



Université de Nice Sophia-Antipolis

Laboratoire de mathématiques J.A.Dieudonné

INRIA Sophia-Antipolis

INRIA Odyssée projet MACACC

Master II mathématiques – année universitaire 2007-2008

Rapport du Stage

Juin 2008

**Formation spontanée des structures dans le cortex
visuel : Un problème de bifurcation avec symétrie**

Stage réalisé par

Osman KHODR

sous la direction de

M. Pascal CHOSSAT (J.A.D)

M. Bruno CESSAC (INRIA)

khodr_osman@hotmail.com

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de stage, Pascal Chossat, pour sa disponibilité, son patience et son encouragement.

Je tiens aussi à remercier Bruno Cessac et Olivier Faugeras pour leur soutien qui m'a éclairé beaucoup des points dans le domaine du neuroscience.

Je remercie également le responsable du master 2 Antoine Ducros, ainsi que tous mes enseignants pour leur aide et mes parents qui m'ont soutenu durant cette période.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Modèle de Ermentrout-Cowan dans le formalisme de Bressloff-Cowan	6
2.1	Le modèle	6
2.2	Etats d'équilibre homogènes et leur stabilité	9
3	Bifurcation et solutions bifurquées	10
3.1	Restriction sur l'espace des fonctions doubles périodiques	10
3.2	Les équations de bifurcation	12
3.3	Théorie des bifurcations équivariantes	14
3.4	Les solutions bifurquées	15
4	La prise en compte de l'orientation : modèle de Bressloff-Cowan et al	18
4.1	Le modèle avec orientation	18
4.2	La symétrie Euclidienne du problème avec orientation	19
4.3	Etude de la stabilité linéaire de l'état homogène	20
5	Actions du groupe de symétrie restreint sur le noyau de la linéarisé	21
5.1	Les sous espaces irréductible	21
5.2	L'action du groupe de symétrie restreint	22
5.3	Les solutions bifurquées du modèle avec orientation	24
6	Discussion et perspectives	26

1 Introduction

La modélisation des réseaux de neurones associés à certaines fonctions corticales, telles que la vision, a beaucoup progressé depuis une vingtaine d'année grâce en particulier à l'amélioration des méthodes d'imagerie cérébrale. Si l'on prend par exemple le cortex visuel, on sait que celui-ci est constitué de plusieurs régions de tissus neuronaux dont l'une, nommée l'aire visuelle V1, reçoit directement les signaux en provenance de la rétine via les corps genouillés latéraux. Des considérations empiriques indiquent que le passage de l'image rétinienne (dans les coordonnées polaires du champ visuel) au cortex visuel (modélisé par un plan en coordonnées cartésiennes) est une application, dite application rétinocorticale, de type logarithme complexe : Si l'on note (r, θ) les coordonnées d'un point sur la rétine et $z = x + iy$ la coordonnée complexe dans le plan V1, on a (après normalisation)

$$z = \text{Log}(re^{i\theta}).$$

Cette relation est valable en tout point hors d'un voisinage de la fovée, c'est-à-dire du centre de la rétine. A l'intérieur de ce voisinage, la transformation est plutôt proche de l'identité.

Par application de la transformation inverse il est donc possible en principe de reproduire les images perçues par des sujets soumis à une excitation spontanée des neurones du cortex visuel, c'est-à-dire à des hallucinations visuelles. Ce projet a été traité sur un modèle mathématique des masses neuronales de V1 par *Ermentrout et Cowan* dans un article de 1979 [7]. Ce modèle est basé sur l'hypothèse simplificatrice que le cortex est constitué de deux populations de neurones : excitateurs ou inhibiteurs, et que l'activité de l'ensemble de la masse neuronale de la zone V1 peut être représentée par des champs scalaires $E(x, y, t)$ et $I(x, y, t)$ qui expriment cette activité dans les cas exciteur et inhibiteur respectivement. Les équations qui régissent l'évolution temporelle de ces champs tient compte de l'interconnexion des neurones qui s'exprime par des produits de convolution avec des "fonctions poids" représentant l'intensité des connexions. Leur approche a consisté à étudier la stabilité d'un état de base homogène de faible intensité et à montrer qu'une instabilité (donc une bifurcation) se développe lorsqu'un certain paramètre dépasse une valeur critique. Les solutions bifurquées ont ensuite été déterminées en s'appuyant sur le fait que le système d'équations correspond à un modèle idéalisé où chaque terme commute avec les transformations euclidiennes du plan. Il a alors été possible d'appliquer les méthodes développées dans les années 70, notamment par D. Sattinger [11] dans la continuation de la théorie de L. Michel [10], pour les problèmes de bifurcation présentant ce type de symétrie. La méthode s'apparente donc très fortement à celle utilisée pour traiter la formation spontanée de structure dans les modèles de Turing de la morphogénèse (équations de réaction-diffusion, voir [5]). Les résultats de cette étude ont montré une certaine pertinence avec des observations faites par des patients sous l'effet de drogues psychotropes (LSD, cannabis, autre...). Cependant ils ne les recoupaient pas entièrement. Les structures géométriques mises en évidence par le modèle de Ermentrout et Cowan étaient des formes spatialement périodiques telles que des bandes parallèles, des pavages

carrés ou hexagonaux, dont la traduction dans le champ visuel correspondait à des structures observées de type damier ou "spirales" (fig 2). Mais un certain nombre de formes décrites par des sujets percevant des hallucinations visuelles ne correspondaient pas à ces résultats, par exemple des structures en "toile d'araignée", en nid d'abeille, et autres fig 5-6.

Pour expliquer cette différence, *Bressloff et Cowan* ont pris en compte un élément

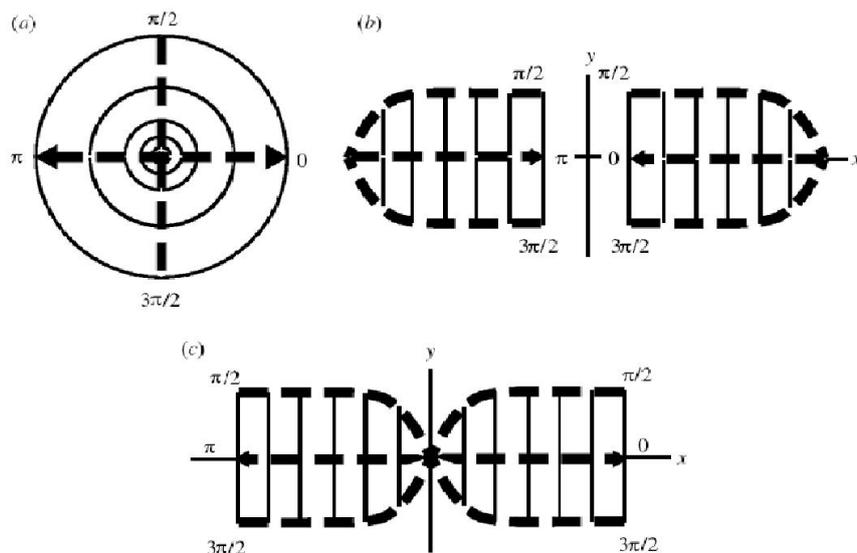


FIGURE 1 – *l'application retinocorticale : (a) champs visuel, (b) V1 :transformé de deux hémisphère droite et gauche, (c) autre version de l'application retinocorticale*

supplémentaire dont l'évidence expérimentale a été apportée au début des années 90 [3]. Il s'agit du fait que les neurones de V1 sont non seulement sensibles à l'intensité lumineuse, mais aussi à certains paramètres géométriques tels que l'orientation des formes et leur fréquence spatiale. Plus précisément, la connectivité entre neurones dans V1 peut être représentée de la façon suivante : les masses neurales peuvent être divisées en petites régions nommées hypercolonnes, dans lesquelles on peut admettre que chaque neurone est connecté à ses voisins d'une façon isotrope en moyenne et de plus toutes les orientations sont représentées. Il existe d'autre part une distribution de connectivité entre hypercolonnes (connexions dites "latérales") dont la force suit une loi de distribution approximativement gaussienne et de plus dans laquelle chaque neurone correspondant à une orientation donnée est connecté à des neurones correspondant de façon préférentielle à la même orientation. Si l'on prend en compte l'orientation dans le champ visuel, ceci conduit à un modèle où l'angle qui définit l'orientation est une variable supplémentaire. Géométriquement, ceci revient à considérer le cortex visuel comme une variété fibrée au dessus du plan où chaque fibre est la droite projective \mathbb{P}^1 . Dans ce cas, l'étude de bifurcation à partir d'un état homogène conduit à des solutions nouvelles qui décrivent une grande partie des structures observées dans les hallucinations visuelles sous l'effet de drogues psychotropes. Par rapport aux travaux de Ermentrout et Cowan, la

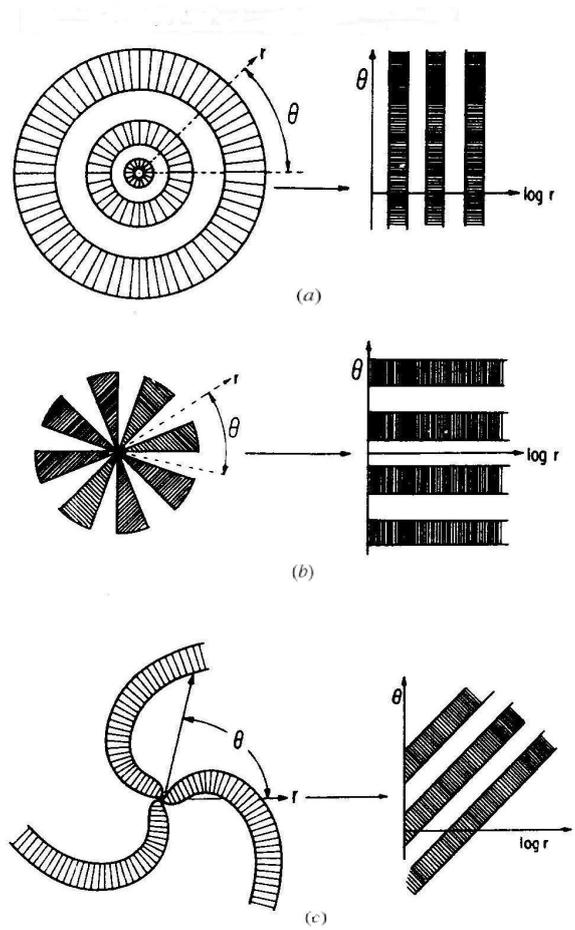


FIGURE 2 – quelques formes géométriques avec leurs transformées dans V1 par l'application retinocorticale : (a) tunnel, (b) funnel, (c) spirale

