 1$  au client qui utilise le critère futuriste de sortie: son estimation étant sophistiquée, nous supposons que l'individu est très rationnel et confiant dans sa prévision.

Dans le cas où le client ne sort pas du contrat avant l'échéance (pour l'un ou l'autre des critères), nous fixons la valeur de  $\tau$  à 8 ans.

Nous sommes maintenant en mesure d'estimer l'espérance de la dette au moment où le client sort du

contrat (s'il sort), ainsi que la valeur de la dette actualisée, ce que nous notons respectivement :

$$\mathbb{E}D_\tau \quad \text{et} \quad \mathbb{E}D_\tau^0.$$

### 1.3 Simulation numérique

Dans ce paragraphe nous décrivons la procédure d'approximation numérique de l'espérance  $\mathbb{E}D_\tau$  où  $\tau$  est la date de sortie du contrat définie soit par (8) soit par (9). Pour approcher cette espérance, nous simulons un grand nombre  $N$  de scénarios indépendants de l'évolution aléatoire du taux  $r_t$  et du prix  $S_t$ . Au scénario numéro  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) correspond une réalisation  $D_\tau(i)$  de la valeur de la dette. La *Loi des Grands Nombres* nous assure que

$$\bar{\mathbb{E}}D_\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_\tau(i) \quad \text{approche} \quad \mathbb{E}D_\tau.$$

De plus, si on note  $\gamma^2$  la variance de la variable aléatoire  $D_\tau$ , la *Loi du Logarithme Itéré* indique que pour chaque scénario (hors d'un ensemble de probabilité nulle) la limite supérieure de l'erreur est d'ordre  $\gamma\sqrt{\log \log N}/\sqrt{N}$ .

Nous n'avons pas fait l'étude mathématique de  $\gamma^2$  en fonction de l'ensemble des paramètres qui entrent dans la modélisation du contrat. En revanche, pour chaque jeu de paramètres, nous avons approché à la fois  $\bar{\mathbb{E}}D_\tau$  et  $\gamma^2$ . Ceci nous a permis de vérifier que le nombre  $N = 8000$  de scénarios simulés est tel que la précision du calcul de  $\bar{\mathbb{E}}D_\tau$  est suffisamment grande pour observer la sensibilité de cette quantité par rapport aux paramètres de la modélisation.

Rappelons que le terme aléatoire dans l'expression de  $D_t$  est

$$\max(0, (\alpha S_t + \beta Z_t) - \exp(\rho t)).$$

Nous calculons l'évolution du portefeuille  $(\alpha S_t + \beta Z_t)$  à des instants discrets  $t_k = k\Delta t$ , où  $\Delta t$  est le pas de discrétisation. Dans les simulations,  $\Delta t$  est fixé à un jour ; dans notre échelle de temps,  $\Delta t = \frac{1}{365}$ ;  $k$  varie de 1 à  $8 \times 365$ .

Par appels successifs à un générateur de nombres pseudo-aléatoires on simule le vecteur gaussien de dimension  $2 \times 8N/\Delta t = 2 \times 8 \times 365 \times 8000$ :

$$(W_{t_{k+1}}^{j,i} - W_{t_k}^{j,i}; j = 1, 2; k = 1, \dots, 8 \times 365; i = 1, \dots, 8000).$$

Les coordonnées de ce vecteur sont des variables aléatoires indépendantes, de loi normale centrée de variance  $t_{k+1} - t_k$ . Chaque scénario  $i$  est défini par la réalisation numéro  $i$  de  $(W^1, W^2)$ . A  $i, j$  fixés, pour tout  $k$  on

obtient  $W_{t_k}^{j,i}$  par sommation des accroissements antérieurs à  $t_k$ .

On calcule la valeur du portefeuille d'actions au temps  $t_k$  dans le scénario  $i$ , notée  $\bar{S}_{t_k}^i$ , par la formule (7).

La simulation d'une réalisation de  $Z_{t_k}$  nécessite la simulation du taux court  $r_{t_k}$ . Nous avons utilisé le schéma d'Euler avec un pas  $\Delta t$  pour l'équation (1) (l'expérience montre qu'un schéma plus complexe est inutile). Nous notons  $(\bar{r}_{t_k}^i, k = 0, \dots, 8 \times 365)$  la trajectoire approchée de  $r_t$  correspondant au scénario numéro  $i$ . A chaque instant  $t_k$ , la formule (3) permet alors de calculer la réalisation correspondante du prix d'un zéro-coupon,  $P^i(t_k, 8)$ . De même, la formule (5) fournit la réalisation  $Z_{t_k}^i$  de la valeur du portefeuille de zéro-coupons au temps  $t_k$ .

Ainsi, à chaque instant de discrétisation  $t_k$ , une réalisation de  $D_{t_k}$  est calculée par

$$D_{t_k}(i) = p(t_k) [\exp(\rho t_k) + \max(0, (\alpha S_{t_k}^i + \beta Z_{t_k}^i) - \exp(\rho t_k))]$$

et une trajectoire de l'évolution de la dette est l'ensemble des réalisations  $(D_{t_k}(i), k = 0, \dots, 8 \times 365)$ .

Les valeurs numériques des paramètres de la gamme des taux ont été fixés sur la base d'une étude statistique antérieure réalisée par E. Fournié et D. Talay [?].

A chaque instant  $t_k$ , la simulation du contrat nous fournit la réalisation approchée  $(D_{t_k}(i), \bar{r}_{t_k}^i, S_{t_k}^i)$  de  $(D_{t_k}, r_{t_k}, S_{t_k})$ . A partir de  $\bar{r}_{t_k}^i$ , en utilisant la formule (2), nous pouvons calculer les taux d'intérêt sur la période  $[t_k, 8]$  cotés à l'instant  $t_k$  ( $R_{[t_k, 8]}^i = R(8 - t_k, \bar{r}_{t_k}^i)$ ) et ainsi, la valeur pénalisée du capital du client placé au taux courant sur la période  $[t_k, 8]$ .

