Intégration numérique
9 février 2006

Regardons un exemple classique, la fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2)$.
On voudrait calculer $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Premier réflexe: trouver une primitive. D'ailleurs, si vous n'y arrivez pas, essayez Maple, il est assez doué pour ça (il utilise des algos de calcul formel...).
Cependant, ici, on n'arrive pas à une formule plus simple que $F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$.
Dommage, il faut calculer une intégrale pour l'évaluer en un point... Dans certains cas "faciles", les mathématiciens ont trouvé des moyens pour faire le calcul exact de l'intégrale. On peut par exemple prouver la formule suivante:

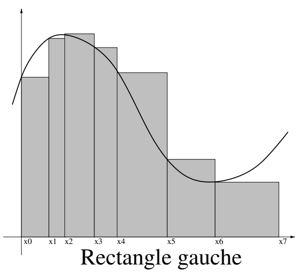
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Cependant, le plus souvent, on doit utiliser du calcul numérique pour évaluer des intégrales.
On suivra toujours le même schéma. On prend une subdivision $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ de l'intervalle d'intégration $[a, b]$. On a alors:

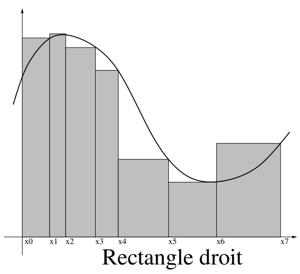
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

Les méthodes varient selon l'approximation qu'on fait de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$.

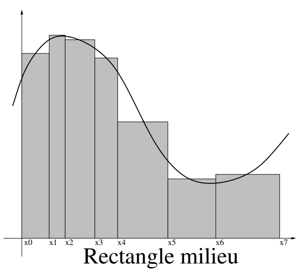
1 Méthodes des rectangles



Rectangle gauche



Rectangle droit



Rectangle milieu

On a donc:

- *Rectangle à gauche*: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq (x_{i+1} - x_i)f(x_i)$
  Pour une subdivision régulière de $[a, b]$ en n intervalles

$a < a + \frac{b-a}{n} < ... < a + i\frac{b-a}{n} < ... < a + (n-1)\frac{b-a}{n} < b$, on a:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(a + i\frac{b-a}{n}\Big)$$

- *Rectangle à droite*: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq (x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(a + (i+1)\frac{b-a}{n}\Big)$$

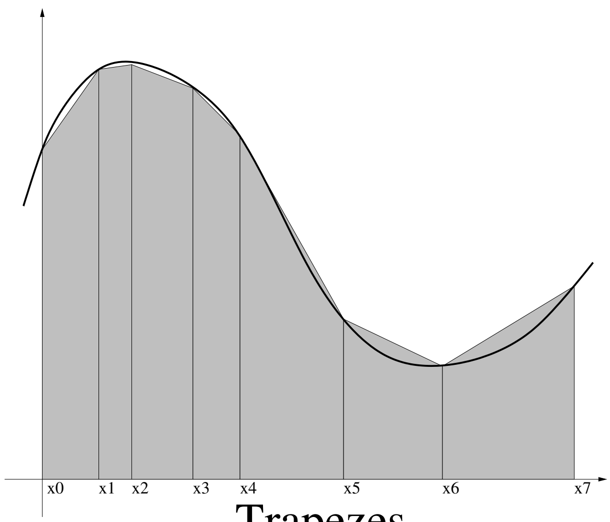
- *Point milieu*: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq (x_{i+1}-x_i)f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(a + (i+1/2)\frac{b-a}{n}\Big)$$

Sous Maple, on calcule ces sommes avec la fonction `sum`. Par exemple pour la méthode du rectangle à gauche, on peut écrire la procédure suivante:

```
gauche:=proc(a,b,f,n)
   evalf((b-a)/n*sum(f(a+i*(b-a)/n),i=0..n-1));
end proc;
```

2 Méthode des trapèzes



Trapezes

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq (x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\Big(a + i\frac{b-a}{n}\Big)\right)$$