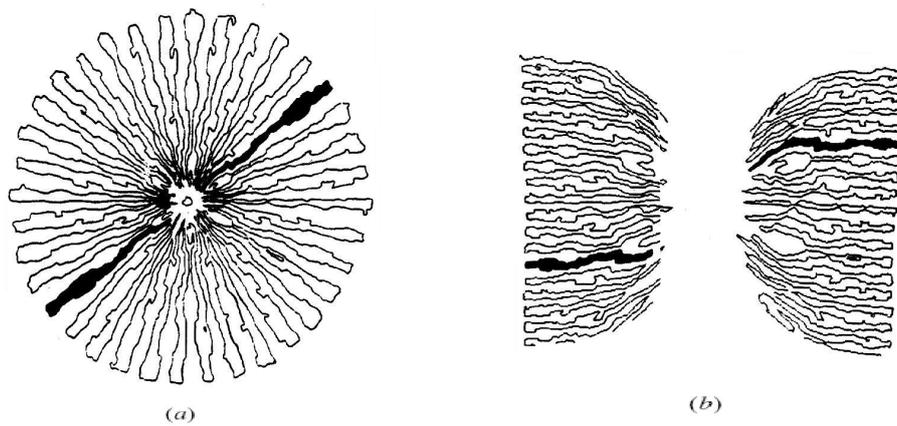


FIGURE 3 – l'action de l'application retinocorticale sur forme funnel : (a) image de funnel dans la rétine, (b) son image dans V1

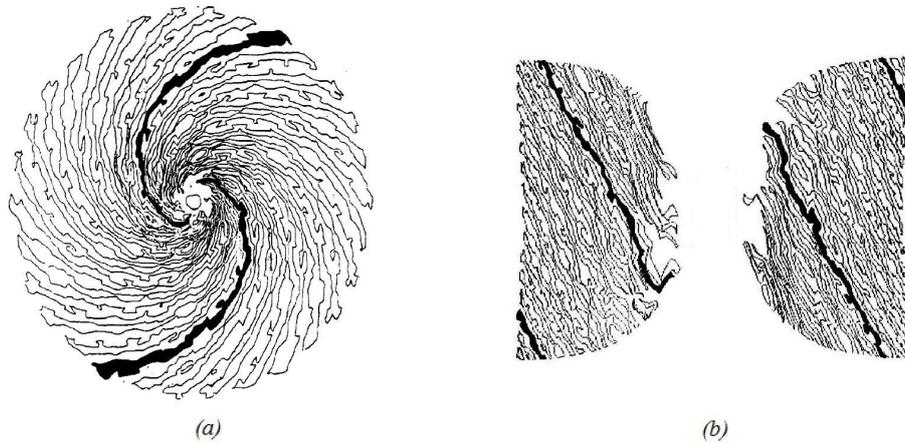


FIGURE 4 – l'action de l'application retinocorticale sur forme spirale : (a) image de spirale dans la retine, (b) son image dans V1

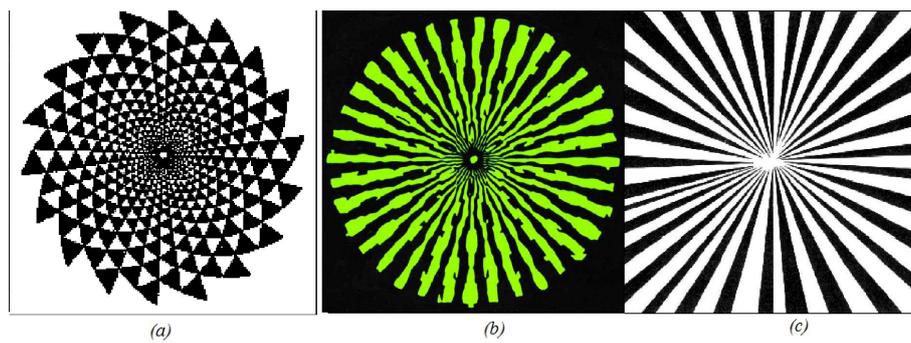


FIGURE 5 – (a) :forme eyeballs(Clottes et Lewis-Williams(1998)). (b) :forme en funnel(Oster (1970)). (c) :forme en funnel(Siegel(1977))

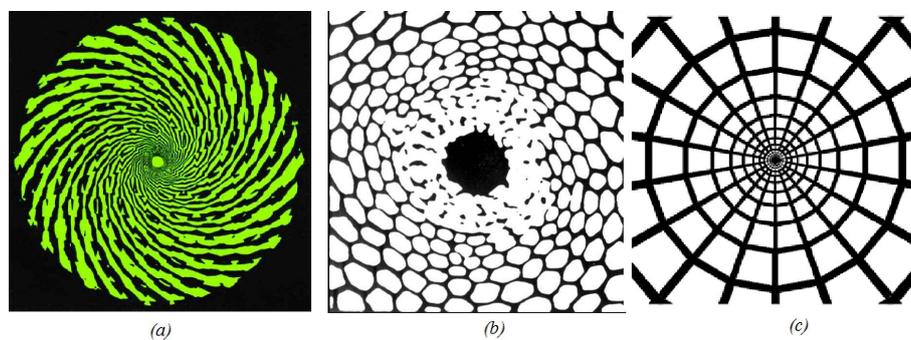


FIGURE 6 – (a) :forme spirale(Oster (1970)). (b) :forme en nid d'abeille (Clottes et Lewis-Williams(1998)). (c) :forme en étoile d'araignée

principale innovation est l'utilisation de la théorie des bifurcations en présence de symétrie développée par Golubitsky et d'autres auteurs dans les années 80-90, en particulier le fait que ce modèle permet de distinguer entre des représentations "naturelles" et "anti-naturelles" du groupe des transformations euclidiennes du plan, voir [1].

L'objectif de ce rapport est de présenter ces travaux d'une façon claire et cohérente, avec le souci de préparer à d'autres développements, comme la recherche de régimes dépendant du temps et la prise en compte de la sensibilité des neurones à la fréquence spatiale .

2 Modèle de Ermentrout-Cowan dans le formalisme de Bressloff-Cowan

2.1 Le modèle

Le modèle qu'on va étudier est basé sur l'hypothèse simplificatrice que le cortex est constitué de deux populations de neurones : excitateurs et inhibiteurs, et que l'activité de l'ensemble de la masse neuronale de la zone V1 peut être représentée par des champs scalaires $E(x, y, t)$ et $I(x, y, t)$ qui expriment cette activité dans les cas excitateur et inhibiteur respectivement. Les équations qui régissent l'évolution temporelle de ces champs tient compte de l'interconnexion des neurones qui s'exprime par des produits de convolution avec des "fonctions poids" représentant l'intensité des connexions. Soit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} &= -E + S_e(\alpha_{ee}w_{ee}^{**}E - \alpha_{ie}w_{ie}^{**}I) \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= -I + S_i(\alpha_{ei}w_{ei}^{**}E - \alpha_{ii}w_{ii}^{**}I)\end{aligned}\tag{1}$$

Où les α_{mn} sont des constantes positives reliés à l'intensité synaptique absolue entre cellules de type m et cellules de types n, suivant l'article de Ermentrout-Cowan, on suppose que les noyaux de connection (les fonctions poids) w_{mn} ont la forme suivante :

$w_{mn}(x^2 + y^2) = w((x^2 + y^2)/\sigma_{mn}^2)/\sigma_{mn}^2$ ou σ_{mn} est une constante d'espace qui détermine le taux de détérioration de la connectivité à une distance $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et w satisfait :

(i) $w(r) \geq 0$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^2} w(x^2 + y^2) dx dy = 1$

E et $I \in \mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

S_m est une fonction sigmoïde qui modélise le fait que lorsque le signal devient fort, un mécanisme de saturation l'empêche de grandir indéfiniment. Ces fonctions satisfont :

- (i) $S_m(v)$ est monotone croissante ;
- (ii) $S_m(v)$ est fini quand $v \rightarrow \pm\infty$
- (iii) $S_m(v)$ admet un seul point d'inflexion . (figure 7)

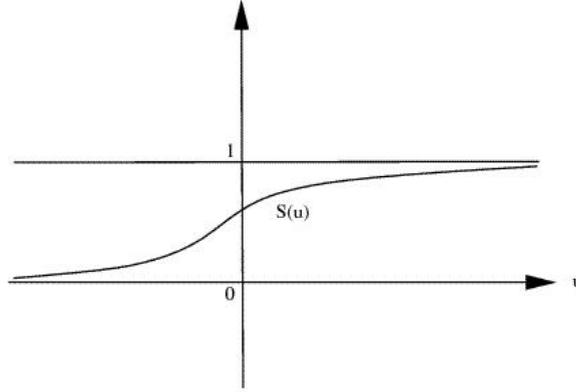


FIGURE 7 – *Le sigmoïde*

La notation $w^{**}z$ désigne le double produit de convolution suivant :

$$w^{**}z(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} w(x - x', y - y')z(x', y')dx'dy'$$

On s'intéresse aux états d'équilibre du système (1), c'est à dire ceux qui vérifient :

$$\begin{aligned} 0 &= E - S_e(\alpha_{ee}w_{ee}^{**}E - \alpha_{ie}w_{ie}^{**}I) \equiv G_e(E, I) \\ 0 &= I - S_i(\alpha_{ei}w_{ei}^{**}E - \alpha_{ii}w_{ii}^{**}I) \equiv G_i(E, I) \end{aligned} \quad (2)$$

On suppose que $E = I = 0$ est une solution du système (2), ce qui revient à poser $S(0) = 0$. Ceci ne réduit pas la généralité car ce système possède une solution homogène (indépendante des variables d'espace) que l'on peut ramener à 0 par une simple translation..

Question : Stabilité de $(0,0)$?

si $|\alpha_{mn}| \ll 1$ alors on a $(0,0)$ est toujours stable. Ermentrout et Cowan [7] ont supposé que les α_{ee} et α_{ei} sont proportionnels à un certain paramètre μ . Ils ont étudié la stabilité quand μ croit. Par sa croissance, μ passe par un certain valeur critique qui introduit la bifurcation (passage de stabilité à l'instabilité). Selon la variation des α_{mn} , on peut avoir deux genres de bifurcation : bifurcation stationnaire et bifurcation de Hopf. En fait dans ce rapport on va étudier un système un peu plus simple adapté au cas de la bifurcation stationnaire, qui a été introduit par Wilson et Cowan [13] et qui a été utilisé par Bressloff et Cowan pour prendre en compte une propriété additionnelle des neurones du cortex visuel, à savoir leur sensibilité à l'orientation spatiale des objets perçus par la rétine. Chaque partie

du champ visuel, donc de la rétine, est représentée dans le cortex à un endroit précis, appelé hypercolonne. L'hypercolonne regroupe des colonnes de neurones de localisation et d'orientation et cela pour chacune des rétines. Alors V1 est un continuum des hypercolonnes, par suite on distingue deux cas de connections entre les hypercolonnes :

1-connections locales : dans une même hypercolonne, il existe un mélange de connections entre neurones sensibles à n'importe quelle direction (figure 8). Le noyau de connectivité correspondant est noté w_{loc} .

2-connections latérales : entre les hypercolonnes, les neurones sensibles à une même orientation se connectent entre eux (figure 8). Le noyau de connectivité correspondant est noté w_{lat} . Ce modèle est introduit au paragraphe 4.