Si nous associons au contrat un individu utilisant le critère de sortie historique, nous arrêtons la simulation de la trajectoire  $(D_{t_k}(i), k = 0, \dots, 8 \times 365)$  au premier instant  $t_k$  tel que

$$D_{t_k}(i) \exp\left((8 - t_k)R_{[t_k, 8]}^i\right) > \lambda \frac{D_{t_k}(i)}{p(t_k)} \exp\left((8 - t_k)\gamma_{t_k}^i\right)$$

$$\text{où } \gamma_{t_k}^i = \frac{1}{t_k} \ln(D_{t_k}(i)/p(t_k)).$$

Si nous associons au contrat un individu utilisant le critère de sortie "futuriste", nous arrêtons la simulation de la trajectoire  $(D_{t_k}(i), k = 0, \dots, 8 \times 365)$  au premier instant  $t_k$  tel que

$$D_{t_k}(i) \exp\left((8 - t_k)R_{[t_k, 8]}^i\right) > \lambda \times eval(S_{t_k}^i, t_k),$$

où la fonction  $eval(x, t)$  est définie par  $eval(S_t, t) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} [D_8]$ . Notons qu'il est possible de donner une for-

mule explicite<sup>2</sup> pour  $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t} [D_8]$ , formule que nous avons utilisée dans notre programme.

La valeur du portefeuille de zéro-coupons à l'échéance  $Z_8$  est connue dès l'instant  $t = 0$  et (cf. (6) et (4)), cette valeur ne dépend que des paramètres de modélisation du taux court  $r_t$ . En particulier  $Z_8$  dépend de la gamme des taux à l'instant initial  $t = 0$ . Ainsi, le taux minimal  $\rho$  garanti par le contrat et  $\beta$  étant fixés, il existe un seuil  $\mathcal{S} = \exp(\rho 8)/\beta$  tel que si la société possède un portefeuille de zéro-coupons de valeur initial 1 FRF et dont la valeur finale  $Z_8$  est supérieur à  $\mathcal{S}$ , alors le client "futuriste" sera moins sensible à la volatilité du portefeuille d'actions qui entre dans la composition de l'actif de la société. Il faut cependant que le marché propose un tel portefeuille de zéro-coupons, c'est à dire que la gamme des taux doit être suffisamment avantageuse à la date  $t = 0$ . Nous reviendrons plus en détails sur ce point dans la section 2.2.

## 2 Résultats et interprétation

Les résultats numériques présentés dans cette partie ont été réalisés avec le jeu de paramètres suivants :

- **Paramètres propres au contrat d'assurance :** échéance = 8 ans; taux garanti = 4 %; coefficient de pénalité = 95 %;  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ .
- **Paramètres propres au marché, modélisation du taux court spot :** taux instantané au départ  $r_0 = 7,5\%$ ; valeur moyenne  $\theta = 7,5\%$ ; force de rappel  $C = 0,7$ ; volatilité du taux court  $\sigma_r = 3\%$ .
- **Paramètres de simulations :** nombre de trajectoires simulées = 8000; pas de discrétisation en temps  $\Delta t = \frac{1}{365}$ .
- **Notations :**  $\bar{\mathbb{E}}D_\tau$  = valeur espérée du flux de remboursement pour la société;  $\bar{\mathbb{E}}\tau$  = temps de sortie moyen (calculé sur toutes les trajectoires);  $N_s$  = nombre de sorties;  $\bar{\mathbb{E}}\tau_s$  = temps de sortie moyen (calculé sur les trajectoires sorties seulement).

Par ailleurs, nous avons supposé que le portefeuille de la société est composé à part égale d'actions et de zéro-coupons. **Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont donc fixés à  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ .**

$$2. \text{ Si } Z_8 \geq \mathcal{S}, eval(x, t) = \beta Z_8 + \alpha x \exp(\mu(8 - t)), \text{ sinon}$$

$$eval(x, t) = \exp(\rho 8) + (\beta Z_8 - \exp(\rho 8)) \frac{1}{2} ERFC\left(\frac{u_0}{\sqrt{2(8 - t)}}\right) + \alpha x \exp(\mu(8 - t)) \frac{1}{2} ERFC\left(\frac{u_0 - \sigma_a(8 - t)}{\sqrt{2(8 - t)}}\right).$$

$$\text{où } u_0 = \frac{1}{\sigma_a} \left[ \ln\left(\frac{\exp(\rho 8) - \beta Z_8}{\alpha x}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_a^2\right)(8 - t) \right].$$

Dans le paragraphe suivant, en faisant varier les paramètres  $\mu$  et  $\sigma_a$  relatifs au portefeuille d'actions, nous mettons en évidence la sensibilité du flux de passif et du temps de sortie par rapport à ces paramètres et au coefficient de latence de l'individu. Dans le paragraphe 2.2, on présente l'impact de ces paramètres directement sur la différence actif-passif, ce qui est l'information la plus pertinente en vue de la mesure du risque pour la société d'assurance.

## 2.1 Valeur espérée du flux de passif et du temps de sortie; sensibilité aux paramètres

À l'instant 0, le client apporte 1 FRF au passif de la société d'assurance. Il sortira du contrat à un temps  $\tau \leq T$ , dépendant de sa rationalité (futur/historique), de sa rapidité (valeur de la latence  $\lambda$ ) et du scénario sur les taux effectivement réalisés. La société lui versera alors  $D_\tau$ . Les calculs permettent d'obtenir des valeurs espérées (sur 8000 trajectoires).