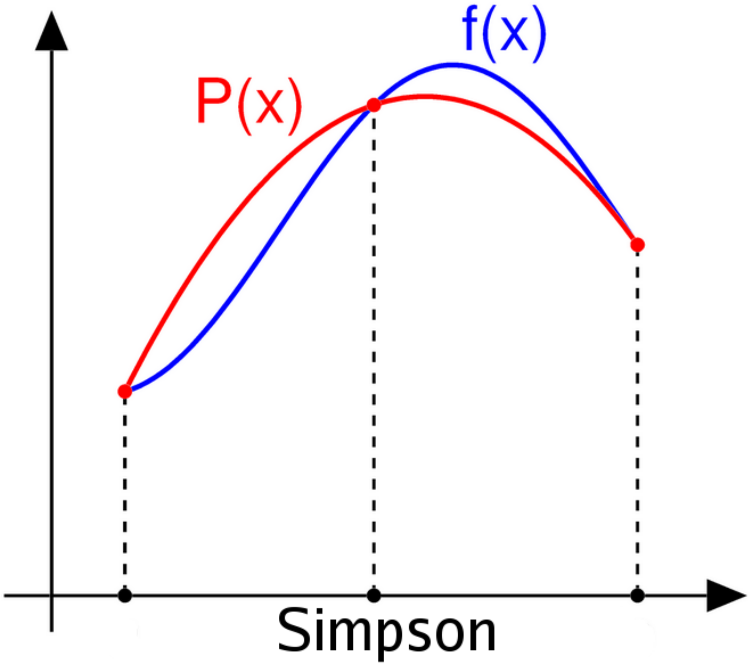
La méthode des trapèzes est un peu moins efficace que la méthode du point-milieu, mais plus efficace que les méthodes du rectangle droit et gauche (voir page 4).

3 Méthode de Simpson

L'idée est d'approximer la courbe entre x_i et x_{i+1} par un arc de parabole (polynôme de degré 2) passant par trois de ses points $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ et $(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}))$. Le calcul n'est pas difficile, pas très intéressant, et mène au résultat (simple) suivant:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq (x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_i) + 4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) + f(x_{i+1})}{6}$$

La méthode de Simpson est de loin la plus efficace parmi celles présentées ici.



4 Ordres de convergence

On va faire quelques calculs à la louche pour voir un peu l'efficacité de nos méthodes. On intègre entre deux points α et β d'une subdivision régulière en n parties de $[a, b]$, donc $\beta - \alpha = \frac{b-a}{n}$.

- *Rectangle gauche*:
  $\left| \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x - (\beta-\alpha) f(\alpha) \right| = \left| \int_\alpha^\beta (f(x) - f(\alpha))\mathrm{d}x \right| \simeq \left| \int_\alpha^\beta (x-\alpha) f'(\alpha)\mathrm{d}x \right| = \frac{\left|f'(\alpha)\right|}{2} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = O(\frac{1}{n^2})$
- *Point milieu*:
  $\left| \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x - (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| \simeq \left| \int_\alpha^\beta \left(f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(x - \frac{\alpha+\beta}{2}) + \frac{f''\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{2} (x - \frac{\alpha+\beta}{2})^2 \right) \mathrm{d}x \right| = \frac{\left|f''\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|}{24} \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = O(\frac{1}{n^3})$
- *Trapèzes*:
  $\left| \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x - (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \right| \simeq \frac{\left|f''(\alpha)\right|}{12} \left(\frac{b-a}{n}\right)^3 = O(\frac{1}{n^3})$
- *Simpson*:
  $\left| \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x - (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha)+4f(\frac{\alpha+\beta}{2})+f(\beta)}{6} \right| \simeq \frac{\left|f^{(4)}(\alpha)\right|}{2880} \left(\frac{b-a}{n}\right)^5 = O(\frac{1}{n^5})$

Encore une fois, pour la méthode de Simpson, les calculs sont aisés mais longs (il faut faire le DL de $f(x)$ jusqu'à l'ordre 4 !)...