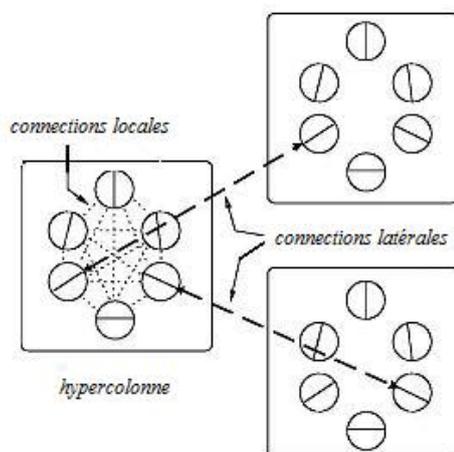


FIGURE 8 – Les connections locales dans une hypercolonne, et latérales entre les hypercolonnes.

Dans cette partie, on introduit le modèle de Bressloff-Cowan et al [3] mais sans prendre en compte de l'orientation :

$$\frac{\partial a(x, y, t)}{\partial t} = -\alpha a(x, y, t) + \mu \int_{\mathbb{R}^2} w(x-x', y-y') S[a(x', y', t)] dx' dy' \equiv G[a, \mu]. \quad (3)$$

Où α et μ sont deux constants positifs.

$$w(r, \phi/r', \phi') = w_{loc}(\phi - \phi')\delta(r - r') + w_{lat}(r - r', \phi)\delta(\phi - \phi')$$

Ce noyau des connections w est clairement introduit dans le paragraphe 4. Ici puisqu'on ne tient pas compte de l'orientation, la forme de ce noyau peut être écrite comme la somme de deux termes qui représentent les excitations et les inhibitions, dont un a un coefficient positif et l'autre a un coefficient négatif.

$$w(r) = \int_0^\infty g(s)[\delta(r - sr_0) + \delta(r + sr_0)] ds$$

Avec $g(s)$ est défini par l'équation (23), pour $r=(x,y)$ et $r_0 = (1,0)$, on a :

$$w(x^2 + y^2) = 1/\sqrt{2\pi\xi^2}e^{-(x^2+y^2)/2\xi^2} - A/\sqrt{2\pi\hat{\xi}^2}e^{-(x^2+y^2)/2\hat{\xi}^2}.$$

On introduit le groupe des isométries du plan $E(2) = O(2) \rtimes R^2$, \rtimes est le produit semi direct, où $O(2)$ est le groupe des matrices orthogonales 2×2 , $AA^t = I$, (rotation et reflection dans le plan). Cette groupe de symétrie agit sur $\mathbb{R}^2 \times S^1$, l'action est clairement décrite au paragraphe 3.2. Pour le moment, pas d'orientation, ce groupe d'isométrie agit en fait sur \mathbb{R}^2 , où Chaque élément g de $E(2)$ s'écrit comme $g=(r,a)$, $r \in O(2)$ et a est un vecteur dans \mathbb{R}^2 .

Pour tout $g=(r,a)$ et pour tout $X=(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $gX=rX+a$.

On définit une représentatin T_g de $E(2)$ dans \mathcal{F}

Pour $u \in \mathcal{F}$, $g \in E(2)$

$$T_g u(X) = u(g^{-1}X) \quad (4)$$

$T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1g_2}$, où $g_1g_2 = (r_1r_2, r_1a_2 + a_1)$ et $T_{g_0} = 1$ pour $g_0 = (1,0)$ l'identité de $E(2)$.

A cause de la condition d'isotropie du noyau de connectivité $w_{mn}(x^2 + y^2)$, l'opérateur G est $E(2)$ -equivariant :

$$T_g G = G T_g, \quad \forall g \in E(2)$$

Par conséquent si a est une solution de (3) alors $T_g a$ est aussi solution.

2.2 Etats d'équilibre homogènes et leur stabilité

Pour l'instant, on considère le modèle de Bressloff et Cowan, mais en cherchant des solutions indépendantes de ϕ , donc qui correspondent aux solutions étudiées par Ermentrout et Cowan, Ces sont les solutions $a(x, y, t)$ de l'équation (3). On va étudier la stabilité de l'état homogène ($a=0$) et ceci en linéarisant le système (3) dans l'état homogène et en prenant une certaine perturbation de paramètre μ :

$$DG[0, \mu](a) = -\alpha a(x, y, t) + \mu s_1 \int_{\mathbb{R}^2} w(x - x', y - y') a(x', y', t) dx' dy' \quad (5)$$

$s_1 = dS[z]/dz$ en $z=0$.

$$DG[0, \mu](a) = -\alpha a(x, y, t) + \mu s_1 w^{**} a \quad (6)$$

lorsque $\mu = 0$, la solution $a = 0$ est évidemment stable et cette propriété persiste lorsque $\mu > 0$ suffisamment proche de 0. Mais quand on fait croître μ , il arrive un moment où une valeur propre peut traverser l'axe imaginaire. Pour calculer cette valeur critique, on fait un développement de Fourier, ce qui permet, grâce à l'invariance du problème par les translations et rotations, d'éliminer les variables spatiales et d'obtenir une formule comme (3). Comme il y a deux termes de signes opposés dans w , cette courbe ($\lambda = 0$) est convexe avec un minimum en dehors de

$k^2 + l^2 = 0$, par conséquent il existe une valeur critique μ_c qui est associée à un nombre d'onde critique $|\Omega|$ différent de 0 (figure 8).

$$DG[0, \mu](a) = (-\alpha + \mu s_1 \hat{w}(k^2 + l^2))a = \lambda(\mu, k^2 + l^2)a \quad (7)$$

Où \hat{w} est la transformée de Fourier de w . Ce système admet des solutions de la forme :

$$a(x, y, t) = \psi(\mu, k^2 + l^2) \exp[\lambda(\mu, k^2 + l^2)t + i(kx + ly)] \quad (8)$$

Où $\psi(\mu, k^2 + l^2)$ et $\lambda(\mu, k^2 + l^2)$ sont les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur linéaire $DG[0, \mu]$.

$$\lambda = -\alpha + \mu s_1 \hat{w}(k^2 + l^2) = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\alpha}{s_1 \hat{w}(k^2 + l^2)} \quad (9)$$

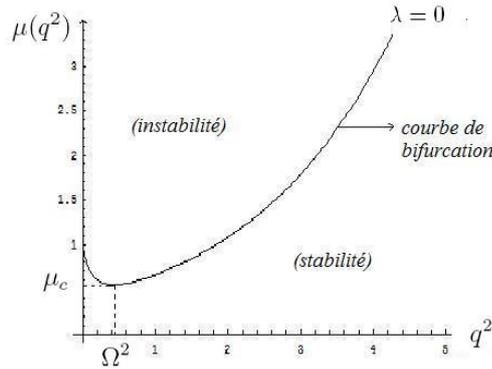


FIGURE 9 – $q^2 = k^2 + l^2$, $\xi = 1$, $\hat{\xi} = 3$, $A=1/5$, $\alpha/s_1 = 1$

3 Bifurcation et solutions bifurquées

3.1 Restriction sur l'espace des fonctions doublements périodiques

On utilise la méthode de bifurcation développée par Golubistky, Sheaffer et Stewart [9] pour décrire les solutions doublements périodiques bifurquantes de l'état homogène $a=0$, et $\mu = \mu_c$.

Soit

$$G[a, \mu] = -\alpha a + \mu w^{**} S[a] \quad (10)$$

A cause de l'équivariance de G , $T_g G = G T_g \forall g \in E(2)$. $|\Omega|$ est le nombre d'onde critique, alors le noyau de $DG[0, \mu_c]$ est constitué d'une famille des fonctions

propres qui ont un vecteur d'onde (k, l) satisfaisant :
 $k^2 + l^2 = |\Omega|^2$, alors :

$$Ker(DG[0, \mu_c]) = \{\phi(\mu_c, \Omega^2)e^{<r\Omega, X>}, \quad r \in O(2)\} \quad (11)$$

avec $< X_1, X_2 > = x_1x_2 + y_1y_2$.

D'après la symétrie de rotation, le $ker(DG[0, \mu_c])$ est de dimension infini. Pour qu'on se ramène en dimension fini, on se restreint sur l'espace des fonctions doublements periodiques en respectant une discrétisation d'espace suivant les vecteurs d'ondes.

Soient $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ deux vecteurs linéairement indépendant du plan, on considère le réseau du plan engendré par ces deux vecteurs :

$$\mathfrak{L} = \{L = m_1\mathbf{l}_1 + m_2\mathbf{l}_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

On dit que f est \mathfrak{L} -doublement periodique si $f(X+L)=f(X)$ pour tout $L \in \mathfrak{L}$. La restriction sur l'espace des fonctions doublements periodiques implique que le groupe de symétrie $E(2)$ est maintenant quotienter modulo le réseau pour avoir un groupe de symétrie sur l'espace de réseau :

$\Gamma \cong E(2)_{/\mathfrak{L}} = H_{\mathfrak{L}} \rtimes \mathbb{T}^2$, où $H_{\mathfrak{L}}$ est le sous groupe maximal de $O(2)$ qui préserve le réseau, elle peut être D_2 , D_4 , ou D_6 , et \mathbb{T}^2 est le tore de \mathbb{R}^2 .

D_n le sous groupe de $O(2)$ engendré par κ et ξ tel que :

$$\kappa z = \bar{z} \quad \text{et} \quad \xi z = ze^{2i\pi/n}$$

Soit θ l'angle formé par les vecteurs de base \mathbf{l}_1 et \mathbf{l}_2 . Suivant la valeur de θ on distingue trois types de réseau et par suite trois groupes de symétrie correspondants :

(1) Réseau hexagonal : $\theta = \pi/3$, alors $\Gamma = D_6 \rtimes \mathbb{T}^2$.

(2) Réseau carré : $\theta = \pi/2$, alors $\Gamma = D_4 \rtimes \mathbb{T}^2$.

(3) Réseau rhombique : $0 < \theta < \pi/2$ et $\theta \neq \pi/3$, alors $\Gamma = D_2 \rtimes \mathbb{T}^2$.

On cherche des solutions doublements periodiques, alors on considère le sous espace des fonctions doublements périodiques en respectant le réseau :

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{L}} = \{\psi \in \mathcal{F} : \psi \text{ est } \mathfrak{L} - \text{periodique}\} = \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^2)$$

On définit le produit scalaire pour deux fonctions dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{L}}$ par :

$$< a, b > = \int_{\mathbb{T}^2} \int_{\pi} \bar{a}(r, \phi)b(r, \phi) \frac{d\phi}{\pi} dr.$$

$DG[0, \mu_c]$ est un opérateur linéaire continue.