Nous examinons le comportement d'individus "historiques" avec un paramètre de latence fixé en fonction des paramètres  $\mu$  et  $\sigma_a$  du processus sous-jacent. Nous les comparons avec le comportement d'un individu "futur rationnel", pour qui  $\lambda = 1$ . Les deux valeurs de  $\lambda$  choisies pour l'individu "historique" ( $\lambda = 1,5$  et  $\lambda = 1$ ) donnent des résultats extrêmes, qui sont des références. Nous examinons donc ensuite la sensibilité de ces résultats au paramètre  $\lambda$  choisi.

**Sensibilité à  $\mu$  et  $\sigma_a$  de l'individu "historique lent" ( $\lambda = 1,5$ ).** L'individu historique avec un  $\lambda = 1,5$  est une référence un peu abstraite, puisque sa latence est très forte et vient compenser les moyens qu'il se donne de juger son contrat. Pour un  $\sigma_a = 0,15$  et  $\mu$  variant de 0,1 à 0,35, cet individu ne "sort" jamais avant 8 ans. Le tableau suivant montre les résultats en terme de valeur espérée du flux de sortie et de temps de sortie espéré, pour  $\sigma_a = 0,15$  et différentes valeurs de  $\mu$ . Cet individu est l'investisseur idéal pour la société.

individus "historiques" $\lambda = 1,5$ ; $\sigma_a = 0,15$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,15$	$\mu = 0,2$
$\mathbb{E}D_\tau$	2,023	2,569	3,3873
$\mathbb{E}\tau$	8	8	8
	$\mu = 0,25$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,35$
$\mathbb{E}D_\tau$	4,607	6,428	9,144
$\mathbb{E}\tau$	8	8	8

Il reste dans le contrat quels que soient les scénarios. La sensibilité de la valeur finale au  $\mu$  illustre le fait

que plus  $\mu$  est grand plus le flux capitalisé a une valeur élevée (en espérance). On a pu vérifier que l'augmentation de la volatilité ne modifie pas ce comportement. Les "historiques" sont, pour un  $\lambda = 1,5$ , insensibles à la valeur de  $\sigma_a$ .

**Sensibilité à  $\mu$  et  $\sigma_a$  de l'individu "historique nerveux" ( $\lambda = 1$ ).** Ici nous examinons le comportement d'un individu "historique", dit "nerveux" qui se fonde sur le passé pour estimer l'avenir, et le fait sans méfiance par rapport à sa propre estimation ( $\lambda = 1$ ). Pour un  $\sigma_a = 0,15$ , l'individu sort dans plus de 88% des scénarios; il prend sa décision très rapidement (toujours avant 1 mois) et ce quel que soit  $\mu$  entre 0,1 et 0,35.

individus "historiques" $\lambda = 1$ ; $\sigma_a = 0,15$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,15$	$\mu = 0,2$
$\mathbb{E}D_\tau$	0,979	1,025	1,109
$\mathbb{E}\tau$	0,208	0,340	0,480
$\mathbb{E}\tau_s$	0,0705	0,0519	0,0443
$N_s$	7860	7712	7563
	$\mu = 0,25$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,35$
$\mathbb{E}D_\tau$	1,273	1,547	2,021
$\mathbb{E}\tau$	0,661	0,825	0,994
$\mathbb{E}\tau_s$	0,034	0,0266	0,0242
$N_s$	7369	7198	7023

Le comportement de ce client est à l'autre extrême. Il sort du contrat pour presque tous les scénarios, et de plus très vite (en espérance). Il est peu sensible à la valeur du  $\mu$ , même si celle-ci détermine en partie la rentabilité ex-post du placement et la valeur espérée du flux de remboursement pour la société. En calculant la rentabilité historique, le client est davantage sensible à l'impact de la volatilité sur la rentabilité du placement. Même une volatilité de 0,15 fait rapidement passer au dessous du seuil et cet individu sort quasiment instantanément. Pour une volatilité de 0,05, les résultats sont les suivants :

Individus "historiques"; $\lambda = 1$ ; $\sigma_a = 0,05$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,15$	$\mu = 0,2$
$\mathbb{E}D_\tau$	0,992	1,102	1,3
$\mathbb{E}\tau$	0,331	0,745	1,138
$\mathbb{E}\tau_s$	0,0831	0,029	0,027
$N_s$	7737	7286	6880
	$\mu = 0,25$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,35$
$\mathbb{E}D_\tau$	1,65	2,263	3,296
$\mathbb{E}\tau$	1,520	1,907	2,285
$\mathbb{E}\tau_s$	0,016	0,018	0,010
$N_s$	6493	6101	5721

L'effet volatilité est perceptible : les individus histo-

riques partent en moyenne toujours rapidement, mais le nombre de scénarios pour lesquels il n'y a pas de sortie est beaucoup plus grand (29% pour  $\mu = 0,35$ ). La société d'assurance subit les retraits de ses clients au moment où le portefeuille a perdu de la valeur (nous reviendrons sur ce point dans la section suivante).

**Sensibilité à  $\mu$  et  $\sigma_a$  de l'individu "futur".** Nous présentons maintenant le même type de résultats pour un individu qui fonde ses prévisions de manière rationnelle et est parfaitement informé; en particulier, il applique ses décisions instantanément ( $\lambda = 1$ ).

individus "futurs" $\lambda = 1; \sigma_a = 0,15$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,15$	$\mu = 0,2$
$\mathbb{E}D_\tau$	1,913	2,565	3,387
$\mathbb{E}\tau$	7,147	7,976	7,999
$\mathbb{E}\tau_s$	2,391	4,13	1,116
$N_s$	1216	50	1
	$\mu = 0,25$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,35$
$\mathbb{E}D_\tau$	4,607	6,428	9,144
$\mathbb{E}\tau$	8	8	8
$\mathbb{E}\tau_s$	0	0	0
$N_s$	0	0	0