$DG[0, \mu_c]$ est borné dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{T}^2)$, de plus il est compact et autoadjoint.

$$< DG[0, \mu_c]a, b > = < a, DG[0, \mu_c]b > .$$

Alors

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{T}^2) = ker DG[0, \mu_c] \oplus Im DG[0, \mu_c].$$

Pour tout n , D_n est un groupe fini, alors le ker se restreint pour être de dimension fini :

$$\chi(\mathcal{L}) \equiv Ker(DG[0, \mu_c])_{/\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} = \{\phi(\mu_c, \Omega)e^{<r\Omega, X>}, \quad r \in D_n\} \quad (12)$$

Dans ce cas, $DG[0, \mu_c]$ (linéaire, compact et dimension de son ker est fini) est dite opérateur de Fredholm d'indice zero (car dimension du ker=dimension de coker). On s'intéresse \mathcal{L}^* , la dual de \mathcal{L} , engendré par \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 ou $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| = |\Omega|$ le nombre d'onde critique. On prend $\mathbf{k}_1 = |\Omega|(1, 0)$ et par suite on calcule le $Ker(DG[0, \mu_c])$ pour les trois cas déjà considérés :

(1) Réseau hexagonal : D_6 est engendré par ξ , rotation d'un $\pi/3$, et κ , reflection suivant l'axe x.

Le noyau alors est de dimension six, dont les éléments de la base sont :

$$\psi_1(X) = \psi_0 e^{i|\Omega|x}, \quad \psi_2(X) = T_{\xi}\psi_1 = \psi_0 e^{i|\Omega|(x/2+y\sqrt{3}/2)}.$$

$$\psi_3(X) = T_{\xi^2}\psi_1 = \psi_0 e^{i|\Omega|(-x/2+y\sqrt{3}/2)}, \quad \psi_4(X) = T_{\xi^3}\psi_1 = \psi_0 e^{-i|\Omega|x} = \overline{\psi_1}.$$

$$\psi_5(X) = T_{\xi^4}\psi_1 = \psi_0 e^{i|\Omega|(-x/2-y\sqrt{3}/2)} = \overline{\psi_2}.$$

$$\psi_6(X) = T_{\xi^5}\psi_1 = \psi_0 e^{i|\Omega|(x/2-y\sqrt{3}/2)} = \overline{\psi_3}.$$

(2) Réseau carré : D_4 est engendré par ξ , rotation d'un angle $\pi/2$, et κ , reflection suivant l'axe x.

Le noyau alors est de dimension quatre dont les éléments de la base sont : $\psi_1(X) =$

$$\psi_0 e^{i|\Omega|x}, \quad \psi_2(X) = T_{\xi}\psi_1 = \psi_0 e^{i|\Omega|y}.$$

$$\psi_3(X) = T_{\xi^2}\psi_1 = \psi_0 e^{-i|\Omega|x} = \overline{\psi_1}, \quad \psi_4(X) = T_{\xi^3}\psi_1 = \psi_0 e^{-i|\Omega|y} = \overline{\psi_2}.$$

(3) Réseau rhombique : D_2 est engendré par ξ : rotation d'un angle π , et κ reflection suivant l'axe x.

Le noyau alors est de dimension quatre dont les éléments de la base sont :

$$\psi_1(X) = \psi_0 e^{i|\Omega|x}, \quad \psi_2(X) = T_{\xi}\psi_1 = \psi_0 e^{i|\Omega|(x \cos \theta + y \sin \theta)}.$$

$$\psi_3(X) = T_{\xi^2}\psi_1 = \psi_0 e^{-i|\Omega|x} = \overline{\psi_1}.$$

$$\psi_4(X) = T_{\xi^3}\psi_1 = \psi_0 e^{i|\Omega|(-x \cos \theta - y \sin \theta)} = \overline{\psi_2} \text{ ou } \psi_0 = \psi(\mu_c, \Omega^2).$$

Alors chaque élément $\psi \in \chi(\mathcal{L})$, $\psi = \sum_{j=1}^n z_j \psi_j$ où $n=4$ pour les cas carré et rhombique, $n=6$ pour le cas hexagonal. Puisque ψ est réel alors $z_j = \overline{z_k}$ ou $\psi_j = \overline{\psi_k}$.

3.2 Les équations de bifurcation

On est intéressé à résoudre le problème suivant :

$$G[u, \mu] = -\alpha u + \mu w^{**} S[u] = 0 \quad u \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \quad (13)$$

où $G : \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$. Avec $G[0, \mu]=0$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$

Si $DG[0, \overline{\mu}]$ est inversible, le théorème des fonctions implicites assure qu'il n'existe d'autre que la solution homogène $u=0$. Ailleurs, $\ker DG(0, \overline{\mu})$ est non nulle alors

il existe des solutions bifurquantes de l'état homogène. On utilise la technique de Lyapounov-Schmidt pour calculer telles solutions.

Pour $\mu = \mu_c$, on a démontré que $\ker DG[0, \mu_c]$ est non nulle. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base qui engendre $\ker DG[0, \mu_c]$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbf{T}^2)$ On applique le developpement de Taylor sur l'équation (13) :

$$G(u, \mu) = DG(0, \mu_c)u + R(u, \mu - \mu_c) \quad (14)$$

Soient \mathbb{P} et \mathbb{Q} les projections de l'espace $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ sur $\ker DG[0, \mu_c]$ et $\text{Img } DG[0, \mu_c]$ respectivement. Puisque $DG[0, \mu_c]$ est autoadjoint, on a $\mathbb{Q} = (I - \mathbb{P})$ Alors $DG[0, \mu_c]$ est un isomorphisme

de $(I - \mathbb{P})\mathcal{F}$ sur $\mathbb{Q}\mathcal{F}$, et par suite il exist une application

$M : \mathbb{Q}\mathcal{F}_{\mathcal{L}} \longrightarrow (I - \mathbb{P})\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ telque $MDG[0, \mu_c] = I_d$ identité sur $(I - \mathbb{P})\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$

Pour chaque $u \in \mathcal{F}$ on a la décomposition :

$$u = \psi + \varphi \text{ où } \psi = \mathbb{P}u = \sum_{j=1}^n \langle u, \psi_j \rangle \psi_j \text{ et } \varphi = (I - \mathbb{P})u$$

Appliquons $M\mathbb{Q}$ et $(I - \mathbb{Q})$ sur l'équation (14) on obtient :

$$\varphi + M\mathbb{Q}R(\psi + \varphi, \mu - \mu_c) = 0 \quad (15)$$

$$(I - \mathbb{Q})R(\psi + \varphi, \mu - \mu_c) = 0 \quad (16)$$

L'équation(15) implique que $\varphi = \varphi(\psi, \mu - \mu_c)$, on le substitue dans l'équation(16) on obtient :

$$(I - \mathbb{Q})R(\psi + \varphi(\psi, \mu - \mu_c), \mu - \mu_c) = 0 = F(\psi, \mu) \quad (17)$$

Pour tout valeur de μ on a :

$$F : \mathbb{P}\mathcal{F}_{\mathcal{L}} \rightarrow (I - \mathbb{Q})\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$$

Les deux sous espaces sont de même dimension fini n , alors :

$$\psi = \sum_{j=1}^n z_j \psi_j \text{ et } F = \sum_{j=1}^n F_j \psi_j.$$

On a noté par $\langle u, \psi_j \rangle = z_j \in \mathbb{C}$.

Résoudre l'équation (17) est équivalent à résoudre les équations de bifurcation suivantes :

$$F_1(\mu; z_1, \dots, z_n) = \dots = F_n(\mu; z_1, \dots, z_n) = 0 \quad (18)$$

L'ensemble de solutions de l'équation (13) pour $|\mu - \mu_c|$ et $\|u\|$ proche de zero est équivalent à l'ensemble de solutions de (18) avec $|\mu - \mu_c|$ et $|z_i|$ sont petits.

L'équivariance de G implique celle de F , alors une fois qu'on calcule F_1 on obtient tout les F_j . Exemple : le réseau hexagonal :

$$\xi^5(z_1, \dots, z_6) = (z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_1)$$

$$\mathbb{T}_{\xi^5} F = F \mathbb{T}_{\xi^5} \text{ donc}$$

$$F_2(\mu; z_1, \dots, z_6) = F_1(\mu; z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_1) \dots$$

3.3 Théorie des bifurcations équivariantes

On cherche à calculer les solutions bifurquantes de l'état homogène en utilisant le technique de Lyapounov-Schmidt. Cet étude est basé sur la théorie de bifurcation avec symétrie, développé par Golubitsky, Stewart et Sheaffer(1988), Chossat et Lauterbach(2000).

Soit Γ un groupe de Lie qui agit sur un espace vectoriel V et :

$$F : V \times \mathbb{R} \longrightarrow V$$

$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda)$ avec F est Γ -équivariant. Chaque solution engendre une orbite de solutions par l'action du groupe de symétrie, si x_0 solution pour F , ($F(x_0, \lambda) = 0$) alors γx_0 est une solution pour tout $\gamma \in \Gamma$ car

$$F(\gamma x_0, \lambda) = \gamma F(x_0, \lambda) = 0.$$

On définit le sous groupe d'isotropie de x_0 par :

$$\Sigma_{x_0} = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x_0 = x_0\}$$

On associe à chaque sous groupe d'isotropie son sous espace fixe défini par :

$$Fix[\Sigma_{x_0}] = \{x \in V : \sigma x = x \quad \forall \sigma \in \Sigma_{x_0}\}$$

Soit Σ un sous groupe d'isotropie. Pour trouver les solutions de bifurcation, il suffit de résoudre le système des équations restreintes suivant :

$$F : Fix(\Sigma) \times \mathbb{R} \longrightarrow Fix(\Sigma) \tag{19}$$

Pour vérifier (19),soient $y \in Fix(\Sigma)$ et $\sigma \in \Sigma$

$$\sigma F(y, \lambda) = F(\sigma y, \lambda) = F(y, \lambda)$$

Alors σ fixe $F(y, \lambda)$ et $F(y, \lambda) \in Fix(\Sigma)$. Par l'équation (19) le système suivant :

$$F(y, \lambda) = 0 \quad y \in Fix(\Sigma)$$

est constitué de $m = \dim Fix(\Sigma)$ équations, m est plus petit que $\dim \ker DF$. Un cas intéressant est que $\dim Fix(\Sigma) = 1$. Dans ce cas on appelle Σ un sous groupe axial, et le sous espace fixe par Σ est axe de symétrie. Alors le système (19) est un problème de bifurcation à une seule variable.

Lemme 3.1 (*Equivariant branching lemma, Golubitsky, Stewart et Scheafer*) : Γ est un groupe de Lie qui agit d'une façon absolument irréductible sur V , et soit

$$F : V \times \mathbb{R} \rightarrow V, \quad \frac{dx}{dt} = F(x, \lambda)$$

un problème de bifurcation qui est équivariant sous l'action du Γ avec $\text{Ker } DF(x_0, \lambda_0)$ est non nul pour un certain solution (x_0, λ_0) . Soit Σ un sous groupe axial de Γ . Alors, il existe généralement une branche de solution bifurquante en x_0 d'isotropie Σ .

3.4 Les solutions bifurquées

Appliquons la théorie de bifurcation du paragraphe 3.3 sur notre problème. En illustrant d'abord l'action du groupe, on calcule les sous groupes axiaux ainsi que leurs axes de symétrie correspondants.