Quand on compare les individus "historiques"  $\lambda = 1,5$  avec les individus "futurs", on constate que les valeurs du flux de remboursement se confondent pour un niveau suffisamment élevé de  $\mu$ . Par exemple, pour  $\sigma_a = 0,15$ , seul  $\mu = 0,1$  entraîne que les futurs partent pour 10% des scénarios, alors que les historiques ne sortent pas du tout. Les individus futurs sont sensibles à la valeur de  $\mu$ , c'est à dire à la rentabilité effective (espérée) de leur placement, notamment sur la partie actions. Ils sont par essence rationnels: pour un  $\mu$  intéressant, ils ne sortent plus et leur comportement se confond avec les "historiques  $\lambda = 1,5$ " pour  $\mu \geq 0,2$ . Les "futurs" sont sensibles à une diminution de la volatilité: pour un  $\sigma_a = 0,05$ , il n'y a que une sortie sur 8000 scénarios pour un  $\mu$  de 0,1 et aucune sortie pour un  $\mu$  plus important. Dans ce cas le couple rendement/risque est toujours avantageux à l'assuré. En conséquence, les valeurs espérées du flux de sortie sont identiques à celles obtenus avec l'individu historique lent. Une volatilité plus importante illustre la différence de comportement avec ce dernier.

Pour  $\sigma_a = 0,25$ , les "futurs" sont plus nombreux à sortir alors que pour un même niveau de volatilité les "historiques  $\lambda = 1,5$ " restent dans le contrat pour toutes les valeurs de  $\mu$  entre 0,1 et 0,35. Ceci illustre bien la différences de comportement entre les "historiques" et les "futurs".

individus "futurs"; $\lambda = 1; \sigma_a = 0,25$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,15$	$\mu = 0,2$
$\mathbb{E}D_\tau$	1,800	2,528	3,382
$\mathbb{E}\tau$	5,735	7,543	7,928
$\mathbb{E}\tau_s$	2,217	3,561	4,542
$N_s$	3111	823	167
	$\mu = 0,25$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,35$
$\mathbb{E}D_\tau$	4,609	6,438	9,148
$\mathbb{E}\tau$	7,991	7,999	8
$\mathbb{E}\tau_s$	5,19	2,345	0
$N_s$	25	2	0

**Sensibilité à  $\lambda$  de l'individu "historique".** Nous mettons maintenant en évidence l'impact de la valeur de  $\lambda$  sur les résultats obtenus pour les individus "historiques". Nous avons conduit les calculs pour les valeurs de  $\lambda$  égales respectivement à 1,2, 1,3 et 1,4. Pour chacune des valeurs de ce paramètre, nous avons calculé les valeurs espérées pour trois niveaux significatifs de  $\sigma_a$  (0,05, 0,15 et 0,25) et pour trois valeurs significatives de  $\mu$  (0,1, 0,2 et 0,3). Les résultats sont les suivants pour une volatilité de 0,05.

Individus "historiques"; $\sigma_a = 0,05$			
$\lambda = 1,2$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}D_\tau$	1,05	1,407	2,504
$\mathbb{E}\tau$	0,738	1,491	2,265
$\mathbb{E}\tau_s$	0,0026	0,0016	0,001
$N_s$	7288	6521	5742
$\lambda = 1,3$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}D_\tau$	1,946	3,311	6,360
$\mathbb{E}\tau$	7,467	7,763	7,912
$\mathbb{E}\tau_s$	0,472	0,314	0,189
$N_s$	565	246	90
$\lambda = 1,4$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}D_\tau$	2,019	3,384	6,420
$\mathbb{E}\tau$	8	8	8
$\mathbb{E}\tau_s$	0	0	0
$N_s$	0	0	0

Il est clair que l'individu qui a un paramètre  $\lambda = 1,2$  se comporte de la même manière que l'individu "nerveux", dans le sens où il sort pour (presque) toutes les trajectoires, et très vite. De même, l'individu qui a un paramètre  $\lambda = 1,4$  se comporte de la même manière que l'individu "lent", dans le sens où il ne sort jamais. Les résultats sont donc très sensibles à la valeur de ce paramètre, que la société d'assurance se devra d'estimer soigneusement. Pour un  $\lambda = 1,3$  on se rapproche des résultats des individus lents, mais avec un nombre non négligeable de scénarios où l'individu sort. Des calculs effectués pour des niveaux supérieurs de vo-

latilité confirment cette indépendance. Le couple rendement/risque du portefeuille n'a aucun impact sur les individus  $\lambda = 1,2$  et  $\lambda = 1,4$  qui gardent leur comportement extrême. En revanche l'individu avec une latence  $\lambda = 1,3$  montre sa sensibilité, puisque toute chose égale par ailleurs, il part plus souvent et plus vite quand la volatilité du portefeuille d'actions augmente.

## 2.2 Impact comparé en termes de valeurs actualisées de l'actif et du passif

Le calcul des valeurs futures espérées du flux de sortie est un résultat insuffisant, car les individus "futurs" sortent en moyenne avant les "historiques lents", la valeur du flux de sortie des premiers est donc toujours inférieure ou égale. De même, comme les "historiques nerveux" ont tendance à sortir tout de suite, la valeur du flux de sortie est très faible dans ce cas. L'effet temporel joue, mais même en valeurs actualisées, ces résultats restent vrais. Par conséquent, au vu de ces résultats, il est impossible de déterminer quelle situation est désavantageuse pour la société d'assurance. Par ailleurs il ne semble pas que les individus "futurs" sortent à un moment où le flux de sortie soit particulièrement intéressant. L'intuition nous suggère qu'ils sortent à un moment où le couple rendement/risque du portefeuille investi n'est plus satisfaisant par rapport au taux spot coté sur le marché à cette date. Comme nous l'avons signalé en première partie, nous avons simulé le bilan de la société d'assurance de façon artificielle, en supposant que l'actif est constitué du portefeuille proposé au client. Cette hypothèse est caricaturale car, dans ce cas, le client a droit à un taux garanti plus une option sur la valeur totale de l'actif (sans frais de gestion par exemple), ce qui entraîne le fait que le passif aura le plus souvent une valeur supérieure à l'actif (ou égale). La simulation de la valeur espérée de la différence permet de visualiser cependant l'impact clairement négatif sur la valeur de la firme des départs "prématurés" des clients.

Dans les tables suivantes,  $\mathbb{E}(D_\tau^0 - A_\tau^0)$  désigne la valeur actualisée de l'espérance de la différence entre le passif et l'actif.

L'individu "historique" lent confirme son statut de client idéal: ne sortant pas du contrat il n'impose pas de risque à la société, ce qui se manifeste par un faible écart entre les valeurs d'actif et de passif. On présente les résultats pour des volatilités respectives de 0,15 et 0,25.

Nous présentons maintenant les résultats pour tous les types d'individus afin de comparer l'impact en différentiel actif/passif.

individu historique, $\lambda = 1,5; \sigma_a = 0,15$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}(D_\tau^0 - A_\tau^0)$	0,0013	0	0

individu historique, $\lambda = 1,5, \sigma_a = 0,25$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}(D_\tau^0 - A_\tau^0)$	0,0150	0,00137	0

individu historique, $\lambda = 1,3; \sigma_a = 0,15$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}(D_\tau^0 - A_\tau^0)$	0,0001	-0,001	-0,001

individu historique, $\lambda = 1,3, \sigma_a = 0,25$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}(D_\tau^0 - A_\tau^0)$	0,014	0,001	0

L'individu "historique  $\lambda = 1,3$ " est moins "dangereux" pour la société que l'individu futur dont nous analysons le comportement en terme Passif-Actif ci-dessous. En effet, l'individu historique nerveux ( $\lambda = 1$ ) sort trop rapidement du contrat pour que la valeur (Passif-Actif) ait le temps d'augmenter. Dans ce cas, l'effet de la pénalisation domine et la différence se trouve être en faveur de la société. Celle-ci se retrouve cependant dans la situation inconfortable d'avoir à renouveler rapidement son passif.

Voici les résultats de l'individu futur pour des volatilités respectives de 0,15 et 0,25.

Ces résultats montrent que si le passif est constitué d'un contrat avec un client "futur", celui-ci partira (en espérance) à un moment défavorable à la société d'assurance. Par exemple pour  $\mu = 0,1$  et  $\sigma_a = 0,15$ , la valeur de l'écart est 70 fois plus élevée que la valeur de l'écart obtenue pour un "historique" de latence 1,3.

Remarquons au passage que si  $\mu$  est suffisamment intéressant, la différence a une valeur nulle en espérance car l'option offerte au client est dans la monnaie. Ces valeurs illustrent le fait que quand les "futurs" sortent, ils le font non pas tant pour la valeur du flux qu'ils retirent que pour le taux offert sur le marché au même moment. L'impact sur le bilan de la société est très défavorable, et bien entendu sa couverture devrait être considérée en conséquence.

**Sensibilité du comportement des individus futurs à la gamme des taux au départ, impact pour la firme.** Nous avons vu à la fin de la section 1.3 que, les paramètres du contrat étant fixés (échéance, taux garanti,  $\alpha, \beta$ ), il existe un seuil  $\mathcal{S}$  tel que si la valeur finale du portefeuille de zéro-coupons détenu par la société  $Z_8$  est supérieure à  $\mathcal{S}$ , alors le client "futur" doit être moins sensible à la volatilité  $\sigma_a$  du portefeuille d'actions.



individu historique, $\lambda = 1; \sigma_a = 0,15$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}(D_\tau^0 - A_\tau^0)$	-0,0465	-0,0449	-0,0427
individu historique, $\lambda = 1, \sigma_a = 0,25$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}(D_\tau^0 - A_\tau^0)$	-0,0451	-0,0444	-0,0431
individu futur, $\lambda = 1, \sigma_a = 0,15$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}(D_\tau^0 - A_\tau^0)$	0,007	0,0	0
individu futur, $\lambda = 1, \sigma_a = 0,25$			
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
$\mathbb{E}(D_\tau^0 - A_\tau^0)$	0,0327	0,0039	0

Tous les résultats numériques pour les individus "futurs" présentés jusqu'à présent, ont été réalisés pour un portefeuille de zéro-coupons correspondant à une valeur de  $Z_8$  inférieure au seuil de rentabilité  $\mathcal{S}$ . Nous avons déjà mis en évidence la réelle sensibilité à la volatilité de ces individus.

Nous donnons maintenant des résultats obtenus pour un  $Z_8$  supérieur à  $\mathcal{S}$ , les paramètres du contrat d'assurance restant inchangés. Le seuil  $\mathcal{S} = \exp(\rho\delta)/\beta$  reste lui aussi inchangé. Pour réaliser les essais numériques nous avons dû modifier les paramètres du marché pour que la gamme des taux au départ soit très avantageuse. En particulier nous avons été obligés d'augmenter fortement les paramètres  $r_0$  (taux court à  $t = 0$ ) et  $\theta$  (valeur moyenne du taux spot) :

$$r_0 = 12\%,$$

$$\theta = 13\%.$$

Les figures 1 et 2 ci-après résument l'évolution de la valeur Passif-Actif actualisée d'un contrat souscrit par un individu "futur" pour différents  $\mu$  et  $\sigma_a$ , avant et après le franchissement du seuil par  $Z_8$ .