Exemple, le cas du réseau carré :

Soit $\psi = z_1 e^{i\mathbf{k}_1 X} + z_2 e^{i\mathbf{k}_2 X} + c.c.$

Action du tore T^2

Soit $\tau = \tau_1 \mathbf{k}_1 + \tau_2 \mathbf{k}_2$ un élément du tore, alors :

$\tau e^{i\mathbf{k}X} = e^{i\mathbf{k}(X-\tau)} = e^{-i\mathbf{k}\tau} e^{i\mathbf{k}X}$, et :

$\tau(z_1, z_2) = (e^{-2i\pi\tau_1} z_1, e^{-2i\pi\tau_2} z_2)$

L'action du D_4 est :

(1) L'action de ξ :

$$\begin{aligned} \xi(z_1, z_2) &\cong R_{\pi/2}(z_1 e^{i\mathbf{k}_1 X} + z_2 e^{i\mathbf{k}_2 X}) + c.c. \\ &= z_1 e^{i\mathbf{k}_2 X} + z_2 e^{-i\mathbf{k}_1 X} + c.c. \\ &= \overline{z_2} e^{i\mathbf{k}_1 X} + z_1 e^{i\mathbf{k}_2 X} + c.c. \\ &\cong (\overline{z_2}, z_1). \end{aligned}$$

(2) L'action du κ :

$$\begin{aligned} \kappa(z_1, z_2) &\cong \kappa(z_1 e^{i\mathbf{k}_1 X} + z_2 e^{i\mathbf{k}_2 X}) + c.c. \\ &= z_1 e^{i\mathbf{k}_1 X} + z_2 e^{-i\mathbf{k}_2 X} + c.c. \\ &= z_1 e^{i\mathbf{k}_1 X} + \overline{z_2} e^{i\mathbf{k}_2 X} + c.c. \\ &\cong (z_1, \overline{z_2}). \end{aligned}$$

Les autres cas sont présentés dans le tableau (1).

Après qu'on a présenté l'action du groupe de symétrie Γ , on cherche les sous groupes de Γ avec leurs sous espaces fixes correspondants. En fait on est intéressé à chercher juste les sous groupes axiaux qui sont présentés dans le tableau 2. Basant sur le lemme 3.1, Les équations de bifurcation peuvent être trouvées dans la livre de Golubitsky, Shaeffer et Stewart[9], mais elles sont données jusqu'à l'ordre 3 du développement de Taylor. On prend un résultat classique connu depuis Sattinger 1978, vérifié Ermentrout-Cowan(1979).

Prenant comme exemple réseau carré : pour $x_j = |z_j|$, $z_j = x_j e^{i\theta_j}$ et $\nu = \mu - \mu_c$ on a :

$$\begin{aligned} x_1(\nu + Ax_1^2 + Bx_2^2) + \text{ordre sup} &= 0 \\ x_2(\nu + Ax_2^2 + Bx_1^2) + \text{ordre sup} &= 0 \end{aligned}$$

On est intéressé à des petites perturbations alors on prend $\eta = \varepsilon^2 \nu$ et $y_j = \varepsilon x_j$, on obtient par exemple :

$$x\varepsilon^3(\eta + Ax^2 + Bx^2) = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

on simplifie par ε^3 et on laisse ε tendre vers zéro. Les équations de bifurcations seront :

$$y_1(\eta + Ay_1^2 + By_2^2) = 0$$

D_2	action	D_4	action	D_6	action
I	(z_1, z_2)	I	(z_1, z_2)	I	(z_1, z_2, z_3)
ξ	(\bar{z}_1, \bar{z}_2)	ξ	(\bar{z}_2, z_1)	ξ	$(\bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_1)$
κ	(z_2, z_1)	ξ^2	(\bar{z}_1, \bar{z}_2)	ξ^2	(z_3, z_1, z_2)
$\kappa\xi$	(\bar{z}_2, \bar{z}_1)	ξ^3	(z_2, \bar{z}_1)	ξ^3	$(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$
		κ	(z_1, \bar{z}_2)	ξ^4	(z_2, z_3, z_1)
		$\kappa\xi$	(\bar{z}_2, \bar{z}_1)	ξ^5	$(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$
		$\kappa\xi^2$	(\bar{z}_1, z_2)	κ	(z_1, z_3, z_2)
		$\kappa\xi^3$	(z_2, z_1)	$\kappa\xi$	$(\bar{z}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_3)$
				$\kappa\xi^2$	(z_3, z_2, z_1)
				$\kappa\xi^3$	$(\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_2)$
				$\kappa\xi^4$	(z_2, z_1, z_3)
				$\kappa\xi^5$	$(\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$
$[\tau_1, \tau_2]$	$(z_1 e^{-2i\pi\tau_1}, z_2 e^{-2i\pi\tau_2})$				$(z_1 e^{-2i\pi\tau_1}, z_2 e^{-2i\pi\tau_2}, z_3 e^{-2i\pi(\tau_1+\tau_2)})$

TABLE 1 – Action du groupe Γ pour les trois cas.

Reseau	Sous groupe axiaux	vecteur fixe
Carré	$D_4(\kappa, \xi)$	(1,1)
	$\mathcal{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_2(\kappa)$	(1,0)
Hexagonal	$D_6(\kappa, \xi)$	(1,1,1)
	$D_6(\kappa, \xi)$	(-1,-1,-1)
	$\mathcal{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_2(\kappa)$	(1,0,0)
Rhombique	$D_2(\kappa, \xi)$	(1,1)
	$\mathcal{O}(2)$	(1,0)

TABLE 2 – Résumé des sous groupes axiaux et leurs axes de symétrie correspondants. $\mathcal{O}(2)$ engendré par $(0, \tau_2) \in \mathbf{T}^2$ et rotation d'un angle π (ξ pour le réseau rhombique, ξ^2 pour le carré et ξ^3 pour l'hexagonal), $\mathbf{k}_3 = -(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$.

solution	valeurs propres
$y_2 = 0, y_1 = \sqrt{\frac{-\eta}{A}}$	$-2\eta, \frac{-\eta(B-A)}{A}$
$y_1 = y_2 = \sqrt{\frac{-\eta}{A+B}}$	$-2\eta, \frac{-2\eta(B-A)}{A+B}$

TABLE 3 – Solutions pour les équations de bifurcation pour le réseau carré

$$y_2(\eta + Ay_2^2 + By_1^2) = 0$$

D'abord que grâce à la table 2 et au lemme 3.1, on sait qu'il existe des branches bifurquées d'isotropie $D_4(\kappa, \xi)$ et $\mathcal{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_2(\kappa)$ (cas du réseau carré), on utilisant les équations de bifurcation du page 14 pour écrire la partie principale de ces branches de solutions :

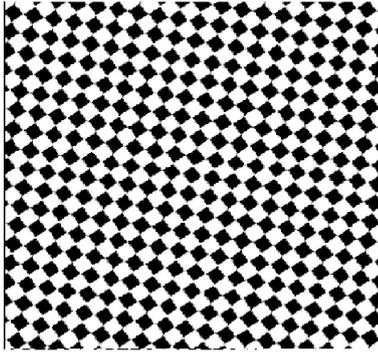
(i) $y_2 = 0, y_1 \neq 0$ ou $y_1 = 0, y_2 \neq 0$

$$u_1(x, y) = \varepsilon \phi(\mu_c, \Omega^2) \sqrt{\frac{-\eta}{A}} \cos(|\Omega|x) \quad , (y_2 = 0)$$

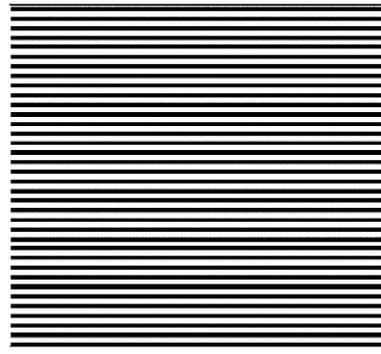
$$u_2(x, y) = \varepsilon \phi(\mu_c, \Omega^2) \sqrt{\frac{-\eta}{A}} \cos(|\Omega|y) \quad , (y_1 = 0)$$

(ii) $y_1 = y_2 = \sqrt{\frac{-\mu}{A+B}}$

$$u_3(x, y) = \frac{2\pi}{|\Omega|} \varepsilon \phi(\mu_c, \Omega^2) \sqrt{\frac{-\eta}{A+B}} [\cos(|\Omega|x) + \cos(|\Omega|y)]$$



(a)



(b)

FIGURE 10 – contours de la solution : (a) contour en carré, (b) contour en bande

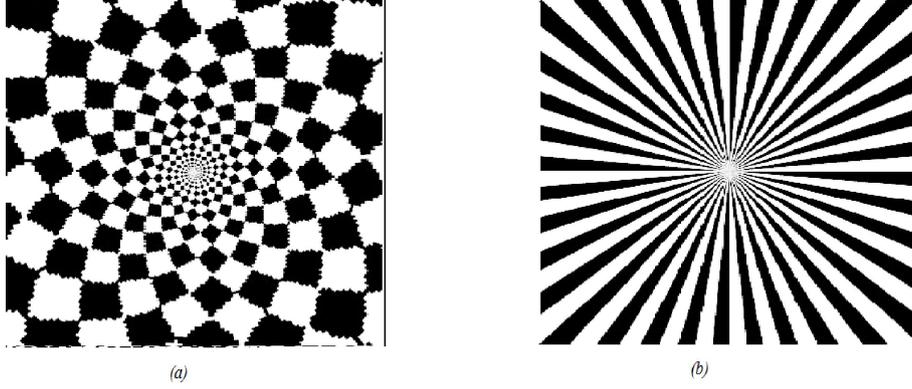


FIGURE 11 – cette figure correspond à la transformée, par l'inverse de l'application rétinocortical, de la figure 10 dans la rétine

4 La prise en compte de l'orientation : modèle de Bressloff-Cowan et al

4.1 Le modèle avec orientation

Dans cette partie, on va reprendre la démarche faite avant, mais en prenant en compte l'effet de l'orientation des formes observés. On se ramène à l'étude d'une équation différentielle dépendante de deux variables, la position r et l'orientation ϕ , qui sont deux variables indépendants au sens que toutes les orientations possibles sont représentées dans chaque position.

$$\frac{\partial a(r, \phi, t)}{\partial t} = -\alpha a(r, \phi, t) + \mu \int_0^\pi \int_{R^2} w(r, \phi/r', \phi') S[a(r', \phi', t)] \frac{dr, d\phi'}{\pi} \equiv G[a, \mu] \quad (20)$$

w est la noyau de connections qui joignent les neurons situés à une distance r dont l'orientation préférentielle est ϕ et les neurons situés à une distance r' dont l'orientation préférentielle est ϕ' .

Alors w peut être écrite comme :

$$w(r, \phi/r', \phi') = w_{loc}(\phi - \phi')\delta(r - r') + w_{lat}(r - r', \phi)\delta(\phi - \phi') \quad (21)$$

Avec $w_{loc}(-\phi) = w_{loc}(\phi)$

$$w_{lat}(r, \phi) = \hat{w}(R_{-\phi}r) \quad (22)$$

Avec $\hat{w}(r) = \int_0^\infty g(s)[\delta(r - sr_0) + \delta(r + sr_0)]ds$

$r_0 = (1, 0)$ et R_θ est la matrice de rotation définie par :

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$g(s)$ exprime la variation de la force de connections latérales selon la distance de

séparation. Soit :

$$g(s) = [2\pi\xi_{lat}^2]^{-1/2} \exp(-s^2/2\xi_{lat}^2) - A_{lat}[2\pi\hat{\xi}_{lat}^2]^{-1/2} \times \exp(-s^2/2\hat{\xi}_{lat}^2) \quad (23)$$

Avec $\xi_{lat} < \hat{\xi}_{lat}$ et $A_{lat} \leq 1$, qui représentent une combinaison de l'excitation à une courte distance et de l'inhibition à une longue distance, c'est un exemple de forme de *Mexican chapeau*.