Il est très net que la valeur Passif-Actif est beaucoup moins élevée quand le portefeuille de zéro-coupons est au dessus du seuil de rentabilité (cf FIGURE 2). Si la gamme des taux est très avantageuse, il est normal que la volatilité du portefeuille d'actions perde de son impact sur le "bilan" du contrat et que ce bilan soit meilleur. Remarquons que lorsque  $\mu$  est trop faible les futurs n'ont aucun intérêt à entrer dans le contrat : la valeur Passif-Actif négative de la FIGURE 2 lorsque  $\mu$  vaut 0,1 est entièrement due à la pénalisation des sorties massives des clients au bout du premier jour !

Il est également net que dans le cas  $Z_8 > \mathcal{S}$ , la valeur Passif-Actif revient plus vite à zéro malgré l'augmentation de la volatilité que dans le cas  $Z_8 < \mathcal{S}$ . Le fait que la valeur Passif-Actif revienne à zéro quand

$\mu$  augmente est à mettre en relation avec un nombre de sorties des contrats de moins en moins grand, leur rentabilité étant de plus en plus avantageuse. Le cas  $Z_8 > \mathcal{S}$  rend donc les individus "futurs" moins sensibles à la volatilité.

D'autres figures du même type que les FIGURES 1 et 2 sont présentées à la fin de cette partie pour les individus historiques avec  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 1,5$  et  $\lambda = 1,3$ . Pour  $\lambda = 1$ , le bilan est toujours favorable à la société (voir FIGURE 3) : c'est l'effet pénalité. Pour  $\lambda = 1,5$ , on observe que le futur a un impact plus défavorable mais nettement moins que l'individu futur (voir FIGURES 4 et 1) qui en plus peut anticiper sa sortie du contrat. la figure FIGURE 5 illustre bien le caractère intermédiaire de l'individu  $\lambda = 1,3$  par rapport à  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 1,5$ .

## Conclusion et perspectives

Cet article montre que, dans le modèle simplifié ci-dessus, toutes choses étant égales par ailleurs, la société a intérêt à offrir des placements sous-jacents au contrat de faible volatilité avec évidemment le meilleur rendement instantané  $\mu$  possible. Les assurés "futurs" sont sensibles au couple rendement/risque, alors que les assurés "historiques nerveux" vont sortir du contrat d'autant plus vite que la volatilité de l'action est forte, et ceci quelle que soit la valeur de  $\mu$ .

L'approche numérique par simulation d'un très grand nombre de scénarios du comportement des assurés et de l'évolution du marché permettrait de donner des ordres de grandeur fiables à la dette engagée par la société vis-à-vis de ses clients, et d'étudier les variations induites par les fluctuations des divers paramètres intervenant dans la description du marché et des assurés.

Le modèle actuel suppose que l'assuré et la société ne prennent en compte qu'un placement en actions et en zéro-coupons sur 8 ans (la durée de vie du contrat). Cette hypothèse est très réductrice, puisque des combinaisons de placements de différentes maturités sont possibles. De tels placements dépendent de toute la structure par terme des taux.

Pour des raisons de simplifications numériques, nous avons réduit le portefeuille de la société à une action et des zéro-coupons. Il faudrait remplacer les zéro-coupons par un portefeuille obligataire et diversifier le portefeuille d'actions.

Ceci conduirait à un accroissement du nombre de processus stochastiques à simuler, donc à un accroissement linéaire du temps de calcul. Des paramètres supplémentaires interviendraient également, notamment les coefficients de corrélation entre les divers actifs. L'impact de ces nouveaux paramètres sur les résultats n'est pas du tout clair.

FIG. 1 – Evolution de la différence (Passif-Actif) en fonction du rendement  $\mu$  du portefeuille d'actions et pour différentes valeurs de la volatilité : cas d'un client "futuriste" et de zéro-coupons sous le seuil de rentabilité  $S$ .

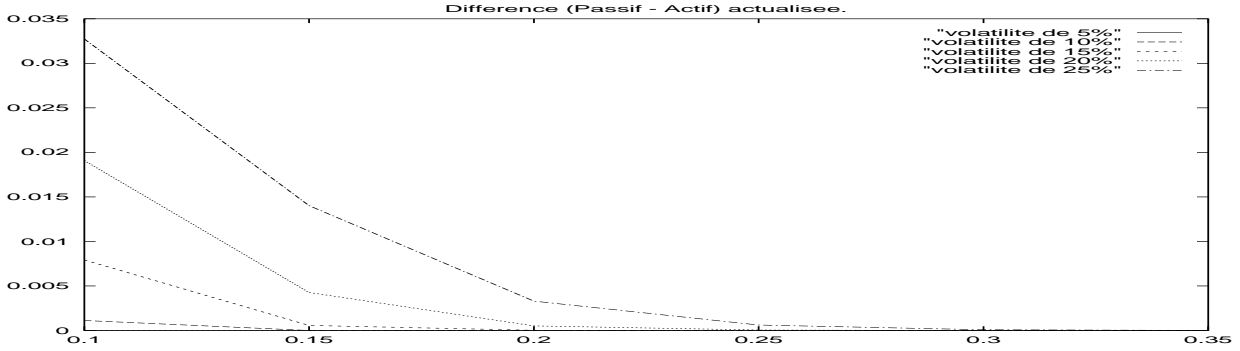


FIG. 2 – Evolution de la différence (Passif-Actif) en fonction du rendement  $\mu$  du portefeuille d'actions et pour différentes valeurs de la volatilité : cas d'un client "futuriste" et de zéro-coupons au dessus du seuil de rentabilité  $S$ .

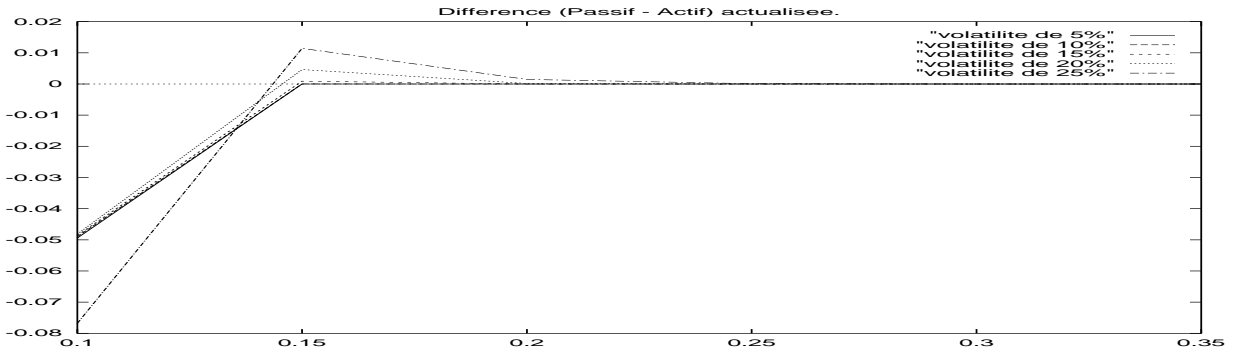


FIG. 3 – Evolution de la différence (Passif-Actif) en fonction du rendement  $\mu$  du portefeuille d'actions et pour différentes valeurs de la volatilité : cas d'un client "historique" de latence  $\lambda = 1$ , (zéro-coupons sous le seuil de rentabilité  $S$ ).

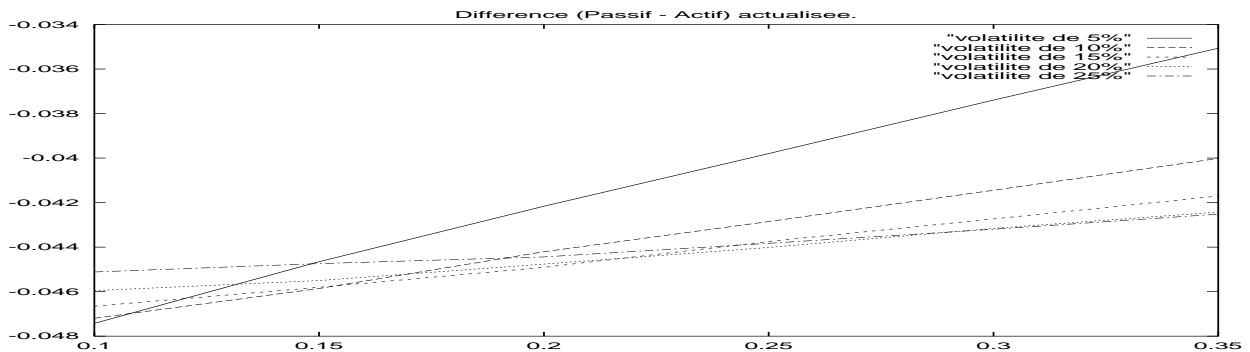


FIG. 4 – Evolution de la différence (Passif-Actif) en fonction du rendement  $\mu$  du portefeuille d'actions et pour différentes valeurs de la volatilité : cas d'un client "historique" de latence  $\lambda = 1,5$ , (zéro-coupons sous le seuil de rentabilité  $S$ ).

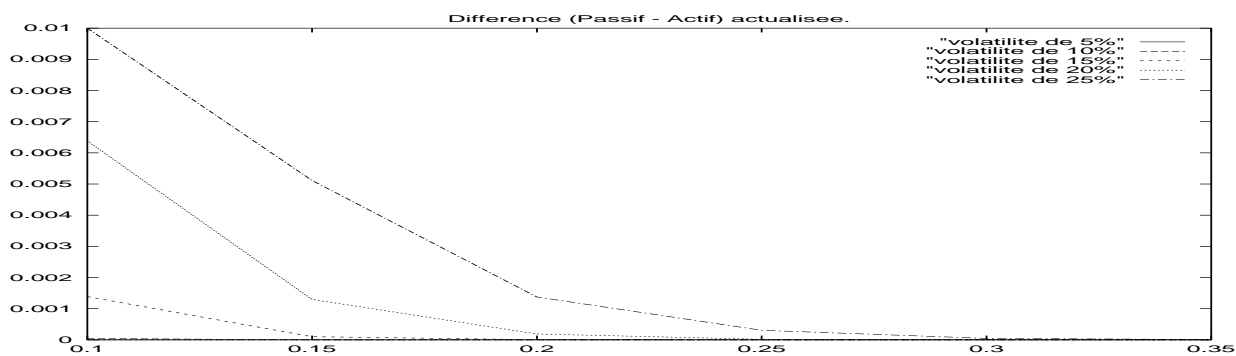
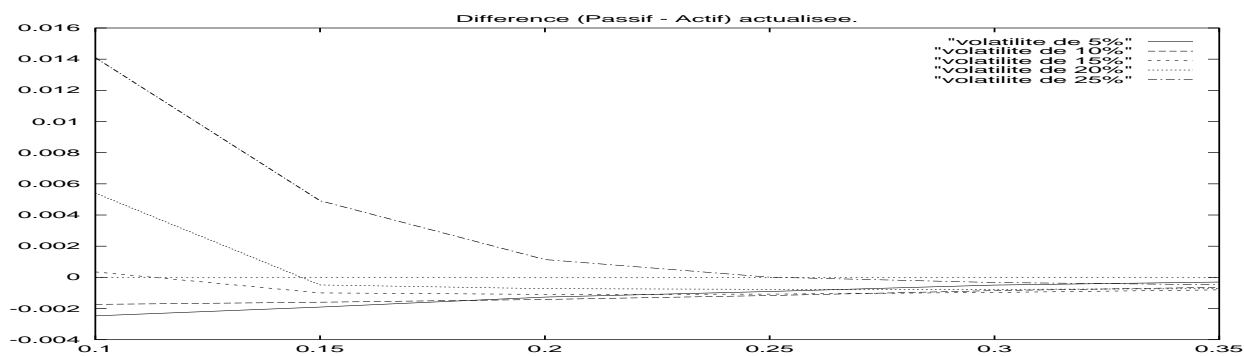


FIG. 5 – Evolution de la différence (Passif-Actif) en fonction du rendement  $\mu$  du portefeuille d'actions et pour différentes valeurs de la volatilité : cas d'un client "historique" de latence  $\lambda = 1,3$ , (zéro-coupons sous le seuil de rentabilité  $S$ ).