On peut prendre d'autres fonction poids w pour une généralisation des équations (21) et (22) :

$$w(r, \phi/r', \phi) = w_{loc}(\phi - \phi')\Delta_{loc}(|r - r'|) + \hat{w}(R_{-\phi}[r' - r])\Delta_{lat}(\phi - \phi') \quad (24)$$

avec $\Delta_{lat}(-\phi) = \Delta_{lat}(\phi)$, $\Delta_{lat}(\phi) = 0$ pour $|\phi| > \phi_0$, et $\Delta_{loc}(|r|) = 0$ pour $|r| > \xi_0$. L'équation (20) sera modifié par :

$$\hat{w}(r) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} p(\theta) \int_0^\infty g(s)[\delta(r - sr_0) + \delta(r + sr_0)]dsd\theta \quad (25)$$

avec $r_0 = (\cos\theta, \sin\theta)$, et $p(-\theta) = p(\theta)$ Les paramètres ϕ_0 et θ_0 déterminent les angles de propagation de connexions latérales en respectant l'orientation de préférence et celle de l'espace respectivement, et ξ_0 détermine la distance de la connexion latérale.

4.2 La symétrie Euclidienne du problème avec orientation

On suppose que la distribution w satisfait les équations (24) et (25). on démontre que w est invariant sous l'action du groupe Euclidien $E(2)$. L'action du groupe de symétrie est maintenant modifiée. $E(2)$ agit sur $\mathbb{R}^2 \times S^1$ dont l'action est engendré par s, θ et κ :

$$\begin{aligned} s(r, \phi) &= (r + s, \phi), \quad s = (s_1, s_2), r = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \theta(r, \phi) &= (R_\theta r, \theta + \varphi) \theta \in S^1 \\ \kappa(r, \phi) &= (\kappa r, -\phi) \end{aligned} \quad (26)$$

κ est la reflection $(x, y) \rightarrow (x, -y)$ et R_θ est la rotation par θ
L'action correspondante du groupe sur une fonction $a : \mathbb{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $P = (r, \phi)$, est donné par :

$$\gamma \cdot a(P) = a(\gamma^{-1}P) \quad (27)$$

Ceci pour tout $\gamma \in E(2)$ et l'action sur $w(P/P')$ est

$$\gamma \cdot w(P/P') = w(\gamma^{-1}P/\gamma^{-1}P')$$

C'est facile à vérifier que w , vérifiant les équations (24) et (25), est invariant sous l'action de $E(2)$:

$$s.w(r, \phi) = w(r, \phi)$$

$$\theta.w(r, \phi) = w(r, \phi)$$

$$\kappa.w(r, \phi) = w(r, \phi)$$

C'est démontré en utilisant le faite que $\kappa R_{-\phi} = R_{\phi} \kappa$, $w_{loc}(-\phi) = w_{loc}(\phi)$, $\Delta(-\phi) = \Delta(\phi)$, $\hat{w}(\kappa r) = \hat{w}(r)$
considérons l'action de E(2) sur l'équation (20) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a(\gamma^{-1}P, t)}{\partial t} \\ &= -\alpha a(\gamma^{-1}P, t) + \mu \int_{R^2 \times S^1} w(\gamma^{-1}P \setminus P') S[a(P', t) dP'] \\ &= -\alpha a(\gamma^{-1}P, t) + \mu \int_{R^2 \times S^1} w(P \setminus \gamma P') S[a(P', t) dP'] \\ &= -\alpha a(\gamma^{-1}P, t) + \mu \int_{R^2 \times S^1} w(P \setminus P'') S[a(\gamma^{-1}P'', t) d''] \end{aligned}$$

En utilisant le faite que $d[\gamma^{-1}P] = \pm dP$, et w est invariant, si on écrit l'équation (20) comme suivant :

$$F[a] = \frac{\partial a}{\partial t} - G[a, u] = 0$$

on remarque que F est equivariant sous l'action de E(2). Cette equivariance donne des implications sur la nature de solutions bifurquantes de l'état homogène.

4.3 Etude de la stabilité linéaire de l'état homogène

On restreint notre analyse sur des distributions poids données par les équations (21) et (24) avec \hat{w} satisfait l'équation (22) où (25), alors w est invariante sous l'action de E(2). La substitution de l'équation (21) dans (20) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(r, \phi, t)}{\partial t} &= -\alpha a(r, \phi, t) \\ &+ \mu \left[\int_0^\pi w_{loc}(\phi - \phi') S[a(r, \phi', t)] \frac{d\phi'}{\pi} + \beta \int_{R^2} w_{lat}(r - r', \phi) S[a(r', \phi, t)] dr' \right] \quad (28) \end{aligned}$$

On introduit un nouveau paramètre β qui caractérise l'intensité d'interaction latérale. La première étape consiste à linéariser l'équation (28) dans l'état homogène $a(r, \phi) = 0$ et de résoudre le problème de valeur propre obtenu. En particulier on cherche des conditions sous lesquelles l'état homogène devient instable. Pour cela, il faudra effectuer une perturbation en expansion pour le paramètre β .

on linéarise l'équation (28) dans l'état homogène :

$$\begin{aligned} L(\mu, \beta)a &= -\alpha a(r, \phi) + s_1 \mu \left[\int_0^\pi w_{loc}(\phi - \phi') a(r, \phi') \frac{d\phi'}{\pi} + \beta \int_{R^2} w_{lat}(r - r', \phi) a(r', \phi) dr' \right] \\ &= \lambda a(r, \phi) \quad (29) \end{aligned}$$

On introduit, (Bressloff-Cowan), des solutions du linéarisé de la forme :

$$a(r, \phi) = u(\phi - \varphi) e^{i\mathbf{k} \cdot r} + c.c. \quad (30)$$

avec $\mathbf{k} = q(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $q = |\mathbf{k}|$. et alors l'équation (29) s'écrit :

$$\lambda(\mu, \beta, q)u(\phi) = -\alpha u(\phi) + \sigma_1 \mu \left[\int_0^\pi w_{loc}(\phi - \phi') u(\phi') \frac{d\phi'}{\pi} + \beta \tilde{w}_{lat}(\mathbf{k}, \phi + \varphi) u(\phi) \right] \quad (31)$$

Où $\tilde{w}_{lat}(\mathbf{k}, \phi)$ est la transformée de Fourier de $w_{lat}(r, \phi)$, avec w_{lat} satisfait l'équation (22) et w est E(2)-invariant.

5 Actions du groupe de symétrie restreint sur le noyau de la linéarisé

5.1 Les sous espaces irréductible

En basant sur la théorie de perturbation de Rayleigh-Schrödinger, Dans leur article [3], Bressloff, Cowan et al ont étudié numériquement la stabilité de l'état homogène jusqu'à première ordre de puissance de β , ils ont calculé le vecteur d'onde Ω correspondant à la première instabilité μ_c (μ_c est plus petit valeur de μ pour la première ordre de β , $\lambda = 0$) de l'état homogène. Dans leur article [3], Bressloff, Cowan et al ont fait un étude numérique de telle bifurcation (figure 12). Noté $L(\mu_c)$

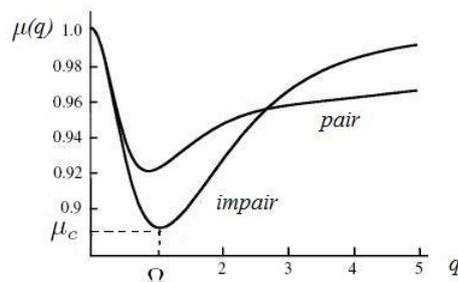


FIGURE 12 – $q = |\mathbf{k}|$, courbe tracé pour la première ordre de β .

l'opérateur linéarisé de l'équation (29) pour $\mu = \mu_c$. Par raison de symétrie, $\ker L(\mu_c)$ est de dimension infini. Maintenant on réfère au calcul fait au paragraphe 3 mais pour $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^2 \times S^1)$. Alors $L(\mu_c)$ est un opérateur compact et autoadjoint sur $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.

Pour chaque $\mathbf{k} \in \mathcal{L}^*$ on associe le sous espace correspondant des fonctions propres :

$$V_{\mathbf{k}} = \{u(\phi)e^{i\mathbf{k}\cdot r} + c.c., u : S^1 \rightarrow \mathbb{C}, u(\phi + \pi) = u(\phi)\}$$

$$V = \sum_{\gamma \in H_{\mathcal{L}}} V_{\gamma\mathbf{k}}$$

$V_{\mathbf{k}}$ se décompose en deux sous espaces invariants :

$$V_{\mathbf{k}} = V_{\mathbf{k}}^+ \oplus V_{\mathbf{k}}^-, \text{ tels que}$$

$$V_{\mathbf{k}}^+ = \{v \in V_{\mathbf{k}} : u(-\phi) = u(\phi)\}(\text{pair})$$

$$V_{\mathbf{k}}^- = \{v \in V_{\mathbf{k}} : u(-\phi) = -u(\phi)\}(\text{impair})$$

Réseau	$\ker L(\mu_c)$
Carré	$Z_u \oplus R_{\pi/2}(Z_u)$
Hexagonal	$Z_u \oplus R_{2\pi/3}(Z_u) \oplus R_{4\pi/3}(Z_u)$
Rhombique	$Z_u \oplus R_\theta(Z_u)$

TABLE 4 – Les fonctions propres correspondants au plus petit longueur de \mathbf{k}

Réseau	$\ker L(\mu_c)$
Carré	$z_1 u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + z_2 u(\phi - \frac{\pi}{2}) e^{2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r} + c.c$
Hexagonal	$z_1 u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + z_2 u(\phi - \frac{2\pi}{3}) e^{2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r} + z_3 u(\phi + \frac{2\pi}{3}) e^{2i\pi \mathbf{k}_3 \cdot r} + c.c$
Rhombique	$z_1 u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + z_2 u(\phi - \theta) e^{2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r} + c.c$

TABLE 5 – Les fonctions propres correspondants aux sous espaces Γ -irréductible, $u(\phi)$ réel, π -periodique ,pair ou impair

C'est une conséquence de l'action de reflexion κ . En effet :
 $\kappa a(r, \phi) = a(\kappa r, -\phi) = u(-\phi) e^{i\mathbf{k}r} + c.c$.

Fixons $u(\phi) e^{i\mathbf{k}r} + c.c \in V_{\mathbf{k}}$ ou u est réel, soit Z_u le sous espace de dimension 2 définit par :

$$Z_u = \{z u(\phi) e^{i\mathbf{k}r} + c.c : z \in \mathbb{C}\}$$

Z_u est \mathbb{T}^2 irréductible, et

$$Z(u) = \sum_{\gamma \in H_{\mathcal{L}}} \gamma Z_u$$

est $\Gamma_{\mathcal{L}}$ -invariant.