La modélisation de la participation aux bénéfices est élémentaire. En pratique, la participation est inférieure à celle que nous avons introduite, et bien plus complexe.

Il faudrait aussi prendre en compte la fiscalité et les possibilités offertes à l'assuré par la concurrence, qui peut avoir des règles de participation ou/et des compositions de portefeuilles différentes de celles de la société.

Nous avons privilégié des comportements extrêmes : un assuré naïf qui extrapole à partir du présent en ignorant tout du marché, et sans intuition sur l'évolution future de la valeur de son contrat ; un assuré savant qui connaît parfaitement le marché et a une bonne intuition de l'évolution de son placement (cette intuition "parfaite" a été modélisée ici par une espérance conditionnelle).

Il faudrait aussi prendre en compte des facteurs tels que les décès, le chômage, etc.

Il faudrait agréger les assurés et les contrats pour avoir une vision plus réaliste du bilan de la société, et donc effectuer un nombre de simulations beaucoup plus important. Ce point est évidemment crucial, car la gestion globale du bilan ne peut pas reposer sur des résultats qui supposent que tous les assurés ont des règles de sortie anticipée identiques.

Les paramètres  $\alpha, \beta$  qui décrivent les proportions de l'investissement de la société en actifs risqués et en obligations devraient eux-mêmes devenir variables. Des difficultés sérieuses apparaissent alors, tant du point de vue théorique que numérique : la société peut utiliser ces variables comme des paramètres de contrôle de son bilan, sans oublier que les variations de  $\alpha, \beta$  à un instant  $t$  vont modifier le bilan futur toutes choses étant égales par ailleurs, donc les décisions de sortie ultérieure des assurés, donc le bilan futur réel. De même, il faudrait étudier les effets d'une optimisation du paramètre de pénalité par la société. Il s'agirait alors de mesurer les conséquences de contraintes législatives sur le bilan du contrat et la gestion du portefeuille de la société.

Nos tests de sensibilité sont relativement sommaires dans leur conception : il s'est agi de faire varier des paramètres et de construire les tableaux de résultats correspondants. On pourrait songer à calculer des dérivées du bilan par rapport à ces paramètres. La première question à résoudre est l'existence de ces dérivées. La seconde concerne leur calcul numérique.

Tout ce qui précède montre qu'une étude complète conduirait à des calculs numériques très lourds. Pour fixer les idées, chaque ensemble de 8000 simulations correspondant à un jeu de valeurs de paramètres  $(\mu, \sigma_a, \lambda, \dots)$  nécessite environ 5 minutes de temps CPU d'une station de travail SPARC SUNW ULTRA-1.

Le traitement du problème en vraie grandeur nécessiterait des temps de calcul bien plus longs, des moyens de calcul plus puissants et une réflexion algorithmique poussée à des fins d'optimisation de temps de calcul. La programmation parallèle deviendrait nécessaire. Dans cette optique, nous soulignons que la structure des programmes développés pour la présente étude autorise leur utilisation sur un ensemble de machines connectées par réseau.

En conclusion, le contrat que nous avons étudié présente des risques importants pour les sociétés d'assurance. En effet, le contrat offre une option cachée gratuite aux assurés, et cette option est non négociable. En conséquence, l'option n'a pas de prix de marché, et le flux de sortie de la société dépend fortement du comportement de l'assuré face à l'évolution des taux d'intérêt et des bénéfices de la société.

Le contexte simplifié que nous avons abordé montre à l'évidence que des modélisations fines et des calculs numériques lourds sont indispensables si l'on veut rendre évaluer avec précision l'encours que le contrat fait subir à la société.

## Références

- [1] J. BESSY. *Gestion des Risques : Gestion Actif-Passif des Banques*. Dalloz Edition, 1995.
- [2] G.O. BIERWAG. *Duration Analysis*. Ballinger, 1987.
- [3] G.O. BIERWAG, G.G. KAUFMAN, and A. TOEVS. Bond portfolio immunization and stochastic process risk. *Journal of Bank Research*, pages 282–291, 1983.
- [4] G.O. BIERWAG, G.G. KAUFMAN, and A. TOEVS. Recent development in bond portfolio management: duration analysis and immunization. In G.O. BIERWAG, G.G. KAUFMAN, and A. TOEVS, editors, *Innovations in Bond Portfolio Management*, pages 282–291, Greenwich, 1983. JAI Press.
- [5] J. COX, J.E. INGERSOLL, and S.A. ROSS. Duration and the measurement of basis risk. *Journal of Business*, 52(1):51–61, 1979.
- [6] E. FOURNIE and D. TALAY. Application de la statistique des diffusions à un modèle de taux d'intérêt. *Finance*, 12(2):79–111, 1991.
- [7] J. INGERSOLL. Is immunization feasible? Evidence from the CRSP data. In G.O. BIERWAG, G.G. KAUFMAN, and A. TOEVS, editors, *Innovations in Bond Portfolio Management*, Greenwich, 1983. JAI Press.

- [8] J. INGERSOLL, J. SKELTON, and R. WEIL. Duration forty years later. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13:627–650, 1978.
- [9] O. VASICEK. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977.