Lemme 5.1 *Le sous espace $Z(u)$, où u est à valeur réel et pour les deux cas pair et impair, est Γ -absolument irréductible. De plus, ces sous espaces sont les seuls sous espaces de V qui sont Γ -irréductibles.*

En utilisant la lemme (5.1), on peut écrire $\ker L(\mu_c) = Z(u)$. De plus on peut écrire $Z(u)$ comme une somme direct des images par rotation de Z_u (tableau 4).

On fixe la fonction $u(\phi)$ qui est réel, π -periodique et dans les deux cas pair et impair. Sans perdre de generalité, Bressloff-Cowan[4] on peut prendre $|\Omega|=1$. Alors soit $\mathbf{k}_1 = (1, 0)$, On écrit les fonctions dans Z_u comme $z_1 u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + c.c$, $z_1 \in \mathbb{C}$, alors on a la représentation du $\ker L(\mu_c)$ (tableau 5).

5.2 L'action du groupe de symétrie restreint

En illustrant d'abord l'action du groupe, on calcule les sous groupes axiaux ainsi que leurs axes de symétrie correspondants.

Exemple le cas du reseau carré :

Soit $\psi = z_1 u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + z_2 u(\phi - \frac{\pi}{2}) e^{2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r} + c.c., r = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Action du tore T^2

Soit $\tau = \tau_1 l_1 + \tau_2 l_2$ un élément du tore, on écrit $\tau = [\tau_1, \tau_2]$ alors :

$$\tau u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k} \cdot r} = u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k} \cdot (r - \tau)} = e^{-ik\tau} u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k} \cdot r}, \text{ alors :}$$

$$\tau(z_1, z_2) = (e^{2i\pi \tau_1} z_1, e^{2i\pi \tau_2} z_2)$$

L'action du D_4 est :

(1) L'action de ξ :

$$\begin{aligned} \xi(z_1, z_2) &\cong R_{\pi/2}(z_1 u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + z_2 u(\phi - \frac{\pi}{2}) e^{2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r}) + c.c. \\ &= z_1 u(\phi - \frac{\pi}{2}) e^{2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r} + z_2 u(\phi) e^{-2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} c.c. \\ &= \bar{z}_2 u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + z_1 u(\phi - \frac{\pi}{2}) e^{2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r} + c.c. \\ &\cong (\bar{z}_2, z_1). \end{aligned}$$

(2) L'action du κ :

$$\begin{aligned} \kappa(z_1, z_2) &\cong \kappa(z_1 u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + z_2 u(\phi - \frac{\pi}{2}) e^{2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r}) + c.c. \\ &= z_1 u(-\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + z_2 u(\frac{\pi}{2} - \phi) e^{-2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r} + c.c. \\ &= \pm(z_1 u(\phi) e^{2i\pi \mathbf{k}_1 \cdot r} + \bar{z}_2 u(\phi - \frac{\pi}{2}) e^{2i\pi \mathbf{k}_2 \cdot r}) + c.c. \\ &\cong \pm(z_1, \bar{z}_2). \end{aligned}$$

L'action du groupe Γ , sur les trois cas, est représenté dans le tableau (6), tandis que les tableaux 7-8 représentent les sous groupes axiaux avec leurs axes de symétries. Les solutions bifurquées correspondantes sont situées dans les tableaux 9-10, on appelle telles solutions : les planformes. correspondants.

D_2	Action	D_4	Action	D_6	Action
I	(z_1, z_2)	I	(z_1, z_2)	I	(z_1, z_2, z_3)
ξ	(\bar{z}_1, \bar{z}_2)	ξ	(\bar{z}_2, z_1)	ξ	$(\bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_1)$
κ	$\epsilon(z_2, z_1)$	ξ^2	(\bar{z}_1, \bar{z}_2)	ξ^2	(z_3, z_1, z_2)
$\kappa\xi$	$\epsilon(\bar{z}_2, \bar{z}_1)$	ξ^3	(z_2, \bar{z}_1)	ξ^3	$(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$
		κ	$\epsilon(z_1, \bar{z}_2)$	ξ^4	(z_2, z_3, z_1)
		$\kappa\xi$	$\epsilon(\bar{z}_2, \bar{z}_1)$	ξ^5	$(\bar{z}_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$
		$\kappa\xi^2$	$\epsilon(\bar{z}_1, z_2)$	κ	$\epsilon(z_1, z_3, z_2)$
		$\kappa\xi^3$	$\epsilon(z_2, z_1)$	$\kappa\xi$	$\epsilon(\bar{z}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_3)$
				$\kappa\xi^2$	$\epsilon(z_3, z_2, z_1)$
				$\kappa\xi^3$	$\epsilon(\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_2)$
				$\kappa\xi^4$	$\epsilon(z_2, z_1, z_3)$
				$\kappa\xi^5$	$\epsilon(\bar{z}_3, \bar{z}_2, \bar{z}_1)$
$[\tau_1, \tau_2]$	$(z_1 e^{-2i\pi\tau_1}, z_2 e^{-2i\pi\tau_2})$				$(z_1 e^{-2i\pi\tau_1}, z_2 e^{-2i\pi\tau_2}, z_3 e^{-2i\pi(\tau_1+\tau_2)})$

TABLE 6 – Action du groupe Γ pour les trois cas, $\epsilon = 1$ si $u(-\phi) = u(\phi)$, et $\epsilon = -1$ si $u(-\phi) = -u(\phi)$.

Réseau	Sous groupe axiaux	Vecteur fixe	Nom
Carré	$D_4(\kappa, \xi)$	(1,1)	carré pair
	$\mathcal{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_2(\kappa)$	(1,0)	bandes pairs
Hexagonal	$D_6(\kappa, \xi)$	(1,1,1)	hexagone pair(0)
	$D_6(\kappa, \xi)$	(-1,-1,-1)	hexagone pair(π)
	$\mathcal{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_2(\kappa)$	(1,0,0)	bandes pairs
Rhombique	$D_2(\kappa, \xi)$	(1,1)	rhombique pair
	$\mathcal{O}(2)$	(1,0)	bandes pairs

TABLE 7 – Résumé des sous groupes axiaux et leurs axes de symétrie correspondants dans le cas pair ou $u(-\phi) = u(\phi)$. $\mathcal{O}(2)$ engendré par $(0, \tau_2) \in \mathbb{T}^2$ et rotation d'un angle π (ξ pour le reseau rhombique, ξ^2 pour le carré et ξ^3 pour l'hexagonal).

5.3 Les solutions bifurquées du modèle avec orientation

Réseau	Sous groupe axiaux	Vecteur fixe	Nom
Carré	$D_4(\kappa[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \xi)$	(1,-1)	carré impair
	$\mathcal{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_2(\xi^2\kappa[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$	(1,0)	bandes impairs
Hexagonal	$\mathbf{Z}_6(\xi)$	(1,1,1)	hexagone impair
	$D_3(\kappa\xi, \xi^2)$	(i,i,i)	triangle
	$D_2(\kappa, \xi^3)$	(0,1,-1)	le quilt écossais
	$\mathcal{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_4(\xi\kappa[\frac{1}{2}, 0])$	(1,0,0)	bandes impairs
Rhombique	$D_2(\kappa[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \xi)$	(1,1)	rhombique impair
	$\mathcal{O}(2) \oplus \mathbf{Z}_2(\xi^2\kappa[\frac{1}{2}, 0])$	(1,0)	bandes impairs

TABLE 8 – Résumé des sous groupes axiaux et leurs axes de symétrie correspondants dans le cas impair ou $u(-\phi) = -u(\phi)$. $\mathcal{O}(2)$ engendré par $(0, \tau_2) \in \mathbf{T}^2$ et rotation d'un angle π (ξ pour le reseau rhombique, ξ^2 pour le carré et ξ^3 pour l'hexagonal)

Réseau	Nom	Planformes
carré	carré pair	$u(\phi) \cos x + u(\phi - \pi/2) \cos y$
	bonde pair	$u(\phi) \cos x$
rhombique	rombique pair	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot r) + u(\phi - \theta) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot r)$
	bonde pair	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot r)$
hexagonal	hexagone pair(0)	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot r) + u(\phi + \pi/3) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot r) + u(\phi - \pi/3) \cos(\mathbf{k}_3 \cdot r)$
	hexagone pair(π)	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot r) + u(\phi + \pi/3) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot r) - u(\phi - \pi/3) \cos(\mathbf{k}_3 \cdot r)$
	bonde pair	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot r)$

TABLE 9 – Les planformes pairs avec $u(-\phi) = u(\phi)$, $k_3 = -(k_1 + k_2)$

Suffisamment proche du point de bifurcation, où $a(r, \phi)$ devient instable, pour des perturbation petit, on utilise la méthode de plusieurs échelles et en faisant un développement de Taylor de $S[a]$, pour obtenir perturbation en puissance du paramètre de perturbation (Poincaré-Lindstedt).

Une fois qu'on fait la technique au-dessus, et en basant sur le livre de Golubistky, Sheaffer et Stewart [9] on arrive à calculer les équations de bifurcation et ensuite les solutions bifurquées de l'état homogène de la problème initiale. On peut trouver ces résultats dans l'article de Bressloff, Cowan et Golubistky [3]. $u(\phi)$ qui est π -periodique, elle peut avoir l'une des formes suivantes :

- 1- $u(\phi) \cong \cos(\phi)$ dans le cas pair.
- 2- $u(\phi) \cong \sin(\phi)$ dans le cas impair.
- 3- $u(\phi) \cong 1$.

Alors on vérifie les solutions correspondantes pour ces 3 cas, et en appliquant l'inverse de l'application rétinocorticale, on se conduit à reproduire les formes géométriques correspondantes aux planformes des tableaux 9-10. En prenant comme exemple le réseau carré, alors les figures 13-15 représentent les contours des planformes dans V1 tandis que les figures 16-18 représentent leurs formes correspondantes par l'inverse de l'application rétinocorticale. En faite, les solutions bifur-

Réseau	Nom	Planformes
carré	carré impair	$u(\phi) \cos x - u(\phi - \pi/2) \cos y$
	bonde impair	$u(\phi) \cos x$
rhombique	rombique impair	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot r) + u(\phi - \theta) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot r)$
	bonde impair	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot r)$
hexagonal	hexagone impair(0)	$u(\phi) \cos(\mathbf{k}_1 \cdot r) + u(\phi + \pi/3) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot r) + u(\phi - \pi/3) \cos(\mathbf{k}_3 \cdot r)$
	triangle (π)	$u(\phi) \sin(\mathbf{k}_1 \cdot r) + u(\phi + \pi/3) \sin(\mathbf{k}_2 \cdot r) - u(\phi - \pi/3) \sin(\mathbf{k}_3 \cdot r)$
	le quilt écossais	$u(\phi + \pi/3) \cos(\mathbf{k}_2 \cdot r) - u(\phi - \pi/3) \cos(\mathbf{k}_3 \cdot r)$

TABLE 10 – Les planformes impairs avec $u(-\phi) = -u(\phi)$, $k_3 = -(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$

quantés pour $u(\phi) \cong 1$ sont celles bifurquantes de l'étude fait en première partie (comme sans prendre compte de l'orientation).

6 Discussion et perspectives

Dans ce rapport on a traité un modèle mathématique avec bifurcation vérifié par l'activité des masses neuronales dans la couche V1 du cortex visuel. D'après la résolution du modèle dans la première partie, on est arrivé à des solutions qui sont compatibles aux images vues par des patients soumis à l'effet du drogue. Dans la deuxième partie, paragraphe 4, d'après la prise en compte de l'orientation des objets observés, on obtient de plus que les solutions obtenues en première partie, des nouvelles solutions qui décrivent un autre catégorie des formes géométriques définis à l'introduction.

D'autres généralisation sont possibles et pourraient conduire à des nouvelles solutions : par exemple la prise en compte de la sensibilité des neurones à la fréquence spatiale des objets [2], ou, en revenant au formalisme de Ermentrout-Cowan étudier les bifurcations de Hopf qui peuvent se produire dans certains conditions [8].

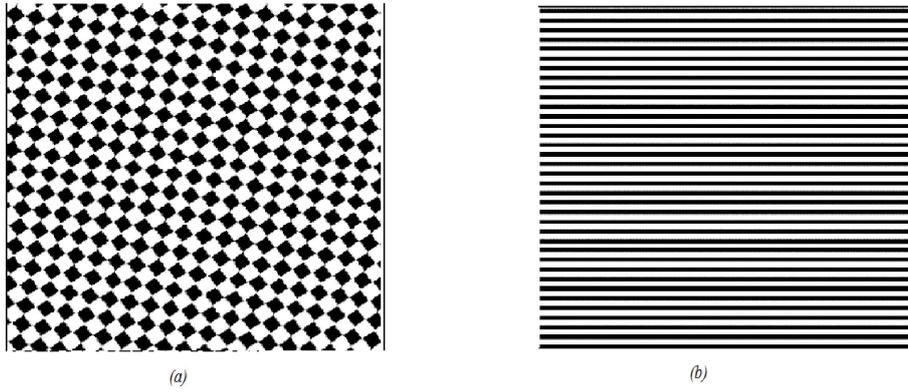


FIGURE 13 – Contours de planforms pour $u(\phi) \cong 1$, dans le cas du réseau carré : (a) carré, (b) bande

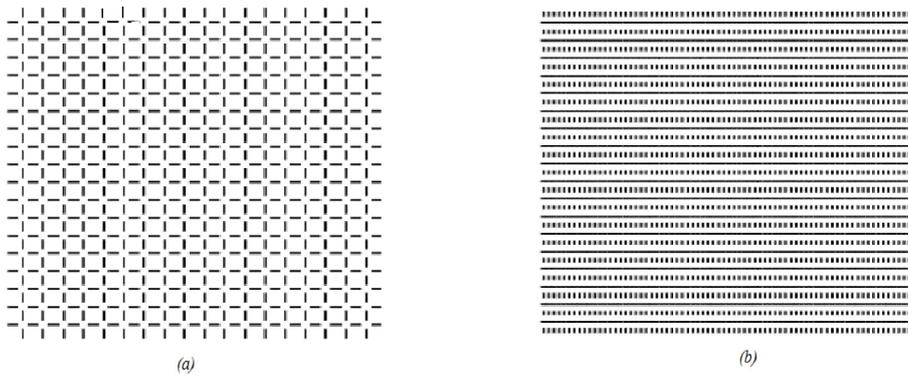


FIGURE 14 – Contours de planforms pour $u(\phi) \cong \cos(\phi)$, dans le cas du réseau carré : (a) carré, (b) bande

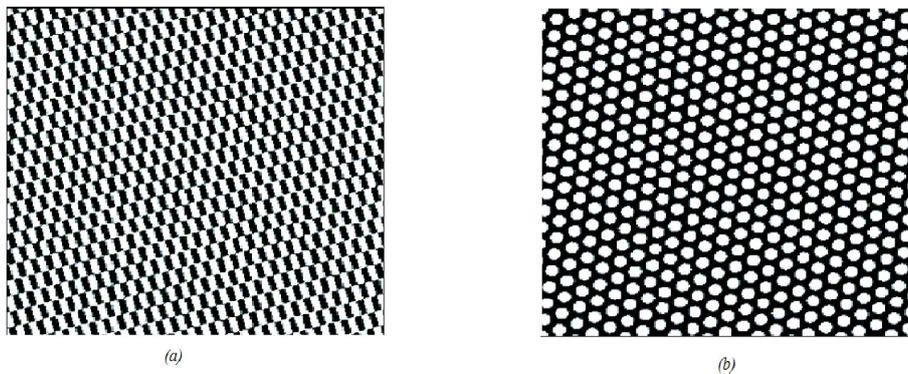
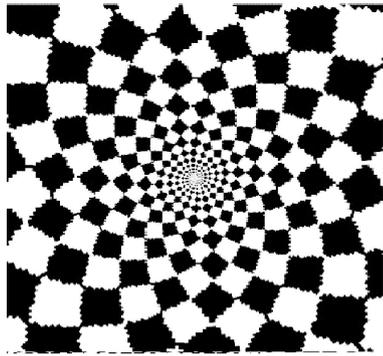
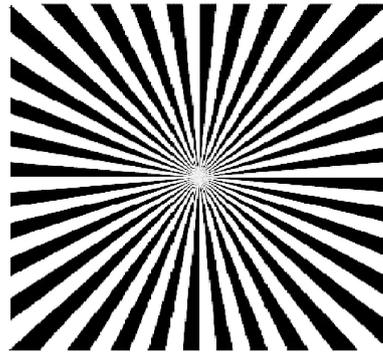


FIGURE 15 – contours de planforms pour $u(\phi) \cong \sin(\sin \phi)$, dans le cas du réseau carré : (a) carré, (b) bande

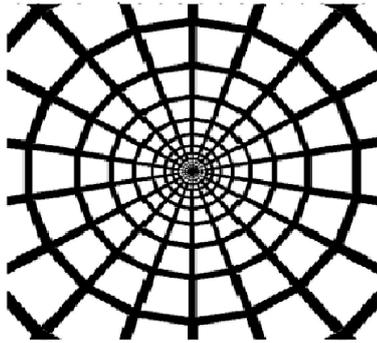


(a)

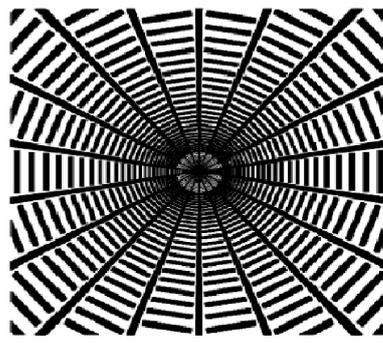


(b)

FIGURE 16 – L'action de l'inverse de l'application retinocorticale sur les contours pour $u(\phi) \cong 1$, dans le cas du réseau carré : (a) carré, (b) bande

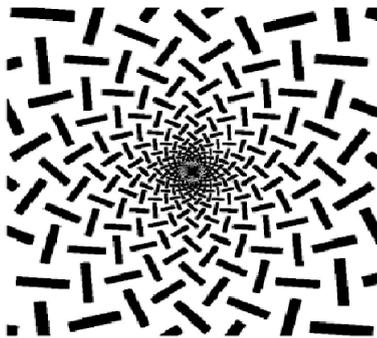


(a)

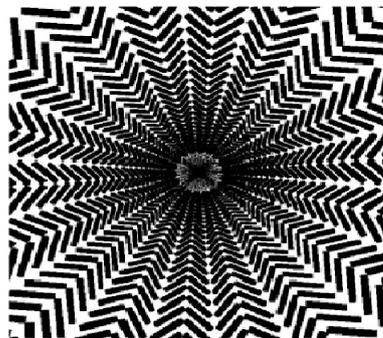


(b)

FIGURE 17 – L'action de l'inverse de l'application retinocorticale sur les contours pour $u(\phi) \cong \cos(\phi)$, dans le cas du réseau carré : (a) carré, (b) bande



(a)



(b)

FIGURE 18 – L'action de l'inverse de l'application retinocorticale sur les contours pour $u(\phi) \cong \sin(\phi)$, dans le cas du réseau carré : (a) carré, (b) bande

Références

- [1] Bosch Vivancos I., Chossat P. and Melbourne I. : New planforms in systems of partial differential equations with Euclidean symmetry. *Arch. Ration. Mech. Analysis* 131, 199-224, (1995).
- [2] Bressloff P. C. and Cowan J. D. : The functional geometry of local and horizontal connections in a model of V1. *Journal of physiology*, vol. 97, no2-3, pp. 221-236, (2003).
- [3] Bressloff P.C., Cowan J.D., Golubitsky M., Thomas P.J. and Wiener M.C. : Geometric visual hallucinations, Euclidean symmetry, and the functional architecture of striate cortex. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci.*356(1407) :299-330, (2001).
- [4] Bressloff P.C. , Cowan J.D., M. Golubitsky and Thomas P.J. : Scalar and Pseudoscalar Bifurcations with Application to Pattern Formation on the Visual Cortex. Institute of Physics Publishing, *Nonlinearity*, Volume 14, Number 4, 739-775, (2001).
- [5] Busano E. and Golubitsky M. : Bifurcation involving the hexagonal lattice and the planar Bénard problem, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*308,617-667, (1983). Institute of Physics Publishing, *Nonlinearity*, Volume 14, Number 4, 739-775, (2001).
- [6] Chossat P. and Lauterbach R. : *Methods in Equivariant Bifurcation and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, (1985).
- [7] Ermentrout G.B. and Cowan J.D. : A Mathematical Theory of Visual Hallucination Patterns. *Biol. Cyber.* 34, 137-150, (1979).
- [8] Ermentrout G. B. and Cowan J.D. : *Temporal Oscillations in Neuronal Nets*. Department of Biophysics and Theoretical Biology, The University of Chicago, 920 East 58th Street, 60637 Chicago, Illinois, USA, (1979).
- [9] Golubistky M., Stewart I. and Schaeffer D.G. : *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, World Scientific, Singapore, (2000).
- [10] Michel L. : Nonlinear group action, Smooth actions of compact Lie groups on manifolds. In : *Statistical Mechanics and Field Theory* (R.N. Sen and C. Weil, Eds.) Israel University Press, Jeurisalem, 133-150. (1972)
- [11] Sattinger D.H. : Group representation theory, bifurcation theory, and pattern formation. *J. Functional Analysis* 28, 58-101, (1978a).
- [12] Sattinger D.H. : *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory*. Lecture Notes in Mahtematics 762, Spinger-Verlag, Berlin, (1979).
- [13] Wilson H.R and Cowan J.D. : Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophys. J.* 12, 1-24, (1972).
- [14] Wilson H.R and Cowan J.D. : A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue. *Kybernetik* 13, 55-80, (1973).